SỞ GD & ĐT VĨNH PHÚC

-------------**--------------

550 BÀI BẤT ĐẲNG THỨC CHỌN LỌC

Họ và tên : Trần Mạnh Cường

Tổ : Khoa học tự nhiên

Đơn vị : Trường THCS Kim Xá – Vĩnh Tường – Vĩnh Phúc

VĨNH PHÚC, XUÂN NHÂM THÌN 2012 .

550 BÀI BẤT ĐẲNG THỨC CHỌN LỌC

-----------**-----------

1.Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện ab + bc + ca = 1.Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{5}{2}\ .$$

2.Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-a)^2}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

3.Cho a,b,c $\in(0;1)$ .Chứng minh rằng

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$$

4.Cho a,b,c là các số dương thoả mãn điều kiện abc = 1.Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$$

5.Cho các số thực x,y,z thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

6.Cho a,b,c là ba số dương và x,y,z là ba số có giá trị thuộc đoạn $\left[0;\frac{1}{2}\right]$Biết rằng a + b + c = x + y + z = 1.

Chứng minh rằng

$$ax + by + cz \geq 8abc$$

7.Cho a,b,c ,x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện x + y + z = 1.Chứng minh rằng

$$ax + by + cz + 2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)}\leq a+b+c$$

8.Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\geq\frac{9}{4(a+b+c)}$$

9.Cho a,b,c ≥ 0 .Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}+\sqrt{b^4+b^2c^2+c^4}+\sqrt{c^4+c^2a^2+a^4}\geq a\sqrt{2a^2+bc}+b\sqrt{2b^2+ca}+c\sqrt{2c^2+ab}$$

10.Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc = 2 .Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}$$

11. Cho x,y,z là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\frac{xyz}{(1+3x)(x+8y)(y+9z)(z+6)}\leq\frac{1}{7^4}\ .$$

12.Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 1.Chứng minh rằng

$$5(a^2 + b^2 + c^2) \leq 6(a^3 + b^3 + c^3) + 1\ .$$

13.Cho $x_1, x_2,..., x_n \in R, n\geq 2, a>0$ sao cho

$$x_1+x_2+...+x_n=a, x_1{}^2+x_2{}^2+...+x_n{}^2\leq\frac{a^2}{n-1}$$

Chứng minh rằng : $x_i\in\left[0;\frac{2a}{n}\right]$, i = 1,2,...,n.

14.Cho a,b,c $\in(0;1)$ .Chứng minh rằng

$$\frac{b\sqrt{a}}{4b\sqrt{c}-c\sqrt{a}}+\frac{c\sqrt{b}}{4c\sqrt{a}-a\sqrt{b}}+\frac{a\sqrt{c}}{4a\sqrt{b}-b\sqrt{c}}\geq 1$$

15.Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc $\leq$ 1.Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq a+b+c$$

16. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc = 1. Chứng minh rằng

$$1+\frac{3}{a+b+c}\ge\frac{6}{ab+bc+ca}.$$

17. Cho a,b,c là các số thực dương.Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$$

18. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$.Chứng minh rằng

a) $xyz \le \frac{1}{8}$ b) $x + y + z \le \frac{3}{2}$

c) $xy + yz + zx \le \frac{3}{4} \le x^2+y^2+z^2$ d) $xy + yz + zx \le \frac{1}{2}+2xyz$

19. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện x + y + z = xyz .Chứng minh rằng

$$xy + yz + zx \ge 3+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1}$$

20. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện x,y,z > -1 .Chứng minh rằng

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2}\ge 2$$

21. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 1.Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+b}{b+c}+\frac{b^2+c}{c+a}+\frac{c^2+a}{a+b}\ge 2$$

22.Cho a,b,c $\ge$ 0 thoả mãn điều kiện $a^4 + b^4 + c^4 \le 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$ .Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \le 2(ab + bc + ca)$$

23. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$.Chứng minh rằng

a) $xyz \ge 27$ b) $xy + yz + zx \ge 27$

c) $x + y + z \ge 9$ d) $xy + yz + zx \ge 2(x + y + z) + 9$

24. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện x + y + z = 3.Chứng minh rằng

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\ge xy+yz+zx$$

25. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{b+c}.\frac{a}{2a+b+c}+\frac{b+c}{c+a}.\frac{b}{2b+c+a}+\frac{c+a}{a+b}.\frac{c}{2c+a+b}\ge\frac{3}{4}$$

26. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{c+a}{c+b}+\frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a}$$

27. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2}\ge\frac{3(ab+bc+ca)}{a+b+c}$$

28.Cho các số thực dương a,b,c,x,y,z thoả mãn điều kiện a + x = b + y = c + z = 1.Chứng minh rằng

$$(abc+xyz)\left(\frac{1}{ay}+\frac{1}{bz}+\frac{1}{cx}\right)\ge 3$$

29. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}\le\frac{1}{4}(a+b+c)$$

30.Cho a,b,c,d là các số thực thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+d^2=1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = a^3(b + c + d) + b^3(c + d + a) + c^3(d + b + a) + d^3(a + b + c)$

31. Cho x,y,z là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}}+\frac{z}{z+\sqrt{(z+x)(z+y)}}\le 1$$

32. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\ge 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

33. Cho x,y,z là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$3(x^2y + y^2z + z^2x)(xy^2 + yz^2 + zx^2) \ge xyz(x + y + z)^3$$

34. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$\max\{a,b,c\}-\min\{a,b,c\}\le 1$$

Chứng minh rằng

$$1 + a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \ge 3a^2b + 3b^2c + 3c^2a$$

35. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$.Chứng minh rằng

$$8(x + y + z)^3 \le 10(x^3 + y^3 + z^3) + 11(x + y + z)(1 + 4xyz) - 12xyz .$$

36. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left(5a+\frac{2}{b+c}\right)^3+\left(5b+\frac{2}{c+a}\right)^3+\left(5c+\frac{2}{a+b}\right)^3$$

37. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$27 + \left(2+\frac{a^2}{bc}\right)\left(2+\frac{b^2}{ca}\right)\left(2+\frac{c^2}{ab}\right)\ge 6(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

38. Cho a,b,c $\in$ (0;1) thoả mãn điều kiện ab + bc + ca = 1 .Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}\ge\frac{3}{4}\left(\frac{1-a^2}{a}+\frac{1-b^2}{b}+\frac{1-c^2}{c}\right)$$

39.Cho x,y,z $\le$ 1 thoả mãn điều kiện x + y + z = 1.Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}\le\frac{27}{10}$$

40.Cho $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$.Chứng minh rằng $(1-x)^2(1-y)^2(1-z)^2 \ge 2^{15}xyz(x+y)(y+z)(z+x)$

41. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện xyz = x + y + z + 2. Chứng minh rằng

a) $xy + yz + zx \ge 2(x + y + z)$

b) $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\frac{3}{2}\sqrt{xyz}$

42. Cho x,y,z là các số thực thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.Chứng minh rằng

$$x+y+z\le xyz+2$$

43. Cho a,b,c,d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+a}+\frac{d-a}{a+b}\ge 0 .$$

44. Cho x,y là các số thực dương . Chứng minh rằng $x^y + y^x > 1$.

45. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc = 1. Chứng minh rằng

$$(a + b)(b + c)(c + a) \ge 4(a + b + c - 1)$$

46. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \le abc(ab + bc + ca)$$

47. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$3 + a + b + c + \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 3\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{1+abc}$$

48. Cho $x_1,x_2,...,x_n$ là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x_1x_2...x_n=1$.Chứng minh rằng

$$n^n.\prod_{i=1}^{n}(x_i^n+1)\ge\left(\sum_{i=1}^{n}x_n+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_n}\right)^n$$

49. Cho a,b,c,d là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 1. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + abcd \ge \min\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{9}+\frac{d}{27}\right\}$$

50. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sum (1+a^2)^2(1+b^2)^2(a-c)^2(b-c)^2 \ge (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$$

51. Cho $x_1, x_2, ..., x_n$, $y_1, y_2, ..., y_n \in R$ thoả mãn điều kiện

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2 = 1$$

Chứng minh rằng

$$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \le 2\left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)$$

52.Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số nguyên dương khác nhau từng đôi một . Chứng minh rằng

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \ge \frac{2n+1}{3}(a_1 + a_2 + ... + a_n)$$

53. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 1.Chứng minh rằng

$$\frac{b\sqrt{c}}{a(\sqrt{3c}+\sqrt{ab})} + \frac{c\sqrt{a}}{b(\sqrt{3a}+\sqrt{bc})} + \frac{a\sqrt{b}}{c(\sqrt{3b}+\sqrt{ca})} \ge \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

54. Cho a,b,c,d là các số thực thoả mãn điều kiện $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) = 16$.Chứng minh rằng

$$-3 \le ab + bc + cd + da + ac + bd - abcd \le 5$$

55. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \ge 9(ab+bc+ca)$$

56. Cho x,y,z là các số thực thoả mãn các điều kiện $0 < x \le y \le z$, x + y + z = xyz + 2. Chứng minh rằng

a) $(1-xy)(1-yz)(1-zx) \ge 0$

b) $x^2y \le 1$, $x^3y^2 \le \frac{32}{27}$

57. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a + b + c \ge abc$ .Chứng minh rằng ít nhất một trong ba bất đẳng thức sau đây là đúng

$$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{6}{c} \ge 6, \frac{2}{b}+\frac{3}{c}+\frac{6}{a} \ge 6, \frac{2}{c}+\frac{3}{a}+\frac{6}{b} \ge 6.$$

58. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện x + y + z = xyz .Chứng minh rằng

$$(x-1)(y-1)(z-1) \le 6\sqrt{3} - 10.$$

59. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left|\frac{a^3-b^3}{a+b} + \frac{b^3-c^3}{b+c} + \frac{c^3-a^3}{c+a}\right| \le \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{4}$$

60. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \ge (a+b+c)^3.$$

61. Cho $x_1, x_2, ..., x_n > 0$, n > 2 thoả mãn điều kiện

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) = n^2 + 1$$

Chứng minh rằng

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2}\right) > n^2 + 4 + \frac{2}{n(n-1)}$$

62. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 3 \ge (1+a)(1+b)(1+c).$$

63. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+a+c)^2}{2b^2+(a+c)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \le 8.$$

64.Cho x,y là các số thực dương và m,n là các số nguyên dương .Chứng minh rằng

$$(n-1)(m-1)(x^{m+n} + y^{m+n}) + (m+n-1)(x^my^n + x^ny^m) \ge mn(x^{m+n-1}y + y^{m+n-1}x).$$

65. Cho a,b,c,d,e là các số thực dương thoả mãn điều kiện abcde = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a+abc}{1+ab+abcd}+\frac{b+bcd}{1+bc+bcde}+\frac{c+cde}{1+cd+cdea}+\frac{d+dea}{1+de+deab}+\frac{e+eab}{1+ea+eabc}\geq\frac{10}{3}\ .$$

