CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC

TVDT

BÀI TẬP GIẢI TÍCH TỔ HỢP

*Với hơn 120 bài tập chọn lọc có đáp án và lời giải chi tiết

*Có tóm tắt lỹ thuyết,phương pháp giải đơn giản

Phần I : # BÀI TẬP CƠ BẢN

I/ Tóm tắt lý thuyết :

1) Chỉnh hợp :

G/s E là một tập hợp có n phần tử. Cho trước số tự nh

$$0 < k \le n.$$

Một chỉnh hợp chập k cái phần tử của E là một bộ k thứ tự cái tử của E (hay là một cách sắp xếp thứ tự phần tử khác n

(*) số chỉnh hợp chập k cái phần tử của E được kí hiệu : A_n^k

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

2) Số hoán vị :

G/s E là một tập hợp có n phần tử. Một hoán vị n phần t là một chỉnh hợp chập n cái phần tử của E

(*) Số hoán vị n phần tử của E :

$$P_n = A_n^n = n!$$

3) Tổ hợp :

G/s E là một tập hợp có n phần tử. Cho trước số tự nhiên

$$0 \le k \le n.$$

Một tổ hợp chập k cái phần tử của E là một tập hợp con của E phần tử.

(*) Số tổ hợp chập k cái phần tử của E kí hiệu : C_n^k .

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

(*) Các tính chất của số tổ hợp :

. $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{P_k}$

. $C_n^0 = C_n^n = 1.$

- $C_n^k = C_n^{n-k}$.
- $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

5) Nhị thức Newton.

Cho a, b là hai số thực và n là số tự nhiên:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k . a^{n-k} . b^k$$

BÀI TẬP

DẠNG I: BÀI TẬP VỀ PHÉP ĐẾM.

Bài 1 1. Với 4 chữ số phân biệt 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số có các chữ số khác nhau.

2. Có bao nhiêu số gồm 5 chữ số phân biệt hình thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 sao cho:

a) Các số không bắt đầu bằng 5.

b) Các số không bắt đầu bằng 543.

Giải

1) . Số các số được tạo thành có 2 chữ số là A_4^2.

. " " 3 " " A_4^3

. " " 4 " " A_4^4

Vậy số các số có thể lập được là:

$$S = A_4^2 + A_4^3 + A_4^4 = 60 + 4 = 64.$$

2) a) gọi số phải tìm là $\overline{ABCDE}$. Trong đó.

- A có 4 cách chọn
- B " 4 " ,
- C " 3 " ,
- D, E " 2 " ,
- E " 1 " ,

Theo quy tắc nhân: số cái số có 5 chữ số thỏa mãn đầu bài là:

$$S_2 = 4.4.3.2.1 = 96 \text{ (cách chọn)}.$$

b) số phải lập có dạng $\overline{ABCDE}$. Trong đó:

. A có 4 cách chọn

. B " 3 "

. C " 2 "

. D " 2 "

. E " 1 "

Vậy theo quy tắc nhân: số cái số có 5 chữ số thỏa mãn đầu bài:

$$S_3 = 4.3.2.2.1 = 48 \text{ (cách chọn)}$$

$\boxed{\text{Bài 2}}$ Với 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số phân biệt và thỏa mãn điều kiện: mỗi số nhỏ hơn 45000

\- Giải -

. gọi số có thể lập được có thể có dạng: $\overline{ABCDE}$.

Trong đó: . A có 4 cách chọn.

. B có 4 "

. C " 3 "

. D " 2 "

. E " 1 "

Tuy nhiên khi $\overline{AB} = 45$ thì ta phải loại cái trường hợp $\overline{CDE} \neq \overline{000}$.

lúc là loại đi $3.2.1 = 6$ (số)

Vậy số có 5 chữ số lập được thỏa mãn đầu bài là:

$$S = 4.4.3.2.1 - 3.2.1 = 90 \text{ (số)}$$

$\boxed{\text{Bài 3}}$ Từ cái chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số, trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần còn mỗi chữ số khác có mặt đúng một lần.

\- Giải -

. gọi số có thể lập được có dạng : $\overline{ABCDEFGH}$

. Trong đó : . A có 7 cách chọn (vì $A \neq 0$)

. cứ tiếp tục như thế có 6 cái chữ còn lại lần lượt có các cách chọn $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

Tuy nhiên do chữ số 1 được có mặt 3 lần nên kết quả được lặp lại 3! lần. Vậy số cái số được lập thoả mãn đầu bài là:

$$\frac{7.7!}{3!} = 5880 \text{ (số)}$$

Bài 3 Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể thành lập được bao nhiêu số, mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau và trong đó nhất thiết phải có chữ số 5.

Giải

(*) Cách 1:

. Xem như cái ô mà ta đưa vào cái số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

Thứ tự mà cái ô từ trái qua phải như sau:

. ô thứ nhất : có 6 cách cho đưa chữ số vào . (vì không thể đưa số 0 vào được nên ta đã loại đi một cách).

. ô thứ hai : có 6 cách đưa vào

. ô thứ 3 : " 5 " "

. ô thứ 4 : " 4 " "

. ô thứ 5 : " 1 " " chữ số 5.

Vậy tất cả có cách chọn là:

$$6.6.5.4.1 = 720$$

(sai).

(*) Cách 2: gọi số có thể lập có dạng: $\overline{abcde}$:

. Trong Tạo : có A_5^5 cách chọn số dạng $\overline{abcde}$

. Do số $a \neq 0$ nên có A_5^4 cách chọn số dạng $\overline{0bcde}$

Vậy có tất cả cái cách chọn số có 5 chữ số từ (0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) là: $A_7^5 - A_6^4 = 2160$.

+) Tuy nhiên, các số ở trên có cả số không có chữ số 5.

Bài 4 Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số chẵn mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau?

– Giải –

(*) gọi số phải lập là: $\overline{abcde}$. (a

. Có A_6^5 cách lấy sắp xếp số $\overline{abcde}$

. Tuy nhiên lại có A_5^4 số có $a = 0$

Vậy có $(A_6^5 - A_5^4)$ số $\overline{abcde}$ có $a \neq 0$.

(*) Tương tự, ta cũng phải loại đi $3(A_5^4 - A_4^3)$ các số có dạng: $\overline{abcd1}$, $\overline{abcd3}$ và $\overline{abcd5}$ $(a \neq 0)$

Tóm lại số các số có thể thành lập là:

$$A_6^5 - A_5^4 - 3.(A_5^4 - A_4^3) = 312 \text{ (số)}$$

Bài 5 Với 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số phân biệt và thoả mãn điều kiện: mỗi số lớn hơn 300000.

– Giải –

(*) gọi số có thể lập được là $\overline{abcdef}$.

. Tất cả các số có thể thành lập được là P_6.

. Tuy nhiên ta phải loại trừ các trường hợp sau:

+) Số có dạng $\begin{cases} \overline{1bcdef} \\ \overline{2bcdef} \end{cases}$: có $2.P_5$ trường hợp.

Vậy số các số được thành lập thoả mãn đầu bài là:

$$P_6 - 2P_5 = 480 \text{ (số)}.$$

Bài 6 Với các số 1, 2, 5, 7, 8 có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 3 chữ số ≠ nhau và nhỏ hơn hoặc bằng 278.

– Giải –

. gọi số phải lập là $\overline{abc}$.

(*) Trường hợp 1: Nếu $a = 1$: $\overline{1bc}$ thì: c có 2 cách chọn
b có 3 cách chọn

$\Rightarrow$ số $\overline{1bc}$ có $2 \times 3 = 6$ (cách chọn).

(*) Trường hợp 2: Nếu $a = 2$: $\overline{2bc}$ thì c có 1 cách chọn
b " 3 " "

$\Rightarrow$ số $\overline{2bc}$ có $1 \times 3 = 3$ (cchọn)

Vậy theo quy tắc cộng thì số các số chẵn có 3 chữ số khác nhau là: $6 + 3 = 9$ (số).

Bài 7: Có thể tạo được bao nhiêu hợp âm khác nhau trên 10 phím được chọn của một đàn dương cầm, nếu mỗi hợp âm chứa từ 3 đến 10 âm

- Giải -

(*) Trường hợp 1: Hợp âm có 3 âm
$\Rightarrow$ có C_{10}^{3} cách tạo hợp âm.

(*) TH2: hợp âm có 4 âm $\Rightarrow$ có C_{10}^{4} cách tạo hợp âm.

⋮

(*) Trường hợp 3: hợp âm có 10 âm $\Rightarrow$ có C_{10}^{10} cách tạo hợp âm.

Vậy:
Tổng cộng có $C_{10}^{3} + C_{10}^{4} + \dots + C_{10}^{10} = 968$ (cách tạo)

Bài 8: Với 7 chữ số: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

1) Lập được bao nhiêu số lẻ gồm 7 chữ số khác nhau.
2) Lập được bao nhiêu số chẵn gồm 7 chữ số khác nhau

- Giải -

1) gọi số được thành lập: $\overline{ABCDEFG}$

. Mỗi một số được tạo thành là một chỉnh hợp chập 7 của 7

(*) Tuy nhiên có 3 là số có tận cùng là 2, 4, 6.

Vậy số các số lẻ có 7 chữ số ≠ nhau được tạo thành là:

$$A_7^7 - 3 = 2880 \text{ (số)}$$

Cách 2: gọi số phải lập có dạng: $\overline{ABCDEFG}$.

. Chữ G có ~~8~~ 4 cách chọn (1, 3, 5, 7)

. Còn lại $\overline{ABCDEF}$ - một hoán hoán vị của 6 chữ số còn lại ⇒ có 6! cách chọn).

⇒ Theo quy tắc nhân thì có $4 \cdot 6! = 2880$ (số)

2) Bạn làm tương tự như ý 1):

ĐS có: 2160 (số).

Bài 9: Từ tập hợp 10 số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

1) Có thể lập được bao nhiêu số gồm 2 chữ số phân biệt.

2) Có thể lập được bao nhiêu số gồm 3 chữ số phân biệt và không có chữ số 7.

Giải:

1) gọi số phải thành lập có dạng $\overline{ab}$.

, Mỗi một số là một chỉnh hợp chập 2 của 10 phần tử: A_{10}^2.

. Tuy nhiên ta phải loại đi các trường hợp mà có $a = 0$: có A^1.

Vậy: Có: $A_{10}^2 - A_9^1 = 81$ (số).

2) gọi số phải thành lập có dạng: $\overline{abc}$.

. Mỗi một số là một chỉnh hợp chập của 3 của 10 phần tử: A_{10}^3.

. Tuy nhiên ta phải loại các trường hợp sau:

+) $a = 0$ có A_9^2 số.

+) $a = 7$ có A_9^2 số

+) $b, c = 7$ có $2 \cdot A_9^2$ số

Vậy tổng cộng số các số thỏa mãn đầu bài: $A_{10}^3 - 3A_9^2 = A_8^2 = 49$

Bài 10 Cho tập $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

a) Có bao nhiêu số chẵn gồm 5 chữ số phân biệt lập thành từ tập E.

b) Có bao nhiêu số chẵn gồm 5 chữ số phân biệt lập thành từ tập E trong đó luôn có mặt số 7.

Giải

a) . Chọn chữ số hàng đơn vị : 2, 4, 6 ⇒ có 3 cách chọn.

. Còn 4 chữ số là chỉnh hợp chập 4 của 7 phần tử : có A_7^4 cách

. Theo quy tắc nhân ⇒ số cách chọn:

$$3 . A_6^4 = 1080 \text{ (cách chọn)}.$$

b) Như ở trường hợp a) tạo 1080 số chẵn gồm 5 chữ số. Tuy nhiên ở đây tính cả những số không chứa chữ số 7.

⇒ Những số gồm 5 chữ số mà 0 chứa chữ số 7 là : A_6^4.

Vậy số các số thoả mãn đầu bài là:

$$1080 - A_6^4 = 720 \text{ (số)}$$

Cách 2: Làm trực tiếp:

- Hàng đơn vị : chọn 2, 4, 6 ⇒ Có 3 cách chọn.
- Còn lại 4 vị trí mà ta có thể đặt chữ số 7. ⇒ có 4 cc.
- Còn 3 vị trí là chỉnh hợp chập 3 của 5 phần tử trong tập E.

⇒ A_5^3 (cách chọn)

⇒ Theo quy tắc nhân thì số các số thoả mãn đầu bài là:

$$3 . 4 . A_5^3 = 720 \text{ (số)}$$

Bài 11 Cho tập $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Có bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số phân biệt.

Giải

(*) Gọi chữ số phải tìm là $\overline{abcde}$.

. Hàng đơn vị e : 0, 2, 4, 6 ⇒ Có 4 cách chọn.

Bài 13: Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 tạo thể lập được bao nhiêu số 5 chữ số khác nhau và trong đó phải có mặt hai chữ số ?

– Giải –

a) Lập số có 5 chữ số: gọi $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$

(*) TH1: $a_1 = 5$. Ta thấy: a_1 có 1 cách chọn.

a_2 có 6 "

a_3 có 5 "

a_4 có 4 "

a_5 có 3 "

⇒ Theo quy tắc nhân thì số cách chọn là: $1 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

(*) TH2: $a_1 \neq 5$: tạo: a_1 có 5 cách chọn a_5 có 5 cách chọn

a_2 có 4 "

a_3 có 3 "

a_4 có 1 "

⇒ số cách chọn: $4 \cdot (5.5.4.3) = 1200$ (số)

Vậy Σ số cách chọn: $360 + 1200 = 1560$ (số)

Bài 14: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm ... chữ số trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần, còn mỗi số khác có mặt đúng 1 lần?

– Giải –

- Chữ số 0 có 7 cách đặt
- Chữ số 2 có 7 cách đặt
- Chữ số 3 có 6 " "
- Chữ số 4 có 5 " "
- Chữ số 5 " 4 " "
- Chữ số 1 " 1 " "

⇒ Theo quy tắc nhân thì số cách chọn:

$7.7.8.5.4.1 = 5880$ (c.c)

Bài 15. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số trong đó hai chữ số kề nh phải khác nhau?

Giải

(*) gọi số phải lập có dạng : $n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$
Trong đó . a_1 có 9 cách chọn.
. a_2 có 9 cách chọn.
. a_3 có 9 c.c
. a_4 có 9 c.c
. a_5 có 9. c.c
⇒ Theo quy tắc nhân thì số cách chọn là: $9^5 = 59049$ (số)

Bài 16. Cho 5 chữ số 0, 1, 2, 3, 4. Từ 5 chữ số đó có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số, sao cho trong mỗi số đó mỗi chữ số trên có mặt 1 l

Giải

(*) gọi số phải lập có dạng là: $n = \overline{a_1a_2a_2a_3a_4}$ $(a_1 \neq 0)$.
Trong đó: . a_1 có 4 cách chọn.
. a_2 có 4 c.c.
. a_3 có 3. c.c
. a_4 có 1 c.c
⇒ Theo quy tắc nhân thì số các số được lập là: $4.4.3.2 = 98$ (số).

Bài 17. Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số có 7 chữ số trong đó chữ số 4 có mặt đúng 3 lần; còn các chữ số khác có mặt 1

Giải

. Chữ số 0 có 6 cách đặt.
. Chữ số 1 có 6 cách đặt
. Chữ số 2 " 5 " "
. Chữ số 3 " 4 " "
. Chữ số 4 có 1 " "

⇒ Theo quy tắc nhân: số cách chọn là:
$6.6.5.4.1 = 720$ (cách).

