TUYỂN TẬP

500 BẤT ĐẲNG THỨC CỔ ĐIỂN HAY

NGUYỄN ĐÌNH THI

★★★★★

PHÚ YÊN – XUÂN CANH DẦN 2010

Lời nói đầu.

Bất đẳng thức (BĐT) đang là vấn đề nóng trên hầu khắp các diễn đàn Toán trong và ngoài nước như: mathlinks.ro, math.vn, mathscope.org, mathvn.org, ddbdt.tk,…. Và dĩ nhiên có những BĐT không khó, thậm chí là bình thường, nhưng cũng không ít những BĐT khó, thâm chí rất khó đến nỗi vẫn chưa có lời giải (trong đó có một số đã giải và một số vẫn chưa). Chính vì thế mà xuất hiện rất nhiều bậc "cao nhân" cùng với những phương pháp mới, xem như là hiện đai "tối tân" nhất để có thể trị được những vấn đề khó này. Tuy nhiên mục đích của tác giả cuốn ebook này không phải là lôi các bạn vào những vấn đề khó đó, mà mục đích chính là tuyển tập những BĐT đẹp, hay (đặc biệt là bất đẳng thức 3 biến bởi tính hoán vị của nó), được tuyển chọn từ các cuộc thi toán các quốc gia, thi chọn đội tuyển thi toán quốc tế, thi chọn học sinh giỏi cấp tỉnh,…, các tạp chí toán như: Kvant, Crux,MathVn…; các cuộc thi toán BĐT trên các diễn đàn toán như: MIC, VIC, VICFJ,… cùng với những bài toán được phát triển từ những bài toán đó (làm chặt thêm hay sang tạo từ những cái đã có), các sách tham khảo như: Sáng tạo bất đẳng thức, Bất đẳng thức và những lời giải hay,… . Để từ đó rèn luyện kĩ năng giải một bài toán BĐT một cách nhanh nhạy, nói đơn giản là khi gặp một bài toán nào đó thì chỉ cần nhìn vào là biết ngay hướng giải quyết.

Tuyển tập này là cuốn tài liệu cuối cùng mà tôi viết nhân dịp năm mới Canh Dần 2010. Nếu có sai xót gì thì cũng là do lỗi của người biên tập, mong các bạn thông cảm và bỏ quá cho. Hi vọng tài liệu này sẽ là hành trang bổ ích cùng các bạn tham dự các cuộc thi học sinh giỏi cấp trường, tỉnh, quốc gia, quốc tế,…

Tác giả,

Nguyễn Đình Thi

500 BẤT ĐẲNG THỨC CỔ ĐIỂN HAY

Bài 1. Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

Bài 2. Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a^4 + b^4 + c^4 = 3$. Chứng minh rằng

a/

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3$$

b/

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 3 (Phạm Kim Hùng). Cho các số thực không âm a, b, c, d. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2+c^2+d^2} + \frac{b}{c^2+d^2+a^2} + \frac{c}{d^2+a^2+b^2} + \frac{d}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{4}{a+b+c+d}$$

Bài 4 (Phạm Kim Hùng, Vasile). Cho các số thực không âm a, b, c. Chứng minh rằng

a/

$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+ab} \geq 2$$

b/

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} + \sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}} \geq 2$$

Bài 5 (Nguyễn Đình Thi). Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}} + \sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+(c+a)^2}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+(a+b)^2}} > \sqrt{2}$$

Bài 6 (Võ Quốc Bá Cẩn). cho các số không âm a, b, c thỏa $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng

$$-4 \leq a^2b + b^2c + 4ca^2 - 5abc \leq 128$$

Bài 7 (IMO 2001). Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

Bài 8 (THTT). Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+3bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+3ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+3ab}} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 9. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

a/

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \leq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

b/

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \geq \frac{3(a+b+c)}{a^2+b^2+c^2}$$

Bài 10 (Võ Quốc Bá Cẩn). Cho các số dương a, b, c sao cho $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}\ge 4$$

Bài 11 (Cezar Lupu – Nguyễn Đình Thi). Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}\le\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\le\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}$$

Bài 12 (China TST 2006). Cho các số thực dương x,y,z sao cho các số thực $x+y+z=1$. Chứng minh

$$\frac{xy}{\sqrt{xy+yz}}+\frac{yz}{\sqrt{yz+zx}}+\frac{zx}{\sqrt{zx+xy}}\le\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Bài 13 (China 2005). Cho các số thực các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{a+b}}+\sqrt{\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+a}}\le\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Bài 14 (Iran 2008). Cho các số thực dương a,b,c sao cho các số thực $ab+bc+ca=1$. Chứng minh

$$\sqrt{a^3+a}+\sqrt{b^3+b}+\sqrt{c^3+c}\ge 2\sqrt{a+b+c}$$

Bài 15. Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+2bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+2ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+2ab}}\le\frac{a+b+c}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

Bài 16 (Jack Garfunkel). Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}\le\frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}$$

Bài 17 (Phạm Kim Hùng). Cho các số thực dương a,b,c sao cho $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{9-bc}+\frac{1}{9-ca}+\frac{1}{9-ab}\le\frac{3}{8}$$

Bài 18 (APMO 2004). Cho các số thực bất kì a,b,c. Chứng minh rằng rằng

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 3(a+b+c)^2$$

Bài 19 (THTT). Cho các số thực dương a,b. Chứng minh rằng rằng

$$(a+b)^2+\left(a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2\ge 8\left(1+\sqrt{2}\right)$$

Bài 20 (Vasile). Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

a/

$$\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}\ge 1+\sqrt{1+\sqrt{(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}}$$

b/

$$\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-2}\ge(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-5$$

Bài 21 (Nguyễn Đình Thi). Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}\ge 1+\sqrt[3]{5+\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^3}\right)}$$

Bài 22 (Vasile). Cho các số dương a,b,c. Biết rằng $a\le b\le c$ và $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Chứng minh

$$b \geq \frac{1}{a+c-1}$$

Bài 23. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8$$

Bài 24. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \leq 1$$

Bài 25. Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^2+1} + \frac{b^2}{c^2+1} + \frac{c^2}{a^2+1} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 26. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$(a^5-a^2+3)(b^5-b^2+3)(c^5-c^2+3) \geq (a+b+c)^3$$

Bài 27. Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \sqrt{\frac{(1-a)(1-b)}{1-c}} + \sqrt{\frac{(1-b)(1-c)}{1-a}} + \sqrt{\frac{(1-c)(1-a)}{1-b}}$$

Bài 28. Cho các số thực dương a, b, c. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{bc}{a^2+3bc} + \frac{ca}{b^2+3ca} + \frac{ab}{c^2+3ab}$$

Bài 29. Cho các số dương a, b, c có tích $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 4(a+b+c-1)$$

Bài 30 (Dự tuyển IMO 2001). Cho các số dương $x_1, x_2, .., x_n$. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2} < \sqrt{n}$$

Bài 31. Cho các số dương $x_1, x_2, .., x_n$ sao cho $x_1 x_2 \ldots . x_n = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \cdots + \frac{1}{n-1+x_n} \leq 1$$

Bài 32 (IMO 2000). Cho các số dương a, b, c sao cho $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1$$

Bài 33 (China 2005). Cho các số thực dương a, b, c sao cho $ab+bc+ca = \frac{1}{3}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2-bc+1} + \frac{1}{b^2-ca+1} + \frac{1}{c^2-ab+1} \leq 3$$

Bài 34. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\left|\frac{a^3-b^3}{a+b} + \frac{b^3-c^3}{b+c} + \frac{c^3-a^3}{c-a}\right| \leq \frac{(a-b)^2+(b+c)^2+(c-a)^2}{4}$$

Bài 35 (APMO 2007). Cho các số thực dương x, y, z sao cho $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}} + \frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}} + \frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}} \geq 1$$

Bài 36. Cho các số $x, y, z \in (-1; 1)$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)} + \frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geq 2$$

Bài 37 (Nga 2002). Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng
$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca$$

Bài 38. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng
$$\frac{2a^2}{2a^2 + (b+c)^2} + \frac{2b^2}{2b^2 + (c+a)^2} + \frac{2c^2}{2c^2 + (a+b)^2} \leq 1$$

Bài 39. Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y ta đều có
$$x^y + y^x > 1$$

Bài 40 (Võ Quốc Bá Cẩn). cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng
$$a^{b+c} + b^{c+a} + c^{a+b} \geq 1$$

Bài 41. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng
$$\sqrt{(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2)} \geq abc + \sqrt[3]{(a^3 + abc)(b^3 + abc)(c^3 + abc)}$$

Bài 42. Cho các số thực bất kì a, b, c. Chứng minh rằng
$$(a + b - c)^2(b + c - a)^2(c + a - b)^2 \geq (a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)$$

Bài 43. Cho các số thực dương a, b, c sao cho $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng
$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}$$

Bài 43 (Mĩ 1994). Cho các số dương x, y, z. Chứng minh rằng
$$x^x y^y z^z \geq (xyz)^{\frac{(x+y+z)}{3}}$$

Bài 44. Cho các số $x, y, z \geq 1$. Chứng minh rằng
$$x^{x^2+2yz} y^{y^2+2zx} z^{z^2+2xy} \geq (xyz)^{xy+yz+zx}$$

Bài 45. Cho các số dương x, y, z thỏa $xyz = 1$. Chứng minh rằng
$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}$$

Bài 46. Cho các số dương x, y, z. Chứng minh rằng
$$\frac{x}{x + \sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y + \sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{z}{z + \sqrt{(z+x)(z+y)}} \leq 1$$

Bài 47. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng
$$9(a^2 + bc)(b^2 + ca)(c^2 + ab) \leq 8(a^3 + b^3 + c^3)^2$$

Bài 48. Cho các số dương x, y, z sao cho $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng
$$2 \leq (1 - x^2)^2 + (1 - y^2)^2 + (1 - z^2)^2 \leq (1 + x)(1 + y)(1 + z)$$

Bài 49. Cho các số dương x, y, z sao cho $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng
$$x(1 - y^2)(1 - z^2) + y(1 - z^2)(1 - x^2) + z(1 - x^2)(1 - y^2) \leq \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

Bài 50. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{2ab}{b^2 + ca} + \frac{2bc}{c^2 + ab} + \frac{2ca}{a^2 + bc}$$

Bài 51. Cho các số thwucj dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\geq a+b+c$$

Bài 52. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)}\geq\frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

Bài 53. Cho các số dường a, b, c sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+a)(1+b)}+\frac{1}{(1+b)(1+c)}+\frac{1}{(1+c)(1+a)}\leq\frac{3}{2}$$

Bài 54. Cho các số dương a, b, c, d. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\leq\frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}$$

Bài 55. Cho các số thực a, b, c. Chứng minh rằng

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)\geq(ab+bc+ca)^3$$

Bài 56. Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2}\geq\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}\geq 1$$

Bài 57 (Phạm Kim Hùng). Cho các số thực không âm a, b, c sao cho không có 2 số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a+2b)^2}+\frac{1}{(b+2c)^2}+\frac{1}{(c+2a)^2}\geq\frac{1}{ab+bc+ca}$$

Bài 58. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{bc}{a(a+b)}+\frac{ca}{b(b+c)}\geq\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}$$

Bài 59. Cho các số dương a, b, c. Đặt

$$x=a+\frac{1}{b}, y=b+\frac{1}{c}, z=c+\frac{1}{a}$$

Chứng minh rằng $xy+yz+zx\geq 2(x+y+z)$

Bài 60. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$(a+b-c)^a(b+c-a)^b(c+a-b)^c\leq a^ab^bc^c$$

Bài 61. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x^3+y^3+z^3=3$. Chứng minh rằng

$$x^4y^4+y^4z^4+z^4x^4\leq 3$$

Bài 62. Cho các số dương a, b, x, y, z. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by}\geq\frac{3}{a+b}$$

Bài 63. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$3^{a+b+c}\geq\left(1+\frac{a+b}{c}\right)^c\left(1+\frac{b+c}{a}\right)^a\left(1+\frac{c+a}{b}\right)^b$$

Bài 64 (IMO). Cho các số thực cùng dấu a, b, c, d, e. Chứng minh rằng

$$(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)+(b-c)(b-d)(b-e)(b-a)+(c-d)(c-e)(c-a)(c-b)$$
$$+(d-e)(d-a)(d-b)(d-c)+(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)\geq 0$$

Bài 65. Cho các số dương a, b, c, x, y, z. Chứng minh rằng

$$\frac{a(y+z)}{b+c}+\frac{b(z+x)}{c+a}+\frac{c(x+y)}{a+b} \geq \sqrt{(x+y)(x+z)}+\sqrt{(y+z)(y+x)}+\sqrt{(z+x)(z+y)}-x-y-z$$