66.Cho $a,b,c\in(0;\frac{\pi}{2})$.Chứng minh rằng

$$\frac{\sin a.\sin(a-b).\sin(a-c)}{\sin(b+c)}+\frac{\sin b.\sin(b-a).\sin(b-c)}{\sin(a+c)}+\frac{\sin c.\sin(c-b).\sin(c-a)}{\sin(b+a)}\geq 0$$

67. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^4+b^4+c^4}+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\geq\sqrt{a^3b+b^3c+c^3a}+\sqrt{ab^3+bc^3+ca^3}.$$

68. Cho a,b,c,x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$ax+by+cz+\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}\geq\frac{2}{3}(a+b+c)(x+y+z).$$

69.Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác.Chứng minh rằng

$$3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-1\right)\geq 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right).$$

70. Cho $x_1,x_2,...,x_n>0$, n > 2 thoả mãn điều kiện $x_1+x_2+...+x_n=1$.Chứng minh rằng

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)\geq\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{n-x_i}{1-x_i}\right).$$

71. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+abc=4$.Chứng minh rằng

$$0\leq ab+bc+ca-abc\leq 2$$

72. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\leq\max\left\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2,(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2,(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2\right\}.$$

73. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}}{3}\leq\sqrt[3]{a.\frac{a+b}{2}.\frac{a+b+c}{3}}.$$

74. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $(x+y+z)^3=32xyz$.Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^4+y^4+z^4}{(x+y+z)^4}$$

75. Cho a,b,c,d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(a+b)^3(b+c)^3(c+d)^3(d+a)^3\geq 16a^2b^2c^2d^2(a+b+c+d)^4$$

76. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện a + b + c = 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{(ab)^4}{1-ab}+\frac{(bc)^4}{1-bc}+\frac{(ca)^4}{1-ca}$$

77. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{abc}(1+\sqrt[3]{abc})}$$

78. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=9$. Chứng minh rằng

$$2(a+b+c)-abc\leq 10$$

79. Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^2+xy+y^2}+\frac{1}{y^2+yz+z^2}+\frac{1}{z^2+zx+x^2}\geq\frac{9}{(x+y+z)^2}$$

80. Cho ba số thực dương a ,b ,c thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca\geq 1$ .Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+ab+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+bc+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ca+a^2}}\geq\frac{9}{\left(a+b+c\right)^2}$$

81. Cho a,b,c,d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$2(a^3 + 1)(b^3 + 1)(c^3 + 1)(d^3 + 1) \geq (1 + abcd)(1+ a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)(1+ d^2).$$

82. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(a + b)^4 + (b + c)^4 + (c + a)^4 \geq \frac{4}{7}(a^4 + b^4 + c^4).$$

83. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\le\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}.$$

84. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $21ab + 2bc + 8ca \leq 12$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}.$$

85. Cho a,b,c,x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện xy + yz + zx = 3. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c}(y+z)+\frac{b}{c+a}(z+x)+\frac{c}{a+b}(x+y)\ge 3$$

86. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\ge\frac{3}{5}.$$

87. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 1. Chứng minh rằng

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \geq 8(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2$$

88. Cho a,b,c,d là các số thực dương thoả mãn điều kiện abcd = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\ge 1$$

89. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\ge\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

90. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc + a + c = b. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau

$$P = \frac{2}{1+a^2}-\frac{2}{1+b^2}+\frac{3}{1+c^2}$$

91.Cho n số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ .Chứng minh rằng

$$\left(\sum_{i\in\mathrm{N}^*} a_i\right)^2 \le \sum_{1\le i\le j\le n}(a_i+...+a_j)^2$$

92. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}}+\sqrt{\frac{2b}{b+c}}+\sqrt{\frac{2c}{c+a}}\le 3$$

93. Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(xy + yz + zx)\left[\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right]\ge\frac{9}{4}$$

94.Cho $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$\prod_{i=1}^{n}(3x_i+1)\le 2^n.$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{6x_i+1}\ge\frac{n}{3}.$$

95.Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(n-1)(a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n) + n\, a_1a_2\ldots a_n \geq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \ldots + a_n^{n-1})$$

96. Cho $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ thoả mãn điều kiện $x_1x_2...x_n = 1$. Chứng minh rằng

$$\sum_{1\le i\le j\le n}(x_i - x_j)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n.$$

97. Cho $a_1, a_2, ..., a_n < \frac{1}{n-1}$ và $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$, n > 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{a_1a_2...a_n}{1-(n-1)a_i}}.$$

98. Cho $a_1, a_2, ..., a_n \in [0;1)$ thoả mãn điều kiện

$$a = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a_1}{1-a_1^2} + \frac{a_2}{1-a_2^2} + ... + \frac{a_n}{1-a_n^2} \geq \frac{na}{1-a^2}$$

99. Cho a,b,c,x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$(a + b + c)(x + y + z) = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 4$$

Chứng minh rằng

$$abcxyz < \frac{1}{36}.$$

100. Cho $x_1, x_2, ..., x_n > 0$, n > 2 thoả mãn điều kiện $x_1x_2...x_n = 1$.Tìm hằng số k_n nhỏ nhất sao cho

$$\frac{1}{\sqrt{1+k_nx_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+k_nx_2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1+k_nx_n}} \leq n-1.$$

101. Cho $x_1, x_2, ..., x_n > 0$, n > 2 thoả mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$.Tìm hằng số k_n lớn nhất sao cho

$$(1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_n) \geq k_nx_1x_2...x_n$$

102. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

103. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} + \frac{bc}{b^5+c^5+bc} + \frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq 1$$

104. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}$$

105. Cho x,y,z là các số thực dương và tích xyz = 1.Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{y+z+1} + \frac{1}{x+z+1} \leq 1.$$

106. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1.$$

107. Cho các số thực không âm x, y thay đổi và thỏa mãn x + y = 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \left(4x^2 + 3y\right)\left(4y^2 + 3x\right) + 25xy$$

108. Cho x,y,z là các số thực dương thay đổi và thoả mãn điều kiện xyz = 1.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

109.Cho x,y,z là ba số dương và thoả mãn điều kiện $x+y+z\le 1$.Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\ge\sqrt{82}.$$

110.Cho các số dương x,y,z thoả mãn điều kiện xyz = 1.Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\ge 3\sqrt{3}.$$

Khi nào đẳng thức xẩy ra ?

111.Cho x ,y là các số thực thay đổi .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}+|y-2|.$$

112. Cho hai số thực x≠0, y≠0 thay đổi và thoả mãn điều kiện $(x+y)xy=x^2+y^2-xy$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}.$$

113. Cho a≥b> 0. Chứng minh rằng

$$\left(2^a+\frac{1}{2^a}\right)^b\le\left(2^b+\frac{1}{2^b}\right)^a$$

114. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1+ab^2}{c^3}+\frac{1+bc^2}{a^3}+\frac{1+ca^2}{b^3}\ge\frac{18}{a^3+b^3+c^3}$$

115. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a+1)^2+b^2+1}+\frac{1}{(b+1)^2+c^2+1}+\frac{1}{(c+1)^2+a^2+1}\le\frac{1}{2}$$

116. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc = 1. Chứng minh rằng

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1$$

117. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+a)(1+c)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\ge\frac{3}{4}$$

118. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{1+c}+\frac{bc}{1+a}+\frac{ca}{1+b}\le\frac{1}{4}$$

119. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 1. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc}\le 1$$

120.Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$a+b+c+\frac{1}{abc}\ge 4\sqrt{3}$$

121. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 1. Chứng minh rằng

$$\sqrt{ab+c}+\sqrt{bc+a}+\sqrt{ca+b}\ge 1+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}.$$

122. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 1. Chứng minh rằng

$$(1+a)(1+b)(1+c)\ge 8(1-a)(1-b)(1-c).$$

123. Cho a,b là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}\ge\frac{1}{3}$$

124.Cho các số thực x,y .Chứng minh rằng

$$3(x + y + 1)^2 + 1 \geq 3xy .$$

125. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}} .$$

126.Cho a,b,c $\geq$ 1. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} \leq \sqrt{c(ab+1)} .$$

127. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện x + y + z = xyz .Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

128. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1 .$$

129. Cho a,b,c,d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}.$$

130. Cho a,b,c,d là các số thực dương thoả mãn điều kiện ab + bc + cd + da = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3} .$$

131. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab} \leq 1 \leq \frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab} .$$

132. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab} \geq a+b+c .$$

133. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}.$$

134. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq \frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1.$$

135.Cho a,b,c $\geq -\frac{3}{4}$ và a + b + c = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1} \leq \frac{9}{10}.$$

136. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện xyz = 1 .Chứng minh rằng

$$\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6} \geq 2 .$$

137.Cho $x \geq y \geq z > 0$ .Chứng minh rằng

$$\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y} \geq x^2+y^2+z^2.$$

138. Cho $a \geq b \geq c > 0$ .Chứng minh rằng

$$\frac{a^2-b^2}{c}+\frac{c^2-b^2}{a}+\frac{a^2-c^2}{b} \geq 3a-4b+c .$$

139. Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{xyz(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)} \le \frac{3+\sqrt{3}}{9}.$$

140. Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ và $a_1 + a_2 + ... + a_n < 1$ .Chứng minh rằng

$$\frac{a_1 a_2 ... a_n (1-a_1-a_2-...-a_n)}{(a_1+a_2+...+a_n)(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)} \le \frac{1}{n^{n+1}}.$$

141.Cho hai số thực a,b với $a \ne 0$ .Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{b}{a} \ge \sqrt{3}.$$

142. Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^{\ 2}}{a_2} + \frac{a_2^{\ 2}}{a_3} + ... + \frac{a_{n-1}^2}{a_n} + \frac{a_n^2}{a_1} \ge a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

143. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện xyz = 1 .Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z \ge 2(xy + yz + zx).$$

144. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện xyz ≥ xy + yz + zx .Chứng minh rằng

$$xyz \ge 3(x + y + z)$$

145.Cho x,y,z > 1 và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x+y+z} \ge \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

146. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện ab + bc + ca = 1. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a} \le \frac{1}{abc}.$$

147.Cho $x \ge 2, y \ge 2, z \ge 2$. Chứng minh rằng

$$(x^3 + y)(y^3 + z)(z^3 + x) \ge 125xyz.$$

148. Cho a,b,c,d là các số thực dương thoả mãn điều kiện $c^2 + d^2 = (a^2 + b^2)^3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{c} + \frac{b^3}{d} \ge 1.$$

149. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \ge 1.$$

150. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{c(c+a)} + \frac{bc}{a(a+b)} + \frac{ca}{b(b+c)} \ge \frac{a}{c+a} + \frac{b}{b+a} + \frac{c}{c+b}.$$

151. Cho a,b,c,d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a+c}{a+b} + \frac{b+d}{b+c} + \frac{c+a}{c+d} + \frac{d+b}{d+a} \ge 4.$$

152. Cho x,y,u,v là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{xy+xu+uy+uv}{x+y+u+v} \ge \frac{xy}{x+y} + \frac{uv}{u+v}.$$

153. Cho x,y,z là ba số thực thuộc đoạn $[1;4]$ và $x \ge y, x \ge z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}.$$