Bài 18: Một văn phòng cần chọn mua một tờ nhật báo mỗi ng[ày]... 4 loại nhật báo. Hỏi có mấy cách chọn mua báo cho một [tuần] gồm 6 ngày làm việc?

Giải

(*) Ta thấy: mỗi ngày có 4 cách chọn

$\Rightarrow$ 6 ngày số cách chọn là: $4^6 = 4096$ (cách).

Bài 19: Người ta viết ngẫu nhiên các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 lên 6 c[ái] phiếu, sau đó xếp ngẫu nhiên thành 1 hàng.

a) Có bao nhiêu số lẻ gồm 6 chữ số được tạo thành.

b) Có bao nhiêu số chẵn gồm 6 chữ số được tạo thành.

Giải

a) gọi số được lập có dạng: $n = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}$

(*) Do n là số lẻ nên $a_6 \in \{1, 3, 5\}$.

- Số a_1 có 4 cách chọn.
- Chữ số a_2 có 4 cách chọn.
- Chữ số a_3 có 3 " "
- Chữ số a_4 " 2 " "
- Chữ số a_5 " 1 " "
- Chữ số a_6 có 3 " "

$\Rightarrow$ Theo quy tắc nhân: Số cách chọn là:

$3 . 4 . 4 . 3 . 2 . 1 = 288$ (số).

DẠNG II : BÀI TẬP VỀ TỔ HỢP.

Bài 20: Cho k và n là 2 số tự nhiên sao cho $4 \le k \le n$. CMR:

$$C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4.C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^k.$$

Giải

Áp dụng công thức sau: $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$.

Ta có:

$$C_n^k + C_n^{k-1} + 3.(C_n^{k-1} + C_n^{k-2}) + 3.(C_n^{k-2} + C_n^{k-3}) + C_n^{k-3} + C_n^{k-4}.$$

$$= C_{n+1}^k + 3.C_{n+1}^{k-1} + 3.C_{n+1}^{k-2} + C_{n+1}^{k-3}.$$

$$\Leftrightarrow (C_{n+1}^k + C_{n+1}^{k-1}) + 2.(C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2}) + (C_{n+1}^{k-2} + C_{n+1}^{k-3}).$$

$$= C_{n+2}^k + 2.C_{n+2}^{k-1} + C_{n+2}^{k-2} = C_{n+4}^k \text{ (đpcm)}.$$

Bài 21: Chứng minh đẳng thức:

$$2C_n^k + 5.C_n^{k+1} + 4.C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+2}^{k+2} + C_{n+3}^{k+3}$$

Giải

(*) Vận dụng tính chất: $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$.

. Ta có VT $= 2.C_n^k + 5.C_n^{k+1} + 4C_n^{k+2} + C_n^{k+3}$

$$= (C_n^k + C_n^{k+1}) + (C_n^{k+1} + C_n^{k+2}) + (C_n^k + C_n^{k+1}) + 2.(C_n^{k+1} + C_n^{k+2}) + (C_n^{k+2} + C_n^{k+3}).$$

$$= C_{n+1}^{k+1} + C_{n+1}^{k+2} + C_{n+1}^{k+1} + 2.C_{n+1}^{k+2} + C_{n+1}^{k+3}.$$

$$= C_{n+2}^{k+2} + (C_{n+1}^{k+1} + C_{n+1}^{k+2}) + (C_{n+1}^{k+2} + C_{n+1}^{k+3})$$

$$= C_{n+2}^{k+2} + C_{n+2}^{k+2} + C_{n+2}^{k+3} = C_{n+2}^{k+2} + C_{n+3}^{k+3} \text{ (đpcm)}.$$

Vậy: $2.C_n^k + 5C_n^{k+1} + 4.C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+2}^{k+2} + C_{n+3}^{k+3}$.

Bài 22 CMR: Với mọi số nguyên k và n thỏa mãn điều kiện n>,

Ta có: $k.(k-1).C_n^{k} = n(n-1).C_{n-2}^{k-2}$

_ Giải _

(*) Áp dụng CT: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Ta có: . $k.(k-1).C_n^k = \dfrac{k.(k-1).n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(k-2)!(n-k)!}$ (1)

. $n.(n-1).C_{n-2}^{k-2} = \dfrac{n(n-1).(n-2)!}{(k-2)!.[n-2-(k-2)]!}$

$= \dfrac{n!}{(k-2)!(n-k)!}$ (2)

. So sánh (1) (2) ta được đpcm.

Bài 23: Tìm số tự nhiên n thỏa mãn:

$C_n^2.C_n^{n-2} + 2.C_n^2.C_n^3 + C_n^3.C_n^{n-3} = 100$. (1)

_ Giải _

(*) Áp dụng tính chất: $C_n^k = C_n^{n-k}$

Ta có (1) $\Leftrightarrow (C_n^2)^2 + 2.C_n^2.C_n^3 + (C_n^3)^2 = 100$.

$\Leftrightarrow (C_n^2 + C_n^3)^2 = 100$

$\Leftrightarrow C_n^2 + C_n^3 = 10$.

$\Leftrightarrow C_{n+1}^3 = 10 \Leftrightarrow \dfrac{(n+1)!}{3!(n-2)!} = 10$

$\Leftrightarrow (n+1)n.(n-1) = 60 \Leftrightarrow n = 4$.

Vậy: n=4.

Bài 24: a) CMR: $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-3}^{k-1} + \dots + C_{k-1}^{k-1}$. (1)

b) Tính tổng:

$S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + n.(n+1).(n+2)$

_ Giải _

a) Ta thấy:

$(1) \Leftrightarrow C_n^k - C_{n-1}^{k-1} - C_{n-2}^{k-1} - C_{n-3}^{k-1} - \dots - C_{k-1}^{k-1} = 0$

$(\Leftrightarrow) \quad C_{n-1}^{k} - C_{n-2}^{k-1} - \dots - C_{k-1}^{k-1} = 0$

$(\Leftrightarrow) \quad C_{n-2}^{k} - C_{n-3}^{k-1} - \dots - C_{k-1}^{k-1} = 0$

$\vdots$

$0 = 0$ (luôn đúng) đpcm

b) Ta áp dụng ý a) với $k = 4$

$$C_n^4 = C_{n-1}^3 + C_{n-2}^3 + \dots + C_3^3.$$

hay

$$C_{n+3}^4 = C_{n+2}^3 + C_{n+1}^3 + \dots + C_n^3.$$

Áp vào CT tính ta được:

$$\frac{(n+3)!}{4!(n-1)!} = \frac{(n+2)!}{3!(n-1)!} + \frac{(n+1)!}{3!(n-2)!} + \dots + 1.$$

$$(\Rightarrow) \frac{n.(n+1).(n+2).(n+3)}{4!} = \frac{n.(n+1)(n+2)}{3!} + \frac{(n-1)n.(n+1)}{3!} + \dots + 1 \quad (2)$$

$(\Rightarrow)$ Nhân cả hai vế cho 3!

$$(2) \Leftrightarrow \frac{n.(n+1)(n+2)(n+3)}{4} = n(n+1)(n+2) + (n-1).n(n+1) + \dots + 3.2.1$$

Vậy:

$$1.2.3 + 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n.(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

Bài 25: CMR: nếu n và k là hai số tự nhiên $0 \le k \le n$ thì:

$$C_{2n+k}^n \cdot C_{2n-k}^n \le (C_{2n}^n)^2.$$

\- Giải -

(*) Đặt $U_k = C_{2n+k}^n \cdot C_{2n-k}^n$. Ta phải CM dãy số này đơn điệu giảm $\forall\ 0 \le k \le n$.

Điều này tương đương: $U_k - U_{k-1} > 0$.

$\Leftrightarrow C^n_{2n+k} \cdot C^n_{2n-k} - C^n_{2n+k-1} \cdot C^n_{2n-k+1} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(2n+k)!}{n!(n+k)!} \cdot \dfrac{(2n-k)!}{n!(n-k)!} - \dfrac{(2n+k-1)!}{n!(n+k-1)!} \cdot \dfrac{(2n-k+1)!}{n!(n-k+1)!}$

$= \dfrac{(2n+k-1)!(2n+k) \cdot (2n-k)!}{n!(n+k)!\,n!(n-k)!} > \dfrac{(2n+k-1)! \cdot (2n-k)!(2n-k+1)}{n!(n+k-1)!\,n!(n-k+1)!}$

. Xét $\dfrac{U_k}{U_{k-1}} = \dfrac{(2n+k-1)!(2n+k).(2n-k)!.(n!)^2.(n+k-1)!(n-k+1)!}{(n!)^2.(n+k-1)!(n+k).(n-k)!(2n+k-1)!(2n-k+1)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{U_k}{U_{k-1}} = \dfrac{(2n+k).(n-k+1)}{(n+k)(2n-k+1)}$

. Do $0 \le k \le n \Rightarrow \dfrac{U_k}{U_{k-1}} > 1$,

$\Rightarrow$ dãy U_k đơn điệu giảm.

Vậy $U_k \le U_0 \Leftrightarrow C^n_{2n+k} \cdot C^n_{2n-k} \le (C^n_{2n})^2$.

$\boxed{\text{Bài 26}}$ CMR: $\dfrac{2^{100}}{10\sqrt{2}} < C^{50}_{100} < \dfrac{2^{100}}{10}$.

_ Giải _

$\boxed{\text{Bài 27}}$ CMR: $C^k_{2001} + C^{k+1}_{2001} \le C^{1000}_{2001} + C^{1001}_{2001}$ ($0 \le k \le 2000$,

_ Giải _

(*) Ta thấy: $C^0_{2001} = C^{2001}_{2001} \le C^{1001}_{2001} = C^{1000}_{2001}$.

$\cdot\, C^1_{2001} = C^{1999}_{2001} \le C^{1000}_{2001} = C^{1001}_{2001}$.

. Ta phải cm: $C^k_{2001} \le C^{k+1}_{2001}$.

. Dùng quy nạp hoặc biến đổi tương đương.

Bài 28. CMR: $2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 \quad \forall n \in N, n > 1$.

Giải

(*) Áp dụng nhị thức NiuTơn ta được:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = C_n^0.1 + C_n^1\left(\frac{1}{n}\right) + C_n^2.\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + C_n^n.\left(\frac{1}{n}\right)^2.$$

. Ta có: $\begin{cases} C_n^0 = 1. \\ \frac{1}{n}C_n^1 = \frac{1}{n}.n = 1. \end{cases}$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2. \quad (1)$$

(*). Mặt khác:

$$C_n^2.\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n!}{2!(n-2)!}.\frac{1}{n^2} = \frac{(n-1).n}{2!\,n^2} = \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2n} < \dots$$

$$C_n^3.\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{n!}{3!(n-3)!}\dots = \frac{(n-2).(n-1).\cancel{n}}{3!\,n^2} \leq \frac{1}{3!} < \frac{1}{2.3}$$

$$\vdots$$

$$C_n^k.\left(\frac{1}{n^k}\right) \leq \frac{1}{k!} < \frac{1}{(k-1).k}.$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1+1+\frac{1}{12}+\frac{1}{2.3}+\dots+\frac{1}{(k-1)k} = 1+1+1-\frac{1}{k}$$

$$< 3. \quad (2).$$

Từ (1)(2) $\Rightarrow \quad 2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$. (đpcm).

Bài 29. Tìm hệ số lớn nhất của khai triển $(a+b)^n$ biết rằng tổng tất cả các hệ số là 4096.

Giải

(*) Ta có: Tổng các hệ số của khai triển $(a+b)^n$ là:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n = 4096.$$

$$(\Rightarrow)\quad n = \log_2 4096 = 12.$$

. Vậy số hạng lớn nhất của khai triển là: $C_{12}^{6} = 924$.

$\boxed{\text{Bài 30}}$ Giải phương trình:

$$\frac{1}{C_4^x} - \frac{1}{C_5^x} = \frac{1}{C_6^x}. \quad (1)$$

\- Giải -

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x!\,(4-x)!}{4!} - \frac{x!\,(5-x)!}{5!} = \frac{x!\,(6-x)!}{6!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}.(5-x) = \frac{1}{6!}.(5-x)(6-x).$$

$$\Leftrightarrow 30 - 6.(5-x) = (5-x).(6-x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 15. \text{ (loại vì } x < 5). \end{array}\right.$$

Vậy $x = 2$.

$\boxed{\text{Bài 31}}$ Tìm số nguyên dương n sao cho

$$C_n^0 + 2.C_n^1 + 4.C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n = 243.$$

\- Giải -

. Tao có: $C_n^0 + C_n^1.2 + C_n^2.2^2 + \dots + C_n^n.2^n = (1+2)^n = 3^n = 2$

$$(\Rightarrow)\quad n = \log_3 243 = 5.$$

Vậy $n = 5$.

$\boxed{\text{Bài 32}}$: Tìm các số nguyên dương x thoả mãn pt:

$$C_x^1 + 6.C_x^2 + 6.C_x^3 + = 9x^2 - 14x. \quad (1)$$

\- Giải -

$$(1) \Leftrightarrow C_x^1 + 6.(C_x^3 + C_x^2) = 9x^2 - 14x.$$

$$\Leftrightarrow C_x^1 + 6.C_{x+1}^3 = 9x^2 - 14x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x!}{1!(x-1)!} + 6.\frac{(x+1)!}{3!(x-2)!} = 9x^2 - 14x.$$

$$\Leftrightarrow x + (x-1).x.(x+1) = 9x^2 - 14x.$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 9x^2 + 14x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (Loại)} \\ x = 2 \text{ (loại).} \\ x = 7 \text{ (nhận).} \end{array}\right.$$

Vậy: $x = 7$.

$\boxed{\text{Bài 33}}$: Giải pt:

$$C_x^{x-1} + C_x^{x-2} + \dots + C_x^{x-10} = 1023. \quad (1)$$

Giải

$(1) \Leftrightarrow C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 + \dots + C_x^{10} = 1023.$

$\Leftrightarrow C_x^0 + C_x^1 + C_x^2 + \dots + C_x^{10} = 1024.$

$\Leftrightarrow 2^x = 1024 \Leftrightarrow x = 10$

Vậy: $x = 10$.

$\boxed{\text{Bài 34}}$ Một tổ học sinh gồm 7 nam và 4 nữ. Giáo viên muốn chọn 3 để bàn ghế của lớp, trong đó có ít nhất 1 nam sinh. Hỏi có bao nhiêu

Giải

(*) Cách 1: (làm trực tiếp).

- Số cách chọn ra 1 nam trong 7 bạn: C_7^1.
- " " 2 nữ " 4 " : C_4^2.

$\Rightarrow$ Số cách chọn ra 3 bạn là: $C_7^1 . C_4^2$.

. Số cách chọn ra 2 nam trong 7 bạn: C_7^2.
. " " 1 nữ " 4 " : C_4^1

$\Rightarrow C_7^2 . C_4^1$.

+) Số cách chọn ra 3 nam trong 7 bạn: C_7^3

Vậy: Tổng số cách chọn ra ba bạn thoả mãn đầu bài là:

$$C_7^1 . C_4^2 + C_7^2 . C_4^1 + C_7^3 = 161 \text{ (cách)}.$$

(*) Cách 2: (Làm gián tiếp).