Bài 66. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}$$

Bài 67. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

a/

$$\frac{a^2-b^2}{b+c}+\frac{b^2-c^2}{c+a}+\frac{c^2-a^2}{a+b} \geq 0$$

b/

$$\frac{a^2-b^2}{b+c}+\frac{b^2-c^2}{c+a}+\frac{c^2-a^2}{a+b} \geq \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2(a+b+c)}$$

Bài 68. Cho các số dương a, b, c sao cho $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca} \leq \frac{27}{8}$$

Bài 69. Chứng minh rằng nếu $0<y \leq x<1$ thì

$$\frac{x}{y} \leq \frac{1+x-\sqrt{1-x^2}}{1+y-\sqrt{1-y^2}}$$

Bài 70. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 2\left(\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\right)$$

Bài 71. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}+\sqrt{b^4+b^2c^2+c^4}+\sqrt{c^4+c^2a^2+a^4} \geq a\sqrt{2a^2+bc}+b\sqrt{2b^2+ca}+c\sqrt{2c^2+ab}$$

Bài 72. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$$

Bài 73. Cho các số thực bất kì a, b, c. Chứng minh rằng

$$a(a+b)^3+b(b+c)^3+c(c+a)^3 \geq 0$$

Bài 74 (Phan Thành Nam). Cho các số thực a, b, c thỏa $a+b+c=0$. Chứng minh rằng

$$a(a-b)^3+b(b-c)^3+c(c-a)^3 \geq 0$$

Bài 75 (Phan Thành Nam). Cho các số thực a, b, c. Chứng minh rằng

$$a(a+b)(a^2+b^2)+b(b+c)(b^2+c^2)+c(c+a)(c^2+a^2) \geq 0$$

Bài 76 (Nguyễn Đình Thi). Cho các số thực a, b, c. Chứng minh rằng

$$a(a+b)(a^2+c^2)+b(b+c)(b^2+a^2)+c(c+a)(c^2+b^2) \geq 0$$

Bài 77 (Phan Thành Nam). Cho các số thực a, b, c sao cho $(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a(a-b)}{(a+b)^2}+\frac{b(b-c)}{(b+c)^2}+\frac{c(c-a)}{(c+a)^2} \geq -\frac{3}{8}$$

Bài 78. Cho các số thực không âm a, b, c. Chứng minh rằng

$$\left(1+\frac{4a}{b+c}\right)\left(1+\frac{4b}{c+a}\right)\left(1+\frac{4c}{a+b}\right) \geq 25$$

Bài 79. Cho các số $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}}$$

Bài 80 (VMO 1991). Cho các số thực $x \geq y \geq z > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y} \geq 2(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)$$

Bài 81 (Nguyễn Đức Toàn). Cho các số thực $x \geq y \geq z > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y} \geq x^2+y^2+z^2+\frac{[(x-y)(y-z)(z-x)]^2}{xyz(x+y+z)}$$

Bài 82. Cho các số thực không âm a, b, c sao cho $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{12}}+\sqrt{b+\frac{(c-a)^2}{12}}+\sqrt{c+\frac{(a-b)^2}{12}} \leq \sqrt{3}$$

Bài 83. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^4+b^4+c^4}+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \geq \sqrt{a^3b+b^3c+c^3a}+\sqrt{ab^3+bc^3+ca^3}$$

Bài 84. Cho các số dương $a, b, c \in [1; 2]$. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \leq 10$$

Bài 85 (Thái Nhật Phượng). Cho các số dương x, y, z thỏa $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2y^2}{x^2y^2+x^7+y^7}+\frac{y^2z^2}{y^2z^2+y^7+z^7}+\frac{z^2x^2}{z^2x^2+z^7+x^7} \leq 1$$

Bài 86 (Cezar Lupu). Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{a^2+bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2+ca}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2+ab}{(c+a)(c+b)}$$

Bài 87. Cho các số dương a, b, c thỏa $a+b+c=1=4abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3 \geq \frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}$$

Bài 88. Cho các số thực dương a, b, c thỏa $abc \leq 8$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{c^2-c+1} \geq 1$$

Bài 89 (China 2006). Cho các số dương $x_1, x_2, \dots x_n$ sao cho $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$. Chứng minh rằng

$$\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+x_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+x_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+x_n}}\right) \leq \frac{n^2}{\sqrt{n+1}}$$

Bài 90 (Romania 2006). Cho các số dương a, b, c thỏa $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq a^2+b^2+c^2$$

Bài 91. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$(a^2+2ab)^a(b^2+2ca)^b(c^2+2ca)^c \geq (a^2+b^2+c^2)^{a+b+c}$$

Bài 92 (Phạm Kim Hùng). Cho các số dương a, b, c sao cho $abc \geq 1$. Chứng minh rằng

$$a+b+c \ge \frac{1+a}{1+b}+\frac{1+b}{1+c}+\frac{1+c}{1+a}$$

Bài 93. Cho các số không âm a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2} \ge \frac{4}{a+b+c}$$

Bài 94 (Nguyễn Đình Thi). Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(b+c)^2+5c^2}+\frac{b}{(c+a)^2+5a^2}+\frac{c}{(a+b)^2+5b^2} \ge \frac{1}{a+b+c}$$

Bài 95. Cho các số x,y dương sao cho $x^9+y^9=2$. Chứng minh rằng

$$x^3+y^3 \ge 2xy$$

Bài 96 (Trần Quốc Anh). Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{2a+b}\right)^3+\left(\frac{b}{2b+c}\right)^3+\left(\frac{c}{2c+a}\right)^3 \ge \frac{1}{9}$$

Bài 97. Cho các số thực khác nhau đôi một a,b,c. Chứng minh rằng

$$\left|\frac{a+b}{a-b}\right|+\left|\frac{b+c}{b-c}\right|+\left|\frac{c+a}{c-a}\right| \ge 2$$

Bài 98 (Trần Quốc Luật, Nguyễn Đình Thi). Cho các số thực dương bất kì a,b,c,x,y,z và số nguyên dương k. Chứng minh rằng

a/

$$\sqrt{\frac{2x}{x+y}ab}+\sqrt{\frac{2y}{y+z}bc}+\sqrt{\frac{2z}{z+y}ca} \le a+b+c$$

b/

$$\sqrt[k+1]{\frac{2x}{x+y}a^kb}+\sqrt[k+1]{\frac{2y}{y+z}b^kc}+\sqrt[k+1]{\frac{2z}{z+y}c^ka} \le a+b+c$$

Bài 99 (Turkey National Olympiad 2008). *Cho* $a,b,c>0$ *sao cho* $a+b+c=1$. *Chứng minh*

$$\frac{a^2b^2}{c^3\left(a^2-ab+b^2\right)}+\frac{b^2c^2}{a^3\left(b^2-bc+c^2\right)}+\frac{c^2a^2}{b^3\left(c^2-ca+a^2\right)} \ge \frac{3}{ab+bc+ca}$$

Bài 100 (Nguyễn Đình Thi). Cho x,y,z là các số thực dương và k là số thực tùy ý. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{a^{k-1}b^{k-1}(a+b)}{c^k\left(a^k+b^k\right)}+\dfrac{b^{k-1}c^{k-1}(b+c)}{a^k\left(b^k+c^k\right)}+\dfrac{c^{k-1}a^{k-1}(c+a)}{b^k\left(c^k+a^k\right)} \ge \dfrac{3}{ab+bc+ca}$ với $k\ge 1 \vee k \le 0$

b) $\dfrac{a^{k-1}b^{k-1}(a+b)}{c^k\left(a^k+b^k\right)}+\dfrac{b^{k-1}c^{k-1}(b+c)}{a^k\left(b^k+c^k\right)}+\dfrac{c^{k-1}a^{k-1}(c+a)}{b^k\left(c^k+a^k\right)} \le \dfrac{1}{3abc}$ với $1 \ge k \ge 0$

Bài 101 (Nguyễn Đình Thi). Cho a,b,c là các số thực dương, chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $a+b+c+\dfrac{a-b}{1+ab}.\dfrac{b-c}{1+bc}.\dfrac{c-a}{1+ca} \ge 3\sqrt[3]{abc}$

b) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{a-b}{1+ab}.\dfrac{b-c}{1+bc}.\dfrac{c-a}{1+ca} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{abc}}$

Bài 102. Cho các số dương a,b,c. Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi $k \ge 1$

$$a^k+b^k+c^k \ge \frac{a^2\left(b^k+c^k\right)}{a^2+bc}+\frac{b^2\left(c^k+a^k\right)}{b^2+ca}+\frac{c^2\left(a^k+b^k\right)}{c^2+ab}$$

Bài 103 (Trần Quốc Anh). Cho các số dương a,b,c sao cho $abc=1$. Chứng minh

$$\frac{1}{(1+a)^2(b+c)}+\frac{1}{(1+b)^2(c+a)}+\frac{1}{(1+c)^2(a+b)} \le \frac{3}{8}$$

Bài 104 (Nguyễn Đình Thi). Cho $a,b,c>0$ và k không nhỏ hơn 2. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{ab}{(2k-2)a+(2k-1)b+2kc}+\frac{bc}{(2k-2)b+(2k-1)c+2ka}+\frac{ca}{(2k-2)c+(2k-1)a+2kb} \le \frac{a+b+c}{6k-3}$$

Bài 105 (Nguyễn Đình Thi). Cho các số thực dương x,y,z. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^5\sqrt{x^2+2y^2}}+\frac{1}{y^5\sqrt{y^2+2z^2}}+\frac{1}{z^5\sqrt{z^2+2x^2}} \ge \frac{\sqrt{3}}{x^2y^2z^2}$$

Bài 106 (Olympic 30/4). Cho các số thực dương a,b,x,y,z. Chứng minh rằng

$$P=\frac{x^2}{(ay+bz)(az+by)}+\frac{y^2}{(az+bx)(ax+bz)}+\frac{z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \ge \frac{3}{(a+b)^2}$$

Bài 107 (Nguyễn Đình Thi). Cho các số thực dương a,b,x,y,z. Chứng minh rằng

$$P=\frac{x^2}{(ax+by)(ay+bx)}+\frac{y^2}{(ay+bz)(az+by)}+\frac{z^2}{(az+bx)(ax+bz)} \ge \frac{3}{2(a^2+b^2)}$$

Bài 108 (International Zhautykov Olympiad 2006). Cho các số thực bất kì a,b,c,d sao cho $a+b+c+d=0$. Chứng minh

$$(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2+12 \ge 6(abc+bcd+cda+dab)$$

Bài 109 (Nguyễn Đình Thi). Cho a,b,c,d là các số không âm. Chứng minh

$$\left(2+\left(\frac{a+b}{a+c}\right)^2\right)\left(2+\left(\frac{c+d}{a+c}\right)^2\right)\left(2+\left(\frac{a+d}{b+d}\right)^2\right)\left(2+\left(\frac{b+c}{b+d}\right)^2\right) \ge 81$$

Bài 110 (Nguyễn Đình Thi). Cho các số thực không âm a,b,c. Chứng minh rằng

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b) \ge \frac{4abc(a^2-b^2)^2}{(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Bài 111. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác sao cho $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$a+b+c \ge abc+2$$

Bài 112 (Nguyễn Đình Thi). Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{2(a^4+b^4+c^4)}{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}+\frac{ab+bc+ca}{a^3+b^3+c^3} \ge 2$$

Bài 113 (Nguyễn Đình Thi). Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh:

$$\sqrt{\frac{a^2}{(b+c)^2+5c^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{(c+a)^2+5a^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{(a+b)^2+5b^2}} \ge 1$$

Bài 114 (Nguyễn Đình Thi). Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{b(a+b)}{(c+a)^2}+\frac{c(b+c)}{(a+b)^2}+\frac{a(c+a)}{(b+c)^2} \ge \frac{3}{2}$$

Bài 115 (Dương Đức Lâm). Cho các số thực không âm sao cho $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$P = a(b-c)^4 + b(c-a)^4 + c(a-b)^4 \le \frac{1}{12}$$

Bài 116. Cho các số thực dương x, y, z sao cho $xyz \ge xy + yz + zx$. Chứng minh bất đẳng thức

$$(xyz)^2 \ge 81\left(x\sqrt[3]{\frac{y}{z}} + y\sqrt[3]{\frac{z}{x}} + z\sqrt[3]{\frac{x}{y}}\right)$$

Bài 116 (Romania 2007). Cho các số thực dương a,b,c sao cho $\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \ge 1$

Chứng minh rằng $a+b+c \ge ab+bc+ca$

Bài 117. Cho các số thực dương a,b,c sao cho $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{1+ab} + \frac{c+a}{1+ca} + \frac{b+c}{1+bc} \le \frac{9}{2(a+b+c)}$$

Bài 118 (Poland 1992). Cho các số thực x,y,z sao cho $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} + \frac{z}{z^2+1} \le \frac{9}{10}$$