154. Cho x,y,z là ba số thực thuộc đoạn $[1;9]$ và $x \ge y, x \ge z$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{x+2y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}.$$

155. Cho x,y,z là ba số thực thuộc đoạn $\left[\frac{1}{3};3\right]$ và $x \ge y, x \ge z$.Chứng minh rằng

$$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x} \ge \frac{7}{5}.$$

156. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \ge 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

157. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện x + y + z = 1. Chứng minh rằng

$$x^2y + y^2z + z^2x \le \frac{4}{27}.$$

158. Cho a,b,c,d,e,f là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$a + b + c + d + e + f = 1 \text{ và } ace + bdf \ge \frac{1}{108}.$$

Chứng minh rằng

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab \le \frac{1}{36}.$$

159.Ch a,b,c $\in [0;1]$ .Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \le a^2b + b^2c + c^2a + 1.$$

160.Cho a,b,c ≥ 0 và a + b + c $\ge$ abc .Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge abc.$$

161. Cho a,b,c ≥ 0 và a + b + c $\ge$ abc .Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge \sqrt{3}abc.$$

162. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện x + y + z = $\sqrt{xyz}$ .Chứng minh rằng

$$xy + yz + zx \ge 9(x + y + z).$$

163. Cho x_1, x_2, x_3, x_4 là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x_1x_2x_3x_4 = 1$. Chứng minh rằng

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 \ge \max\left\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right\}.$$

164. Cho a,b,c,x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z} \ge \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}.$$

165. Cho a,b,c,d là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+b^4}+\frac{1}{1+c^4}+\frac{1}{1+d^4} = 1.$$

Chứng minh rằng

$$abcd \ge 3.$$

166.Cho x,y,z > 1. Chứng minh rằng

$$x^{x^2+2yz}y^{y^2+2zx}z^{z^2+2xy} \ge (xyz)^{xy+yz+zx}.$$

167.Cho $c \ge b \ge a \ge 0$ .Chứng minh rằng

$$(a + 3b)(b + 4c)(c + 2a) \ge 60abc.$$

168. Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 \ge \sqrt{2}(xy + yz).$$

169.Cho các số thực a,b,c thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{1+2bc}+\frac{b^2}{1+2ca}+\frac{c^2}{1+2ab} \ge \frac{3}{5}.$$

170. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc $\ge$ 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b^4+c^4}+\frac{1}{a^4+b+c^4}+\frac{1}{a^4+b^4+c}\le 1 .$$

171.Cho a > b > c > 0 , x > y > z > 0 . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)}\ge \frac{3}{4}.$$

172. Cho 3 số thực không âm a,b,c . Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge 2(ab+bc+ca)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

173. Cho ba số thực a,b,c đôi một phân biệt. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2}\ge 2$$

174. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện a + b + c = 3. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\ge \frac{3}{2}.$$

175. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{2a+b}+\frac{b}{2b+c}+\frac{c}{2c+a}\le 1.$$

176.Cho $\alpha,\beta,x_1,x_2,...,x_n>0, x_1+x_2+...+x_n=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1^3}{\alpha x_1+\beta x_2}+\frac{x_2^3}{\alpha x_2+\beta x_3}+...+\frac{x_n^3}{\alpha x_n+\beta_1}\ge \frac{1}{n(\alpha+\beta)}.$$

177.Cho $x,y\in[0;1]$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\le \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

178.Cho x,y,z > 0 , xyz = 1 , $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>x+y+z, k\in N^*$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^k}+\frac{1}{y^k}+\frac{1}{z^k}>x^k+y^k+z^k .$$

179. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 1. Chứng minh rằng

$$a.\sqrt[3]{1+b-c}+b.\sqrt[3]{1+c-a}+c.\sqrt[3]{1+a-b}\le 1 .$$

180. Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện x + y + z = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-xy}+\frac{1}{1-yz}+\frac{1}{1-xz}\le \frac{27}{8}.$$

181. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2\ge (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

182. Cho hai số x,y liên hệ với nhau bởi đẳng thức $x^2+2xy+7(x+y)+2y^2+10=0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=x+y+1$.

183. Với a,b là các số thực thoả mãn đẳng thức $(1+a)(1+b)=\frac{9}{4}$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{1+a^4}+\sqrt{1+b^4}$.

184. Cho a,b,c,d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3} \geq \frac{a+b+c+d}{abcd}\ .$$

185.Cho $a,b,c \in [0;1]$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ca+1}+\frac{c}{ab+1} \leq 2\,.$$

186. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 1. Chứng minh rằng

$$a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

187. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 1. Chứng minh rằng

$$2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) \geq \frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}\,.$$

188. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}\,.$$

189. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc = 8. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{\sqrt{(a^3+1)(b^3+1)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(b^3+1)(c^3+1)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(c^3+1)(a^3+1)}} \geq \frac{4}{3}\,.$$

190. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2} \leq 1\,.$$

191. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $xyz \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geq 0\ .$$

192. Cho a,b là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right) \geq \left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right).$$

193. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Chứng minh rằng

$$(a-1)(b-1)(c-1) \geq 8\,.$$

194.Cho x là số thực dương và n là số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$1+x^{n+1} \geq \frac{(2x)^n}{(1+x)^{n-1}}\ .$$

195. Cho x là số thực dương và n là số nguyên dương. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{x^n(x^{n+1}+1)}{x^n+1} \le \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1}$$

Khi nào đẳng thức xẩy ra ?

196. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \ge \frac{3}{4}.$$

197. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện ab + bc + ca = $\frac{1}{3}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2-bc+1} + \frac{1}{b^2-ca+1} + \frac{1}{c^2-ab+1} \le 3 .$$

198. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 1. Chứng minh rằng

$$\sqrt{ab(1-c)} + \sqrt{bc(1-a)} + \sqrt{ca(1-b)} \le \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

199. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \ge \sqrt{\frac{3}{2}(a+b+c)} .$$

200. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^4 + b^4 + c^4 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \le 1.$$

201. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện ab + bc + ca = 1. Chứng minh rằng

$$3\sqrt[3]{\frac{1}{abc} + 6(a+b+c)} \le \frac{\sqrt[3]{3}}{abc} .$$

202. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a,b,c ≥ 1. Chứng minh rằng

$$(2+abc)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \ge 9 .$$

203. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $xy\sqrt{xy} + yz\sqrt{yz} + zx\sqrt{zx} = 1$.

Chứng minh rằng

$$\frac{x^6}{x^3+y^3} + \frac{y^6}{y^3+z^3} + \frac{z^6}{z^3+x^3} \ge \frac{1}{2}.$$

204. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a,b,c $\in [1;2]$. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \le 10.$$

205. Cho a,b,c,d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{d^2} + \frac{d^2}{a^2} \ge \frac{a+b+c+d}{\sqrt[4]{abcd}}.$$

206.Cho $x \in [0;2]$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{4x-x^3}+\sqrt{x+x^3} \le 3\sqrt[4]{3}.$$

207. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3} \le \frac{1}{2}.$$

208. Cho x,y là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$(1+x)\left(1+\frac{1}{y}\right)+(1+y)\left(1+\frac{1}{x}\right) \ge 4+3\sqrt{2}.$$

209.Cho a,b,c $\in (0;1]$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b+c} \ge \frac{1}{3}+(1-a)(1-b)(1-c).$$

210. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$\frac{3x}{x+1}+\frac{4y}{y+1}+\frac{2z}{z+1}=2$$

Chứng minh rằng

$$x^3y^4z^2 \le \frac{1}{8^9}.$$

211. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right) \ge \frac{3}{2}\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right).$$

212.Cho x là một số thực bất kì . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{8} \le \frac{(1+x)^8+16x^4}{(1+x^2)^4} \le 17.$$

213. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a} \le 3.\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}.$$

214. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

215. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện x + y + z = 1, $n \ge 2$.Chứng minh rằng

$$x^ny + y^nz + z^nx \le \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

216. Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$16xyz(x + y + z) \le 3\sqrt[3]{(x+y)^4(y+z)^4(z+x)^4}.$$

217. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện xyz = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{x+y+y^3z}+\frac{y^2}{y+z+z^3x}+\frac{z^2}{z+x+x^3y}\geq 3\ .$$

218. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện xyz = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2y^2}{x^2y^2+x^7+y^7}+\frac{y^2z^2}{y^2z^2+y^7+z^7}+\frac{z^2x^2}{z^2x^2+z^7+x^7}\leq 1.$$

219. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ca}+\frac{\sqrt{abc}}{c+ab}\leq 1+\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

220. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}+\frac{5c^3-b^3}{bc+3c^2}+\frac{5a^3-c^3}{ca+3a^2}\leq a+b+c.$$

221. Cho x,y,z là các số thực thoả mãn điều kiện x,y,z ≥ -1 và $x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2 + y^2 + z^2$

Chứng minh rằng

$$x^5 + y^5 + z^5 \geq x^2 + y^2 + z^2\ .$$

222. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 6. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b+c}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c+a}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a+b}}\geq\frac{3\sqrt{17}}{2}\ .$$

223. Cho x,y,z,t là các số thực dương thoả mãn điều kiện xyzt = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^3(yz+zt+ty)}+\frac{1}{y^3(xz+zt+tx)}+\frac{1}{z^3(xt+ty+yx)}+\frac{1}{t^3(xy+yz+zx)}\geq\frac{4}{3}.$$

224. Cho $a_1,a_2,...,a_k>0, a_1+a_2+...+a_k\geq k(k,n\geq 1)$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^n+a_2^n+...+a_k^n}{a_1^{n+1}+a_2^{n+1}+...+a_k^{n+1}}\leq 1.$$

225. Cho *a, b, c* là độ dài 3 cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4(a^3+b^3+c^3)+15abc$.

226. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}\geq 2\left(\sqrt{\frac{c}{a+b}}+\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}\right).$$

227. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện ab + bc + ca = 1. Chứng minh rằng

$$a+b+c+abc\geq\frac{10\sqrt{3}}{9}.$$

228. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq a^2b^2c^2$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a^2b^2}{c^3(a^2+b^2)}+\frac{b^2c^2}{a^3(b^2+c^2)}+\frac{c^2a^2}{b^3(c^2+a^2)}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

229. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 6. Chứng minh rằng

$$\left(1+\frac{1}{a^3}\right)\left(1+\frac{1}{b^3}\right)\left(1+\frac{1}{c^3}\right)\ge\frac{729}{512}.$$

230. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện a + b + c = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+1}{b^2+1}+\frac{b^2+1}{c^2+1}+\frac{c^2+1}{a^2+1}\le\frac{7}{2}.$$

231. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 6(y + z - x) + 27xyz .$$

232. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \dfrac{\sqrt{5-4a}-\sqrt{1+a}}{\sqrt{5-4a}+2\sqrt{1+a}+6}$ trong đó a là tham số thực và $-1\le a\le\dfrac{5}{4}$.

233. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện xy + yz + zx = 1.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{\sqrt{3y+yz}}+\frac{y}{\sqrt{3z+xz}}+\frac{z}{\sqrt{3x+xy}}.$$

234.Cho a, b, c là các số dương, chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b+c}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{b}{c+a}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{c}{a+b}\right)^2}\ge\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$$

235.Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 3. Chứng minh rằng .

$$\frac{a}{ab+1}+\frac{b}{bc+1}+\frac{c}{ca+1}\ge\frac{12abc}{3+5abc}.$$

236. Cho a, b, c là các số thực dương, chứng minh bất đẳng thức

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^3+\left(\frac{b}{c+a}\right)^3+\left(\frac{c}{a+b}\right)^3\ge\frac{3}{8} .$$

237. Cho x,y là các số thực dương thoả mãn điều kiện x + y = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^3+y^3}+\frac{1}{xy}\ge 4+2\sqrt{3} .$$

238. Cho a,b,c,d là các số thực thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 = c + d = 4$. Chứng minh rằng

$$ac + bd + cd \le 4 + 4\sqrt{2} .$$

239.Cho x,y,z với x = max$\{x,y,z\}$.Chứng minh rằng

$$\frac{x}{y}+\sqrt{1+\frac{y}{x}}+\sqrt[3]{1+\frac{z}{x}}\ge 1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{2} .$$

240.Cho α là số thực dương và x,y,z là các số thực thoả mãn điều kiện xy + yz + zx = 1. Chứng minh rằng

$$\alpha(x^2+y^2)+z^2\ge\frac{-1+\sqrt{1+8\alpha}}{2} .$$

241.Cho a,b,c > 1. Chứng minh rằng

$$a^{\log_b c} + b^{\log_c a} + c^{\log_a b} \geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

242.Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a^6}{b^3+c^3} + \frac{b^6}{c^3+a^3} + \frac{c^6}{a^3+b^3} \geq \frac{1}{18}.$$

243. Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện x + y + z = 1. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{xy}{z+xy}} + \sqrt{\frac{yz}{x+yz}} + \sqrt{\frac{zx}{y+zx}} \leq \frac{3}{2}.$$

244.Cho x là số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x} \leq \sqrt{x+9}.$$

245. Cho a,b là các số thực thoả mãn điều kiện a > b ≥ 0 . Chứng minh rằng

$$2a + \frac{32}{(a-b)(2b+3)^2} \geq 5.$$

246. Cho a,b là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b = 4. Chứng minh rằng

$$2a + 3b + \frac{6}{a} + \frac{10}{b} \geq 18.$$

247. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện a + b + c = 3. Chứng minh rằng

$$\sqrt[5]{2a+b} + \sqrt[5]{2b+c} + \sqrt[5]{2c+a} \leq 3\sqrt[5]{3}.$$

248.Cho x,y,z là các số thực dương . Chứng minh rằng

$$(x + y + z)^6 \geq 432xy^2z^3.$$

249.Cho $x \in [0;1]$. Chứng minh rằng

$$13\sqrt{x^2 - x^4} + 9\sqrt{x^2 + x^4} \leq 16.$$

250. Cho a,b,c,d là các số thực dương ,chứng minh bất đẳng thức

$$\left(2 + \frac{3a}{5b}\right)\left(2 + \frac{3b}{5c}\right)\left(2 + \frac{3c}{5d}\right)\left(2 + \frac{3d}{5a}\right) \geq \frac{28561}{625}.$$

251. Cho a,b,c,d là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c + d ≤ 1. Chứng minh rằng

$$\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(1 + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)\left(1 + \frac{1}{d} + \frac{1}{a}\right) \geq 9^4.$$

252. Cho a,b,c,d là các số thực dương thoả mãn điều kiện $abcd \geq 16$. Chứng minh rằng

$$\left(a + \frac{2}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(b + \frac{2}{c} + \frac{1}{d}\right)\left(c + \frac{2}{d} + \frac{1}{a}\right)\left(d + \frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq \frac{2401}{16}.$$

253. Cho a,b là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b ≤ 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3+b^3} + \frac{1}{a^2b} + \frac{1}{ab^2} \geq 20.$$

254. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c ≤ 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{81}{2}.$$

255. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 3.Chứng minh rằng

$$\sqrt[5]{(2a+b)(a+c)a}+\sqrt[5]{(2b+c)(b+a)b}+\sqrt[5]{(2c+a)(c+b)c}\le 3\sqrt[5]{6}.$$

256. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $(a^2 + a + 2)(b + 1)^2(c^2 + 3c) = 64$. Chứng minh rằng

$$a^3b^4c^5 \le 1.$$

257. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c $\le \frac{3}{2}$.Chứng minh rằng

$$\left(3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(3+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(3+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\ge 343.$$

258. Cho a,b,c,m,n,p là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c ≤ 1 và m + n + p $\le \frac{3}{2}$ .Chứng minh rằng

$$\left(1+\frac{2}{a}+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{2}{b}+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{c}+\frac{1}{p}\right)\ge 9^3.$$

259.Cho x,y,z là các số thực. Chứng minh rằng

$$27(x^2+3)(y^2+3)(z^2+3)\ge 4(3xy+3yz+3zx)^2.$$

260. Cho x,y,z là các số thực thoả mãn điều kiện x + y + z < 0 và $4xz > y^2$. Chứng minh rằng

$$2x^2 + y^2 + 5z^2 + 6xy + 7xz + 2yz > 0.$$

261. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện ab + bc + ca = abc.Chứng minh rằng

$$(a + b - c - 1)(b + c - a - 1)(c + a - b - 1) \le 8.$$

262. Cho a,b,c là các số thực dương . Chứng minh rằng

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc}+\frac{a^2+b^2}{c^2+ab}+\frac{b^2+c^2}{a^2+bc}+\frac{c^2+a^2}{b^2+ac}\ge\frac{9}{2}.$$

263. Cho a,b là các số thực dương thoả mãn điều kiện ab = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{1+b}+\frac{b^3}{1+a}\ge 1.$$

264. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện x + y + z = 2. Chứng minh rằng

$$2(x^3+y^3+z^3)\le 2+x^4+y^4+z^4.$$

265. Cho a,b,c là các số thực dương . Chứng minh rằng

$$\left(a^2+\frac{1}{ab}\right)^3+\left(b^2+\frac{1}{bc}\right)^3+\left(c^2+\frac{1}{ca}\right)^3\ge 24.$$

266. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc = 1.Chứng minh rằng

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge 2(1+a+b+c).$$

267. Cho x,y,z là các số thực dương . Chứng minh rằng

$$(xyz+1)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\geq x+y+z+6.$$

268.Cho $a,b,c,d\in[0;1]$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{bcd+1}+\frac{b}{cda+1}+\frac{c}{dab+1}+\frac{d}{abc+1}\leq 3.$$

269. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện ab + bc + ca = 1.Chứng minh rằng

$$\frac{a^8}{(a^2+b^2)^2}+\frac{b^8}{(b^2+c^2)^2}+\frac{c^8}{(c^2+a^2)^2}\geq\frac{1}{12}.$$

270. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c ≤ 3 .Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}+27\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\geq 84.$$

271.Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$6\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\leq 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{10a+b+c}+\frac{1}{a+10b+c}+\frac{1}{a+b+10c}\leq\frac{1}{12}.$$

272. Cho a,b,c,d,e,f là các số thực thoả mãn điều kiện ab + bc + cd + de + ef = 1.Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2\geq\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{7}}.$$

273. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 1.Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^3+a^2+1}+\frac{b}{b^3+b^2+1}+\frac{c}{c^3+c^2+1}\leq\frac{27}{31}.$$

274. Cho x,y,z là các số thực dương . Chứng minh rằng

$$\frac{xy+yz+zx}{\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+zx+x^2}}\leq\frac{x+y+x}{3\sqrt{3}}.$$

275. Cho a,b là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$a^4+b^4+3\geq a+b+3.\frac{3ab+1}{4}.\sqrt[3]{\frac{3ab+1}{4}}.$$

276. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\geq\frac{3}{abc+1}.$$

277. Cho x,y,z là các số thực không âm .Chứng minh rằng

$$8(x^3+y^3+z^3)^2\geq 9(x^2+yz)(y^2+zx)(z^2+xy).$$

278. Cho x,y,z là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\frac{x^2-z^2}{y+z}+\frac{y^2-x^2}{z+x}+\frac{z^2-y^2}{x+y}\geq 0.$$

279.Cho x,y là các số thực dương thoả mãn điều kiện x + y = 1.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^y + y^x.$$

280. Cho a,b,c là các số thực không âm .Chứng minh rằng

$$a+b+c\geq \frac{a-b}{b+2}+\frac{b-c}{c+2}+\frac{c-a}{a+2}\ .$$

281. Cho x,y,z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện x + 2y + 3z = $\frac{1}{4}$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{232y^3-x^3}{2xy+24y^2}+\frac{783z^3-8y^3}{6yz+54z^2}+\frac{29x^3-27z^3}{3xz+6x^2}\ .$$

282.Cho $a,b,c,d\in\left(0;\frac{1}{2}\right]$.Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4-a-b-c-d}\right)^4\geq \frac{abcd}{(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)}\ .$$

283. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện a + b + c = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+3(ab+bc+ca)+2\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ .$$

284. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{-x^2+4x+21}-\sqrt{-x^2+3x+10}\ .$$

285. Cho x,y là hai số thực không âm thay đổi.Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}\ .$$

286.Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác .Chứng minh rằng

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{3(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}\geq 9\ .$$

287.Cho 10 số thực không âm $a_i,b_i\,(i=1,2,...,5)$ thoả mãn điều kiện $a_i^2+b_i^2=1(i=1,2,...,5)$ và $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=1$.Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{b_1+b_2+b_3+b_4+b_5}{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}\ .$$

288. Cho x,y,z là các số thực không âm.Chứng minh rằng

$$\left[(x+y)(y+z)(z+x)\right]^2\geq xyz(2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y)\,.$$

289. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\frac{a+b+c}{3} \le \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{abc}} .$$

290.Cho $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ và $x_1 + x_2 + ... + x_n = 2n$ với n ≥ 3 .Chứng minh rằng

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{i=1 \\ i\ne j}}^{n}\frac{x_j}{\sqrt{x_i^3+1}} \ge \frac{2n(n-1)}{3} .$$

291.Cho hàm số $f : [1,+\infty) \to R,\ f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t+2002t^{2002}}$ .Chứng minh với các số thực $x_1, x_2, ..., x_n \ge 1$,ta có

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n} \le \ln\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}.$$

292.Cho các số thực a,b,c thoả mãn điều kiện $0 \le a \le b \le c \le 3$ .Chứng minh rằng

$$(a-b)(a^2-9)+(a-c)(b^2-9)+(b-c)(c^2-9) \le 36 .$$

293.Cho các số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ .Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{a_1^3+a_2^3+...+a_n^3} \le \sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2} .$$

294. Chứng minh rằng với mọi số dương a,b,c ta luôn có

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge 3\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)^{\frac{2}{3}} .$$

295. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện a + b + c = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{4}}+\sqrt{b+\frac{(c-a)^2}{4}}+\sqrt{c+\frac{(a-b)^2}{4}} \le 2.$$

296. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+7abc+b^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+7abc+c^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+7abc+a^3}} \ge 1.$$

297. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện a + b + c = 3.Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{1+b+bc}}+\sqrt{\frac{b}{1+c+ca}}+\sqrt{\frac{c}{1+a+ab}} \ge \sqrt{3} .$$

298. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{a+9b+9c}+\frac{b^2}{b+9c+9a}+\frac{c^2}{c+9a+9b} \ge \frac{3}{19}.\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}.$$

299. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc = 1.Chứng minh rằng

$$\frac{a}{2a^3+1}+\frac{b}{2b^3+1}+\frac{c}{2c^3+1} \le 1 .$$

300.Cho các số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ với $n \ge 2$ thoả mãn điều kiện $x_1 + x_2 + ... + x_n \ge 0$ và $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2 = 1$.Đặt M = $\max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.Chứng minh rằng

$$M \geq \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}.$$

301. Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n \geq 1)$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right) \geq \left(\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+...+\frac{1}{1+a_n}\right)\left(n+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)$$

Đẳng thức xẩy ra khi nào ?

302. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x^3+y^3+z^3=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 3(xy+yz+zx) - xyz.$$

303. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{2\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{(a+b+c+\sqrt[3]{abc})^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$ với mọi a,b,c > 0 .

304. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 1.Chứng minh rằng

$$\frac{4}{81(ab+bc+ca)}+abc \geq \frac{5}{27}.$$

305.Cho a,b,c là các số thực không âm phân biệt .Chứng minh rằng

$$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right) \geq \frac{11+5\sqrt{5}}{2}.$$

306. Cho x,y là các số thực dương thoả mãn điều kiện x + y + 1 = 3xy. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{3x}{y(x+1)}+\frac{3y}{x(y+1)}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}.$$

307.Cho các số thực x,y thỏa mãn điều kiện $x^2+xy+y^2 \leq \sqrt{3}$.Chứng minh rằng

$$-4\sqrt{3}-3 \leq x^2-xy-3y^2 \leq 4\sqrt{3}-3.$$

308.Cho a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác.Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geq a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2).$$

309.Cho n là số nguyên với n >3.Gọi $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực thoả mãn

$$\min\left|a_i-a_j\right| = 1, 1 \leq i \leq j \leq n$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sum_{k=1}^{n}\left|a_k\right|^3.$$

310. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^3 + b^3 = c^3$.Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 - c^2 > 6(c-a)(c-b).$$

311.Cho x,y,z là các số thực thoả mãn điều kiện $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^2 + y^2 + z^2.$$

312. Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 1$.Chứng minh rằng

$$\frac{x_1x_2}{x_3}+\frac{x_2x_3}{x_4}+...+\frac{x_nx_1}{x_2}\ge 4n.$$

313. Cho $a_1,a_2,...,a_{300}$ không âm thoả mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{300}a_i=1$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\sum_{i\ne j,i|j}a_ia_j.$$

314. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện x + y + z = xy + yz + zx. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^2+y+1}+\frac{1}{y^2+z+1}+\frac{1}{z^2+x+1}\le 1.$$

315. Cho x,y,z là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$x^3(y^2+z^2)^2+y^3(x^2+z^2)^2+z^3(x^2+y^2)^2\ge xyz\left[xy(x+y)^2+yz(y+z)^2+zx(z+x)^2\right].$$

316.Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{2}$.Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2+x^3}+\frac{1}{2+y^3}+\frac{1}{2+z^3}<\frac{1}{3}.$$

317. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện x + y + z = 3. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2+x^2+y^2}+\frac{1}{2+y^2+z^2}+\frac{1}{2+z^2+x^2}\le\frac{3}{4}.$$

318.Cho ba số x,y,z khác 1 thoả mãn điều kiện xyz = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\ge 1.$$

319. Cho x,y là các số thực dương .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{x^3}{x^3+8y^3}}+\sqrt{\frac{4y^3}{y^3+(x+y)^3}}.$$

320. Cho a,b,c là các số thực .Chứng minh rằng

$$\sqrt{2(a^2+b^2)}+\sqrt{2(b^2+c^2)}+\sqrt{2(c^2+a^2)}\ge\sqrt{3(a+b)^2+3(b+c)^2+3(c+a)^2}.$$

321. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện ab + bc + ca = abc.Chứng minh rằng

$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)}+\frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)}+\frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)}\ge 1.$$

322. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện xy + yz + zx = 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{3x+3y+2z}{\sqrt{6(x^2+5)}+\sqrt{6(y^2+5)}+\sqrt{z^2+5}}.$$

323.Cho a,b,c $\in\left[\frac{1}{2};1\right]$.Chứng minh rằng

$$2 \le \frac{a+b}{1+c} + \frac{b+c}{1+a} + \frac{c+a}{1+b} \le 3.$$

324.Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác . Chứng minh rằng

$$(-a+b+c)(a-b+c)+(a-b+c)(a+b-c)+(a+b-c)(-a+b+c) \le \sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

325.Cho các số thực x,y thoả mãn điều kiện $1 \le x^2 - xy + y^2 \le 2$. Chứng minh rằng

$$\frac{2}{9} \le x^4 + y^4 \le 8.$$

326.Cho a,b,c là các số thực thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 \le 2$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 2011ca - ab - bc.$$

327. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 1.Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \ge \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$

328.Cho $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng

$$\sin\sqrt{x} \le \sqrt{\sin x}.$$

329. Cho $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng

$$\sin x + \tan x > 2x.$$

330. Cho a,b,c là các số thực không âm .Chứng minh rằng

$$(a+b+c)^2 \ge 3(a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}).$$

331. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{2x^2+2y^2-2x+2y+1} + \sqrt{2x^2+2y^2+2x-2y+1} + \sqrt{2x^2+2y^2+4x+4y+4}.$$

332. Cho a,b,c là các số thực thoả mãn điều kiện a + b + c = 1 và ab + bc + ca > 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{|a-b|} + \frac{2}{|b-c|} + \frac{2}{|c-a|} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}.$$

333. Cho a,b,c,d là các số thực dương thoả mãn điều kiện

3(a + b + c + d) + 4(abc + bcd + cda + dab) = 8

Chứng minh rằng

$$ab + ac + bc + ad + bd + cd \le 2.$$

334. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc = 1.Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}} \ge \sqrt{2}.$$

335. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$(a^{2012}-a^{2010}+3)(b^{2012}-b^{2010}+3)(c^{2012}-c^{2010}+3)\geq 9(ab+bc+ca).$$

336. Chứng minh rằng nếu phương trình sau có nghiệm

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+1=0$$

thì $a^2+b^2+c^2\geq \frac{4}{3}$.Dấu bằng xẩy ra khi nào ?

337.Tìm các giá trị của a,b để phương trình

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$$

có nghiệm và tổng a^2+b^2 đạt giá trị nhỏ nhất .

338.Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện x + y + z = 1. Chứng minh rằng

$$xy+yz+zx\geq 4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+5xyz.$$

339.Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện x + y + z = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{y^2+z}+\frac{y}{z^2+x}+\frac{z}{x^2+y}\geq \frac{9}{4}.$$

340. Cho a,b,c,d,e,f là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}+\frac{ef}{e+f}\leq \frac{(a+c+e)(b+d+f)}{a+b+c+d+e+f}.$$

341.Cho $a\geq 1, b\geq 1$.Chứng minh rằng

$$3\left(\frac{a^2-b^2}{8}\right)^2+\frac{ab}{a+b}\geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{8}}.$$

342.Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}\leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-\sqrt{ab}\leq \frac{(a-b)^2}{4\sqrt{ab}}.$$

343. Cho a,b,c là các số thực thoả mãn điều kiện abc = 1.

Chứng minh rằng ít nhất hai trong ba số $2a-\frac{1}{b}, 2b-\frac{1}{c}, 2c-\frac{1}{a}$ đều lớn hơn 1 .

344. Cho a,b,c,d là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2.$$

345.Cho a > b > 0 . Chứng minh rằng

$$\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8b}.$$

346.Cho $a,b,c,d\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$. Chứng minh rằng

$$\frac{abcd}{(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)}\leq \frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{(1-a)^4+(1-b)^4+(1-c)^4+(1-d)^4}.$$

347. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 1.Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{1}{a}-1}\sqrt{\frac{1}{b}-1}+\sqrt{\frac{1}{b}-1}\sqrt{\frac{1}{c}-1}+\sqrt{\frac{1}{c}-1}\sqrt{\frac{1}{a}-1}\geq 6 \ .$$

348. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 2.Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{27}{13} \ .$$

349.Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác thoả mãn điều kiện a + b + c = 1.Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+4abc\leq\frac{1}{2}.$$

350. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\frac{9}{a+b+c}\leq 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

351. Cho x,y,z là các số thực .Chứng minh rằng

$$\frac{x^2-y^2}{2x^2+1}+\frac{y^2-z^2}{2y^2+1}+\frac{z^2-x^2}{2z^2+1}\leq 0\,.$$

352. Cho x ,y là các số thực thay đổi thoả mãn điều kiện $x^2+xy+y^2=1$ .Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = x^3y + xy^3\ .$$

353. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geq\frac{3}{4}(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}).$$

354. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$x^2yz+xy^2z+xyz^2\leq\frac{1}{3}.$$

355.Cho $x, y, z \in [0;1]$ Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức

$$S = x^2y - y^2x \text{ và } P = x^2y + y^2z + z^2x - x^2z - y^2x - z^2y\ .$$

356. Cho a,b,c là các số thực thoả mãn điều kiện a < b < c , a + b + c = 6 , ab + bc + ca = 9
Chứng minh rằng

$$0 < a < 1 < b < 3 < c < 4\ .$$

357. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện ab + bc + ca + 2abc = 1.Chứng minh rằng

$$2(a + b + c) + 1 \geq 32abc\ .$$

358. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện x + y + z = 3 và a,b,c là các số khác 0
Chứng minh rằng

$$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}\geq\frac{x}{1+a^2}+\frac{y}{1+b^2}+\frac{z}{1+c^2}\ .$$

359.Cho $x,y\in\left[1;\frac{3}{2}\right]$. Chứng minh rằng

$$y\sqrt{3-2x}+x\sqrt{3-2y}\le x^2+y^2.$$

360. Cho a,b,c là các số thực thoả mãn điều kiện a + b + c = 1.Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+1\ge 4(ab+bc+ca).$$

361. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\frac{a^6}{b^2+c^2}+\frac{b^6}{c^6+a^6}+\frac{c^6}{a^2+b^2}\ge\frac{abc(a+b+c)}{2}.$$

362.Cho $0\le a,b,c<\frac{1}{\sqrt{3}}$. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{1-ab}+\frac{b+c}{1-bc}+\frac{c+a}{1-ca}\le\frac{2(a+b+c-abc)}{1-ab-bc-ca}.$$

363. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác .Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge\frac{a}{c}(a+b-c)+\frac{c}{b}(c+a-b)+\frac{b}{a}(b+c-a).$$

364.Cho x,y là các số thực không âm thoả mãn điều kiện x + y = 1.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=3\sqrt{1+2x^2}+2\sqrt{40+9y^2}.$$