. Số cách chọn ra 3 bạn trong tổng số 11 bạn là: C_{11}^{3}.
. Số cách chọn ra 3 bạn nữ: C_4^3.
=> Số cách chọn ra 3 bạn thoả mãn đầu bài:

$$C_{11}^{3} - C_4^3 = 161 \text{ (cách)}.$$

Bài 35: Có 5 nhà toán học nam, 3 nhà toán học nữ, 4 nhà vật lý nam; cần lập 1 đoàn công tác 3 người có cả nam và nữ, có cả toán và lí. Hỏi có bao nhiêu cách?

- Giải -

(*) Số cách chọn ra 3 người trong tổng số 12 người: C_{12}^{3}.
. Số cách chọn ra 3 người gồm 1 nam Toán, 1 nữ Toán, 1 nam Vật lý
. " " 1 nữ Toán, 2 nam Vật lý: $C_3^1 . C$
. " " 2 nữ Toán; 1 nam Vật lý: C_3^2.
. " "

Vậy: Số cách chọn ra 3 ng thoả mãn đầu bài.

$$C_5^1 . C_4^1 . C_3^1 + C_3^1 . C_4^2 + C_3^2 . C_4^1 = 90 \text{ .. (cách)}$$

Bài 36. Một đội văn nghệ có 20 người, trong đó có 10 nam, 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 người, sao cho:

a) Có đúng 2 nam trong 5 người?
b) Có ít nhất 2 nam, ít nhất 1 nữ.

- Giải -

a) Ta dễ dàng suy ra được số cách chọn là: $C_{10}^{2} . C_{10}^{3} = 5400$.
b) . Số cách chọn ra 5 người trong tổng 20 người: C_{20}^{5}.
. Số cách chọn ra 5 nữ: C_{10}^5
Và số cách chọn ra 1 nam: C_{10}^1 và 4 nữ: C_{10}^4
=> Số cách chọn ra 5 người có ít nhất 2 nam

$$C_{20}^{5} - C_{10}^{5} - C_{10}^{1} . C_{10}^{4} = 14212 \text{ (cách)}$$

(Sai).

Bài 37: Một lớp học có 30 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Có 6 học sinh được chọn để lập 1 tốp ca. Hỏi có bao nhiêu cách chọn khác nhau trong đó có ít nhất 2 nữ.

Giải

- Số cách chọn ra 6 h/s bất kì: C_{45}^{6}
- Số cách chọn ra toàn nam: C_{30}^{6}
- " " 5 nam và 1 nữ: $C_{30}^{5} \cdot C_{15}^{1}$.

$\Rightarrow$ Số cách chọn thỏa mãn đầu bài:

$$C_{45}^{6} - C_{30}^{6} - C_{30}^{5} \cdot C_{15}^{1} = 5413695 \text{ (cách)}.$$

Bài 38: Cho tập X gồm 10 phần tử khác nhau. Tìm số tập con khác rỗng chứa một số chẵn các phần tử.

Giải

(*) Ta dễ dàng suy luận được số các tập con của X thỏa mãn đầu bài

$$S = C_{10}^{2} + C_{10}^{4} + C_{10}^{6} + C_{10}^{8} + C_{10}^{10} = 511 \text{ (cách)}.$$

Bài 39: Một đội văn nghệ gồm 10 học sinh nam, 10 học sinh nữ, cô giáo muốn chọn tuyển chọn ra 1 tốp ca gồm 5 học sinh trong đó có ít nhất là 2 nam và 2 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

Giải

- Số cách chọn ra 2 nam và 3 nữ: $C_{10}^{2} \cdot C_{10}^{3}$.
- " " 3 nam, 2 nữ: $C_{10}^{3} \cdot C_{10}^{2}$.

$\Rightarrow$ Số cách chọn thỏa mãn đầu bài:

$$2 \cdot C_{10}^{2} \cdot C_{10}^{3} = 10800 \text{ (cách)}.$$

Bài 40: Một đội cảnh sát có 9 người. Trong ngày cần 3 người làm nhiệm vụ địa điểm A, 2 người tại điểm B; còn lại 4 người trực ở đồn. Hỏi có bao nhiêu cách phân công.

Giải

. Số cách chọn đến địa điểm A là : C_9^3.

. " " B là : C_6^2.

. Số cách chọn người ở lại đến : $C_4^4 = 1$.

Vậy : Số cách chọn thoả mãn đầu bài :

$$C_9^3 \cdot C_6^2 = 1260 \text{ (cách)}.$$

$\boxed{\text{Bài 41}}$ Lớp học có 4 nữ, 10 nam. Cần chia lớp thành 2 tổ, mỗi tổ có 2 nữ, 5 nam. Hỏi có mấy cách chọn

- Giải -

- Số cách chọn nam : C_{10}^5

- Số cách chọn nữ : C_{10}^2.

⇒ Số cách chọn h/s xếp vào tổ là : $C_{10}^5 \cdot C_{10}^2 = 1512$ (cách)

$\boxed{\text{Bài 42}}$. Một đội xây dựng gồm 10 công nhân, 3 kĩ sư. Để lập tổ công tác cần chọn 1 kĩ sư làm tổ trưởng, 1 công nhân làm tổ phó và 3 công nhân làm thành viên. Hỏi có bao nhiêu cách lập tổ

- Giải -

(*) Số cách chọn ra kĩ sư : C_3^1.

. Số cách chọn ra CN làm tổ phó : C_{10}^1.

. Số cách chọn ra CN làm thành viên : C_9^3

⇒ Theo quy tắc nhân số cách chọn thoả mãn là :

$$C_3^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_9^3 = 2520 \text{ (cách)}.$$

$\boxed{\text{Bài 43}}$: Cho đa giác lồi n cạnh :

a) Tìm số đường chéo của đa giác.

b) Tìm số tam giác có đỉnh là của n giác.

c) Tìm số giao điểm của các đường chéo. Biết các đường chéo có 3 đg nào đồng quy.

- Giải -

a) Ta có: Cứ nối hai đỉnh tuỳ ý ta được đường chéo ⇒ số cách lấy ra điểm từ n điểm là: C_n^2.

Tuy nhiên, ta phải loại đi n trường hợp là hai điểm kề nhau.

Vậy số đường chéo là: $C_n^2 - n = \frac{n.(n-3)}{2}$.

b) Ta thấy cứ 3 đơn điểm tạo thành 1 tam giác ⇒ số tam giác tạo thành: C_n^3.

c) Cứ hai đường chéo tạo thành một giao điểm

⇒ số giao điểm là: C_n^4 (vì cứ 4 đỉnh thì có 1 giao điểm).

$\boxed{\text{Bài 44}}$: Có một hộp đựng 2 viên bi đỏ, 3 viên trắng, 5 viên vàng. Chọn ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách để trong đó số viên bi lấy ra không đủ 3 màu.

\- Giải -

+) 4 viên bi toàn màu vàng: C_5^4 cách.

+) 4 viên màu trắng vàng: C_8^4 cách.

+) 4 viên màu đỏ vàng: C_7^4 (cách).

+) 4 viên màu đỏ trắng: C_5^4 (cách)

Vậy tổng số cách lấy ra thoả mãn đầu bài:

$$T = C_5^4 + C_8^4 + C_7^4 + C_5^4 = 115 \text{ (cách)}$$

$\boxed{\text{Bài 45}}$: Cho tập A gồm 20 phần tử.

a) Có bao nhiêu tập con của A

b) Có bao nhiêu tập con khác rỗng mà số phần tử là số chẵn.

\- Giải -

a) Tổng số tập con của A là:

$$T = C_{20}^0 + C_{20}^1 + C_{20}^2 + \dots + C_{20}^{20} = (1+1)^{20} = 2^{20} \text{ (tập}$$

b) Tổng số tập con thoả mãn đầu bài là:

$T_1 = C_{20}^2 + C_{20}^4 + C_{20}^6 + \ldots + C_{20}^{20}$.

. Xét $T_2 = C_{20}^1 + C_{20}^3 + \ldots + C_{20}^{19}$.

$\Rightarrow \begin{cases} T_1 + T_2 + C_{20}^0 = (1+1)^{20} = 2^{20} \\ T_1 - T_2 + 1 = C_{20}^0 - C_{20}^1 + C_{20}^2 - C_{20}^3 + \ldots + C_{20}^{20} = (1-1)^{20} = \end{cases}$

$\Rightarrow T_1 = \dfrac{(2^{20} - 2)}{2} = 524{,}287$.

Bài 46 Một tổ có 12 học sinh. Thầy giáo có 3 đề kiểm tra khác nh... Cần chọn 4 học sinh cho mỗi đề kiểm tra. Hỏi có mấy cách ch...

— Giải —

. Đề 1 thì chọn ra 4 học sinh trong 12 h/s: C_{12}^4.

. Đề 2 chọn ra 4 h/s trong 8 h/s C_8^4.

. Đề 3 có 1 cách.

Vậy số cách chọn là: $T = C_{12}^4 . C_8^4 =$. (cách).

Bài 47 Có 12 học sinh ưu tú. Cần chọn ra 4 học sinh để dự đại hội học sinh ưu tú toàn quốc. Có mấy cách chọn:

a) Tuỳ ý?

b) Sao cho 2 học sinh A và B không cùng đi.

c) Sao cho 2 h/s A, B cùng đi hoặc cùng không đi.

— Giải —

a) Số cách chọn ra 4 h/s tuỳ ý:

$C_{12}^4 = 495$. (cách)

b) Khi 2 h/s A, B cùng đi thì cần chọn thêm 2 h/s nữa trong 1... còn lại: C_{10}^2. (cách)

$\Rightarrow$ Số cách chọn thoả mãn: $C_{12}^4 - C_{10}^2 = 450$ (cách)

c) (*) 2 học sinh A, B cùng đi: $C_{10}^2 = 45$ (cách).

(*) 2 h/s A, B cùng không đi: $C_{10}^4 = 210$. (cách).

Bài 48 Cô A có 11 người bạn thân, trong đó có 6 nữ, Cô ta định mời ít nhất 3 người trong số đó đến dự tiệc. Hỏi:

a) Có mấy cách mời? khách.

b) Có mấy cách mời để trong buổi tiệc gồm cô A và cả khách mời, số nam bằng số nữ.

Giải

a) Số cách chọn là:

$T = C_{11}^{3} + C_{11}^{4} + C_{11}^{5} + \dots + C_{11}^{11}$

$\Rightarrow T + C_{11}^{0} + C_{11}^{1} + C_{11}^{2} = (1+1)^{11} = 2^{11}$

$\Leftrightarrow T = 2^{11} - 67 = 1981$ (cách).

b) • Mời 1 nữ và 2 nam có $C_6^1 . C_5^2$ (cách).

• Mời 2 nữ và 3 nam có $C_6^2 . C_5^3$ (cách)

. " 3 " " 4 " " $C_6^3 . C_5^4$ " "

. " 4 " " 5 " " $C_6^4 . C_5^5$ " "

$\Rightarrow$ Tổng số cách chọn:

$T_1 = C_6^1 . C_5^2 + C_6^2 . C_5^3 + C_6^3 . C_5^4 + C_6^4 . C_5^5 = 200$ (cách).

Bài 49 Có 12 học sinh ưu tú của một trường trung học, muốn chọn ra một đoàn đại biểu gồm 5 người (gồm một trưởng đoàn, một thư kí, và 3 thành viên) đi dự trại hè quốc tế. Hỏi có bao nhiêu cách chọn? Có giải thích.

Giải

(*) Số cách chọn trưởng đoàn: C_{12}^{1}.

(*) Số cách chọn thư kí: C_{11}^{1}.

(*) Số cách chọn thành viên: C_{10}^{3}.

Theo quy tắc nhân thì số cách chọn là:

$T = C_{12}^{1} . C_{11}^{1} . C_{10}^{3} =$. (cách).

Bài 50: Một tập thể có 14 người gồm 6 nam và 8 nữ trong đó có ... Người ta muốn chọn một tổ công tác gồm 6 người. Tìm ... trong mỗi trường hợp sau:

a) Trong tổ phải có mặt cả nam lẫn nữ?

b) Trong tổ phải có 1 tổ trưởng, 5 tổ viên, hơn nữa An ... không đồng thời có mặt trong tổ.

Giải

a) (*) Số cách chọn tổ công tác một cách ngẫu nhiên là C_{14}^6

. Số cách chọn tổ toàn nam: C_6^6

. " " nữ: C_8^6

=> Số cách chọn tổ có cả nam và nữ: $C_{14}^6 - (C_6^6 + C_8^6) =$

b) (*) Số cách chọn ngẫu nhiên 6 người: C_{14}^6

(*) Chọn An và Bình rồi chọn thêm 4 người nữa trong còn lại: C_{12}^4. (cách)

=> Số cách chọn ra 6 ng mà An và Bình không đồng thời có ... $(C_{14}^6 - C_{12}^4)$

(*) Sau khi chọn được 6 ng thì có 6 cách chọn ra 1 tổ trưởng

=> Số cách chọn thoả mãn: $6(C_{14}^6 - C_{12}^4) = 15\,048$ (cách)

DẠNG III: NHỊ THỨC NEWTƠN.

. Chú ý:

1) Số hạng thứ k trong khai triển: T_k

2). Ta có: $(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

. $(1-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + C_n^n = 0$.

— BÀI TẬP —

Bài 51: Tính giá trị biểu thức:

a) $S = C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + \ldots + C_6^6$.

b) $T = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + \ldots + 2^5C_5^5$.

— Giải —

a) $S = (1+1)^6 = 2^6 = 64$.

b) $T = C_5^0 + C_5^1.2 + C_5^2 2^2 + \ldots + C_5^5 2^5 = (1+2)^5 = 3^5 = 243$

Bài 52: Tính giá trị biểu thức:

$$A = C_n^1 + 2\cdot\frac{C_n^2}{C_n^1} + 3\cdot\frac{C_n^3}{C_n^2} + \ldots + n\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}}.$$

— Giải —

* Ta có: . $C_n^1 = n$.

. $2.\dfrac{C_n^2}{C_n^1} = 2.\dfrac{n!\,(n-1)!\,1!}{(n-2)!\,2!\,n!} = n-1$.

. $3.\dfrac{C_n^3}{C_n^2} = 3.\dfrac{n!\,(n-2)!\,2!}{(n-3)!\,3!\,n!} = n-2$

⋮

. $n.\dfrac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = n.\dfrac{n!\,(n+1!).(n-1)!}{(n-n)!\,n!} = 1$.

$\Rightarrow A = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Bài 53 Tính giá trị biểu thức:

$$A = 2^n.C_n^0 + 2^{n-2}.C_n^2 + \ldots + C_n^n \quad (n \text{ chẵn}).$$

$$B = 2^{n-1}.C_n^1 + 2^{n-3}.C_n^3 + 2^{n-5}.C_n^5 + \ldots + C_n^{n-1}$$

Giải

a) (*) Xét $(2x+1)^n = C_n^0 x^n 2^n + C_n^1 x^{n-1} 2^{n-1} + \ldots + C_n^n$.

(*) Chọn $x = 1$ta có:

$$3^n = C_n^0 2^n + C_n^1 2^{n-1} + C_n^2 2^{n-2} + \ldots + C_n^n.$$

$$(\Rightarrow) \quad 3^n = \left(C_n^1 2^{n-1} + 2^{n-3}C_n^3 + \ldots + C_n^{n-1}\right) + \left(C_n^n + \ldots + 2^{n-2}C_n^2 + \ldots\right)$$

$$= A + B. \quad (1)$$

(*) Mặt khác: $(2x-1)^n = C_n^0 2^n x^n - C_n^1 2^{n-1} x^{n-1} + \ldots + C_n^n$.