Bài 119 (Nguyễn Đình Thi). *Cho các số thực dương* a,b,c *sao cho*

$$\frac{1}{1+2ab} + \frac{1}{1+2bc} + \frac{1}{1+2ca} \ge 1$$

Chứng minh rằng $a+b+c \ge 3abc$

Bài 120 (Mathlinks Contest). Cho các số thực dương a,b,c sao cho. Chứng minh

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)} + \frac{1}{1+b^2(c+a)} + \frac{1}{1+c^2(a+b)} \le \frac{3}{1+2abc}$$

Bài 121 (Serbian National Olympiad 2008). Cho các số thực dương x,y,z sao cho $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{yz+x+\frac{1}{x}} + \frac{1}{zx+y+\frac{1}{y}} + \frac{1}{xy+z+\frac{1}{z}} \le \frac{27}{31}$$

Bài 122. Cho các số thực dương a,b,c sao cho $ab+bc+ca+abc=4$. Chứng minh rằng

$$3\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 \ge (a+2)(b+2)(c+2)$$

Bài 123. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} \le 3$$

Bài 124 (Nguyễn Đình Thi). Cho các số thực không âm a,b,c. Chứng minh

$$\frac{4a}{a+b} + \frac{4b}{b+c} + \frac{4c}{c+a} + \frac{ab^2+bc^2+ca^2+abc}{a^2b+b^2c+c^2a+abc} \ge 7$$

Bài 125 (UK TST 2005). Cho các số thực dương a,b,c sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a+3}{(a+1)^2} + \frac{b+3}{(b+1)^2} + \frac{c+3}{(c+1)^2} \ge 3$$

Bài 126. Cho các số thực không âm a,b,c. Chứng minh bất đẳng thức

$$4(a+b+c)^3 \geq 27\left(ab^2+bc^2+ca^2+abc\right)$$

Bài 127. Cho các số thực không âm a,b,c. Chứng minh bất đẳng thức

$$a^3+b^3+c^3+2(a^2b+b^2c+c^2a) \geq 3(ab^2+bc^2+ca^2)$$

Bài 127. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right) \geq \left(ab+bc+ca\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Bài 128. Cho các số thực không âm a,b,c sao cho $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh

$$ab^2+bc^2+ca^2 \leq 2+abc$$

Bài 129 (Phan Thành Nam). Cho các số thực không âm a,b,c thỏa $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh

$$(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a) \leq \frac{1}{4}$$

Bài 130. Cho các số thực không âm a,b,c. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{3abc}{2\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)} \geq 2$$

Bài 131 (Vasile). Cho các số thực bất kì a,b,c. Chứng minh rằng

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \geq 3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)$$

Bài 132. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2} \geq a+b+c$$

Bài 133. Cho $a,b,c \geq 0$. Chứng minh

$$\frac{a^2(b+c)}{b^2+c^2}+\frac{b^2(c+a)}{c^2+a^2}+\frac{c^2(a+b)}{a^2+b^2} \geq a+b+c$$

Bài 134. Cho các số dương a,b,c. Chứng minh

$$\frac{a\left(b^2+c^2\right)}{b+c}+\frac{b\left(c^2+a^2\right)}{c+a}+\frac{c\left(a^2+b^2\right)}{a+b} \leq a^2+b^2+c^2$$

Bài 135. Cho các số thực không âm a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^4}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^4}{a^2-ab+b^2} \geq a^2+b^2+c^2$$

Bài 136. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh

$$\frac{a^2(b+c)^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2(c+a)^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2(a+b)^2}{a^2+b^2} \geq 2\left(ab+bc+ca\right)$$

Bài 137. Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\left(b+\frac{1}{c}-1\right)+\left(b+\frac{1}{c}-1\right)\left(c+\frac{1}{a}-1\right)+\left(c+\frac{1}{a}-1\right)\left(a+\frac{1}{b}-1\right) \geq 3$$

Bài 138. Cho các số thực dương a,b,c sao cho $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$(a^2-a+1)(b^2-b+1)(c^2-c+1) \geq 1$$

Bài 139 (Nguyễn Đình Thi). Cho các số thực bất kì a, b, c thỏa mãn
$$\frac{1}{a^2+8}+\frac{1}{b^2+8}+\frac{1}{c^2+8}=\frac{1}{3}$$
Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $a+b+c$

Bài 140. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{6abc}{ab^2+bc^2+ca^2}\ge 5$$

Bài 141. Cho các số thực bất kì a, b, c. Chứng minh rằng
$$(3+a^2)(3+b^2)(3+c^2)\ge 4(a+b+c+1)^2$$

Bài 142. Cho các số thực dương x, y, z sao cho $x+y+z+1=4xyz$. Chứng minh
$$xy+yz+zx\ge x+y+z$$

Bài 143 (VMO 1996). Cho các số thực không âm a, b, c sao cho $ab+bc+ca+abc=4$. Chứng minh
$$a+b+c\ge ab+bc+ca$$

Bài 144. Cho các số thực dương a, b, c sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{ab+bc+ca+1}\ge 1$$

Bài 145 (VMO 2006). Cho các số thực dương a, b, c sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3\ge 2(a+b+c)$$

Bài 146 (IMO 2008). Cho x, y, z là các số thực khác 1 và thoả mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng
$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\ge 1$$

Bài 147 (Kvant). Cho a,b,c là các số thực phân biệt. Chứng minh
$$\left(\frac{a}{a-b}+1\right)^2+\left(\frac{b}{b-c}+1\right)^2+\left(\frac{c}{c-a}+1\right)^2\ge 5$$

Bài 148 (Nguyễn Đình Thi). Cho x, y, z là các số thực khác 1 và thoả mãn $xyz=1$, và số thực bất kì m. Chứng minh rằng ta luôn có bất đẳng thức
$$\left(\frac{x+m}{x-1}\right)^2+\left(\frac{y+m}{y-1}\right)^2+\left(\frac{z+m}{z-1}\right)^2\ge 1$$

Bài 149 (Trần Nam Dũng). Cho k là một số thực thuộc khoảng $[-1;2]$ và cho a,b,c là ba số thực đôi một khác nhau. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức sau
$$\left(a^2+b^2+c^2+k(ab+bc+ca)\right)\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right)\ge\frac{9(2-k)}{4}$$

Bài 150 (Nguyễn Đình Thi). Cho các số thực a,b,c sao cho $abc=1$. Chứng minh
$$\frac{a+3}{(a-1)^2}+\frac{b+3}{(b-1)^2}+\frac{c+3}{(c-1)^2}\ge\frac{47}{16}$$

Bài 151 (Nguyễn Đình Thi). Cho các số thực phân biệt a,b,c và số thực bất kì $k\in[0;1]$. Chứng minh
$$\frac{a(a+kb)}{(a-b)^2}+\frac{b(b+kc)}{(b-c)^2}+\frac{c(c+ka)}{(c-a)^2}\ge\frac{7}{8}$$

Bài 152 (Nguyễn Đình Thi). Cho các số thực a,b,c sao cho $a+b+c=0$. Chứng minh

$$\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}\le\frac{-15}{4}$$

Bài 153. Cho a,b,c là các số thực. Chứng minh

$$\left(\frac{a-b}{b-c}\right)^2+\left(\frac{b-c}{c-a}\right)^2+\left(\frac{c-a}{a-b}\right)^2\ge 5$$

Bài 154 (Phạm Kim Hùng). Cho các số thực tuỳ ý a,b,c. Chứng minh:

$$\frac{1}{(2a-b)^2}+\frac{1}{(2b-c)^2}+\frac{1}{(2c-a)^2}\ge\frac{11}{7\left(a^2+b^2+c^2\right)}$$

Bài 155. Cho các số thực phân biệt a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{1+a^2b^2}{(a-b)^2}+\frac{1+b^2c^2}{(b-c)^2}+\frac{1+c^2a^2}{(c-a)^2}\ge\frac{3}{2}$$

Bài 156 (Nguyễn Đình Thi). Cho các số thực không âm a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(2a-b)^2}+\frac{1}{(2b-c)^2}+\frac{1}{(2c-a)^2}\right)$$

Bài 157 (Dương Đức Lâm). Cho các số $a,b,c\in[0;2]$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\left|\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right|\ge\frac{3}{2}$$

Bài 158 (Võ Quốc Bá Cẩn). Cho $x,y\in\mathbb{R};(x+y\ne 0)$. Chứng minh

$$x^2+y^2+\left(\frac{1+xy}{x+y}\right)^2\ge 2$$

Bài 159. Cho các số thực x,y,z sao cho $x+y+z=0$. Chứng minh

$$\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}{\left(x^3+y^3+z^3\right)^2}\ge 6$$

Bài 160 (VMO 2008). Cho các số thực không âm a,b,c. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\ge\frac{4}{ab+bc+ca}$$

Bài 161. Cho các số thực không âm phân biệt a,b,c. Chứng minh rằng

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right)\ge\frac{11+5\sqrt{5}}{2}$$

Bài 162 (Nguyễn Đình Thi). Cho các số thực không âm a,b,c. Chứng minh

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}\ge\frac{4}{a+b+c}$$

Bài 163 (Trần Quốc Anh). Chứng minh rằng với mọi số thực a,b,c ta có

$$\frac{(a+b)^2(a+c)^2}{\left(b^2-c^2\right)^2}+\frac{(b+c)^2(c+a)^2}{\left(c^2-a^2\right)^2}+\frac{(c+a)^2(c+b)^2}{\left(b^2-c^2\right)^2}\geq 2$$

Bài 164 (Brazilian Math Olympiads). Cho các số thực x,y,z sao cho $x+y+z=xy+yz+zx$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}\geq\frac{-1}{2}$$

Bài 165 (Nguyễn Đình Thi). Cho các số thực bất kì a,b,c sao cho $ab+bc+ca=-1$ hoặc $a+b+c=-abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2}\geq\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\geq\frac{-1}{2}$$

Bài 166 (Nguyễn Đình Thi). Cho các số thực không âm a,b,c sao cho $a+b+c=2$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)}}+\frac{1}{\sqrt{(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)}}+\frac{1}{\sqrt{(c^2-ca+a^2)(a^2-ab+b^2)}}\geq 3$$

Bài 167. Cho $x,y>0$. Chứng minh rằng

$$x^x+y^y\geq x^y+y^x$$

Bài 168. Cho các số thực dương a,b,c sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^3+1}+\frac{b}{b^3+1}+\frac{c}{c^3+1}\leq\frac{3}{2}$$

Bài 169. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có

$$a^nb(a-b)+b^nc(b-c)+c^na(c-a)\geq 0$$

Bài 170. Cho các số không âm sao cho không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{b^2+c^2}{a^2+bc}+\frac{c^2+a^2}{b^2+ca}+\frac{a^2+b^2}{c^2+ab}\geq\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$$

Bài 171 (Dương Đức Lâm). Cho các số thực không âm a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{b^2+bc+c^2}+\frac{1}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{5}{3(ab+bc+ca)}+\frac{4}{3(a^2+b^2+c^2)}$$

Bài 172. Cho các số thực dương a,b,c sao cho $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$. Chứng minh

$$8(a^2+b^2+c^2)\geq 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

Bài 173. Cho các số thực dương x,y,z. Chứng minh

$$\frac{x^2}{y(x^2+xy+y^2)}+\frac{y^2}{z(y^2+yz+z^2)}+\frac{z^2}{x(z^2+zx+x^2)}\geq\frac{3}{x+y+z}$$

Bài 174 (Chọn đội tuyển Việt Nam 2009). Cho các số thực bất kì a,b,c. Hãy tìm tất cả các số thực k để bất đẳng thức sau đúng

$$\left(k+\frac{a}{b+c}\right)\left(k+\frac{b}{c+a}\right)\left(k+\frac{c}{a+b}\right)\geq\left(k+\frac{1}{2}\right)^3$$

Bài 175. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a,b,c,x,y,z, bất đẳng thức sau được thỏa mãn

$$\frac{ax}{a+x}+\frac{by}{b+y}+\frac{cz}{c+z}\leq\frac{(a+b+c)(x+y+z)}{a+b+c+x+y+z}$$

Bài 176. cho các số thực bất kì a, b, c sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng
$$\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 177. Cho các số thực dương x, y, z. Chứng minh rằng
$$\frac{x^7 z}{x^5 y^2 z + 2y^6} + \frac{y^7 z^6}{y^5 z^4 + 2x} + \frac{1}{z^2 x^2 + 2x^6 y z^7} \geq 1$$

Bài 178. Cho các số thực a, b, c. chứng minh
$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right) \geq \left(ab+bc+ca-1\right)^2$$

Bài 179. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Chứng minh
$$a+b+c \geq \frac{3}{a+b+c} + \frac{2}{abc}$$