365.Cho a,b,c là ba số thực dương thoả mãn abc = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{a^5-a^2+3ab+6}}+\frac{1}{\sqrt{b^5-b^2+3bc+6}}+\frac{1}{\sqrt{c^5-c^2+3ca+6}}\le 1.$$

366.Cho a,b,c > 1 thoả mãn điều kiện a + b + c = abc .Chứng minh rằng

$$(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)\le 8.$$

367. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{a^2+bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2+ca}{(b+a)(b+c)}+\frac{c^2+ab}{(c+a)(c+b)}.$$

368. Cho a,b,c là các số thực không âm .Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^4+\frac{b^4}{2}+\frac{c^4}{2}}+\sqrt{b^4+\frac{c^4}{2}+\frac{a^4}{2}}+\sqrt{c^4+\frac{a^4}{2}+\frac{b^4}{2}}\ge\sqrt{a^4+b^3c}+\sqrt{b^4+c^3a}+\sqrt{c^4+a^3b}.$$

369. Cho a,b,c là ba số thực dương thoả mãn a + b + c + 1 = 4abc.Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\le 3\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

370. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}+\sqrt{\frac{a+b}{c}}\ge\sqrt{6.\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}}.$$

371. Cho a,b,c,d là các số thực không âm thoả mãn $a^2+b^2+c^2+d^2=4$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2}\,(4 - ab - bc - cd - da) \ge (\sqrt{2} + 1)\,(4 - a - b - c - d)\ .$$

372. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+2bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+2ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+2ab}} \le \frac{a+b+c}{\sqrt{ab+bc+ca}}\ .$$

373. Cho a,b,c là các số thực không âm .Chứng minh rằng

$$\frac{a^3+abc}{b+c} + \frac{b^3+abc}{c+a} + \frac{c^3+abc}{a+b} \ge a^2+b^2+c^2\ .$$

374. Cho a,b,c là các số thực không âm nhưng không có hai số nào trong ba số đồng thời bằng 0 Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}} + \sqrt[3]{\frac{b^2+ca}{c^2+a^2}} + \sqrt[3]{\frac{c^2+ab}{a^2+b^2}} \ge \frac{9\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\ .$$

375. Cho a,b,c là các số thực .Chứng minh rằng

$$3(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2) \ge a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\ .$$

376. Cho x,y,z là các số thực không âm .Chứng minh rằng

$$x^4(y+z)+y^4(z+x)+z^4(x+y) \le \frac{1}{12}(x+y+z)^5\ .$$

377. Cho a,b,c là ba số thực dương thoả mãn abc = 1. Chứng minh rằng

$$a(b^2-\sqrt{b})+b(c^2-\sqrt{c})+c(a^2-\sqrt{a}) \ge 0\ .$$

378. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$(ab+bc+ca)^3 \le 3(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)\ .$$

379. Cho a,b,c là các số thực dương phân biệt .Chứng minh rằng

$$\frac{a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca} \ge \frac{16abc}{(a+b+c)^2}\ .$$

380.Cho a,b là hai số thực phân biệt thoả mãn điều kiện

$$|a-1|+|b+1| = |a|+|b| = |a-1|+|b+1|$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = |a+b|$$

381.Cho $0 < y < x < 1, 0 < z < 1$ .Chứng minh rằng

$$(x^z-y^z)(1-x^zy^z) > \frac{x-y}{1-xy}\ .$$

382. Cho a,b,c là ba số thực thoả mãn $3(a+b) \ge 2|ab+1|$ .Chứng minh rằng

$$9(a^3+b^3) \ge |a^3b^3+1|.$$

383. Cho a,b,c,d là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$3(a^2-ab+b^2)(c^2-cd+d^2)\ge 2(a^2c^2-abcd+b^2d^2)\ .$$

384. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

a) $(a^3+b^3+c^3)^2\ge(a^4+b^4+c^4)(ab+bc+ca)$.

b) $9(a^4+b^4+c^4)^2\ge(a^5+b^5+c^5)(a+b+c)^3$.

385. Cho a,b là hai số thực thoả mãn điều kiện $9a^2+8ab+7b^2\le 6$. Chứng minh rằng

$$7a+5b+12ab\le 9\ .$$

386. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{2(a^2+b^2+c^2)}\ .$$

387. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc = 1.Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}+\frac{4(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge ab+bc+ca\ .$$

388. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^2}{4a^2+ab+4b^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{4b^2+bc+4c^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{4c^2+ca+4a^2}}\le 1\ .$$

389. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc $\le$ 8 .Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{c^2-c+1}\ge 1\ .$$

390. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $(x+y-z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=(x^4+y^4+z^4)\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}+\frac{1}{z^4}\right)\ .$$

391. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện ab + bc + ca = 1 .Chứng minh rằng

$$\frac{1+a^2b^2}{(a+b)^2}+\frac{1+b^2c^2}{(b+c)^2}+\frac{1+c^2a^2}{(c+a)^2}\ge\frac{5}{2}\ .$$

392. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc = 1.Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a+b}{b+1}}+\sqrt{\frac{b+c}{c+1}}+\sqrt{\frac{c+a}{a+1}}\ge 3$$

393.Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông .Hãy tìm giá trị lớn nhất của số thực k để

$$a^3+b^3+c^3\ge k(a+b+c)^3\ .$$

394. Cho $x_1,x_2,...,x_n$ là các số thực dương thoả mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$.Chứng minh rằng

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+x_i}}\right) \le \frac{n^2}{\sqrt{n+1}} .$$

395. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện x + y + z = 1 .Chứng minh rằng

$$\frac{xy}{\sqrt{xy+yz}}+\frac{yz}{\sqrt{yz+zx}}+\frac{zx}{\sqrt{zx+xy}} \le \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

396. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 3.Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \ge a^2+b^2+c^2 .$$

397. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \ge \frac{3}{2}\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right) .$$

398. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 1.Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \ge 3(a^2+b^2+c^2) .$$

399. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện xy + yz + zx = 1 .Chứng minh rằng

$$\frac{27}{4}(x+y)(y+z)(z+x) \ge (\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x})^2 \ge 6\sqrt{3} .$$

400. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a+2b}{a+2c}\right)^3+\left(\frac{b+2c}{b+2a}\right)^3+\left(\frac{c+2a}{c+2b}\right)^3 \ge 3 .$$

401.Cho $k \in Z^+, a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a_1+a_2+...+a_n=1$. Chứng minh rằng

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1-a_i^k}{a_i^k} \ge (n^k-1)^n .$$

402. Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a_1+a_2+...+a_n=1$. Chứng minh rằng

$$a_1a_2+a_2a_3+...+a_{n-1}a_n \le \frac{1}{4} .$$

403. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc = 1.Chứng minh rằng

$$5+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge (1+a)(1+b)(1+c) .$$

404. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{4a^3+4b^3}+\sqrt[3]{4b^3+4c^3}+\sqrt[3]{4c^3+4a^3} \le \frac{4a^2}{a+b}+\frac{4b^2}{b+c}+\frac{4c^2}{c+a} .$$

405.Cho a,b,c > 1 thoả mãn điều kiện $\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{b^2-1}+\frac{1}{c^2-1}=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1} \le 1 .$$

406. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$1 < \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}} \le \frac{3\sqrt{2}}{2} .$$

407. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 3.Chứng minh rằng

$$\frac{a}{ab+1}+\frac{b}{bc+1}+\frac{c}{ca+1} \ge \frac{3}{2} .$$

408.Cho $a,b,c \in [0;1]$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a(1-b)(1-c)}+\sqrt{b(1-c)(1-a)}+\sqrt{c(1-a)(1-b)}\le 1+\sqrt{abc}\ .$$

409. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}\ .$$

410. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 3.Chứng minh rằng

$$\frac{a^2(b+1)}{a+b+ab}+\frac{b^2(c+1)}{b+c+bc}+\frac{c^2(a+1)}{c+a+ca}\ge 2\ .$$

411. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{(a+b)^3}{8ab(4a+4b+c)}}+\sqrt{\frac{(b+c)^3}{8bc(4b+4c+a)}}+\sqrt{\frac{(c+a)^3}{8ca(4c+4a+b)}}\ge 1\ .$$

412. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện a + b + c = 3.Chứng minh rằng

$$\frac{1}{6-ab}+\frac{1}{6-bc}+\frac{1}{6-ca}\le\frac{3}{5}\ .$$

413. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn a + b + c =1. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}\le\frac{9}{10}$$

414. Cho x,y,z là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\frac{2\sqrt{x}}{x^3+y^2}+\frac{2\sqrt{y}}{y^3+z^2}+\frac{2\sqrt{z}}{z^3+x^2}\le\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\ .$$

415. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 1.Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{3a^2+2b+3}+\frac{bc}{3b^2+2c+3}+\frac{ca}{3c^2+2a+3}\le\frac{1}{12}\ .$$

416. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$3(a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc})\le 4(a+b+c)\ .$$

417.Cho x$\in R$ .Chứng minh rằng

$$x\left(2.3^x-\frac{4x^2+x+2}{x^2+x+1}\right)\ge 0\ .$$

418.Cho $a,b\in[1;2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A=\frac{(a+b)^2}{a^3+b^3}.$$

419. Cho x,y,z là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$4(xy+yz+zx)\le\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\right).$$

420.Cho a,b,c > 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{b}-1}+\frac{b}{\sqrt{c}-1}+\frac{c}{\sqrt{a}-1}\ge 12.$$

421. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge a\sqrt{ac}+b\sqrt{ba}+c\sqrt{cb}\ .$$

422. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x^3+y^3+z^3=1$.Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}}\geq 2 \ .$$

423.Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện a + b + c = 1.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S = ab + 2bc + 3ca \ .$$

424. Cho x,y,z là ba số thực dương thoả mãn điều kiện $x^3 + y^3 + z^3 = 3$.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 3(xy + yz + zx) - xyz \ .$$

425.Cho $a,b,c \geq 1$. Chứng minh rằng

$$a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)+2\left(\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\right)\geq 9.$$

426. Cho a,b,c là ba số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{ab^2+bc^2+ca^2}{(ab+bc+ca)^2} \ .$$

427. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc = 1. Hãy xác định giá trị lớn nhất của số thực k thoả mãn bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3k\geq (k+1)(a+b+c) \ .$$

428.Cho x,y,z$\in[1;2]$ .Chứng minh rằng

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 6\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right) \ .$$

429. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc $\geq$ 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{ac}}}+\frac{b}{\sqrt{c+\sqrt{ab}}}+\frac{c}{\sqrt{a+\sqrt{bc}}}\geq\frac{3}{\sqrt{2}} \ .$$

430.Cho $\frac{1}{2}\leq x,y,z\leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x+y}{1+z}+\frac{y+z}{1+x}+\frac{z+x}{1+y} \ .$$

431. Cho x,y,z là ba số thực không âm thoả mãn điều kiện x + y + z = 4. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}+\sqrt{4z+1} \ .$$

432. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện a + b + c = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3 \ .$$

433. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$4abc\left[\frac{1}{(a+b)^2c}+\frac{1}{(b+c)^2a}+\frac{1}{(c+a)^2b}\right]+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+b}{c}\geq 9.$$

434. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = abc .Chứng minh rằng

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} \le \frac{bc}{a(1+bc)} + \frac{ca}{b(1+ca)} + \frac{ab}{c(1+ab)} \le \frac{a+b+c}{4}.$$

435.Cho $x, y \in \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+x^2}.$$

436. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{y^2+z^2} + \sqrt{z^2+x^2} = 2011$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}.$$

437. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{1+b-a} + \frac{b^2}{1+c-b} + \frac{c^2}{1+a-c} \ge 1.$$

438.Cho x,y,z $\in (0;1)$ thoả mãn điều kiện xyz = (1 – x)(1 – y)(1 – z) . Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 \ge \frac{3}{4}.$$

439.Cho a,b,c ≥ -1 thoả mãn điều kiện a + b + c = $\sqrt[3]{4} - 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^3 + b^3 + c^3.$$

440. Cho a,b,c là các số thực dương .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} + \frac{(a+b+c)^3}{abc}.$$

441.Cho n $\in N$ .Kí hiệu (2n + 1) !! là tích các số nguyên dương lẻ từ 1 đến 2n + 1. Chứng minh rằng

$$(2n+1)^{n+1} \le (2n+1)!!\pi^n.$$

442. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $ab+bc+ca \le 3abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4b}{2a+b} + \frac{b^4c}{2b+c} + \frac{c^4a}{2c+a} \ge 1.$$

443.Cho a,b,c,d là các số thực phân biệt thoả mãn điều kiện

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 4, ac = bd.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{b}{d} - \frac{abcd}{(ab+cd)^2}.$$

444. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $abc \ge 1$. Chứng minh rằng

$$a+b+c \ge \frac{1+a}{1+b} + \frac{1+b}{1+c} + \frac{1+c}{1+a}.$$

445. Cho x,y,z là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$xyz + 2(x^2+y^2+z^2) + 8 \ge 5(x+y+z).$$

Đẳng thức xẩy ra khi nào ?

446.Cho a,b,c là ba số thực đôi một khác nhau .Chứng minh rằng

$$\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right)\left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right]\geq\frac{9}{4}$$

Đẳng thức xẩy ra khi nào ?

447. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 1.Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{ab}{c}+1}+\sqrt{\frac{bc}{a}+1}+\sqrt{\frac{ca}{b}+1}\geq 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

448. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\left(\frac{bc+a}{1+a}\right)\left(\frac{ca+b}{1+b}\right)\left(\frac{ab+c}{1+c}\right)\geq abc\,.$$

449. Cho x,y,z là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\frac{yz}{x(x+y+z)+1}+\frac{zx}{y(x+y+z)+1}+\frac{xy}{z(x+y+z)+1}\geq\frac{x^2}{x(x+y+z)+1}+\frac{y^2}{y(x+y+z)+1}+\frac{z^2}{z(x+y+z)+1}$$

450. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc = 1. Chứng minh rằng

$$a^3b+b^3c+c^3a\geq a+b+c.$$

451. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện x + y + z = 1.Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1+xy}}+\frac{1}{\sqrt{1+yz}}+\frac{1}{\sqrt{1+zx}}\geq\frac{9}{\sqrt{10}}.$$

452.Cho $x,y\in[-1;1]$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}\leq 2\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}.$$

453. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện ab + bc + ca = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}\leq\frac{3}{2}.$$

454.Cho a,b,x,y là các số thực dương thoả mãn a < b. Chứng minh rằng

$$(x^a+y^a)^b\geq(x^b+y^b)^a.$$

455.Cho $a,b,c\in\left(0;\frac{1}{2}\right]$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)\geq\left(\frac{3}{a+b+c}-1\right)^3.$$

456. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+(b+c)^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+(c+a)^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+(a+b)^2}}\geq 1\,.$$

457. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$(a^2+2ab)^a(b^2+2bc)^b(c^2+2ca)^c\geq(a^2+b^2+c^2)^{a+b+c}.$$

458.Chứng minh rằng nếu xy + yz + zx = 5 thì $3x^2+3y^2+z^2\geq 10$.

459. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $b^2 + c^2 \le a^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a^2}(b^2+c^2) + a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

460. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện xy + yz + zx = 1 .
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{\sqrt{3}y + yz} + \frac{y}{\sqrt{3}z + xz} + \frac{z}{\sqrt{3}x + xy}.$$

461.Cho a,b,c $\in [0;1]$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} + abc \le \frac{5}{2}.$$

462.Cho a,b,c là các số thực không âm . Chứng minh rằng

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \ge abc + \frac{3}{4}\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|.$$

463.Cho x,y,z là ba số thực thoả mãn 2x + 3y + z = 40. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 2\sqrt{x^2+1} + 3\sqrt{y^2+16} + \sqrt{z^2+36}.$$

464. Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn x + y + z = 1

$$CMR: \quad \frac{1}{1-xy} + \frac{1}{1-yz} + \frac{1}{1-xz} \le \frac{27}{8}$$

465. Cho các số thực x,y thỏa mãn $x^2 + xy + y^2 \le 3$. Chứng minh rằng

$$-4\sqrt{3} - 3 \le x^2 - xy - 3y^2 \le 4\sqrt{3} - 3$$

466.Cho x,y,z là các số nguyên dương thay đổi có tổng bằng 2002. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x!y!z!$$

467. Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{a^{2012}}{b^{2010}} + \frac{b^{2012}}{c^{2010}} + \frac{c^{2012}}{a^{2010}} < 2011$. Chứng minh rằng luôn tồn tại số tự nhiên n sao cho $\frac{a^{n+3}}{b^{n+1}} + \frac{b^{n+3}}{c^{n+1}} + \frac{c^{n+3}}{a^{n+1}} \le \frac{2011}{2010} + \frac{a^{n+2}}{b^n} + \frac{b^{n+2}}{c^n} + \frac{c^{n+2}}{a^n}$

468. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên m ta có bất đẳng thức $\frac{a^{m+3}}{b^{m+1}} + \frac{b^{m+3}}{c^{m+1}} + \frac{c^{m+3}}{a^{m+1}} \ge \frac{a^{m+2}}{b^m} + \frac{b^{m+2}}{c^m} + \frac{c^{m+2}}{a^m}$.

469. Chứng minh rằng nếu x, y là các số thực dương thì $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \ge \frac{1}{1+xy}$

470. Cho hàm số $f:(0;+\infty) \to (0;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện $f(3x) \ge f\left(\frac{1}{2}f(2x)\right) + 2x$ với mọi $x > 0$. Chứng minh rằng $f(x) \ge x$ với mọi $x > 0$.

471. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện a + b + c = 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} - \sqrt{abc}.$$

472.Cho a,b là các số không âm thoả mãn $a^2 + b^2 \le 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = a\sqrt{3b(a+2b)} + b\sqrt{3a(b+2a)}\ .$$

473.Cho các số a,b,c,d$\in [0;1]$ và x,y,z,t$\in \left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ thoả mãn điều kiện a + b + c + d = x + y + z + t = 1.

Chứng minh rằng

$$ax + by + cz + dt \geq 54abcd\ .$$

474. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 3.Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} + 5 \geq (a+b)(b+c)(c+a)\,.$$

Đẳng thức xẩy ra khi nào ?

475.Cho các số thực x,y,z thoả mãn $\begin{cases} x \geq 2, y \geq 9, z \geq 1945 \\ x + y + z = 2010 \end{cases}$

Tìm giá trị lớn nhất của tích xyz .

476. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 6.Chứng minh rằng

$$\left(1+\frac{1}{a^3}\right)\left(1+\frac{1}{b^3}\right)\left(1+\frac{1}{c^3}\right) \geq \frac{729}{512}\ .$$

477. Cho x,y,z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3+2}{3y+4z} + \frac{y^3+2}{3z+4x} + \frac{z^3+2}{3x+4y}\ .$$

478. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $9(a^4 + b^4 + c^4) - 25(a^2 + b^2 + c^2) + 48 = 0$
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^2}{a+2b}\,.$$

479. Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{36}{9 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}\ .$$

480. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn xyz = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{(x^4+y^4)^3}{x^6+y^6} + \frac{(y^4+z^4)^3}{y^6+z^6} + \frac{(z^4+x^4)^3}{z^6+x^6} \geq 12\ .$$

481. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn x + y + z = 9. Chứng minh rằng

$$\frac{x^3+y^3}{xy+9} + \frac{y^3+z^3}{yz+9} + \frac{z^3+x^3}{zx+9} \geq 9\,.$$

482. Cho x,y,z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2y}{z^3} + \frac{y^2z}{x^3} + \frac{z^2x}{y^3} + \frac{13xyz}{3(xy^2+yz^2+zx^2)}\ .$$

483.Ch a,b,c $\in [0;1]$ thoả mãn a + b + c = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1}\ .$$

484. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \sqrt{a^2-ab+b^2} + \sqrt{b^2-bc+c^2} + \sqrt{c^2-ca+a^2}\ .$$

485. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn x + y + z = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} .$$

486. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 3.Chứng minh rằng

$$a\sqrt{b^3+1} + b\sqrt{c^3+1} + c\sqrt{a^3+1} \le 5 .$$

487. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{a+2b^3} + \frac{b^2}{b+2c^3} + \frac{c^2}{c+2a^3} .$$

488. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\frac{a+b+c}{3} \le \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2}{abc}} .$$

489. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a \ge b \ge c$ và 3a – 4b + c = 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{a^2-b^2}{c} - \frac{b^2-c^2}{a} - \frac{c^2-a^2}{b} .$$

490. Cho a,b,c là các số thực .Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2+c^2}{(b+c)^2} + \frac{c^2+a^2}{(c+a)^2} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \ge \frac{5}{2}.$$

491. Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{2} .$$

492. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc = 1.Chứng minh rằng

$$2(a^2+b^2+c^2) + 4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 7(a+b+c) - 3 .$$

493.Nếu $a,b,c \ge 0$ thoả mãn (a + b)(b + c)(c + a) > 0 thì

$$\frac{a^3}{b^2+4bc+c^2} + \frac{b^3}{c^2+4ca+a^2} + \frac{c^3}{a^2+4ab+b^2} \ge \frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{2(a+b+c)(ab+bc+ca)^2} .$$

494. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc = 1.Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2a^3+3a+2} + \frac{1}{2b^3+3b+2} + \frac{1}{2c^3+3c+2} \ge \frac{3}{7}.$$

495. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{(a+b+c)^2} \ge \frac{7}{25}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a+b+c}\right)^2.$$

496. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện xy + yz + zx = 1.Chứng minh rằng

$$3 - \sqrt{3} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \ge (x+y+z)^2.$$

497. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 3. Chứng minh rằng

$$12\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 4(a^3+b^3+c^3)+21.$$

498. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện ab + bc + ca = 1. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{a^2}{b+c}}+\sqrt[3]{\frac{b^2}{c+a}}+\sqrt[3]{\frac{c^2}{a+b}}\geq a+b+c+\frac{3abc}{(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{6})\sqrt[3]{a^6+b^6+c^6}}\ .$$