Chọn $x = 1$:

$$\Rightarrow 1^n = A - B. \; (2)$$

Vậy giải (1) (2) $\Rightarrow$ $\begin{cases} A = 2^n \frac{1}{2}(3^n+1) \\ B = \frac{1}{2}(3^n - 1). \end{cases}$

Bài 54: CMR:

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \ldots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}.$$

Giải

. Đặt $\begin{cases} A = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \ldots + C_{2n}^{2n}. \\ B = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \ldots + C_{2n}^{2n-1}. \end{cases}$

. Ta có: $\begin{cases} A + B = (1+1)^{2n} = 2^{2n}. \\ A - B = (1-1)^{2n} = 0. \end{cases}$

Giải hệ $\Rightarrow A = \frac{2^{2n}}{2} = 2^{2n-1}$ (đpcm).

Bài 55: Tính:

$$S = 1 - 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 - 2^3 C_n^3 + \ldots + (-1)^n 2^n C_n^n.$$

Giải

. Xét $(1-x)^n = 1 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - C_n^3 x^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n x^n$.

. Chọn $x = 2$.

$\Rightarrow$ Ta được :

$$(-1)^n = 1 - 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \dots + (-1)^n 2^n C_n^n .$$

$\boxed{\text{Bài 56}}$: Tính :

$$T = 3^{17}C_{17}^0 - 4^1.3^{16}.C_{17}^1 + 4^2.3^{15}C_{17}^2 - 4^3 3^{14}.C_{17}^3 + \dots + -4^{17}.C_{17}^{17}$$

_ Giải _

(*) Xét $(x-4)^{17} = C_{17}^0 x^{17} - C_{17}^1.3^{16}.4 + C_{17}^2.3^{15}.4^2 + \dots + -4^{17}.C$

. Chọn $x = 3$ ta được :

$$(-1)^{17} = 3^{17}C_{17}^0 - 4 3^{16}.C_{17}^1 + 4^2.3^{15}.C_{17}^2 + \dots + -4^{17}.C_{17}^{17} . = -$$

$\boxed{\text{Bài 57}}$: CMR :

$$4^nC_n^0 - 4^{n-1}C_n^1 + 4^{n-2}C_n^2 + \dots + (-1)^nC_n^n = C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \dots + 2^nC_n^n$$

_ Giải _

(*) Xét $(4x-1)^n = C_n^0 4^n x^n - C_n^1 4^{n-1}.x^{n-1} + \dots + (-1)^n C_n^n$.

. Chọn $x = 1$ ta được VT :

$$VT = 3^n = 4^nC_n^0 - 4^{n-1}C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n . \quad (1)$$

(*) Xét $(x+2)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1}2 + \dots + C_n^{n-1}.x 2^{n-1} + C_n^n$

. Chọn $x = 1$ ta được VP.

$$VP = 3^n = C_n^0 + 2C_n^1 + \dots + 2^{n-1}C_n^{n-1} + 2^nC_n^n . \quad (2)$$

So sánh (1) (2) $\Rightarrow$ (đpcm) .

$\boxed{\text{Bài 58}}$: Tính $S = C_{11}^6 + C_{11}^7 + C_{11}^8 + \dots + C_{11}^{11}$. Trong đó C_n^k là tổ hợp chập k của n phần tử .

_ Giải _

(*) Áp dụng CT: $C_n^k = C_n^{n-k}$

Ta có : $S = C_{11}^5 + C_{11}^4 + C_{11}^3 + C_{11}^2 + C_{11}^0$.

$\Rightarrow 2S = C_{11}^0 + C_{11}^1 + \dots + C_{11}^{11} = (1+1)^{11} = 2^{11}$

$\Rightarrow S = 2^{10} = 1024$.

Bài 59: Dùng đẳng thức $(1+x)^m \cdot (1+x)^n = (1+x)^{m+n}$ để CM

$$C_n^k \cdot C_m^0 + C_n^{k-1} \cdot C_m^1 + \dots + C_n^0 \cdot C_m^k = C_{m+n}^k.$$

\- Giải -

(*) Ta có: $(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^k$

$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$.

$(1+x)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k \cdot x^k$.

\. Áp dụng đẳng thức đầu bài: $(1+x)^m \cdot (1+x)^n = (1+x)^{m+n}$.

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^k \cdot \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = \sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k x^k$ (1)

\. Chọn $x = 1$ ta được:

(1) $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{m} C_m^k \cdot \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k$.

$\Leftrightarrow (C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^k)(C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^k) = (C_{m+n}^0 + C_{m+n}^1 + \dots + C_{m+n}^k$

$\Leftrightarrow (1)^2 + C_m^0 \cdot C_n^1$

Bài 60: CMR:

$$(C_{2n}^0)^2 - (C_{2n}^1)^2 + (C_{2n}^2)^2 + \dots + (C_{2n}^{2n})^2 = (-1)^n C_{2n}^n.$$

\- Giải -

(*) Xét $(x+1)^{2n} = C_{2n}^0 \cdot x^{2n} + C_{2n}^1 \cdot x^{2n-1} + \dots + C_{2n}^{2n}$

và $(1-x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 \cdot x + \dots + C_{2n}^{2n} \cdot x^{2n} (-1)^n$

\. Hệ số x^{2n} trong tích của hai khai triển này là:

$(C_{2n}^0)^2 - (C_{2n}^1)^2 + \dots + (-1)^n \cdot (C_{2n}^{2n})^2$ (1)

(*) Mặt khác. Trong khai triển $(1-x^2)^{2n}$

$(1-x^2)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \dots + (-1)^n \cdot C_{2n}^{2n} (x^2)^n + \dots + (-1)^{2n} C_{2n}^{2n} (x^2)$

$\Rightarrow$ Hệ số của x^{2n} trong khai triển này là: $(-1)^n \cdot C_{2n}^n$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 61 CMR:

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

\- Giải -

(*) Xét hai khai triển:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n.$$

$$\Rightarrow (1+x)^n . (1+x)^n = (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n).(C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^n$$

. Hệ số của $x^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2$. (1)

(*) Mặt khác trong khai triển của VP

$$(1+x)^n . (1+x)^n = (1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + \dots + C_{2n}^n x^n + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n}$$

$\Rightarrow$ Hệ số của x^n là C_{2n}^n (2)

. Từ (1)(2) $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 62 CMR:

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + C_{2n}^4 3^4 + \dots + C_{2n}^{2n} 3^{2n} = 2^{2n-1}(2^{2n} + 1)$$

\- Giải -

(*) Xét khai triển

$$(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \dots + C_{2n}^{2n} . x^{2n}.$$

. Chọn $x = 3$ ta được:

$$(1+3)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 . 3 + C_{2n}^2 . 3^2 + \dots + C_{2n}^{2n} . 3^{2n}. \quad (1)$$

(*) Xét khai triển

$$(1-3)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 3 + C_{2n}^2 . 3^2 + \dots + C_{2n}^{2n} . 3^{2n}. \quad (2)$$

Cộng từng vế (1)(2) ta được:

$$2 . (C_{2n}^0 + C_{2n}^2 3^2 + \dots + C_{2n}^{2n} 3^{2n}) = 4^{2n} + 2^{2n}$$

$$\Leftrightarrow C_{2n}^0 + C_{2n}^2 . 3^2 + C_{2n}^4 . 3^4 + \dots + C_{2n}^{2n} . 3^{2n} = \frac{2^{2n} . (2^{2n} + 1)}{2}$$

$$= 2^{2n-1}(2^{2n} + 1$$

(đpcm).

Bài 63: CMR:

$$C_n^1 - 2C_n^2 + 3.C_n^3 + \dots + (-1)^{n-1} n.C_n^n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{n-1}^k.$$

Giải

(*) Xét khai triển của vế trái

$VT = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}.k.C_n^k.$

- Trong đó: $(-1)^{k-1}.k.C_n^k = (-1)^{k-1}.k.\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$= (-1)^{k-1}.\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = (-1)^{k-1}.n.\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$

$= (-1)^{k-1}.n.C_{n-1}^{k-1}.$

Vậy $VT = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}.n.C_{n-1}^{k-1} = VP$ (đpcm).

Bài 64. CMR:

$$C_{2002}^0.C_{2002}^{2001} + C_{2002}^1.C_{2001}^{2000} + \dots + C_{2002}^{2001}.C_1^0 = 2002.$$

Giải

(*) Ta có $VT = \sum_{k=0}^{2001} C_{2002}^k.C_{2002-k}^{2001-k}$

$= \sum_{k=0}^{2001} \dfrac{2002!}{k!(2002-k)!}.\dfrac{(2002-k)}{(2001-k)!\,1!} = \sum_{k=0}^{2001} \dfrac{2002!}{k!(2001-k)!}$

$= \sum_{k=0}^{2001} \dfrac{2001!\,2002}{(2001-k)!k!} = \sum_{k=0}^{2001} 2002.C_{2001}^k = 2002.2^{2001} = 1001.2^{2002}$ (đpcm)

Bài 65: Tìm số tự nhiên k thỏa mãn hệ thức:

$$C_{14}^k + C_{14}^{k+2} = 2.C_{14}^{k+1}.$$

Giải

(*) Ta có:

$\Leftrightarrow \dfrac{14!}{k!(14-k)!} + \dfrac{14!}{(k+2)!(12-k)!} = 2.\dfrac{14!}{(k+1)!(13-k)!}$

$$(\Rightarrow) \quad \frac{1}{(14-k)(13-k)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{(k+1)(13-k)}$$

$$(\Rightarrow) \quad k^2 - 12k + 32 = 0 \quad (\Rightarrow) \left[\begin{array}{l} k = 4 \\ k = 8 \end{array}\right. \text{(TM)}.$$

Bài 66. Cho $k, n \in \mathbb{N}$, thỏa $n \geq k \geq 2$. CM:

$$k(k-1).C_n^k = n.(n-1).C_{n-2}^{k-2}.$$

– Giải –

(*) $VT = k(k-1).\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(k-2)!(n-k)!}$ (1).

(*) $VP = n(n-1).\dfrac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(k-2)!(n-k)!}$. (2)

So sánh (1) (2) $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 67: Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2+1)^n.(x+2)^n$.
Tìm n để $a_{3n-3} = 26n$.

– Giải –

(*) Ta có: $(x^2+1)^n = C_n^0.x^{2n} + C_n^1.(x^2)^{n-1} + C_n^2(x^2)^{n-2} + \dots + C_n^{2n}$.

$(x+2)^n = C_n^0.x^n + C_n^1.x^{n-1}.2 + C_n^2\, x^{n-2}2^2 + \dots + C_n^n 2^n$

. Nhân từng vế hai đẳng thức ta được hệ số của x^{3n-3} là:

$2[C_n^0.C_n^{n-3} + C_n^1.C_n^{n-1}] \dots$

Theo đầu bài:

$$2.[C_n^0.C_n^3 + C_n^1.C_n^1] = 26n.$$

$(\Rightarrow) \quad 1.C_n^3 + n^2 = 13n \quad (\Rightarrow) \quad \dfrac{n.(n-1)(n-2)}{3!} + n^2 - 13n = 0$

$(\Rightarrow) \quad n =$ Không có gt nào n thỏa mãn.

$\boxed{\text{Bài 68}}$ Đa thức $P(x) = (x-1)^{2n} + x.(x+1)^{2n-1}$. $(n \in N, n \geq 3)$ được viết lại dưới dạng:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}.x^{2n}. \quad (1)$$

. Đặt $T = a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}$ cho biết $T = 768$.

Hãy tính giá trị của a_3.

_ Giải _

(*) Xét khai triển:

$$. (x-1)^{2n} = C_{2n}^0 x^{2n} - C_{2n}^1 x^{2n-1} + \dots + (-1)^k . C_{2n}^k x^{2n-k} + \dots + C_{2n}^{2n}$$

$$. (x+1)^{2n-1} = C_{2n-1}^0 . x^{2n-1} + C_{2n-1}^1 x^{2n-2} + \dots + C_{2n-1}^{2n-1}$$

$$\Rightarrow x.(x+1)^{2n-1} = C_{2n-1}^0 . x^{2n} + C_{2n-1}^1 x^{2n-1} + \dots + C_{2n-1}^{2n-1} x$$

Cộng (1) (2) ta được

$$P(x) = (C_{2n}^0 + C_{2n-1}^0).x^{2n} + (C_{2n-1}^1 - C_{2n}^1).x^{2n-1} + \dots + (C_{2n-1}^k + (-1)^k . C_{2n}^k) + \dots + (C_{2n-1}^{2n-1} + C_{2n}^{2n-1}) x + C_{2n}^{2n}$$

. Tacó:

$$T = C_{2n}^{2n} + (C_{2n}^{2n-2} + C_{2n-1}^{2n-2}) + \dots + ((-1)^k . C_{2n}^k + C_{2n-1}^k) + \dots + C_{2n}^0 + C_{2n-1}^0$$

Do $T = 768$.

(*) Từ (1) Ta thấy:

$$P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} = 2^{2n-1}.$$

$$P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} = 2^{2n}.$$

. Cộng từng vế:

$$2^{2n-1} + 2^{2n} = 2(a_0 + a_4 + \dots + a_{2n}) = 2.768.$$

$\Leftrightarrow n = 5.$

$$\Rightarrow a_3 = C_{2n-1}^{2n-3} + C_{2n}^{2n-3} = C_9^7 + C_{10}^7 = 156.$$

$\boxed{\text{Bài 69}}$ Trong khai triển $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10}$ thành đa thức $a_0 + a_1x + a_2x$
$(a_k \in R)$ Hãy tìm hệ số a_k lớn nhất $(0 \leq k \leq 10)$.

Giải

(*) Theo khai triển nhị thức NiuTơn:

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^{k} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} \cdot \left(\frac{2}{3}x\right)^{k}$$

$$= \frac{1}{3^{10}} \cdot \sum_{k=0}^{10} C_{10}^{k} \cdot (2x)^{k}$$

(*) Mặt khác: $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} a^{k} \cdot x^{k}$.

Vậy: $a_k = \frac{1}{3^{10}} \cdot 2^k \cdot C_{10}^{k}$.

. Để a_k max thì ta phải có: $\begin{cases} a_k > a_{k-1} \\ a_k > a_{k+1} \end{cases}$

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} \frac{1}{3^{10}} \cdot 2^k \cdot C_{10}^{k} > \frac{1}{3^{10}} \cdot 2^{k-1} \cdot C_{10}^{k-1} \\ \frac{1}{3^{10}} \cdot 2^k \cdot C_{10}^{k} > \frac{1}{3^{10}} \cdot 2^{k+1} \cdot C_{10}^{k+1} \end{cases}$$

Giải hệ $(\Rightarrow)$ $\frac{19}{3} < k < \frac{22}{3} \Rightarrow k = 7$.

Vậy $a_7 = \frac{1}{3^{10}} \cdot 2^7 \cdot C_{10}^{7} =$

Bài 70 Trong khai triển $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)^{12}$. Tìm hệ số của số hạng chứa x^9.

Giải

(*) Số hạng tổng quát trong khai triển là:

$$T_k = (-1)^k C^k \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^{-k} = (-1)^k \cdot C^k \cdot x^{2k-} \cdot 3$$

(*) Số hạng chứa x^9: $2k-12=9 \Rightarrow k=8$.