Bài 180. Cho các số nguyên a, b, c khác 0 sao cho $\begin{cases} \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \in \mathbb{Z} \\ \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} \in \mathbb{Z} \end{cases}$. Chứng minh
$$\frac{3a^4}{b^2} + \frac{2b^4}{c^2} + \frac{c^4}{a^2} - 4|a| - 3|b| - 2|c| \geq 0$$

Bài 181. Cho a, b, c, x, y, z là các số thực thay đổi thỏa mãn $(x+y)c - (a+b)z = \sqrt{6}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của
$$F = a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz$$

Bài 182. Cho các số dương a, b, c. chứng minh bất đẳng thức
$$\frac{(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(b-c-a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(c-a-b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \geq \frac{1}{2}$$

Bài 183. Cho các số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thỏa mãn $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$. Chứng minh rằng
$$\sqrt{a_1^2+1} + \sqrt{a_2^2+1} + \ldots + \sqrt{a_n^2+1} \leq \sqrt{2}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

Bài 184 (APMO). Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh
$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

Bài 185 (Nguyễn Đình Thi). Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a+b+c \geq 3$. Chứng minh rằng
$$\frac{a^3-a^2}{(a+b)^2} + \frac{b^3-b^2}{(b+c)^2} + \frac{c^3-c^2}{(c+a)^2} \geq 0$$

Bài 186 (Nguyễn Đình Thi). Cho các số thực không âm a, b, c sao cho $ab+bc+ca = 1$. Chứng minh
$$\frac{3ab+1}{a+b} + \frac{3bc+1}{b+c} + \frac{3ca+1}{c+a} \geq 4$$

Bài 187 (Nguyễn Đình Thi). Cho các số thực không âm a, b, c sao cho $a^3+b^3+c^3 = 2$. Chứng minh
$$P = \frac{a^3}{b^2-bc+c^2} + \frac{b^3}{c^2-ca+a^2} + \frac{c^3}{a^2-ab+b^2} \geq 4$$

Bài 188. (Cao Minh Quang - THTT). Cho các số dương a, b, c sao cho $a+b+c=6$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{b^3+1}}+\frac{b}{\sqrt{c^3+1}}+\frac{c}{\sqrt{a^3+1}} \geq 2$$

Bài 189. (Lê Xuân Đại - THTT). Xét các số thực dương a, b, c, x, y, z thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} cy+bz=a \\ az+cx=b \\ bx+ay=c \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+1}+\frac{z^2}{z+1}$$

Bài 190. (Lê Xuân Đại - THTT). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a \leq b \leq c$ và $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Chứng minh rằng

$$ab^2c^3 \geq 1$$

Bài 191. (Lê Xuân Đại - THTT). Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{ab+bc}}+\frac{1}{\sqrt{bc+ca}}+\frac{1}{\sqrt{ca+ab}} \geq \frac{1}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+ca}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ab}}$$

Bài 192. (Trịnh Minh Tuấn - THTT). Cho các số $a, b, c \in [1; 2]$. Chứng minh bất đẳng thức

$$(3a+2b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \leq \frac{45}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 193. (Nguyễn Mạnh Tuấn – THTT). Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq \sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2-ca+a^2}$$

Bài 194. (Hoàng Ngọc Minh – THTT). Cho các số thực không nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng

$$\left(a-\frac{1}{b}\right)\left(b-\frac{1}{c}\right)\left(c-\frac{1}{a}\right) \geq \left(a-\frac{1}{a}\right)\left(b-\frac{1}{b}\right)\left(c-\frac{1}{c}\right)$$

Bài 195. (Lê Văn Lục – THTT). Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $4(a+b+c)=9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)^b\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)^c\left(c+\sqrt{c^2+1}\right)^a$$

Bài 196. (Võ Quốc Bá Cẩn – THTT). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{8c^3+1}}+\frac{b}{\sqrt{8c^3+1}}+\frac{c}{\sqrt{8a^3+1}} \geq 1$$

Bài 197. (Trần Tuấn Anh – THTT). Cho các số thực không âm có tổng băng 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$P=a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$$

Bài 198 (Áo 1971). Cho các số thực dương a, b, c, x, y, z sao cho $a \leq b \leq c$. Chứng minh rằng

$$\frac{(a+c)^2}{4ac}(x+y+z)^2 \geq (ax+by+cz)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)$$

Bài 199. Cho các số thực a, b, c thỏa $abc > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le \frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}$$

Bài 200 (Tạp chí Crux Math). Cho các số dương x, y, z. Chứng minh rằng

$$\frac{2x^2(y+z)}{(x+y)(x+z)}+\frac{2y^2(z+x)}{(y+z)(y+x)}+\frac{2z^2(x+y)}{(z+x)(z+y)} \le x+y+z$$

Bài 201 (Tạp chí Crux Math). Cho các số dương x, y, z. Chứng minh rằng

$$\frac{x+y+z}{3\sqrt{3}} \ge \frac{xy+yz+zx}{\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+zx+x^2}}$$

Bài 202 (Tạp chí Crux Math). Cho các số dương x, y, z. Chứng minh rằng

$$\frac{xyz\left(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)} \le \frac{3+\sqrt{3}}{9}$$

Bài 203 (Tạp chí Crux Math). Tìm giá trị lớn nhất của

$$f(a,b,c) = \left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right|$$

với a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác không tù.

Bài 204 (Tạp chí Crux Math). Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác và x, y, z là các số thực. chứng minh rằng

$$(x+y+z)\left(\frac{xc^2}{a^2}+\frac{ya^2}{b^2}+\frac{zb^2}{c^2}\right) \ge \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1^2}{b}+\frac{1}{c^2}\right)(a^2yz+b^2zx+c^2xy)$$

Bài 205 (Tạp chí Crux Math). Cho a, b, c là các số không âm sao cho $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$ab+bc+ca \le a^3+b^3+c^3+6abc \le a^2+b^2+c^2 \le 2(a^3+b^3+c^3)+3abc$$

Bài 206 (Tạp chí Crux Math). Cho các số không âm x, y, z. Chứng minh rằng

$$(xy+yz+zx)^2(x+y+z) \ge 9xyz(x^2+y^2+z^2)$$

Bài 207 (Tạp chí Crux Math). Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z ta luôn có

$$(x^2+y^2+z^2)^2-(x^3+y^3+z^3)^2-(x^2y+y^2z+z^2x)^2-(xy^2+yz^2+zx^2)^2 \ge 0$$

Bài 208 (Tạp chí Crux Math). Cho các số thực dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ $(n \ge 2)$ sao cho $x_1+x_2+\cdots+x_n = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \ge \frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}$$

Bài 209 (Tạp chí Crux Math). Cho các số dương x, y, z. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{\sqrt{x+y}}+\frac{y}{\sqrt{y+z}}+\frac{z}{\sqrt{z+x}} \ge \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{2}}$$

Bài 210 (Tạp chí Crux Math). Cho các số $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+zx+x^2} \ge 3\sqrt{xy+yz+zx}$$

Bài 211 (Tạp chí Crux Math). Cho $0 < x, y, z < 1$, và đặt $u = z(1-y), v = x(1-z), w = y(1-x)$. Chứng minh rằng

$$(1-u-v-w)\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}\right)\geq 3$$

Bài 212 (Tạp chí Crux Math). Cho các số không âm x, y, z sao cho $x^4+y^4+z^4=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\frac{x^3}{1-x^8}+\frac{y^3}{1-y^8}+\frac{z^3}{1-z^8}$$

Bài 213 (Tạp chí Crux Math). Chứng minh rằng với mọi số $x\geq y\geq 1$ ta có

$$\frac{x}{\sqrt{x+y}}+\frac{y}{\sqrt{y+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\geq \frac{y}{\sqrt{x+y}}+\frac{x}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{y+1}}$$

Bài 214 (Tạp chí Crux Math). Cho các số thực dương a, b, c, d sao cho $a+b+c+d=2$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{(a^2+1)^2}+\frac{b^2}{(b^2+1)^2}+\frac{c^2}{(c^2+1)^2}+\frac{d^2}{(d^2+1)^2}\leq \frac{16}{25}$$

Bài 215 (Tạp chí Crux Math). Chứng minh rằng

$$\frac{v+w}{u}.\frac{bc}{s-a}+\frac{w+u}{v}.\frac{ca}{s-b}+\frac{u+v}{w}.\frac{ab}{s-c}\geq 4(a+b+c)$$

với a, b, c, s là độ dài 3 cạnh và nữa chu vi tam giác và u, v, w là các số dương bất kì.

Bài 216 (Tạp chí Crux Math). Cho các số không âm x, y, z sao cho $xy+yz+zx=1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)$$

Bài 217 (Tạp chí Crux Math). Cho các số dương x, y, z. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}}+\frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}}\leq 1$$

Bài 218 (Tạp chí Crux Math). Cho các số dương a, b, c, x, y, z. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c}(y+z)+\frac{b}{c+a}(z+x)+\frac{c}{a+b}(x+y)\geq \frac{3(xy+yz+zx)}{x+y+z}$$

Bài 219 (Tạp chí Crux Math). Cho các số thực a, b, c, x, y, z. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\sqrt{(1-ax)^2+(ay)^2+(az)^2}+\sqrt{(1-by)^2+(bz)^2+(bx)^2}+\sqrt{(1-cz)^2+(cx)^2+(cy)^2}$$

Bài 220 (Tạp chí Crux Math). Cho các số thực x, y. Chứng minh rằng

$$x^4+y^4+(x^2+1)(y^2+1)\geq x^3(1+y)+y^3(1+x)+x+y$$

Bài 221 (Tạp chí Crux Math). Cho $a<b<c<0$ và $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{4}{c^2}+\frac{1}{(a-b)b}+\frac{1}{(b-c)c}\geq \frac{4}{3}$$

Bài 222 (Tạp chí Crux Math). Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a(3a-b)}{c(a+b)}+\frac{b(3b-c)}{a(b+c)}+\frac{c(3c-a)}{b(c+a)}\leq \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$$

Bài 223 (Tạp chí Crux Math). Cho các số không âm a, b, c. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}\ge\sqrt{6(a+b+c)}$$

Bài 224 (Tạp chí Crux Math). Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng
$$3\max\left\{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a};\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right\}\ge(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Bài 225 (Tạp chí Crux Math). Cho các số $a,b,c\ge 1$. Chứng minh rằng
$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}\le\sqrt{c(ab+1)}$$

Bài 226 (Tạp chí Crux Math). Cho $a>0$ và $x>y>z$. Chứng minh rằng
$$a^x(y-z)+a^y(z-x)+a^z(x-y)\ge 0$$

Bài 227 (Tạp chí Crux Math). Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng
$$\frac{a+b+c}{3}\le\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2}{abc}}$$

Bài 228 (Tạp chí Crux Math). Cho các số dương $a_1,\dots,a_n;b_1,\dots,b_n$. Chứng minh rằng
$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b\right)\ge\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{a_i+b_i}\right)$$

Bài 229 (Tạp chí Crux Math). Cho các số $a_1,\dots,a_n>0$ và $n\in\mathbb{N}$. Chứng minh rằng
$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)}\ge\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_k}+\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}b_k}$$

Bài 230 (Tạp chí Crux Math). Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng
$$(b-c)^2\left(\frac{2}{bc}-\frac{1}{a^2}\right)+(c-a)^2\left(\frac{2}{ca}-\frac{1}{b^2}\right)+(a-b)^2\left(\frac{2}{ab}-\frac{1}{c^2}\right)\ge 0$$

Bài 231 (Tạp chí Crux Math). Cho các số không âm x,y,z. Chứng minh rằng
$$[(x+y)(y+z)(z+x)]^2\ge xyz(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)$$

Bài 232 (Tạp chí Crux Math). Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\ge\frac{3}{1+abc}$$

Bài 233 (Tạp chí Crux Math). Cho các số dương x,y,z. Chứng minh rằng
$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}\right)\ge\frac{9}{1+xyz}$$

Bài 234 (Tạp chí Crux Math). Cho các số $a,b,c>0$ và $x\ge\frac{a+b+c}{3\sqrt{3}}-1$. Chứng minh rằng
$$\frac{(b+cx)^2}{a}+\frac{(c+ax)^2}{b}+\frac{(a+bx)^2}{c}\ge abc$$

Bài 235 (Tạp chí Crux Math). Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}\geq\frac{3\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}{a+b+c}$$

Bài 236 (Tạp chí Crux Math). Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Bài 237 (Tạp chí Crux Math). Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{ab+c^2}{a+b}+\frac{bc+c^2}{b+c}+\frac{ca+b^2}{c+a}\geq a+b+c$$