499.Cho a,b,c là các số thực đôi một khác nhau .Chứng minh rằng

$$\frac{(b-c)^4}{(c-a)^2(a-b)^2}+\frac{(c-a)^4}{(a-b)^2(b-c)^2}+\frac{(a-b)^4}{(b-c)^2(c-a)^2}\geq\frac{33}{2}\ .$$

500. Cho a,b là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b = 4ab .Chứng minh rằng

$$\frac{a}{4b^2+1}+\frac{b}{4a^2+1}\geq\frac{1}{2}.$$

501. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện x + y + z + xyz = 4 .Chứng minh rằng

$$x+y+z\geq xy+yz+zx\ .$$

502.Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c^2}+\frac{b}{c+a^2}+\frac{c}{a+b^2}\geq\frac{3}{2}.$$

503.Xét các số thực a,b,c sao cho phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm thực thuộc đoạn $[0;1]$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A=\frac{(a-b)(2a-c)}{a(a-b+c)}\ .$$

504. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M=\frac{ab}{\sqrt{2c+ab}}+\frac{bc}{\sqrt{2a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{2b+ca}}\ .$$

505.Cho hai số x,y dương . Chứng minh rằng

$$\frac{2001^x}{2004^y}+\frac{2003^x}{2000^y}\geq 2001^{x-y}+2003^{x-y}.$$

506. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$16(a+b+c)\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a+b+\sqrt{2(a+c)})^3}+\frac{1}{(b+c+\sqrt{2(b+a)})^3}+\frac{1}{(c+a+\sqrt{2(c+b)})^3}\leq\frac{8}{9}.$$

Hỏi đẳng thức xẩy ra khi nào ?

507. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\frac{4c}{a+b}+\frac{3a+b}{b+c}+\frac{3b-c}{a+c}\geq 5\ .$$

508. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\frac{3c-5b}{a+4b}+\frac{3b+c-a}{3a+2c}+\frac{2a+2b+c}{2b+4c}\geq 1\ .$$

509.Cho a,b,c,x,y dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^x-b^x}{(b+c)^y}+\frac{b^x-c^x}{(c+a)^y}+\frac{c^x-a^x}{(a+b)^y}\ge 0 .$$

510. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $(a+b+c)^3=32abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{383-165\sqrt{5}}{5}\le\frac{a^4+b^4+c^4}{(a+b+c)^4}\le\frac{9}{128}.$$

511. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $21ab+2bc+8ca\le 12$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\ge\frac{15}{2}.$$

512. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $\frac{3}{a}+\frac{10}{3b}+\frac{16}{3c}+12a\le 21$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2a}+\frac{4}{3b}+\frac{4}{c}+2a\ge\frac{28}{9abc} .$$

513. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 3. Chứng minh rằng

$$\frac{4}{(a+b)^3}+\frac{4}{(b+c)^3}+\frac{4}{(c+a)^3}\ge\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

514.Cho các số dương a,b,c,d thoả mãn điều kiện $a\ge b\ge c\ge d$ và abcd = 1.Tìm hằng số k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{k}{d+1}\ge\frac{k+3}{2}.$$

515. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn không có hai số nào trong chúng đồng thời bằng 0 và a + b + c = 1. Chứng minh rằng

$$\left(bc+\frac{a}{b+c}\right)\left(ca+\frac{b}{c+a}\right)\left(ab+\frac{c}{a+b}\right)\le\frac{1}{4}.$$

516.Với a,b,c là các số thực dương bất kỳ, hãy tìm tất cả các số thực k để cho bất đẳng thức sau đúng

$$\left(k+\frac{a}{b+c}\right)\left(k+\frac{b}{c+a}\right)\left(k+\frac{c}{a+b}\right)\ge\left(k+\frac{1}{2}\right)^3.$$

517.Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a+b+c=1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+3(ab+bc+ca)+2\sqrt{a^2+b^2+c^2} .$$

518. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a+b=a^4+b^4$.Chứng minh rằng

$$a^ab^b\le 1\le a^{a^3}b^{b^3}.$$

519.Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $2(a^2+b^2)+ab=(a+b)(ab+2)$.Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=4\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right)-9\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right) .$$

520.Cho a,b,c $\in[1;2]$. Chứng minh rằng

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\le 7abc .$$

521. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+2009b^2}{a^3+2009b^3}+\frac{b^2+2009c^2}{b^3+2009c^3}+\frac{c^2+2009a^2}{c^3+2009a^3}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ .$$

522. Cho a,b,c là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{1+2bc}}+\sqrt{\frac{b}{1+2ca}}+\sqrt{\frac{c}{1+2ab}}\ge\sqrt{3}\ .$$

523. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc = 1.Chứng minh rằng

$$\frac{a+3}{(a+1)^2}+\frac{b+3}{(b+1)^2}+\frac{c+3}{(c+1)^2}\ge 3$$

524. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc = 1.Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{2}{a+1}}+\sqrt{\frac{2}{b+1}}+\sqrt{\frac{2}{c+1}}\le 3\ .$$

525. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\sqrt[9]{\frac{a^3}{b+c}}+\sqrt[9]{\frac{b^3}{c+a}}+\sqrt[9]{\frac{c^3}{a+b}}\ge\frac{\sqrt[9]{ab}+\sqrt[9]{bc}+\sqrt[9]{ca}}{\sqrt[9]{2}}\ .$$

526. Cho a,b,c là các số thực không âm sao cho không có hai số nào trong chúng đồng thời bằng 0 . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}+\frac{9abc}{4(ab+bc+ca)}\ge\frac{5}{4}(a+b+c)\,.$$

527. Cho x,y,z là các số thực không âm sao cho không có hai số nào trong chúng đồng thời bằng 0 . Chứng minh rằng

$$\sqrt[4]{\frac{x}{y+z}}+\sqrt[4]{\frac{y}{z+x}}+\sqrt[4]{\frac{z}{x+y}}\ge\sqrt[4]{16+\frac{196xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}}\ .$$

528. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$a\sqrt{4a^2+5bc}+b\sqrt{4b^2+5ca}+c\sqrt{4c^2+5ab}\ge(a+b+c)^2.$$

529. Xét dãy các đa thức $\{P_n(x)\}_n\ge 0$ được xác định như sau :

$$\begin{cases}P_0(x)=0\\ P_{n+1}(x)=P_n(x)+\dfrac{x-(P_n(x))^2}{2}\end{cases}$$

Chứng minh rằng $0\le\sqrt{x}-P_n(x)\le\dfrac{2}{n+1}\ \forall x\in[0;1],\forall n=0,1,2,...$

530.Xét tam thức bậc hai f(x) = ax^2 + bx + c thoả mãn điều kiện

$$|f(x)|\le\frac{1}{2},\forall x\in[-1;1]$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P = $2006a^2 + 2005b^2$.

531.Nếu tất cả các nghiệm thực của x^3+ax^2+bx+c là thực thì hãy chứng minh rằng

$$12ab+27c\le 6a^3+10\sqrt{(a^2-2b)^3}\ .$$

532.Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \le z \le \min\{x\sqrt{2}, y\sqrt{3}\} \\ x + z\sqrt{3} \ge \sqrt{6} \\ y\sqrt{3} + z\sqrt{10} \ge 2\sqrt{5} \end{cases}$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P = $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{y}} + \frac{3}{\sqrt{z}}$.

533.Cho $a,b,c \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}};\sqrt{2}\right]$. Chứng minh rằng

$$\frac{3}{a+2b} + \frac{3}{b+2c} + \frac{3}{c+2a} \ge \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a}.$$

534. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện xy + yz + zx = 1.Chứng minh rằng

$$x + y + z + 3(2\sqrt{3} - 3)xyz \ge 2.$$

535. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \ge 2\left(\frac{b+c}{2} - a\right)^3.$$

536. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 1.Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{a^2 + abc}}{b + ca} + \frac{\sqrt{b^2 + abc}}{c + ab} + \frac{\sqrt{c^2 + abc}}{a + bc} \le \frac{1}{2\sqrt{abc}}.$$

537.Cho $x, y, z \in \left[\frac{1}{\sqrt{4+3\sqrt{2}}};\sqrt{4+3\sqrt{2}}\right]$. Chứng minh rằng

$$9(xy + yz + zx)(x^2 + y^2 + z^2) \ge (x + y + z)^4.$$

538. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện x + y + z = 3.Chứng minh rằng

$$8\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + 9 \ge 10(x^2 + y^2 + z^2).$$

539. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện x + y + z = 3.Chứng minh rằng

$$\frac{x}{1+y^3} + \frac{y}{1+z^3} + \frac{z}{1+x^3} \ge \frac{3}{2}.$$

540. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện xy + yz + zx = 3.Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{1+2x}{3}} + \sqrt{\frac{1+2y}{3}} + \sqrt{\frac{1+2z}{3}} \ge 3.$$

541.Chứng minh rằng nếu $y \ge x \ge 0$ thì ta luôn có bất đẳng thức

$$16y^2 - 13x\sqrt{y^2 - x^2} - 9x\sqrt{y^2 + x^2} \ge 0.$$

542. Cho x,y,z là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\frac{2\sqrt{x}}{x^3 + y^2} + \frac{2\sqrt{y}}{y^3 + z^2} + \frac{2\sqrt{z}}{z^3 + x^2} \le \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}.$$

543. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện a + b + c = 1.Chứng minh rằng

$$ab+bc+ca \ge \frac{18abc}{2+abc} .$$

544. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^{10}+b^{10}}{a^6+b^6}}+\sqrt{\frac{b^{10}+c^{10}}{b^6+c^6}}+\sqrt{\frac{c^{10}+a^{10}}{c^6+a^6}} \ge a^2+b^2+c^2 .$$

545. Cho a,b,c là các số thực không âm sao cho không có hai số nào trong chúng đồng thời bằng 0 . Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{ab}}{ab+c^2}+\frac{\sqrt{bc}}{bc+a^2}+\frac{\sqrt{ca}}{ca+b^2} \ge \frac{9}{2}.\frac{a^3+b^3+c^3+(8\sqrt{3}-3)abc}{(a+b+c)^4} .$$

546. Cho a,b,c là các số thực dương .Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a} \le \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right).$$

547. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện xyz = 1.Chứng minh rằng

$$\frac{y+z}{x^3+yz}+\frac{z+x}{y^3+zx}+\frac{x+y}{z^3+xy} \le \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2} .$$

548. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $x^3 + y^3 + z^3 = 1$.Chứng minh rằng

$$x^2+y^2+z^2 \ge x^5+y^5+z^5+2(x+y+z)x^2y^2z^2.$$

549.Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a} < \frac{1}{16}.$$

550.Cho a,b,c nằm trong đoạn $[0;1]$.Tìm hằng số k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng

$$(1-a)(1-b)(1-c) \le k\left(1-\frac{a+b+c}{3}\right) .$$

----------The End ----------

Mời các bạn cập nhật các bài toán bất đẳng thức chọn lọc kỳ sau ………….