Vậy Hệ số của số hạng này là: $(-1)^8 \cdot C_{12}^8 \cdot 3^{12-16} = \frac{55}{9}$.

Bài 71 Cho biết hệ số của số hạng thứ 3 của khai triển nhị thức $\left(x^2\sqrt{x}+\frac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)^n$ là 36.

Hãy tìm số hạng thứ 7.

Giải

(*). Số hạng thứ k+1 của khai triển là:

$$T_{k+1} = C_n^k \cdot (x^2\sqrt{x})^k \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)^{n-k} = C_n^k \cdot x^{3k-n} \cdot x^{\frac{k-}{6}}$$

$$= C_n^k \cdot x^{\frac{19k-2n-6}{6}}.$$

. Theo đầu bài: Hệ số của số hạng thứ 3 là $C_n^2 = 36$

$\Rightarrow n = 9$.

(*) Hệ số của số hạng thứ 7 là: $C_9^6 = 84$.

Bài 72 Tìm các số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^7$ với $x>0$.

Giải

(*) Số hạng tổng quát của khai triển là:

$$T_{k+1} = C_7^k \cdot (\sqrt[3]{x})^k \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^{7-k}$$

$$\Leftrightarrow \quad T_{k+1} = C_7^k \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^{7-k} \cdot x^{\frac{k}{3}}.$$

. Số hạng không chứa x là $\frac{k}{3} = 0 \Leftrightarrow k = 0$.

$\Rightarrow$ Hệ số của số hạng này là: $C_7^0 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^7 = 1 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^7$.

$\boxed{\text{Bài 73}}$ Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của:

$$[1 + x^2(1-x)]^8.$$

\- Giải -

(*) Ta có:

$$[1+x^2(1-x)]^8 = C_8^0 + C_8^1 . x^2 (1-x) + C_8^2 . x^4 (1-x^2)^2 + \ldots$$
$$\ldots + C_8^8 . x^{16} (1-x)^8.$$

. Ta thấy bậc của x trong 3 số hạng đầu nhỏ hơn 8.

. Bậc của 4 số hạng cuối thì lại lớn hơn 8

$\Rightarrow$ x^8 chỉ có thể nằm trong hai số hạng thứ 4, 5.

$\Rightarrow$ Hệ số lần lượt: $C_8^3 C_3^2$; $C_8^4 C_4^3$

Vậy: $a_8 = C_8^3 . C_3^2 + C_8^4 . C_4^3 = 448$.

$\boxed{\text{Bài 74}}$ Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức

$$\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$$

Biết rằng $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 7.(n+3)$ $(n \in N^*,)$.

\- Giải -

(*) Theo đầu bài: $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 7(n+3)$

$\Leftrightarrow C_{n+4}^{3} - C_{n+3}^{3} = 7(n+3) \Leftrightarrow \frac{(n+4)!}{3!(n+1)!} - \frac{(n+3)!}{3!(n!)} = 7$

$\Leftrightarrow \frac{(n+2).(n+3)(n+4)}{3!} - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!} = 7(n+3)$

$\Leftrightarrow (n+2)(n+4) - (n+1)(n+2) = 6.7 = 42$.

$\Leftrightarrow 3n + 6 = 42 \Rightarrow n = 12$.

(*) Ta khai triển nhị thức

$$\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12} C_{12}^{k}\cdot\left(\frac{1}{x^3}\right)^{k}\cdot\left(\sqrt{x^5}\right)^{12-k}.$$

$$=\sum_{k=0}^{12} C_{12}^{k}\cdot x^{\frac{5(12-k)-6k}{2}}.$$

, số hạng chứa x^8 là : $\frac{5(12-k)-6k}{2}=8 \Rightarrow k=4.$

Vậy hệ số của số hạng chứa x^8 : $C_{12}^{4}=495$.

Bài 75 Cho khai triển như thức:

$$\left(2^{\frac{x-1}{2}}+2^{-\frac{x}{3}}\right)^n=C_n^0\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^n+\dots C_n^1\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1}\cdot\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)+\dots+$$

$$C_n^{n-1}\cdot\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)\cdot\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^{n-1}+C_n^n\cdot\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^n \quad (n\in\mathbb{N})$$

Biết rằng trong khai triển đó $C_n^3=5C_n^1$ và số hạng thứ 4 bằng 20n. Tìm n và x.

Giải

(*) Theo đầu bài: $C_n^3=5C_n^1$.

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!}=5\cdot\frac{n!}{1!(n-1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}=\frac{5}{(n-2)(n-1)} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n=7 \\ n=-4 \text{ (loại)}\end{array}\right.$$

(*) Mặt khác : số hạng thứ 4 bằng 20n.

$$C_7^3\cdot\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{7-3}\cdot\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^3=20.7=140.$$

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{4x-4}{2}}\cdot 2^{-\frac{3x}{3}}=4.$$

$$\Leftrightarrow 2^{x-2}=4 \Rightarrow x=4.$$

Vậy $\left[\begin{array}{l} n=7 \\ x=4\end{array}\right.$

Bài 76 Hãy tìm trong khai triển nhị thức $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^{18}$ số hạng độc lập với x.

\- Giải -

(*) Số hạng tổng quát của khai triển là:

$$T_{k+1} = C_{18}^{k}.(x^3)^k.\left(\frac{1}{x^3}\right)^{18-k} = C_{18}^{k}.x^{3k-3.(18-k)}.$$

. Số hạng độc lập với x là: $3k - 3.(18-k) = 0$.

$\Leftrightarrow k = 9$.

$\Rightarrow$ số hạng đó có dạng: 48620.

Bài 77. Tìm 2 hạng tử chính giữa của khai triển $(x^3 - xy)^{15}$.

\- Giải -

(*) Trong khai triển trên có cả thảy 16 số hạng

$\Rightarrow$ 2 số hạng chính giữa là số hạng 7, 8.

$\Rightarrow T_7 = -C_{15}^{7}.(x^3)^7.(xy)^8 = -6435x^{29}.y^8.$

$T_8 = -6455x^{31}y^7.$

Bài 78. Tìm số hạng hữu tỉ trong khai triển $(\sqrt{3}-\sqrt{15})^6$.

\- Giải -

(*) Khai triển trên là

$$(\sqrt{3}-\sqrt{15})^6 = \sum_{k=0}^{6}(-1)^kC_6^k.(\sqrt{3})^k.(\sqrt{15})^{6-k}.$$

$$= \sum_{k=0}^{6}(-1)^k.C_6^k.3^{\frac{k}{2}}.15^{\frac{6-k}{2}} = \sum_{k=0}^{6}(-1)^k.C_6^k.3^3.5^{\frac{k}{2}}.$$

. Để thu được số hạng hữu tỉ thì $\frac{k}{2}$ nguyên $\Rightarrow k \vdots 2$. (K

$\Rightarrow k = 0, 2, 4, 6$.

$\Rightarrow$ Các số hạng hữu tỉ là:

$T_1 = 27;\ 2025;\ 10125;\ 3375.$

$\boxed{\text{Bài 79:}}$ Cho biết ba hạng tử đầu tiên của khai triển $\left(\sqrt{x} + \frac{2}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ có các hệ số là 3 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Tìm tất cả các hạng tử hữu tỉ của khai triển đó.

_ Giải _

(*) số hạng tổng quát của khai triển là:

$$T_{k+1} = C_n^k . (\sqrt{x})^k . \left(\frac{}{\sqrt[4]{x}}\right)^{n-k} = C_n^k . x^{\frac{3k-n}{4}}.$$

• Hệ số của 3 hạng tử đầu lần lượt là C_n^0, C_n^1, C_n^2.

. Theo đầu bài $2C_n^1 = C_n^0 + C_n^2$.

$$\Leftrightarrow 2 . \frac{n!}{(n-1)!} = 1 + \frac{n!}{(n-2)!\,2}.$$

$$\Rightarrow 2 . n = 1 + \frac{n.(n-1)}{2}.$$

$$\Rightarrow n =$$

$\boxed{\text{Bài 80}}$ Trong khai triển nhị thức $\left(x\sqrt[3]{x} + x^{\frac{28}{15}}\right)^n$. Hãy tìm số hạng không phụ thuộc vào x. Cho biết $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$.

_ Giải _

(*) Tìm n

Ta có: $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$.

$$\Leftrightarrow 1 + C_n^1 + C_n^2 = 79 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{2.(n-2)!} = 78.$$

$$\Leftrightarrow n + \frac{(n-1)(n)}{2} = 78 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = 12 \\ n = -13 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

(*) số hạng tổng quát của khai triển là:

$$T_{k+1} = C_{12}^k . (x\sqrt[3]{x})^k . (x^{28/15})^{12-k}$$

$$\Leftrightarrow T_{k+1} = C_{12}^k . x^{\frac{48}{15}k - \frac{112}{15}}.$$

. Số hạng không phụ thuộc vào x là:

$$\frac{48}{15}k - \frac{3.112}{15} = 0 \Leftrightarrow k = 7.$$

Vậy: $C_{12}^{7} = 792$.

Bài 81 Chứng minh rằng:

$$nC_n^0 - (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 - (n-3)C_n^3 + \ldots + (-1)^{n-1}.C_n^{n-1} = 0$$

-Giải-

(*) Xét $(x-1)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + \ldots + (-1)^n . C_n^n . 1^n = 0$.

Lấy đạo hàm hai vế ta được:

$$n.(x-1)^{n-1} = nC_n^0 . x^{n-1} - (n-1).C_n^1 x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1}.C_n^{n-1} \pm 0 \ (1)$$

. Chọn $x = 1$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow n.C_n^0 - (n-1).C_n^1 + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} = 0 \text{ (đpcm)}$$

Bài 82 CMR:

$$n.(n-1).2^{n-2} = n.(n-1).C_n^0 + (n-1).(n-2).C_n^1 + \ldots + 2C_n^{n-2}.$$

-Giải-

(*) Xét $(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \ldots + C_n^{n-2} x^2 + C_n^{n-1} x + C_n^n$.

. Đạo hàm hai vế ta được:

$$n(x+1)^{n-1} = n.C_n^0 x^{n-1} + (n-1).C_n^1 x^{n-2} + \ldots + 2C_n^{n-2} x + C_n^{n-1}$$

. Đạo hàm phát nữa xem nào:

$$n(n-1)(x+1)^{n-2} = n.(n-1).C_n^0 x^{n-2} + (n-1)(n-2)C_n^1 + \ldots + 2C_n^{n-2}.$$

. Chọn $x = 1$ ta được điều phải CM:

$$n(n-1).2^{n-2} = n(n-1).C_n^0 + (n-1).(n-2)C_n^1 + \ldots + 2C_n^{n-2} \text{ (đpcm)}$$

Bài 83 CMR:

$$n.C_n^0 + (n-1).C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} = n.2^{n-1}$$

-Giải-

(*) Xét $(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \ldots + C_n^{n-1} x + C_n^n$.

. Đạo hàm hai vế ta được:

$$n.(x+1)^{n-1} = n.C_n^0.x^{n-1} + (n-1).C_n^1 x^{n-2} + \dots + C_n^{n-1}.$$

. Chọn $x = 1 \Rightarrow$ đpcm.

Bài 84 CM:

$$C_n^2 + 2C_n^3 + \dots + (n-1).C_n^n > (n-2).2^{n-1}$$

_ Giải _

. Chọn nhị thức: $(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^{n-1}x + C_n^n$.

. Đạo hàm hai vế ta được:

$$n(x+1)^{n-1} = n C_n^0 x^{n-1} + (n-1) C_n^1 x^{n-2} + \dots + C_n^{n-1}.$$

. Chọn $x = 1$ thay vào (1) ta được

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n. \quad (3)$$

. Chọn $x=1$ thay vào (2) ta được.

$$n\,2^{n-1} = n.C_n^0 + (n-1).C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} \quad (4)$$

. Lấy (4) trừ (1) ta được:

$$(n-2).\,2^{n-1} = (n-1).C_n^0 + (n-2)C_n^1 + \dots + 3.C_n^{n-3}$$

Bài 85 Viết $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots + x^{16} - x^{17}$ thành

$A_0 + A_1(x+1) + A_2(1+x)^2 + \dots + A_{17}(1+x)^{17}$

Tính A_2.

_ Giải _

(*) Ta có: $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots - x^{17} = A_0 + A_1(x+1) + A_2(x+1)^2 + \dots + A_{17}($

. Đạo hàm hai vế ta được

$$-1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 + \dots + 16x^{15} - 17x^{16} = A_1 + 2A_2(x+1) + \dots + 17A_{17}$$

, Đạo hàm hai vế lần nữa:

$$2 - 6x + 12x^2 + \dots + 240x^{14} - 272x^{15} = 2A_2 + 6A_3(x+1) + \dots + 27$$

. Chọn $x = -1$ ta được

$$2 + 6 + 12 + \dots + 240 + 272 = 2A_2 \Leftrightarrow A_2 = 816.$$

Bài 86 CMR

$$C_n^1 3^{n-1} + 2.C_n^2 3^{n-2} + \ldots + 3C_n^3 . 3^{n-3} + \ldots + nC_n^n = n.4^{n-1}.$$

-Giải-

(*) Xét $(x+3)^n = C_n^0 3^n + C_n^1 x.3^{n-1} + C_n^2 .3^{n-2}.x^2 + \ldots + C_n^{n-1} 3.x^{n-1} + C_n^n x^n$

. Đạo hàm hai vế ta được:

$$n.(x+3)^{n-1} = C_n^1 .3^{n-1} + 2.C_n^2 .3^{n-2} + \ldots + (n-1).C_n^{n-1} .3x^{n-2} + n.C_n^n x^{n-1}$$

. Chọn $x = 1$ ta được:

$$n.4^{n-1} = C_n^1 .3^{n-1} + 2C_n^2 .3^{n-2} + \ldots + nC_n^n \text{ (đpcm)}.$$

Bài 87 CMR:

$$C_n^0 + \frac{1}{1+1} C_n^1 + \frac{1}{1+2} C_n^2 + \ldots + \frac{1}{1+n} . C_n^n = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

- Giải -

(*) Xét $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^{n-2} x^{n-2} + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$.

. Lấy tích phân hai vế:

$$\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 C_n^0 dx + C_n^1 \int_0^1 x dx + C_n^2 \int_0^1 x^2 dx + \ldots + C_n^n \int_0^1 x^n dx.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} (x+1)^{n+1} \Big|_0^1 = C_n^0 x \Big|_0^1 + C_n^1 . \frac{1}{2} . x^2 \Big|_0^1 + C_n^2 . \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \ldots + C_n^n . \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} = C_n^0 + \frac{1}{1+1} C_n^1 + \frac{1}{1+2} C_n^2 + \ldots + \frac{1}{n+1} C_n^n \text{ (đpcm)}.$$

Bài 88 CMR:

$$C_n^0 - \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 - \frac{1}{4} C_n^3 + \ldots + \frac{(-1)^n . C_n^n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

- Giải -

(*) Làm hoàn toàn giống bài 87 chỉ khác là xét $(1-x)^n$.

Bài 89. Cho n là số nguyên dương. Tính tổng:

$$S = C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n.$$

\- Giải -

(*) Xét $(1+x)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} x + C_n^n$.