Bài 238 (Tạp chí Crux Math). Cho các số $x, y, z \geq 0$ sao cho $x^2+y^2+z^2=1$. Chứng minh rằng

$$1\leq\frac{x}{1-yz}+\frac{y}{1-zx}+\frac{z}{1-xy}\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Bài 239 (Tạp chí Crux Math). Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}+\frac{9(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}\geq 33$$

Bài 240 (Tạp chí Crux Math). Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{(1-b)(1-bc)}{b(1+a)}+\frac{(1-c)(1-ca)}{c(1+b)}+\frac{(1-a)(1-ab)}{a(1+c)}\geq 0$$

Bài 241 (Tạp chí Crux Math). Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{a}}{b+c}+\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{b}}{c+a}+\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{c}}{a+b}\geq\frac{9+3\sqrt{3}}{2\sqrt{a+b+c}}$$

Bài 242 (Tạp chí Crux Math). Cho các số dương $x_1, \dots, x_n$. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1x_2+x_2^2}}+\frac{x_2}{\sqrt{x_2x_3+x_3^2}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{x_nx_1+x_1^2}}\geq\frac{n}{\sqrt{2}}$$

Bài 243 (Tạp chí Crux Math). Cho các số không âm x, y, z sao cho $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$3\leq\frac{1}{1-xy}+\frac{1}{1-yz}+\frac{1}{1-zx}\leq\frac{27}{8}$$

Bài 244 (Tạp chí Crux Math). Cho các số không âm x, y, z sao cho $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{27}{8}\leq\frac{1}{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{y+z}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{z+x}{2}\right)^2}\leq\frac{11}{3}$$

Bài 245 (Tạp chí Crux Math). Cho các số dương a, b, c sao cho $a+b+c=abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{c^2}}$$

Bài 246 (Tạp chí Crux Math). Cho a, b, c là 3 cạnh tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{3(a^4+b^4+c^4)}{a^2+b^2+c^2}+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\geq 2$$

Bài 247 (Tạp chí Crux Math). Cho các số không âm x, y sao cho không có 2 số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{x^4+y^4}{(x+y)^4}+\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\geq\frac{5}{8}$$

Bài 248 (Tạp chí Crux Math). Chứng minh rằng với các số thực x, y, z ta luôn có

$$(x^3+y^3+z^3)^2+3(xyz)^2\geq 4(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3)$$

Bài 249 (Tạp chí Crux Math). Cho các số dương x, y, z sao cho $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=4+\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}$. Chứng minh rằng

$$(1-x)(1-y)(1-z)\leq\frac{1}{64}$$

Bài 250 (Tạp chí Crux Math). Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác không tù. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+b^2-c^2}.\sqrt{a^2-b^2+c^2}+\sqrt{-a^2+b^2+c^2}.\sqrt{a^2+b^2-c^2}+\sqrt{-a^2+b^2+c^2}.\sqrt{a^2-b^2+c^2}\leq ab+bc+ca$$

Bài 251 (Tạp chí Crux Math). Cho các số dương a, b, c sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng

$$ab^2+bc^2+ca^2\geq ab+bc+ca$$

Bài 252 (Tạp chí Crux Math). Cho các số $x, y\geq 0$. Và $x^2+y^3\geq x^3+y^4$. Chứng minh rằng

$$x^3+y^3\leq 2$$

Bài 253 (Tạp chí Crux Math). Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-27\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)^{-2}\geq\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\right]$$

Bài 254 (Tạp chí Crux Math). Cho các số dương $x_1, \dots, x_n$ $(n\geq 2)$. Chứng minh rằng

$$(x_1^2+\cdots+x_n^2)\left(\frac{1}{x_1^2+x_1x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n^2+x_nx_1}\right)\geq\frac{n^2}{2}$$

Bài 255 (Tạp chí Crux Math). Cho cá số dương x, y, z sao cho $x^2+y^2+z^2=1$. Chứng minh rằng

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-2(x+y+z)\geq 4\sqrt{3}\geq\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+(x+y+z)$$

Bài 255 (Tạp chí Crux Math). Cho các số dương a, b, c và các số nguyên m, n sao cho $m\geq n$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^m}{b^m+c^m}+\frac{b^m}{c^m+a^m}+\frac{c^m}{a^m+b^m}\geq\frac{a^n}{b^n+c^n}+\frac{b^n}{c^n+a^n}+\frac{c^n}{a^n+b^n}$$

Bài 256 (Tạp chí Crux Math). Cho các số thực bất kì a, b, c. Chứng minh rằng

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)\geq(ab+bc+ca)^3$$

Bài 257 (Tạp chí Mĩ). Cho các số dương a, b, c sao cho $abc\geq 2^9$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}+\frac{1}{\sqrt{1+c}}\geq\frac{3}{\sqrt{1+\sqrt[3]{abc}}}$$

Bài 258 (The Mathematical Gazette). Cho các số $0<a, b, c, d<1$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{\frac{c+d}{2}}+\left(\frac{b+c}{2}\right)^{\frac{d+a}{2}}+\left(\frac{c+d}{2}\right)^{\frac{a+b}{2}}+\left(\frac{d+a}{2}\right)^{\frac{b+c}{2}}>2$$

Bài 259. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^5+b^5+a^2+b^2}{(a+b)(a^2+b^2)+1}+\frac{b^5+c^5+b^2+c^2}{(b+c)(b^2+c^2)+1}+\frac{c^5+a^5+c^2+a^2}{(c+a)(c^2+a^2)+1}<2(a^2+b^2+c^2)$$

Bài 260 (Russia 1999). Cho các số dương x, y, z có tích bằng 1. Chứng minh rằng nếu

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq x+y+z$$

thì

$$\frac{1}{x^k}+\frac{1}{y^k}+\frac{1}{z^k}\geq x^k+y^k+z^k$$

Bài 261 (APMO 2001). Cho các số dương a, b, c thỏa $ab+bc+ca=abc$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab}\geq\sqrt{abc}+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

Bài 262. Cho các số thực không âm a, b, c sao cho $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+1}{b^2+1}+\frac{b^2+1}{c^2+1}+\frac{c^2+1}{a^2+1}\leq\frac{7}{2}$$

Bài 263 (THTT). Cho các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\geq 8(a^2+b^2+c^2)$$

Bài 268. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\geq\frac{ab+bc+ca}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

Bài 269 (Moldova Team Selection Test 2009). Cho $m, n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ và các số $a_i>0, i=\overline{1,n}$, sao cho $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^{2-m}+a_2+\cdots+a_{n-1}}{1-a_1}+\frac{a_2^{2-m}+a_3+\cdots+a_n}{1-a_2}+\cdots+\frac{a_n^{2-m}+a_1+\cdots+a_{n-2}}{1-a_n}\geq n+\frac{n^m-n}{n-1}$$

Bài 270 (Iran 1996). Cho các số không âm a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\geq\frac{9}{4(ab+bc+ca)}$$

Bài 271. Cho các số thực không âm a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{b^2+bc+c^2}+\frac{1}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{9}{(a+b+c)^2}$$

Bài 272. Cho các số thực không âm a, b, c sao cho $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{5}{2}$$

Bài 273. Cho các số thực không âm a, b, c sao cho $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{b+c}}+\frac{1}{\sqrt{c+a}}\geq\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Bài 274 (Việt Nam TST 2006). Cho các số $a, b, c \in [1; 2]$. Chứng minh rằng
$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 6\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

Bài 275 (Moldova TST 2006). Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng
$$a^2\left(\frac{b}{c}-1\right)+b^2\left(\frac{c}{a}-1\right)+c^2\left(\frac{a}{b}-1\right) \geq 0$$

Bài 276 (China TST 2004). Chứng minh rằng a, b, c, d là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}+\frac{1}{(c+1)^2}+\frac{1}{(d+1)^2} \geq 1$$

Bài 277 (IMO Shortlish). Cho các số không âm a, b, c, x, y, z thỏa $a+b+c=x+y+z$. Chứng minh rằng
$$ax^2+by^2+cz^2+xyz \geq 4abc$$

Bài 278. Cho các số thực bất kì a, b, c. Chứng minh rằng

a/
$$a(a+b)^3+b(b+c)^3+c(c+a)^3 \geq 0$$
b/
$$a(a+b)^5+b(b+c)^5+c(c+a)^5 \geq 0$$

Bài 279. Cho các số dương có tích bằng 1. Chứng minh rằng
$$\sqrt{\frac{a+b}{a+1}}+\sqrt{\frac{b+c}{b+1}}+\sqrt{\frac{c+a}{c+1}} \geq 3$$

Bài 280 (Phạm Kim Hùng). Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng
$$\frac{a+2b}{c+2b}+\frac{b+2c}{a+2c}+\frac{c+2a}{b+2a} \geq 3$$

Bài 281. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng
$$\frac{\sqrt{b+c}}{a}+\frac{\sqrt{c+a}}{b}+\frac{\sqrt{a+b}}{c} \geq \frac{4(a+b+c)}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

Bài 282 (Vasile). Cho các số dương a, b, c, d. Chứng minh rằng
$$\left(1+\frac{2a}{b+c}\right)\left(1+\frac{2b}{c+d}\right)\left(1+\frac{2c}{d+a}\right)\left(1+\frac{2d}{a+b}\right) \geq 9$$

Bài 283 (Phạm Kim Hùng). Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{|a^2-b^2|}+\frac{1}{|b^2-c^2|}+\frac{1}{|c^2-a^2|}+\frac{8}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{28}{(a+b+c)^2}$$

Bài 284 (Cezar Lupu). Cho các số dương a, b, c thỏa mãn
$$a+b+c \geq \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$
Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}\geq\frac{3}{2}$$

Bài 285. Cho các số không âm a,b,c thỏa $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^3+bc}+\frac{b}{b^3+ca}+\frac{c}{c^3+ab}\geq 3$$

Bài 286 (Phan Thành Nam). Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a\sqrt{a+b}}+\frac{1}{b\sqrt{b+c}}+\frac{1}{c\sqrt{c+a}}\geq\frac{3}{\sqrt{2abc}}$$

Bài 287 (Phan Thành Nam). Cho các số không âm a,b,c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a+b^2}+\sqrt{b+c^2}+\sqrt{c+a^2}\geq 2$$

Bài 288. Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq\frac{3(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2}$$

Bài 289. Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)}\geq\frac{5}{3}$$

Bài 290. Cho các số dương a,b,c sao cho $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ca}+\frac{\sqrt{abc}}{c+ab}\leq 1+\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Bài 291. Cho các số dương a,b,c sao cho $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+a^2b^2}{(a+b)^2}+\frac{1+b^2c^2}{(b+c)^2}+\frac{1+c^2a^2}{(c+a)^2}\geq\frac{5}{2}$$

Bài 292 (Vasile). Cho các số dương a,b,c sao cho $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca}\leq\frac{9}{2}$$

Bài 293 (China TST 2005). Cho các số dương a,b,c sao cho $ab+bc+ca=\frac{1}{3}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a^2-bc}+\frac{1}{1+b^2-ca}+\frac{1}{1+c^2-ab}\leq 3$$

Bài 294 (Phạm Kim Hùng, Klamkin). Cho các số $a,b,c\geq 0$ sao cho $a+b+c=2$. Chứng minh rằng

a/

$$(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)\leq 1$$

b/

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)\leq 3$$

Bài 295 (Võ Quốc Bá Cẩn). cho các số thực dương a,b,c sao cho $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{abc}+\frac{36}{a^2b+b^2c+c^2a}\geq 343$$

Bài 296. Cho các số thực không âm a,b,c sao cho $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b}{c^2+a^2}}+\sqrt{\frac{c}{a^2+b^2}}\geq 2$$

Bài 297. Cho các số dương a,b,c sao cho $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)\geq 9$$

Bài 298. Cho các số thực phân biệt a,b,c. Chứng minh rằng

a/

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2+\left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2\geq 2$$

b/

$$\left(\frac{a}{b-c}\right)^2+\left(\frac{b}{c-a}\right)^2+\left(\frac{c}{a-b}\right)^2\geq 2$$

Bài 299. Cho các số thực a,b,c thỏa $a^2+b^2+c^2=2$. Chứng minh rằng

a/ $|a+b+c-abc|\leq 2$

b/ $|a^3+b^3+c^3-3abc|\leq 2\sqrt{2}$

Bài 300. Cho các số không âm a,b,c. Chứng minh rằng

$$\sqrt{(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)}+\sqrt{(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)}+\sqrt{(c^2-ca+a^2)(a^2-ab+b^2)}\geq a^2+b^2+c^2$$

Bài 301. Cho các số không âm a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4}{a^3+abc+b^3}+\frac{b^4}{b^3+abc+c^3}+\frac{c^4}{c^3+abc+a^3}\geq\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}$$

Bài 302. Cho các số không âm a,b,c sao cho $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\geq\frac{3}{2}$$