. Lấy tích phân hai vế:

$$\int_1^2 (1+x)^n dx = C_n^0 \int_1^2 x^n dx + C_n^1 \int_1^2 x^{n-1} dx + \dots + C_n^{n-1} \int_1^2 x\,dx + C_n^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\Big|_1^2 = C_n^0 \frac{1}{n+1} x^{n+1}\Big|_1^2 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} x^n \Big|_1^2 + \dots + C_n^n x \Big|_1^2.$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1} = C_n^0 \cdot \frac{2^{n+1}-1}{n+1} + C_n^1 \cdot \frac{2^n-1}{n} + \dots + C_n^n \frac{2-1}{1}.$$

Vậy:

$$S = \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}.$$

Bài 90 a) Tính tích phân $I = \int_0^1 x(1-x^2)^n dx$.

b CMR:

$$\frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}\cdot C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+2}C_n^n = \frac{1}{2(n+1)}$$

\- Giải -

a) $I = \int_0^1 x(1-x^2)^n dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)^n d(1-x^2) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)}\cdot(1-x^2)^{n+1}\Big|_0^1$

$$= \frac{1}{2(n+1)}.$$

b) Xét khai triển:

$(1-x^2)^n = C_1^0 + C_n^1(-x^2) + C_n^2(-x^2)^2 + \dots + C_n^n(-x)^n$

$\Leftrightarrow x.(1-x^2)^n = C_n^0 x - C_n^1 x^3 + C_n^2 x^5 + \dots + (-1)^n C_n^n x^{2n+1}$.

. Lấy tích phân hai vế ta được: $-\int_0^1 C_n^1 x^3 dx$

$$\int_0^1 x.(1-x^2)^n dx = C_n^0\int_0^1 x dx + C_n^2\int_0^1 x^5 dx + \dots + (-1)^n. C_n^n\int_0^1 x^{2n+1} dx.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2(n+1)} = C_n^0 . \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 - C_n^1 \frac{1}{4}.x^4\Big|_0^1 + \frac{1}{6}C_n^2 x^6\Big|_0^1 + \dots + (-1)^n . C_n^n \frac{x^{2n+2}}{2n+2}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 + \dots + (-1)^n . \frac{C_n^n}{2n+2} \quad (\text{đpcm}).$$

Bài 91 a) Tính tích phân: $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$.; $n \in N$.

b. CMR

$$C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{5}C_n^2 + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}C_n^n = \frac{2.4\dots 2n}{3.5.7\dots(2n+1)}.$$

– Giải –

a) . Đặt $\begin{cases} u = (1-x^2)^n \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = n.(1-x^2)^{n-1} . -2x\,dx. \\ v = x. \end{cases}$

$$\Rightarrow I_n = x.(1-x^2)^n\Big|_0^1 - \int_0^1 n.x.(1-x^2)^{n-1} . -2x\,dx.$$

$$= +2n\int_0^1 x^2.(1-x^2)^{n-1}dx. = 2n.\left[-\int_0^1 (1-x^2)^n dx + \int_0^1 (1-x^2)^{n-1}dx\right].$$

$$= 2n.(I_{n-1} - I_n).$$

Vậy: $I_n = 2n.(I_{n-1} - I_n)$.

$$\Leftrightarrow I_n = \frac{2n}{1+2n}.I_{n-1}.$$

(*) Ta có: $I_0 = 1$.

$I_1 = \frac{2}{3}1$

$I_2 = \frac{4}{5}I_2 = \frac{2}{3}.\frac{4}{5}.1$.

$I_3 = \frac{6}{5}I_2 = \frac{6}{5}.\frac{2}{3}.\frac{4}{5}.1$.

$\vdots$

$$I_n = \frac{2n}{1+2n}.I_{n-1} = \frac{2.4.6\dots(2n)}{3.5.7\dots(2n+1)}.$$

b) . Xét khai triển:

$$(1-x^2)^n = C_n^0 - C_n^1 . x^2 + C_n^1 x^4 - \dots + (-1)^n C_n^n x^{2n}.$$

Lấy tích phân hai vế

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = C_n^0 \int_0^1 dx - C_n^1 \int_0^1 x^2 dx + \dots + (-1)^n C_n^n \int_0^1 x^{2n} dx$$

$$(\Rightarrow) \quad C_n^0 - \frac{1}{3} C_n^1 + \frac{1}{5} C_n^2 + \dots + (-1)^n . \frac{1}{2n+1} . C_n^n = \frac{2.4.6\dots 2n}{3.5.7\dots(2n+1)}$$

Bài 92 CMR:

$$\frac{1}{2} . C_n^1 - \frac{1}{3} . C_n^2 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} C_n^n = \frac{n}{n+1}.$$

\- Giải -

Xét khai triển:

$$(1-x)^n = C_n^0 - C_n^0 x + C_n^2 x^2 + \dots + (-1)^n . C_n^n x^n.$$

Lấy tích phân hai vế:

$$\int_0^1 (1-x^n)^n dx = C_m^0 \int_0^1 dx - \int_0^1 C_n^1 x dx + C_n^2 \int_0^1 x^2 dx - \dots + (-1)^n . C_n^n . \int_0^1 x$$

$$(\Rightarrow) \quad \frac{(-1)}{n+1} . (1-x)^{n+1} \Big|_0^1 = C_n^0 x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} C_n^1 x^2 \Big|_0^1 + \dots + (-1)^n . C_n^n \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Big|_0^1$$

$$(\Rightarrow) \quad \frac{+1}{n+1} = C_n^0 - \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \dots + (-1)^n . C_n^n . \frac{1}{n+1}.$$

$$(\Rightarrow) \quad \frac{-1}{n+1} + 1 = \frac{1}{2} C_n^1 - \frac{1}{3} C_n^2 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{C_n^n}{n+1}.$$

$$(\Rightarrow) \quad \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} C_n^1 - \frac{1}{3} C_n^2 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} . C_n^n \text{ (đpcm)}.$$

Bài 93 Cho hàm số: $P(x) = (1+2x+3x^2)^{10}$

a) Tính tích phân: $I = \int_0^1 (1+3x) P(x) dx$.

b) Xác định hệ số của x^3 trong khai triển $P(x)$ theo các luỹ

– Giải –

a). Tính $I = ?$

Đặt $u = P(x) = (1 + 2x + 3x^2) \Rightarrow du = (2 + 6x)dx = 2(1+3x)\,dx$

Cận

x	0	1
u	1	6

Ta có: $I = \int_1^6 \frac{1}{2} \cdot u^{10}\,du = \frac{1}{2}\int_1^6 u^{10}\,du = \frac{1}{2.11} \cdot u^{11}\Big|_1^6 = \ldots$

b) Ta có: $P(x) = [(1+2x) + 3x^2]^{10}$

$= C_{10}^0 (1+2x)^{10} + C_{10}^1 (1+2x)^9 . (3x^2) + \ldots + C_{10}^{10} . (3x^2)^{10}$.

Khai triển thu gọn lại một lần nữa ta được hệ số của x^3.

$C_{10}^0 + C_{10}^3 . 2^3 + C_{10}^1 . 2 . 3 = 1500$.

DẠNG IV: CHỈNH HỢP

Bài 94: Có 10 cuốn sách khác nhau và 7 cây bút máy khác nhau. Cần chọn ra 3 cuốn sách và 3 cây bút máy để tặng cho 3 học sinh, mỗi h/ một cuốn sách và 1 cây bút máy. Hỏi có mấy cách?

Giải

*) Để chọn được 3 cuốn sách tương ứng với 3 cái bút $\Rightarrow$ có A_{10}^{3} cách chọn

. Tương tự có A_7^3 cách

Vậy theo $A_{10}^{3} \cdot A_7^3 = 151200$ cách.

Bài 95: Có 100.000 chiếc vé được đánh số từ 00.000 đến 99999. Hỏi số các vé gồm 5 chữ số khác nhau là bao nhiêu?

Giải

. Mỗi số là một chỉnh hợp 10 chập 5 $\Rightarrow$ Số các số TM là A_{10}^{5}.

Bài 96: a) Từ 7 chữ số: 1, 2, 3, ... 6, 7. Có thể lập được bao nhiêu số có chữ số khác nhau.

b). Có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau trong đó có hai chữ số 1, 2.

Giải

a) . Gọi số phải lập có dạng $\overline{abcd}$.

. Theo: a có 7 cách

b có 6 cách $\Rightarrow$ Có $7.6.5.4 = A_7^4 = 840$ (cách).

c có 5 cách

d có 4 cách

b) . Theo: Số 1 có 4 cách đặt

số 2 có 3 cách

Còn lại hai vị trí thì có $A_5^2 = 20$ cách

Vậy có $4.3.20 = 240$ (số).

Bài 97: Từ các chữ số: 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 5 chữ số đôi một khác nhau?

Giải

. Gọi số phải lập là: $\overline{abcdef}$

. TH1: a là số chẵn ⇒ có 2 cách chọn a (2, 4)

⇒ f có 2 cách chọn

còn lại $\overline{bcde}$ có $A_4^4 = 24$ cách chọn

⇒ ở TH2 này có $2.2.24 = 96$ cách.

. TH2: a là số lẻ: có 3 cách chọn a. (1, 3, 5)

⇒ f có 3 cách chọn

và $\overline{bcde}$ có A_4^4 cách

Vậy ở TH này có $3.3.24 = 216$ (cách).

. Tóm lại có thể lập được: $96 + 216 = 312$ (số)

Bài 98: Cho các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Có thể lập được bao nhiêu số có ~~10~~ chữ số chọn từ 8 chữ số trên. Trong đó chữ số 6 có mặt đúng 3 lần các chữ số khác có mặt đúng 1 lần.

Giải

. Gọi số cần lập có dạng: $n = \overline{a_1 a_2 \cdots a_{10}}$

+ TH1: Các số n kể cả có $a_1 = 0$.

. Có C_{10}^3 vị trí đặt chữ số 6.

. Còn lại có A_7^7 các số chọn các chữ số còn lại

⇒ Tổng các số ở trường hợp này

$T = C_{10}^3 . A_7^7$.

. TH2: Các số $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{10}}$ $a_1 = 0$.

. Có C_{10}^3 cách chọn vị trí đặt chữ số 6

. Có : . cách chọn đặt các chữ số còn lại

⇒ $T_1 = C_{10}^3$.

Vậy số các số lập được: $D = T - T_1 = C_{10}^3 . A_7^7 - C_{10}^3 . A_6^6 = 578400$ (số).

Bài 99: Một hội nghị y khoa có 40 bác sĩ tham gia. Người ta muốn lập một nhóm bác sĩ thực hành một ca phẫu thuật để minh hoạ. Hỏi có bao nhiêu cách lập nhóm có một bác sĩ chính và 4 phụ tá?

- Giải -

(*) Số cách chọn bác sĩ chính là C_{40}^{1}

Còn số cách chọn phụ tá là C_{39}^{4}

⇒ Số cách chọn nhóm là

$$T = C_{40}^{1} \cdot C_{39}^{4} = 3290040$$

Bài 100: Hỏi từ 9 chữ số 1, 2, 3, ... 8, 9. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau sao cho trong các chữ số đó có mặt chữ số 1.

- Giải -

(*) Gọi số cần lập có dạng $n = \overline{a_1 a_2 \dots a_5}$

Chữ số 1 có 5 cách đặt tương ứng với A_8^4 cách chọn cho các chữ số còn lại.

Vậy số cái số ~~ca~~ lập được

$$T = 5 \cdot A_8^4 = 8400 \text{ (số)}$$

Bài 101: Trong một cuộc đua ngựa gồm 10 (con). Hỏi có mấy cách để 10 con ngựa này về đích nhất, nhì?

- Giải -

(*) Cách chọn về nhất: A_{10}^{1}

Cách chọn về nhì A_9^1.

⇒ Số cách chọn $A_{10}^{1} \cdot A_9^1 = 90$ (cách)

Bài 102: Tính tổng các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được từ 1, 3, 4, 5, 7, 8.

- Giải -

*) Gọi số cần lập có dạng: $n = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$

* Tổng số các số lập được : $A_6^5 = 720$ (số).

(*) Tính tổng :

. Ta chia 720 số này thành các nhóm có tổng của các hàng bằng một số không đổi.

•) Tổng các số chữ số ở hàng đơn vị là :

$$120.(1+3+4+5+7+8) = 3360$$

. Tổng các số chữ số ở hàng chục

$$120.(1+3+4+5+7+8).10 = 3360.10$$

Tương tự cho các hàng +

. Vậy tổng các số là :

$$S = 3360 + 3360.10 + 3360.10^2 + 3360.10^3 + 3360.10^4$$

$$= 3360.(1+10+10^2+10^3+10^4) = 37332960.$$

Bài 103 : Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Xét tập hợp E gồm các số chữ số khác nhau viết từ các chữ số đã cho. CMR : Tổng S tất cả các số của tập E chia hết cho 9.

\- Giải -

(*) Ta có thể lập được $A_7^7 = 5040$ (số)

Trong đó có $n = \overline{a_1a_2\ldots a_7}$

+) Ứng với mỗi số n (VD $n = 1234567$) ta luôn tìm được một số sa

+) cho $n + n' = 8888888$. (VD $n' = 7654321$).

. Có tất cả : $\frac{5040}{2} = 2520$ cặp như vậy

. Vậy Tổng tất cả các số của tập E

$$S = 2520.8888888$$

. Do $2520 \vdots 9 \Rightarrow S \vdots 9$ (đpcm).

Bài 104 : Xét dãy số gồm 7 chữ số (mỗi chữ số được chọn từ 0, 1, 2, ... thỏa mãn : chữ số ở vị trí số 3 là số chẵn, chữ số cuối cùng là chia hết cho 5., các chữ số thứ 4, 5, 6 đôi một khác nhau. Hỏ có bao nhiêu cách chọn ?

_ Giải _

(*). Chữ số ở vị trí thứ 3 có 5 cách chọn

. Chữ số ở vị trí cuối cùng có 8 cách chọn

. Chữ số ở vị trí 4, 5, 6 lần lượt có số cách chọn là A_{10}^{3} cách

. Còn lại các chữ số ở vị trí 1, 2, có số cách chọn là A 10, 10

Vậy Tổng số cách chọn là

$$5 . 8 . A_{10}^{3} . 10 . 10 = 2880000 \text{ (cách)}.$$

Bài 105: Cho 10 chữ số 0, 1, 2, 3, ..., 8, 9. có bao nhiêu số lẻ có 6 chữ số khác nhau nhỏ hơn 600000 xây dựng từ các chữ số trên.

_ Giải _

. Gọi số được lập có dạng : $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_6}$.

(*). Trong đó a_1 có 5 cách chọn

Còn $\overline{a_2 \ldots a_6}$ có A_9^5 cách

=> Tổng những số nhỏ hơn 600.000 là : $T = 5 . A_9^5$. (số).

(*) Trong á số được sẽ chọn ra có :

Cách 2 : gọi số được lập có dạng : $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_6}$

+) $a_1 = 1$ có 4 cách chọn a_6 và A_7^4 cách chọn $\overline{a_2 a_3 \ldots a_5}$

+) $a_1 = 3$ có 4 " "

+) $a_1 = 5$ có " " "

+) $a_1 = 2$ có 5 " " "

+) $a_1 = 4$ " 5 " "

Vậy tổng số cách chọn là.

$$3 . 4 . A_8^4 + 2 . 5 . A_8^4 = 36960 \text{ (số)}.$$

Bài 106: Có 3 nam và 3 nữ cần xếp ngồi vào một hàng ghế. Hỏi có mấy cách xếp sao cho

a) Nam, nữ ngồi xen kẽ.

b) Nam, nữ ngồi xen kẽ và có một người nam A và một người nữ phải ngồi bên nhau?