Bài 303. Cho các số dương a,b,c sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{3}\geq\frac{2}{ab+bc+ca}$$

Bài 304. Cho các số không âm a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^3+abc+b^3}+\frac{b^3}{b^3+abc+c^3}+\frac{c^3}{c^3+abc+a^3}\geq 1$$

Bài 305. Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{c(c+a)}\geq\frac{3}{2\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}$$

Bài 306. Cho các số dương a,b,c,d sao cho $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=20$. Chứng minh rằng

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c}^2+\frac{1}{d^2}\right)\geq 36$$

Bài 307. Cho các số không âm a,b,c,x,y,z sao cho $x^2+y^2+z^2=1$. Chứng minh rằng
$$\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}+\sqrt{b^2x^2+c^2y^2+a^2z^2}+\sqrt{c^2x^2+a^2y^2+b^2z^2}\ge a+b+c$$

Bài 308. Cho các số không âm a,b,c. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{(2a+b)^2}+\frac{1}{(2b+c)^2}+\frac{1}{(2c+a)^2}\ge\frac{1}{ab+bc+ca}$$

Bài 309. Cho các số không âm x,y,z sao cho $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của
$$P=\frac{x-y}{\sqrt{x+y}}+\frac{y-z}{\sqrt{y+z}}+\frac{z-x}{\sqrt{z+x}}$$

Bài 310. Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng
$$a\sqrt{\frac{b}{c+a}}+b\sqrt{\frac{c}{a+b}}+c\sqrt{\frac{a}{b+c}}\le\frac{3\sqrt3}{4}\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a+b+c}}$$

Bài 311. Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng
$$\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-2}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 2$$

Bài 312. Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+3\ge 2\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$$

Bài 313 (Trần Nam Dũng). Cho các số thực không âm bất kì a,b,c . Chứng minh rằng
$$abc+2+\frac{1}{\sqrt2}[(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2]\ge a+b+c$$

Bài 314. Cho các số thực dương a,b,c sao cho $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng
$$a+b+c+\frac{1}{4}\min\{(a-b)^2,(b-c)^2,(c-a)^2\}\le 3$$

Bài 315. Cho $x,y,z>1$. Chứng minh rằng
$$\frac{x^4}{(y-1)^2}+\frac{y^4}{(z-1)^2}+\frac{z^4}{(x-1)^2}\ge 48$$

Bài 316. Cho các số không âm a,b,c và số nguyên $k\ge 3$. Chứng minh rằng
$$\frac{a(b^k+c^k)}{a^2+bc}+\frac{b(c^k+a^k)}{b^2+ca}+\frac{c(a^k+b^k)}{c^2+ab}\le a^{k-1}+b^{k-1}+c^{k-1}$$

Bài 317. Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng
$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc}+\frac{b(c+a)}{b^2+ca}+\frac{c(a+b)}{c^2+ab}\le\frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+27}$$

Bài 318. Cho các số không âm a,b,c. Chứng minh rằng
$$\sqrt{(a^2+bc)(b^2+ca)}+\sqrt{(b^2+ca)(c^2+ab)}+\sqrt{(c^2+ab)(a^2+bc)}\le\frac{3}{4}(a+b+c)^2$$

Bài 319. Cho các số không âm a, b, c. Chứng minh rằng

$$\sqrt{(a^3+abc+b^3)(b^3+abc+c^2)}+\sqrt{(b^3+abc+c^3)(c^2+abc+a^2)}+\sqrt{(c^3+abc+a^3)(a^3+abc+b^3)}\ge \frac{1}{3}(a+b+c)^3$$

Bài 320. Cho các số không âm a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}+\frac{(c+a)^2}{b^2+ca}+\frac{(a+b)^2}{c^2+ab}\ge 6$$

Bài 321. Cho các số thực dương a, b, c thỏa $abc=8$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^3}}\ge 1$$

Bài 322. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{2c+a+b}+\frac{bc}{2b+c+a}+\frac{ca}{2b+a+c}\le \frac{a+b+c}{4}$$

Bài 323. Cho các số dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}$$

Bài 324. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+a}\right)^2\ge \frac{3}{4}$$

Bài 325. Cho các số dương a, b, c thỏa $a^2+b^2+c^2\le 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+ab}{c^2+ab}+\frac{1+bc}{a^2+bc}+\frac{1+ca}{b^2+ca}\ge 3$$

Bài 325. Chứng minh rằng nếu $a, b, c, x, y, z>0$ thì

$$\frac{a}{b+c}x^2+\frac{b}{c+a}y^2+\frac{c}{a+b}z^2\ge xy+yz+zx-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$$

Bài 326. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}\ge 1$$

Bài 327 (Olympic 30/4). Chứng minh rằng nếu $0\le x\le 1$ thì

$$x\left(9\sqrt{1+x^2}+13\sqrt{1-x^2}\right)\le 16$$

Bài 328. Cho các số không âm a, b, c. Chứng minh rằng

$$\sqrt{1+\frac{16a}{b+c}}+\sqrt{1+\frac{16b}{c+a}}+\sqrt{1+\frac{16c}{a+b}}\ge 9$$

Bài 329. Cho các số dương x, y, z thỏa $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 24(x^2+y^2+z^2)+1$$

Bài 330. Cho các số không âm a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\geq\frac{10}{(1+b+c)^2}$$

Bài 331. Chứng minh rằng với mọi tam giác nhọn ABC ta có

$$\left(\frac{sinAsinB}{sinC}\right)^2+\left(\frac{sinBsinC}{sinA}\right)^2+\left(\frac{sinCsinA}{sinB}\right)^2\geq\frac{9}{4}$$

Bài 332. Cho các số dương x,y,z sao cho $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{y^2+z}+\frac{y}{z^2+x}+\frac{z}{x^2+y}\geq\frac{9}{4}$$

Bài 333. Cho các số dương a,b,c thỏa $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\geq\sqrt{3}$$

Bài 334. Chứng minh rằng nếu $a,b,c\geq 0$ thì

$$\sqrt{\frac{a^2+bc}{b^2+bc+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2+ca}{c^2+ca+a^2}}+\sqrt{\frac{c^2+ab}{a^2+ab+b^2}}\geq\sqrt{6}$$

Bài 335. Chứng minh rằng nếu $a,b,c\geq 0$ thì

$$\frac{a^3+abc}{b^3+abc+c^3}+\frac{b^3+abc}{c^3+abc+a^3}+\frac{c^3+abc}{a^3+abc+b^3}\geq 2$$

Bài 336 (Tap chí Komal). Cho các số thực a,b,c. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\geq\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Bài 337 (Romania TST 2002). Chứng minh rằng nếu $a,b,c\in(0;1)$ ta có

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$$

Bài 338. Cho các số thực a,b,c sao cho $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$

Bài 339 (Ukraina 2001). Cho các số dương a,b,c,x,y,z sao cho $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$ax+by+cz+2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)}\leq a+b+c$$

Bài 340. Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\geq\frac{9}{4(a+b+c)}$$

Bài 341 (Gazeta Matematica). Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}+\sqrt{b^4+b^2c^2+c^4}+\sqrt{c^4+c^2a^2+a^4}\geq a\sqrt{2a^2+bc}+b\sqrt{2b^2+ca}+c\sqrt{2c^2+ab}$$

Bài 342 (JBMO 2002). Cho các só dương a,b,c sao cho $abc=2$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3\geq a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}$$

Bài 343 (Gazeta Matematica). Cho $x,y,z>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{xyz}{(1+3x)(x+8y)(y+9z)(z+6)} < \frac{1}{7^4}$$

Bài 344. Cho các số thực dương a,b,c sao cho $a+b+c=1$. Chứng minh rằng
$$5(a^2+b^2+c^2) \le 6(a^3+b^3+c^3)+1$$

Bài 345. Cho các số $a,b,c \in (1;2)$. Chứng minh rằng
$$\frac{b\sqrt{a}}{\left(4b\sqrt{c}-c\sqrt{a}\right)} + \frac{c\sqrt{b}}{4c\sqrt{a}-a\sqrt{b}} + \frac{a\sqrt{c}}{4a\sqrt{b}-b\sqrt{c}} \ge 1$$

Bài 346. Cho các số dương a,b,c sao cho $abc \le 1$. Chứng minh rằng
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge a+b+c$$

Bài 347 (Romania 2003). Cho các số dương a,b,c sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng
$$1+\frac{3}{a+b+c} \ge \frac{6}{ab+bc+ca}$$

Bài 348 (JBMO 2002). Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng
$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2} \ge \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$$

Bài 349. Cho các số dương x,y,z sao cho $x+y+z=xyz$. Chứng minh rằng
$$xy+yz+zx \ge 3+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1}$$

Bài 350 (JBMO 2002). Cho các số $x,y,z > -1$. Chứng minh rằng
$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2} \ge 2$$

Bài 351. Cho các số dương a,b,c sao cho $a+b+c=1$. Chứng minh rằng
$$\frac{a^2+b}{b+c}+\frac{b^2+c}{c+a}+\frac{c^2+a}{a+b} \ge 2$$

Bài 352 (Tạp chí Kvan 1998). Cho các số dương a,b,c sao cho $a^4+b^4+c^4 \le 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$. Chứng minh rằng
$$a^2+b^2+c^2 \le 2(ab+bc+ca)$$

Bài 353 (Gazeta Matematica). Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng
$$\frac{a+b}{b+c}.\frac{a}{2a+b+c}+\frac{b+c}{c+a}.\frac{b}{2b+c+a}+\frac{c+a}{a+b}.\frac{c}{2c+a+b} \ge \frac{3}{4}$$

Bài 354 (India 2002). Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge \frac{c+a}{c+b}+\frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a}$$

Bài 355 (Russia 2002). Cho các số dương a,b,c,x,y,z sao cho $a+x=b+y=c+z=1$. Chứng minh rằng
$$(abc+xyz)\left(\frac{1}{ay}+\frac{1}{bz}+\frac{1}{cx}\right) \ge 3$$

Bài 356. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng
$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq abc(a + b + c)^3$$

Bài 357. Cho các số thực a, b, c sao cho $\max\{a, b, c\} - \min\{a, b, c\} \leq 1$. Chứng minh rằng
$$1 + a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a)$$

Bài 358. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng
$$27 + \left(2 + \frac{a^2}{bc}\right)\left(2 + \frac{b^2}{ca}\right)\left(2 + \frac{c^2}{ab}\right) \geq 6(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Bài 359. Cho các số $a, b, c \in (0; 1)$ sao cho $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng
$$\frac{a}{1 - a^2} + \frac{b}{1 - b^2} + \frac{c}{1 - c^2} \geq \frac{3}{4}\left(\frac{1 - a^2}{a} + \frac{1 - b^2}{b} + \frac{1 - c^2}{c}\right)$$

Bài 360. Cho các số $a, b, c \leq 1$ và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{1 + a^2} + \frac{1}{1 + b^2} + \frac{1}{1 + c^2} \leq \frac{27}{10}$$

Bài 361. Chứng minh rằng nếu $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ ta có
$$(1 - x)^2(1 - y)^2(1 - z)^2 \geq 2^{15}xyz(x + y)(y + z)(z + x)$$

Bài 362 (IMO Shorlish 1987). Cho các số dương a, b, c sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Chứng minh rằng
$$a + b + c \leq abc + 2$$

Bài 363. Cho các số dương a, b, c, d. Chứng minh rằng
$$\frac{a - b}{b + c} + \frac{b - c}{c + d} + \frac{c - d}{d + a} + \frac{d - a}{a + b} \geq 0$$

Bài 364 (MOSP 2001). Cho các số dương a, b, c sao cho $abc = 1$. Chứng minh rằng
$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 4(a + b + c - 1)$$

Bài 365 (Tạp chí Kvan 1988). Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng
$$3 + a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{3(a + 1)(b + 1)(c + 1)}{1 + abc}$$

Bài 366. Cho các số dương a, b, c sao cho $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng
$$\frac{b\sqrt{c}}{a\left(\sqrt{3c} + \sqrt{ab}\right)} + \frac{c\sqrt{a}}{b\left(\sqrt{3a} + \sqrt{bc}\right)} + \frac{a\sqrt{b}}{c\left(\sqrt{3b} + \sqrt{ca}\right)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Bài 367. Cho các số dương x, y, z. Sao cho $x + y + z = xyz$. Chứng minh rằng
$$(x - 1)(y - 1)(z - 1) \leq 6\sqrt{3} - 10$$

Bài 368 (Tạp chí Kvan 1989). Cho các số thực a, b, c, x, y, z. Chứng minh rằng
$$ax + by + cz + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geq \frac{2}{3}(a + b + c)(x + y + z)$$

Bài 369. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}}{3}\le\sqrt[3]{a.\frac{a+b}{2}.\frac{a+b+c}{3}}$$

Bài 370 (USA TST 2000). Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\le\max\left\{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2,\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2,\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2\right\}$$

Bài 371 (Việt Nam 2004). Cho các số dương a,b,c sao cho $(a+b+c)^3=32abc$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$\frac{x^4+y^4+z^4}{(x+y+z)^4}$$

Bài 372 (Nhật 1997). Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\ge\frac{3}{5}$$

Bài 373 (Vasile). Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\ge\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

Bài 374 (BMO 2005). Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$$

Bài 375 (Romania 2005). Cho các số dương a,b,c sao cho $(a+b)(b+c)(c+a)=1$. Chứng minh rằng

$$ab+bc+ca\le\frac{3}{4}$$

Bài 376 (Romania 2005). Cho các số dương a,b,c sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2(c+1)}+\frac{b}{c^2(a+1)}+\frac{c}{a^2(b+1)}\ge\frac{3}{2}$$

Bài 377 (Romania 2005). Cho các số dương a,b,c thỏa $a+b+c\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3c}{b(c+a)}+\frac{b^3a}{a(a+b)}+\frac{c^3b}{a(b+c)}\ge\frac{3}{2}$$

Bài 378 (Nhật 2005). Cho các số dương a,b,c sao cho $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\le 1$$

Bài 379 (Đức 2005). Cho các số dương a,b,c thỏa $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\right)\ge\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}$$

Bài 380 (Việt Nam 2005). Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^3+\left(\frac{b}{b+c}\right)^3+\left(\frac{c}{c+a}\right)^3\ge\frac{3}{8}$$

Bài 381 (China 2005). Cho các số dương a,b,c sao cho $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5)\ge 1$$

Bài 382 (Poland 2005). Cho các số dương a,b,c và $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3+6abc\ge 9$$

Bài 383 (Baltic Way 2005). Cho các số dương a,b,c sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2}\le 1$$

Bài 384. Cho các số dương a,b,c sao cho $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a}\le\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Bài 385 (Ian 2005). Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2\ge(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Bài 386 (Austraylia 2005). Cho các số dương a,b,c,d. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}\ge\frac{a+b+c+d}{abcd}$$

Bài 387 (Modoval 2005). Cho các số dương a,b,c sao cho $a^4+b^4+c^4=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca}\le 1$$

Bài 388 (APMO 2005). Cho các số dương a,b,c sao cho $abc=8$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}}\ge\frac{4}{3}$$

Bài 389 (IMO 2005). Cho các số dương x,y,z sao cho $xyz\ge 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\ge 0$$

Bài 390 (IMO Shortlish 2004). Cho các số dương a,b,c sao cho $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}\le\frac{1}{abc}$$

Bài 391 (Latvia 2002). Cho các số dương a,b,c sao cho $\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+b^4}+\frac{1}{1+c^4}+\frac{1}{1+d^4}=1$. Chứng minh rằng

$$abcd\ge 3$$

Bài 392 (Anbania 2002). Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Bài 393 (Canada 2002). Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge a+b+c$$

Bài 394 (BMO 2002). Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)}\geq\frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

Bài 395 (Greece 2002). Cho các số dương a,b,c sao cho $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geq\frac{3}{4}\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)^2$$

Bài 396 (Ireland 2002). Cho các số không âm a,b sao cho $a+b=2$. Chứng minh rằng

$$a^2b^2(a^2+b^2)\leq 2$$

Bài 397 (BMO 2001). Cho các số $a,b,c\geq 0$ sao cho $a+b+c\geq abc$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2\geq\sqrt{3}abc$$

Bài 398. Cho các số dương a,b. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}\geq\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

Bài 399 (Macedonia 2000). Cho các số dương x,y,z. Chứng minh rằng

$$x^2+y^2+z^2\geq\sqrt{2}(xy+xz)$$

Bài 400 (Tukey 1999). Cho các số $c\geq b\geq a\geq 0$. Chứng minh rằng

$$(a+3b0(b+4c)(c+2a)\geq 60abc$$

Bài 401 (Macedonia 1999). Cho các số dương a,b,c sao cho $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$a+b+c+\frac{1}{abc}\geq 4\sqrt{3}$$

Bài 402 (Poland 1999). Cho các số dương a,b,c sao cho $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc}\leq 1$$

Bài 403 (Iran 1998). Cho các số dương x,y,z sao cho $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x+y+z}\geq\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$$

Bài 404 (Belarus 1998). Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1$$

Bài 405 (Belarus 1997). Cho các số dương a,x,y,z. Chứng minh rằng

$$\frac{a+y}{a+z}x+\frac{a+z}{a+x}y+\frac{a+x}{a+y}z\geq x+y+z\geq\frac{a+z}{a+x}x+\frac{a+x}{a+y}y+\frac{a+y}{a+z}z$$

Bài 406 (Ireland 1997). Cho các số dương a,b,c sao cho $a+b+c\geq abc$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2\geq abc$$

Bài 405 (Bugaria 1997). Cho các số dương a,b,c sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\leq\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}$$

Bài 406 (Romania 1997). Cho các só dương a, b, c sao cho $abc = 1$. Chứng minh rằng
$$\frac{a^9+b^9}{a^6+a^3b^3+b^6}+\frac{b^9+c^9}{b^6+b^3c^3+c^6}+\frac{c^9+a^9}{c^6+c^3a^3+a^6} \geq 2$$

Bài 407 (Estonia 1997). Cho các số thực x, y. Chứng minh rằng
$$x^2+y^2+1 \geq x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$$

Bài 408 (Romania 1997). Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng
$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ca} \geq 1 \geq \frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab}$$

Bài 409 (Việt Nam 1996). Cho các số dương a, b, c, d sao cho $2(ab+ac=ad+bc+bd+cd)+abc+bcd+cda+dab=16$. Chứng minh rằng
$$a+b+c+d \geq \frac{2}{3}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

Bài 410 (Belarus 1996). Cho các số dương a, b, c sao cho $a+b+c=\sqrt{abc}$. Chứng minh rằng
$$ab+bc+ca \geq 9(a+b+c)$$

Bài 411 (Baltic Way 1995). Cho các số dương a, b, c, d. Chứng minh rằng
$$\frac{a+c}{a+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a} \geq 4$$

Bài 412 (Poland 1993). Cho các số dương x, y, u, v. Chứng minh rằng
$$\frac{xy+xv+uy+uv}{x+y+u+v} \geq \frac{xy}{x+y}+\frac{uv}{u+v}$$

Bài 413 (IMO Shortlish 1993). Cho các số không âm a, b, c, d sao cho $a+b+c+d=1$. Chứng minh rằng
$$abc+bcd+cda+dab \leq \frac{1}{27}+\frac{176}{27}abcd$$

Bài 414 (Poland 1992). Cho các số thực a, b, c. Chứng minh rằng
$$(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2 \geq (a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)$$

Bài 415 (IMO 1968). Cho các số dương x_1, x_2 và các số thực $y_1, y_2, z_1, z_2; x_1y_1 > z_1^2, x_2y_2 > z_2^2$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2} \geq \frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}$$

Bài 416. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng
$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}} \geq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}$$

Bài 417. Cho các số $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng
$$\frac{a^2(b+c)}{(b^2+c^2)(2a+b+c)}+\frac{b^2(c+a)}{(c^2+a^2)(2b+c+a)}+\frac{c^2(a+b)}{(a^2+b^2)(2c+a+b)} \geq \frac{2}{3}$$

Bài 418. Cho các số $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{2c^2+(a+b)^2}\le\frac{2}{3}$$

Bài 419 (Vasile). Cho các số không âm a,b,c. Chứng minh rằng

$$(a^2+b^2+c^2)^2\ge 3(a^3b+b^3c+c^3a)$$

Bài 420 (China 2005). Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng

$$\frac{\cos^2 A}{cosA+1}+\frac{\cos^2 B}{cosB+1}+\frac{\cos^2 C}{cosC+1}\ge\frac{1}{2}$$

Bài 421 (Nguyễn Anh Cường). Cho các số không âm x,y,z sao cho $x+y+z=2$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^3y+y^3z+z^3x}+\sqrt{xy^3+yz^3+zx^3}\le 2$$

Bài 422 (Võ Quốc Bá Cẩn – THTT). Cho a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác có chu vi bằng 1. Chứng minh rằng

$$1<\frac{b}{\sqrt{a+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{b+c^2}}+\frac{a}{\sqrt{c+a^2}}<2$$

Bài 423 (Iran 2009). Cho các số dương a,b,c sao cho $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+b^2+2}+\frac{1}{b^2+c^2+2}+\frac{1}{c^2+a^2+2}\le\frac{3}{4}$$

Bài 424 (Phan Thành Việt). cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^4}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^4}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}$$

Bài 425 (Trần Nam Dũng – THTT). Cho các số không âm bất kì a,b,c. Chứng minh rằng

$$abc+2+\frac{1}{\sqrt{2}}[(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2]\ge a+b+c$$

Bài 426. Cho các số không âm a,b,c sao cho không có 2 số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\le 2$$

Bài 427 (Võ Quốc Bá Cẩn). Cho các số không âm a,b,c sao cho không có 2 số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng với mọi $k\ge 1$, bất đẳng thức sau được thỏa mãn

$$\frac{a^2}{a^2+kab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+kbc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+kca+a^2}+\frac{2k+1}{k+2}.\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\le 2$$

Bài 428 (MÓP 2007). Cho các số dương $a_1,a_2,\dots,a_n$ thỏa mãn $a_1+\cdots+a_n=1$. Chứng minh rằng

$$(a_1a_2+\cdots+a_na_1)\left(\frac{a_1}{a_2^2+a_2}+\cdots+\frac{a_n}{a_1^2+a_1}\right)\ge\frac{n}{n+1}$$

Bài 429 (Võ Quốc Bá Cẩn). cho các số dương x,y,z sao cho $xyz=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{y^2+y+1}+\frac{1}{z^2+z+1}\ge 1$$

Bài 430. Cho các số dương a,b,c sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{2a^3+1}+\frac{b}{2b^3+1}+\frac{c}{2c^3+1}\le 1$$

Bài 431 (Vũ Đình Qúy). cho các số dương x, y, z sao cho $xyz = 1$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{y^2 - y + 1} + \frac{1}{z^2 - z + 1} \le 1$$

Bài 432 (Gabriel Dospinescu, Mathematical Relfections 2009). Cho các số thực bất kì a, b, c. Chứng minh rằng
$$(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2) \ge 3(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2)$$

Bài 433 (Ivan Borsenco, Mathematical Relfections 2009). Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh
$$3(a^2 + b^2 + c^2)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \ge (a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2)$$

Bài 434 (Nguyễn Đình Thi). Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng
$$3(ab + bc + ca)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \le (a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2)$$

Bài 435 (Võ Quốc Bá Cẩn, Phạm Kim Hùng). Cho các số không âm a, b, c. Chứng minh rằng
$$\frac{a}{\sqrt{4b^2 + bc + 4c^2}} + \frac{b}{\sqrt{4c^2 + ca + 4a^2}} + \frac{c}{\sqrt{4a^2 + ab + 4b^2}} \ge 1$$

Bài 436 (Trần Quốc Anh). Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng
$$\frac{a}{\sqrt{4b^2 + ca + ab}} + \frac{b}{\sqrt{4c^2 + ab + bc}} + \frac{c}{\sqrt{4a^2 + bc + ca}} \ge \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Bài 437. Cho các số dương a, b, c thỏa $abc = 1$. Chứng minh rằng
$$\sqrt{8a^2 + 1} + \sqrt{8b^2 + 1} + \sqrt{8c^2 + 1} \le 3(a + b + c)$$

Bài 438. Cho các số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Chứng minh rằng với mọi số $k \ge 0$ ta có
$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_1} \ge \frac{a_1 + k}{a_2 + k} + \frac{a_2 + k}{a_3 + k} + \cdots + \frac{a_n + k}{a_1 + k}$$

Bài 439. Cho các số dương a, b, c sao cho
$$\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} = 2$$
Chứng minh rằng
$$ab + bc + ca \le \frac{3}{2}$$

Bài 440. Tìm số thực k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau
$$\frac{(b - c)^2(b + c)}{a} + \frac{(c - a)^2(c + a)}{b} + \frac{(a - b)^2(a + b)}{c} \ge k(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$
đúng với mọi số thực dương a, b, c

Bài 441. Cho các số dương a, b, c, x, y, z sao cho $ax + by + cz = xyz$. Chứng minh rằng
$$x + y + z > \sqrt{a + b} + \sqrt{b + c} + \sqrt{c + a}$$

Bài 442 (Thái Nhật Phượng). cho các số dương a, b, c sao cho $abc = 1$. Chứng minh rằng
$$\frac{a^2}{a + b + b^3c} + \frac{b^2}{b + c + c^3a} + \frac{c^2}{c + a + a^3b} \le 1$$