Giải

a) (*) Có 6 cách chọn một người vào vị trí thứ nhất

. có 3 cách chọn 1 ng ≠ giới vào vị trí thứ hai.

. có 2 " 1 ng vào " ba

. có 2 " tư

. Có 1 Năm

. Có 1 Sáu

Vậy tổng có $6.3.2.2.1 = 72$ (cách)

Bài 107: Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu khó, 10 câu trung bình; 15 câu dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, (có 5 câu) trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ mặt 3 câu h loại câu hỏi và số câu hỏi dễ không ít hơn.

Giải

*) Vì câu hỏi dễ không ít hơn nên câu dễ chỉ có thể có (từ 2, 3 câu) 3 câu 2 thôi:

. ⇒ có C_{15}^3 cách chọn câu dễ.

. Và $C_5^1 . C_{10}^1$ câu khó và câu trung bình.

Vậy: số đề được lập ở TH1

$$T_1 = C_{15}^3 . C_5^1 . C_{10}^1 = 22750 \text{ (đề)}.$$

⇒ TH2: 2 câu dễ + 1 câu TB + 2 câu khó.

$$\Rightarrow T_2 = C_{15}^2 . C_{10}^1 . C_5^2.$$

⇒ TH2: 2 câu dễ + 2 câu TB + 1 câu khó

$$T_3 = C_{15}^2 . C_{10}^2 . C_5^1.$$

Vậy tổng số cái đề có thể lập được:

$$T = T_1 + T_2 + T_2 = 56875 \text{ (đề)}.$$

Bài 108: Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng và 4 bông hồng đỏ (Các bông hoa xem như đôi một khác nhau) người ta muốn chọn 1 bó hoa gồm 7 bông

a) Có bao nhiêu cách chọn 1 bó hoa trong đó có đúng 1 bông hồng đỏ

b) Có bao nhiêu cách chọn 1 bó hoa trong đó có ít nhất 3 bông hồng vàng và ít nhất 3 bông hồng đỏ?

Giải

a) * Số cách chọn 7 bông từ số bông đã cho:

$$T = C_{12}^{7}.$$

* Số cách chọn mà có đúng 1 bông hồng đỏ.

$$T_1 = C_4^1 . C_8^6 = 112 \text{ (bó)}.$$

b)

Bài 109 Một trường tiểu học có 50 học sinh đạt danh hiệu h/s tiên tiến trong đó có 4 cặp anh em sinh đôi. Cần chọn nhóm 3 h/s trong đó h/s trên đi dự trại cấp TP sao cho trong nhóm không có cặp anh em đôi nào. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nào?

Giải

(*) Số cách chọn 3 h/s bất kì từ 50 h/s là

$$S_1 = C_{50}^3$$

*) Số nhóm 3 học sinh mà trong đó có 1 cặp sinh đôi và 1 học sinh ngoài ⇒ có $4 . C_{48}^1$

Vậy số cách chọn nhóm h/s thoả mãn là

$$T = C_{50}^3 - 4 . C_{48}^1 = 19408 \text{ (cách)}.$$

phần bản A

BÀI TẬP CỦNG CỐ

A. CÁC PHÉP ĐẾM.

Bài 1: Một thầy giáo có 12 cuốn sách đôi một khác nhau trong đó có 5 cuốn sách Văn học, 4 cuốn âm nhạc và 3 cuốn hội họa. Ông muốn lấy ra 6 cuốn và đem tặng cho 6 học sinh A, B, C, D, E, F mỗi em một cuốn

a) G/s thầy giáo chỉ muốn tặng cho các em h/s những cuốn thuộc hai thể loại văn và Âm nhạc. Hỏi tất cả có bao nhiêu cách tặng?

b) G/s thầy muốn rằng sau khi tặng xong, mỗi một trong 3 thể loại Văn, Âm, Hội họa đều còn lại ít nhất một cuốn. Hỏi tất cả có bao nhiêu cách chọn tặng?

Giải

a) Số cách lấy ra 6 cuốn từ 2 loại (Văn + Âm) là:

$$6!\,C_9^6 = 60480 \text{ (cách)}$$

b). Tổng số cách chọn ra 6 cuốn cuốn từ cả 3 thể loại:

C_{12}^6 (cách $\Rightarrow$ cách tặng $T = 6!\,C_{12}^6$ (cách).

. Số cách tặng mà 0 còn quyển Văn nào:

$$T_1 = 6!\,(C_5^5 \cdot C_4^1 + C_5^5 \cdot C_3^1) \text{ (cách tặng)}.$$

. Số cách tặng mà 0 còn quyển Âm nhạc nào; Hội họa nào

$$T_2 = 6!\,(C_5^2 \cdot C_4^4 + C_4^4 \cdot C_3^2 + C_4^4 \cdot C_5^1 \cdot C_3^1)$$

$$T_3 = 6!\,(C_3^3 \cdot C_4^3 + C_3^3 \cdot C_5^3 + C_3^3 \cdot C_4^2 \cdot C_5^1 + C_3^3\,C_4^1 \cdot C_5^2).$$

Vậy số cách tặng thỏa mãn là

$$S = T - (T_1 + T_2 + T_3) = 579600.$$

Bài 2: Một người có 12 cây giống gồm 3 loại: xoài, mít, ổi trong đó có 6 cây xoài, 4 cây mít và 2 cây ổi. Người đó muốn chọn ra 6 cây giống để trồng sau nhà

a) Có bao nhiêu cách chọn sao cho mỗi loại có đúng 2 cây?

b) Có " " có ít nhất 1 cây?

-Giải-

a) . Số cách chọn thoả mãn là

$$T = C_6^2 . C_4^2 . C_2^2 = 90 \text{ (cách)}$$

b) . Số cách chọn 6 cây bất kì từ 3 loại là C_{12}^6.

. Số cách chọn mà o có cây xoài: $C_4^4 . C_2^2 = 1$

. " " mít: $C_6^5 . C_2^1 + C_6^4 . C_2^2 = 27$

. " " ổi: $C_6^5 . C_4^1 + C_6^4 . C_4^2 + C_6^3 . C_4^3 + C_6^2 . C_4^4$
$= 209$.

⇒ Số cách chọn thoả mãn:

$$T = C_{12}^6 - (C_4^4 C_2^2 + C_6^5 . C_2^1 + C_6^4 . C_2^2 + C_6^5 C_4^1 + C_6^4 C_4^2 + C_6^3 C_4^3 + C_6^2 . C_4^4) = 687 \text{ (cách)}.$$

Bài 3: a) Có 10 cái bánh khác nhau và 5 cái hộp khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp mỗi hộp 2 cái?

b) Nếu 10 bánh khác nhau và 5 hộp giống nhau. Hỏi có mấy cách xếp vào mỗi hộp 2 bánh?

-Giải-

a) . Có C_{10}^2 cách chọn ra 2 cái bánh xếp vào hộp thứ nhất

. C_8^2 " " còn lại xếp vào hộp 2

. C_6^2 " " 3

. C_4^2 " " 4

. C_2^2 " " 5

Vậy tổng số cách xếp là: $T = C_{10}^2 . C_8^2 . C_6^2 . C_4^2 . C_2^2 = 113400$ (cách)

b) Nếu như 5 hộp là giống nhau thì vai trò của các hộp là giống nhau ⇒ có 5! cách bị lặp

Vậy số cách xếp là: $T = \dfrac{113400}{5!} = 945$ (cách).

Bài 4: a) Có bao nhiêu số chẵn gồm 6 chữ số khác nhau đôi một, trong đó số đầu tiên là chữ số lẻ.

b) Có bao nhiêu số gồm 6 c/s đôi một ≠ nhau, trong đó có đúng

3 chữ số lẻ và 3 chữ số chẵn.

Giải

a) gọi số phải lập có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. $(a_1 \neq 0)$.

Ta có a_6 có C_5^1 cách chọn

a_1 có C_5^1 cách chọn

$\overline{a_2a_3a_4a_5}$ có A_8^4 cách chọn

=) Số cái số có thể lập được là: $C_5^1 . C_5^1 . A_8^4 = 42000$ (số).

b) TH1: $a \neq$. Chọn 3 chữ số chẵn có C_5^3 cách

Chọn 3 c/s lẻ có C_5^3 cách

- Sau đó ta hoán vị 6 c/s ta được $6! C_5^3 . C_5^3$ (số)

(*) TH: $a = 0$; có C_5^3. cách chữ số lẻ và C_4^2 cách chọn c/s chẵn

sau đó ta hoán vị 5 chữ chữ số vừa chọn ra $5! C_5^3 . C_4^2$ (cách)

Vậy số cái số có thể lập được thỏa mãn đầu bài:

$T = 6! C_5^3 . C_5^3 - 5! C_5^3 . C_4^2 = 64800$ (số).

Bài 5. a) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau (chữ số đầu tiên $\neq 0$) trong đó có mặt chữ số 0, nhưng không có mặt chữ số 1.

b) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số biết rằng chữ số 2 có mặt đúng 2 lần, chữ số 3 có mặt đúng 3 lần và các chữ số còn lại có mặt không quá 1 lần.

Giải

a). gọi số phải lập có dạng: $\overline{a_1a_2 \cdots a_6}$ $(a_1 \neq 0)$.

TH1.: có số lập được kể cả $a_1 = 0$

. có 6 cách sắp xếp chữ số 0.

. Còn lại có A_8^5 cách chọn 5 chữ số còn lại.

TH2: $a_1 = 0$. =) $5 . A_7^4$ cách lập

Vậy số lập được có: $6 . A_8^5 - 5 . A_7^4 = 33600$ (số)

b) *) TH1: Tính cả $a_1 = 0$.

. Có C_7^2. đặt chữ số 2.

. Có C_5^3 đặt c/s 3.

Còn lại A_8^2 cách sắp xếp các số còn lại

$\Rightarrow$ có $C_7^2 . C_5^3 . A_8^2$ cách lập.

*TH2: $a_1 = 0$. C_6^2 cách đặt chữ số 2

C_4^3 cách đặt c/s 3

Và 7 cách chọn c/s vào vị trí cuối cùng

$\Rightarrow$ có $7 C_6^2 . C_4^3$ cách lập

. Vậy số cái số lập được

$$T = C_7^2 . C_5^3 . A_8^2 - 7 . C_6^2 . C_4^3 = 11340 \text{ (số)}.$$

Bài 6: Ba bạn A, B, C cùng đến nhà bạn D mượn sách, bạn D có 9 quyển sách khác nhau trong đó có 1 cuốn tiểu thuyết, bạn A muốn 2 quyển, trong có 1 cuốn tiểu thuyết. Bạn B muốn 2 cuốn, C muốn 3 quyển. Hỏi bạn D có bao nhiêu cách cho mượn sách.

— Giải —

Bạn D có 8 cách cho A mượn sách.

. C_7^2 " B "

C_5^3 "

$\Rightarrow$ số cách cho mượn là: $3! 8 . C_7^2 . C_5^3 = 10080$ (cách).

(Nhân 3! vì thứ tự 3 bạn vào mượn khác nhau).

Bài 7: Trên mặt mp cho thập giác lồi (hình 10 cạnh lồi) $A_1, A_2, \dots A_{10}$. Xét tất cả các tam giác mà 3 đỉnh của nó là 3 đỉnh của thập giác. Hỏi trong số các tam giác đó có bao nhiêu Δ mà cả 3 cạnh của nó không phải là cạnh của thập giác?

— Giải —

(*) Số tam giác lập được bất kì

$T = C_{10}^3$ (Δ).

. Số Δ mà hai cạnh của nó là cạnh của thập giác: 10 (Δ).

. Số Δ mà có 1 cạnh là cạnh của thập giác

+) Ứng với mỗi cạnh cùng 6 đỉnh $\notin$ cạnh đó $\Rightarrow$ có 60 Δ.

Vậy số Δ thoả mãn là: ~~120~~ $C_{10}^3 - 10 - 60 = 50$ (Δ).

Bài 8: Cho đa giác đều $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ $(n \geq 2, n \in \mathbb{Z})$ nội tiếp trong đường tròn (O). Biết rằng số Δ có các đỉnh là 3 trong 2n điểm $A_1, A_2 \dots A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số h.CN có 4 đỉnh là 4 trong 2n điểm. Tìm n.

– Giải –

(*) số tam giác tạo thành: C_{2n}^3.

(*) số hình chữ nhật tạo thành: C_n^2.

$$\Rightarrow C_{2n}^3 = 20 . C_n^2.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n!}{3!.(2n-3)!} = 20 . \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2).(2n-3)!}{6.(2n-3)!} = 20 . \frac{n.(n-1).(n-2)!}{2.(n-2)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} n.(2n-1).(2n-2) = 10.(n-1)n.$$

$$\Leftrightarrow n.(2n-1) 2.(n-1) = 30n(n-1).$$

. Do $n \geq 2 \Rightarrow n.(n-1) \neq 0$.

$$\Leftrightarrow 2(2n-1) = 15.2$$

$$\Leftrightarrow 2n = 8.$$

Vậy $n = 8$.

Bài 9: Cho 8 chữ số: 0, 1, 2, ... 7. Từ 8 chữ số trên có thể lập được bao nhiêu chữ số, mỗi số gồm 4 chữ số đôi một khác nhau và không chia hết cho 10.

– Giải –

(*) TH1: lập tất cả các số $\overline{a_1a_2a_3a_4}$.

. a_1 có 7 cách chọn

. a_2 có 7 " "

. a_3 có 6 " "

. a_4 có 5 " "

$\Rightarrow$ số các số lập được $T = 7.7.6.5 = 1470$ (

(*) TH2: lập số $\overline{a_1a_2a_3a_4} \vdots 10$.

. Một số chia hết cho 10 $\Leftrightarrow a_4 = 0$.

$\Rightarrow \overline{a_1a_2a_3}$ có A_7^3 cách chọn

Vậy số các số lập được thoả mãn đầu bài:

$$T_{tm} = 1470 - A_7^3 = 1260 \text{ (số)}.$$

Bài 10. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số đôi một khác nhau, không chia hết cho 9.

Giải

(*) TH1: Lập tất cả các số có 3 chữ số dạng $\overline{a_1a_2a_3}$ $(a_1 \neq 0)$

có $T_1 = 5.5.4 = 100$ (số).

(*) TH2: lập những số chia hết cho 9. $\overline{a_1a_2a_3} \vdots 9 \Leftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 \vdots 9$

. Cố định a_3: $a_3 = 5$ có 2 cách lấy $a_1 a_2$: 0, 4

$a_3 = 4$ có 4 cách.

$a_3 = 3$ có 4 " "

$a_3 = 2$ có 4

$a_3 = 1$ có 2.

$a_3 = 0$ có 2.

. TH Còn trường hợp $a_1 = 0 \Rightarrow$ có 2 số thôi

$\Rightarrow$ Tổng các số $\vdots 9$ là: $T_2 = 2 + 4.3 + 2.2 - 2 = 16$.

Vậy số các số lập được thoả mãn đầu bài:

$$T = T_1 - T_2 = 100 - 16 = 84 \text{ (số)}$$

Bài 11: Có bao nhiêu số lẻ gồm 6 chữ số chia hết cho 9?

Giải

(*) Những số chia hết cho 9 theo thứ tự tăng dần là:

100008; 100017; 100026; ...; 999999

. Những số lẻ chia hết cho 9 sẽ tạo thành một cấp số cộng (công sai là d = 18); 100008; 100017; 100035 ... 999999

Theo tính chất của cấp số cộng: $u_n = u_1 + (n-1).d$.