Bài 443. Cho các số $x, y, z \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của
$$\frac{x+y}{1+z}+\frac{y+z}{1+x}+\frac{z+x}{1+y}$$

Bài 444 (IMO 2006). Cho các số thực a, b, c. Chứng minh rằng
$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)| \le \frac{9}{16\sqrt{2}}(a^2+b^2+c^2)^2$$

Bài 445. Cho các số dương a, b, c sao cho $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{2a+2bc+1}+\frac{1}{2b+2ca+1}+\frac{1}{2c+2ab+1} \ge 1$$

Bài 446 (Võ Quốc Bá Cẩn). cho các số không âm a, b, c thỏa $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{\sqrt{a^2+ab+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+bc+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ca+a^2}} \ge 2+\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Bài 447 (Võ Quốc Bá Cẩn). Cho các số không âm a, b, c thỏa $a+b+c=1$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{\sqrt{a^2+ab+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+bc+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ca+a^2}} \ge 4+\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Bài 448. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c. Chứng minh rằng
$$\frac{a}{b+c}\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}+\frac{b}{c+a}\tan^2\frac{C}{2}\tan^2\frac{A}{2}+\frac{c}{a+b}\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}$$

Bài 449. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác ABC. Chứng minh rằng
$$\frac{a}{b+c}\left(\tan^4\frac{B}{2}+\tan^4\frac{C}{2}\right)+\frac{b}{c+a}\left(\tan^4\frac{C}{2}+\tan^4\frac{A}{2}\right)+\frac{c}{a+b}\left(\tan^4\frac{A}{2}+\tan^4\frac{B}{2}\right) \ge \frac{1}{3}$$

Bài 450. Cho các số thực không âm a, b, c. Chứng minh rằng
$$\sqrt{3} \ge \frac{bc}{\sqrt{(a^2+ab+b^2)(a^2+ac+c^2)}}+\frac{ca}{\sqrt{(c^2+cb+b^2)(a^2+ab+b^2)}}+\frac{ab}{\sqrt{(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2)}} \ge 1$$

Bài 451. Cho các số dương a, b, c thỏa $a+b+c=1$. Chứng minh rằng
$$\frac{\sqrt{a^2+abc}}{b+ca}+\frac{\sqrt{b^2+abc}}{c+ab}+\frac{\sqrt{c^2+abc}}{a+bc} \le \frac{1}{2\sqrt{abc}}$$

Bài 452 (Phan Thành Nam). Cho tam giác nhọn ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của
$$P = tanA + 2tanB + 5tanC$$

Bài 453. Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c ta luôn có
$$(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a+b+c)^2 \ge 8(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^2$$

Bài 454 (Cezar Lupu). Cho x, y, z là các số dương sao cho $xy+yz+zx \ge \max\{x^2, y^2, z^2\}$. Chứng minh
$$\frac{8x^2y^2z^2}{(xy+yz+zx-x^2)(xy+yz+zx-y^2)(xy+yz+zx-z^2)} \ge \frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$$

Bài 455 (Trần Nam Dũng). Cho a, b, c là các số thực không âm không đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{3} \le \frac{a^2}{3a^2+(b+c)^2} + \frac{b^2}{3b^2+(c+a)^2} + \frac{c^2}{3c^2+(a+b)^2} \le \frac{1}{2}.$$

Bài 456 (USA Team Selection Test 2009). Cho các số dương x, y, z. Chứng minh rằng

$$x^3(y^2+z^2)^2 + y^3(z^2+x^2)^2 + z^3(x^2+y^2)^2 \ge xyz[xy(x+y)^2 + yz(y+z)^2 + zx(z+x)^2$$

Bài 457 (Germany Team Selection Tests 2009). Cho a, b, c, d là các số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(a-b)(a-c)}{a+b+c} + \frac{(b-c)(b-d)}{b+c+d} + \frac{(c-d)(c-a)}{c+d+a} + \frac{(d-a)(d-b)}{d+a+b} \ge 0$$

Bài 458 (India National Olympiad 2009). Cho các số dương a, b, c sao cho $a^3 + b^3 = c^3$. Chứng minh

$$a^2 + b^2 - c^2 > 6(c-a)(c-b)$$

Bài 459 (Serbia Team Selection Tests 2009). Cho các số dương x, y, z sao cho $x + y + z = xy + yz + zx$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^2+y+1} + \frac{1}{y^2+z+1} + \frac{1}{z^2+x+1} \le 1$$

Bài 460 (USA USAMO 2009). Cho $(a_1 + a_2 + + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + + \frac{1}{a_n}\right) \le \left(n + \frac{1}{2}\right)^2$ với $n \ge 2$ và $a_1, \dots, a_n$ là các số thực dương. *Chứng minh rằng*

$$max(a_1, a_2, ., a_n) \le 4min(a_1, a_2, ., a_n)$$

Bài 461 (Serbia Junior Balkan Team Selection Test 2009). Cho các số dương thực dương bất kì x, y, z sao cho $\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^3+2} + \frac{1}{y^3+2} + \frac{1}{z^3+2} \le \frac{1}{3}$$

Bài 462 (China 2009). Cho x, y, z là các số thực lớn hơn 1. Chứng minh rằng

$$(x^2 - 2x + 2)(y^2 - 2y + 2)(z^2 - 2z + 2) \le (xyz)^2 - 2xyz + 2$$

Bài 463 (Nguyễn Việt Anh). cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{2a^2 - ab + 2b^2} + \frac{b^3}{2b^2 - bc + 2c^2} + \frac{c^3}{2c^2 - ca + 2a^2} \ge \frac{a+b+c}{3}$$

Bài 464. Cho các số thực không âm a, b, c sao cho không có 2 số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^2+2bc}{2a^2+bc}} + \sqrt{\frac{b^2+2ca}{2b^2+ca}} + \sqrt{\frac{c^2+2ab}{2c^2+ab}} \ge 2\sqrt{2}$$

Bài 465 (Võ Quốc Bá Cẩn. Trần Quang Hùng). Cho các số thực không âm a, b, c sao cho $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)}} + \frac{1}{\sqrt{(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)}} + \frac{1}{\sqrt{(c^2+ca+a^2)(a^2+ab+b^2)}} \ge 4 + \frac{8}{\sqrt{3}}$$

Bài 466 (China 22007). Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác sao cho $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$a^2+b^2+c^2+\frac{4}{3}abc$$

Bài 467 (Croatia 2007). Cho các số dương a,b,c sao cho $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq 3(a^2+b^2+c^2)$$

Bài 468 (Romania 2007). Cho các số không âm x,y,z. Chứng minh rằng

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\geq xyz+\frac{3}{4}|(x-y)(y-z)(z-x)|$$

Bài 469 (Yugoslavia 2007). Cho số nguyên dương k và các số dương x,y,z có tổng băng 1. Chứng minh

$$\frac{x^{k+2}}{x^{k+1}+y^k+z^k}+\frac{y^{k+2}}{y^{k+1}+z+x^k}+\frac{z^{k+2}}{z^{k+1}+x^k+y^k}\geq\frac{1}{7}$$

Bài 470 (Romania 2007). Cho $n\in\mathbb{N}, n\geq 2, a_i, b_i\in\mathbb{R}, 1\leq i\leq n$, sao cho $a_1^2+\cdots+a_n^2=b_1^2+\cdots+b_n^2=1, a_1b_1+\cdots+a_nb_n=0$. Chứng minh rằng

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^2\leq n$$

Bài 471 (France 2007). Cho các số dương a,b,c,d sao cho $a+b+c+d=1$. Chứng minh rằng

$$6(a^3+b^3+c^3+d^3)\geq a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}$$

Bài 472 (Irish 2007). Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b+c}{3}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\leq\frac{1}{3}\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)$$

Bài 473 (Việt Nam TST 2007). Cho tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\frac{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}}+\frac{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{\cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}}$$

Bài 474 (Greece 2007). Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}+\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)}+\frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)}\geq ab+bc+ca$$

Bài 475 (Poland 2007). Cho a,b,c,d là các số dương sao cho $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=4$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}}\leq 2(a+b+c+d)-4$$

Bài 476 (Turkey 2007). Cho các số dương a,b,c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ab+2c^2+2c}+\frac{1}{bc+2a^2+2a}+\frac{1}{ac+2b^2+2b}\geq\frac{1}{ab+bc+ca}$$

Bài 477 (British 2007). Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$(a^2+b^2)^2\geq(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

Bài 478 (Brazilian 2007). Cho các số thực a,b,c sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 6+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)$$

Bài 479 (Ukraina 2007). Cho các số dương a,b,c sao cho $abc\geq 1$. Chứng minh rằng a/

$$\left(a+\frac{1}{a+1}\right)\left(b+\frac{1}{b+1}\right)\left(c+\frac{1}{c+1}\right) \geq \frac{27}{8}$$

b/

$$27\left(a^3+a^2+a+1\right)\left(b^3+b^2+b+1\right)\left(c^3+c^2+c+1\right) \geq 64\left(a^2+a+1\right)\left(b^2+b+1\right)\left(c^2+c+1\right)$$

Bài 480 (Moldova 2007). Cho các số $a_1, \dots, a_n$ sao cho $a_i \geq \frac{1}{i}$, với $i = \overline{1,n}$. *chứng minh rằng*

$$(a_1+1)\left(a_2+\frac{1}{2}\right)\dots\left(a_n+\frac{1}{n}\right) \geq \frac{2^n}{(n+1)!}(1+a_1+2a_2+\cdots+na_n)$$

Bài 481 (Iranian 2008). Cho các số dương x, y, z sao cho $x+y+z=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^3}{y^3+8}+\frac{y^3}{z^3+8}+\frac{z^3}{x^3+8} \geq \frac{1}{9}+\frac{2}{27}(xy+yz+zx)$$

Bài 482 (Macedonia 2008). Cho các số dương a, b, c sao cho $(a+b)(b+c)(c+a)=8$. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[27]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$$

Bài 483 (Federation of Bosnia 2008). Cho các số thực x, y, z. Chứng minh rằng

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \geq \max\left\{\frac{3}{4}(x-y)^2, \frac{3}{4}(y-z)^2, \frac{3}{4}(z-x)^2\right\}$$

Bài 484 (Federation of Bosnia 2008). Cho các số dương a, b, c sao cho $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh

$$\frac{a^5+b^5}{ab(a+b)}+\frac{b^5+c^5}{bc(b+c)}+\frac{c^5+a^5}{ca(c+a)} \geq 3(ab+bc+ca)-2$$

Bài 485 (RMO 2008). Cho $a, b \in [0;1]$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a+b} \leq 1-\frac{a+b}{2}+\frac{ab}{3}$$

Bài 486 (Romania TST 2008). Cho các số dương a, b, c sao cho $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)} \leq \frac{1}{abc}$$

Bài 487 (Zhautykov 2008). Cho các số dương a, b, c sao cho $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 488 (Ukraina 2008). Cho các số dương x, y, z sao cho $x^2+y^2+z^2=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y+z}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+z+x}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+x+y}} \leq \sqrt{3}$$

Bài 489 (Polishi 2008). Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$4\left(\sqrt{a^3b^3}+\sqrt{b^3c^3}+\sqrt{c^3a^3}\right) \leq 4c^3+(a+b)^3$$

Bài 490 (Romanian 2008). Tìm số k lớn nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi số không âm a, b, c thỏa $a+b+c=ab+bc+ca$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}-k\right) \geq k$$

Bài 491 (Canada 2008). Cho các số dương a, b, c sao cho $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab} \leq \frac{3}{2}$$

Bài 492 (Phạm Kim Hùng). Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$(a^4+b^4+c^4)(ab+bc+ca) \ge (a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

Bài 493. Cho các số dương a, b, c sao cho $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$1+\sqrt[3]{(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)} \ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Bài 494. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a} \ge 1+\sqrt{\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

Bài 495. Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+a}\right)^2 \ge \frac{3}{4}+\frac{(a^2b+b^2c+c^2a-3abc)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Bài 496. Cho các số không âm a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+bc}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^2+ca}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^2+ab}{a^2-ab+b^2} \ge 3$$

Bài 497. Cho các số dương a, b, c thỏa $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$8(a-2)(b-2)(c-2) \ge (a+bc)(b+ca)(c+ab)$$

Bài 498. Cho các só dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \le \frac{(a+b)(a+b+2c)}{(3a+3b+2c)^2} \le \frac{1}{8}$$

Bài 499. Cho các số không âm a, b, c sao cho $a+2b+3c=4$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P(a,b,c)=(a^2b+b^2c+c^2a+abc)(ab^2+bc^2+ca^2+abc)$$

Bài 500. Cho các số dương a, b, c thỏa $a \ge b \ge c$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+3abc$$