$\Leftrightarrow 999999 = 100017 + (n-1).18$

$\Leftrightarrow n = 50\,000$ (số)

Bài 12. Có bao nhiêu số lẻ gồm 6 chữ số khác nhau lớn nh hơn 500 000.

– Giải –

. gọi số phải lập là : $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. $(a_1 \neq 0)$.

. TH1: a_1 lẻ . có 3 cách chọn a_1.

a_6 có 4 cách chọn

$\overline{a_2a_3a_4a_5}$ có A_8^4 cách lập

$\Rightarrow$ có $3.4.A_8^4$ số.

. TH2 : a_1 chẵn $\Rightarrow$ a_1 có 2 cách chọn

a_6 có 5 cách chọn

$\overline{a_2a_3a_4a_5}$ có A_8^4

có $2.5.A_8^4$ số.

Vậy tổng số các số lập được

$T = (3.4 + 2.5).A_8^4 = 36960$. (số).

Bài 13 : Từ 10 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể thành lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số A khác nhau trong đó các số ~~đ~~ có mặt chữ số 0 và 1.

– Giải –

(*) Gọi số cần lập có dạng $\overline{a_1a_2 \ldots a_6}$ $(a_1 \neq 0)$.

. Tổng n tất cả những số có thể lập được (kể cả $a_1 = 0$)

. a_1 . Có 6 vị trí đặt chữ số 0

. Có 5 " " 1

. Còn lại có A_8^4 cách lập các chữ số còn lại

$\Rightarrow$ số các số lập được $6.5.A_8^4$.

. ~~Đa~~ Nhưng ta phải loại đi trường hợp $a_1 = 0$ có $5.A_8^4$ (số)

Vậy số các số được lập thoả mãn đầu bài

$T = 6.5.A_8^4 - 5.A_8^4 = 42\,000$ (số).

B. NHỊ THỨC NIUTƠN

Bài 14: Tính tổng:

$$T = 3^{17}.C_{17}^{0} - 4.3^{16}.C_{17}^{1} + 4^{2}.3^{15}.C_{17}^{2} - \dots + (-4)^{17}.C_{17}^{17}.$$

Giải

(*) Xét nhị thức:

$$(3-4)^{17} = C_{17}^{0}.3^{17} - C_{17}^{1}.3^{16}.4 + C_{17}^{2}.3^{15}.4^{2} - \dots - C_{17}^{17}.4^{17}.$$

$\Leftrightarrow T = (-1)^{17} = -1.$

Bài 15. Tính $S = C_{2n}^{2} + C_{2n}^{4} + C_{2n}^{6} + \dots + C_{2n}^{2n}.$

Giải

. Xét $(1+x)^{2n} = C_{2n}^{0} + C_{2n}^{1}x + C_{2n}^{2}x^{2} + \dots + C_{2n}^{2n}x^{2n}.$

. $(1-x)^{2n} = C_{2n}^{0} - C_{2n}^{1}x + C_{2n}^{2}x^{2} - \dots + C_{2n}^{2n}x^{2n}.$

. Cộng từng vế sau đó chia đôi ta được: Chọn $x = 1$.

$$S = C_{2n}^{2} + C_{2n}^{2} + C_{2n}^{4} + \dots + C_{2n}^{2n} = \frac{(1+1)^{2n} + (1-1)^{2n}}{2} - C_{2n}^{0}$$

$$= 2^{2n-1} - 1.$$

Bài 16: Tính tổng: $T = C_{10}^{6} + C_{10}^{7} + C_{10}^{8} + C_{10}^{9} + C_{10}^{10}$ (ko dùng máy).

Giải

(*) Áp dụng tính chất sau của tổ hợp $C_{n}^{k} = C_{n}^{n-k}.$

Tacó: Xét

$$S = C_{10}^{0} + C_{10}^{1} + C_{10}^{2} + C_{10}^{3} + \dots + C_{10}^{6} + \dots + C_{10}^{10} = (1+1)^{10}.$$

$\Leftrightarrow C_{10}^{5} + 2.T = 2^{10}$

$\Leftrightarrow 2.T = 2^{10} - C_{10}^{5} = 772.$

$\Leftrightarrow T = 386.$

Bài 17: Tìm hệ số của x^{50} trong đa thức:

$$P(x) = (1+x) + 2(1+x)^{2} + 3.(1+x)^{3} + \dots + 1000.(1+x)^{1000}$$

(Sau khi bỏ dấu ngoặc và bớt hoặc các số hạng đồng dạng trong đa thức).

Giải

. Theo gt, ta xét biểu thức sau:

$(1+x)P(x) - P(x) = [(1+x)^2 + 2(1+x)^3 + 3.(1+x)^4 + \dots + 1000.(1+x)^{1001}]$

$- [(1+x) + \cancel{8}\, 2(1+x)^2 + 3.(1+x)^3 + \dots + 1000(1+x)^{1000}]$.

$= -[(1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \dots + (1+x)^{1000}] + 1000.(1+x)^{1001}$

$\Leftrightarrow xP(x) = 1000.(1+x)^{1001} - \dfrac{(1+x)^{1001} - (1+x)}{(1+x) - 1}$

$\Leftrightarrow P(x) = \dfrac{1000.(1+x)^{1001}}{x} - \dfrac{(1+x)^{1001} - (1+x)}{x^2}$.

(*) Áp dụng khai triển Nhị thức Niutơn

$(1+x)^{1001} = C_{1001}^0 + C_{1001}^1 x + \dots + C_{1001}^{1001} x^{1001}$

với số hạng tổng quát là: $(1+x)^{1001} = \sum_0^{1001} C_{1001}^k x^k$.

Thay vào nhị thức ta được:

$P(x) = \dfrac{1000.\sum_0^{1001} C_{1001}^k x^k}{x} - \dfrac{\sum_0^{1001} C_{1001} . x - (1+x)}{x^2}$.

$= 1000.\sum_0^{1001} C_{1000}^k . x^{k-1} - \sum_0^{1001} C_{1001} . x^{-2} + \dfrac{1+x}{x^2}$.

. Hệ số x^{50} chỉ có thể xuất hiện trong biểu Σ mà thôi.

Tạo: $x^{k-1} = x^{50} \Leftrightarrow k = 51$.

$x^{l-2} = x^{50} \Rightarrow l = 52$.

$\Rightarrow$ Hệ số của số hạng x^{50} là

$1000.C_{1001}^{51} - C_{1001}^{52} = 1000.\dfrac{1001!}{51!(1001-51)!} - \dfrac{1001!}{52!(100}$

$= 1000.1001!\left[\dfrac{1}{51!\,950!} - \dfrac{1}{52!\,949!}\right]$.

$= \dfrac{1000.1001!}{51!\,949!}\left[\dfrac{1000}{950} - \dfrac{1}{52}\right] = \dfrac{1001!\,1021}{51!\,949!\,988}$.

<u>NX</u>: Qua bt này tạo thể ẩn theo loạt bài toán sau:

<u>VD</u>: Đa thức: $P(x) = (1+x) + 2(1+x)^2 + \dots + 20(1+x)^{20}$.

Tìm hệ số của x^{15}.

. Tương tự ta có:

$$(1+x).P(x) - P(x) = 20.(1+x)^{2021} - \frac{(1+x)^{21} - (1+x)}{(1+x)-1}.$$

$$\Leftrightarrow P(x) = 20.\frac{(1+x)^{21}}{x} - \frac{(1+x)^{21} - (1+x)}{x^2}$$

. Ta làm đơn giản, thuyết phục và tổng quát hơn nhiều so với cách tìm nhị thức có hệ số của x^{15}. (từ nhị thức $(1+x)^{15}$ là cơ sở) nhưng nếu nhiều số hạng hơn thì mất công làm.

Bài 18: Cho khai triển: $(1+2x+3x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x + \dots + a_{20}$.

a) Tính a_4

b) Tính tổng $S = a_0 + a_1 + \dots + a_{20}$.

_ Giải _

a) Ta có: $P(x) = [(1+2x) + 3x^2]^{10} = C_{10}^0(1+2x)^{10} + C_{10}^1.(1+2x)^9.3x^2$.

$+ \dots + C_{10}^{10}(1+(3x)^{10}$.

$$= \sum_0^{10}(1+2x)^{10-k}.(3x^2)^k = \sum_0^{10} C_{10}^k(1+2x)^{10-k}.9^k.x^{2k} \quad (1)$$

. Mặt khác: Trong khai triển:

$$(1+2x)^{10-k} = \sum_0^{10-k}(2x)^l \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$P(x) = \sum_0^{10} C_{10}^k\left[\left(\sum_{l=0}^{10-k} C_{10-k}^l 2^l.x^l\right).9^k.x^{2k}\right] = \sum_{k=0}^{10}\left[9^k C_{10}^k\left(\sum_{l=0}^{10-k} C_{10-k}^l 2^l x^{2k+l}\right)\right]$$

. Như vậy a_4 là hệ số của $x^4 \Leftrightarrow 2k + l = 4$. (1^*)

với $\begin{cases} 0 \le k \le 10 \\ 0 \le l \le 10-k \end{cases}$ $(k, l \in \mathbb{N})$

$(1^*) \Leftrightarrow l = 4 - 2k \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=0 \\ k=1 \\ k=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} l=4 \\ l=2 \\ l=0 \end{array}\right.$

Vậy hệ số của x^4 là:

$$3^0 . C_{10}^0 . C_{10}^4 . 2^4 + 3^1 . C_{10}^1 . C_9^2 . 2^2 + 3^2 . C_{10}^2 . C_8^0 . 2^0$$
$$= 8085.$$

b) Tính tổng S

S: Cho $x = 1$ ta được:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{20} = (1+2+3)^{10} = 6^{10}.$$

NX: Qua bài này, ta cũng nên nhớ có một phương pháp khá tổng quát và suy luận theo kiểu đại số chứ không phải là suy luận kiểu tổ hợp (hay! 😀)

Bài 19: Tìm số nguyên dương n sao cho hạng tử thứ 5 của khai triển

$$\left(2 . \sqrt[n]{2^{-1}} + \frac{4}{\sqrt[n-4]{4}}\right)^6 \text{ là } 240.$$

\- Giải -

Ta viết nhị thức dưới dạng sau:

$$\left(2 . 2^{-\frac{1}{n}} + \frac{4}{4^{\frac{1}{n-4}}}\right)^6 = \left(2^{-\frac{1}{n}} + 4^{\frac{n-3}{n-4}}\right)^6 = \left(2^{\frac{n-1}{n}} + 2^{\frac{2(n-3)}{n-4}}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{6} C_6^k . \left(2^{\frac{n-1}{n}}\right)^{6-k} . \left(2^{\frac{2(n-3)}{n-4}}\right)^k = \sum_{k=0}^{6} C_6^k . 2^{\frac{n-1}{n}.(6-k) + \frac{2(n-3)}{n-4}.k}.$$

. Hạng tử thứ 5 của khai triển tương ứng $k = 4$.

Vậy

$$C_6^4 . 2^{\left[\frac{n-1}{n}.(6-) + \frac{2(n-3)}{n-4}.4\right]} = 240$$

$$\Leftrightarrow \frac{n-1}{n} . 2 + \frac{2(n-3).4}{n-4} = 4.$$

$$\Leftrightarrow n = 2.$$

Bài 20. CMR:

a) $2.1.C_n^2 + 3.2.C_n^3 + \ldots + n(n-1).C_n^n = n.(n-1).2^{n-2}$

b) $1^2.C_n^1 + 2^2.C_n^2 + 3^2 C_n^3 + \ldots + n^2.C_n^n = n(n-1).2^{n-2}$.

Giải.

a). Xét nhị thức:

$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$.

. Đạo hàm hai vế ta được:

$n.(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2.C_n^2.x + \ldots + n C_n^n x^{n-1}$ (*)

. Đạo hàm lần nữa hai vế (*)

$n.(n-1).(1+x)^{n-2} = 2.1.C_n^2 + 3.2.C_n^3 + \ldots + n.(n-1) C_n^n$.

. Chọn $x = 1 \Rightarrow$ (đpcm)

b). Xét nhị thức:

$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \ldots + C_n^n x^n$.

. Đạo hàm hai vế:

$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2 C_n^2 x + \ldots + n C_n^n x^{n-1}$. (1)

. Mặt ≠: Xét khai triển:

$x.(1+x)^n = C_n^0 x + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^3 + \ldots + C_n^n x^{n+1}$.

Đạo hàm hai vế ta được:

$(1+x)^n + n.x(1+x)^{n-1} = C_n^0 + 2C_n^1 x + 3 C_n^2 x^2 + \ldots + (n+1) C_n^n x^n$. (2)

. Đạo hàm tiếp lần nữa:

$n(1+x)^{n-1} + n.(n-1).(1+x)^{n-2}.x + n.(1+x)^{n-1} = 2 C_n^1 + 3.2 C_n^2 x + \ldots + (n+1)n$ (2)

. Chọn $x = 1$ Thay vào (1) và (2)

Rồi trừ (2) cho (1) $\Rightarrow$ (đpcm).

Bài 21: CMR:

$$\frac{C_n^2}{(n-1)^2} + \frac{2.C_n^3}{(n-1)^3} + \frac{3 C_n^4}{(n-1)^4} + \ldots + \frac{(n-1).C_n^n}{(n-1)^n} = 1 \quad (n \geq 2 \in \mathbb{Z})$$

Giải.

(*) Phải nói luôn đây là một bài toán rất khó và cần phải có sự nghiên cứu chứ ○ phải nhìn cái là ra ngay được.

. Xét h/s: $f(x) = x.\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$.

. Khai triển h/s ta:

$$f(x) = C_n^0.x + C_n^1. + C_n^2\frac{1}{x} + C_n^3\frac{1}{x^2} + \dots + C_n^n.\frac{1}{x^{n-1}}.$$

. Đạo hàm hai vế ta được:

$$f'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^n + n.x.\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n-1}.\left(-\frac{1}{x^2}\right) = C_n^0 + \left[\frac{C_n^2}{x^2} + \frac{2.C_n^3}{x^3} + \dots + \frac{(n-1)C_n^n}{x^n}\right]$$

. Thay $x = n-1$ ta được (đpcm).

Bài 22: CMR:

$$(C_n^1)^2 + 2.(C_n^2)^2 + 3(C_n^3)^2 + \dots + n(C_n^n)^2 = \frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2}.$$

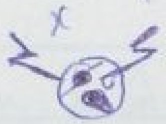
\- Giải -

. Xét hàm số $f(x) = (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \dots + C_n^nx^n$.

=> $x.f'(x) = x.n.(1+x)^{n-1} = C_n^1x + 2.C_n^2x^2 + \dots + n.C_n^nx^n$.

. Thay đổi vay vai trò x bằng $\frac{1}{x}$ ta được:

$$\frac{n}{x}.\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n-1} = \frac{C_n^1}{x} + 2C_n^2.\frac{1}{x^2} + \dots + n.C_n^n.\frac{1}{x^n}.$$



Bài 23: CMR:

$$1 + \frac{1}{2}.C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

\- Giải -

(*) Xét nhị thức:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \dots + C_n^nx^n.$$

. Lấy tích phân hai vế:

$$\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 C_n^0 dx + \int_0^1 C_n^1x\,dx + C_n^2\int_0^1 x^2 dx + \dots + C_n^n\int_0^1 x^n dx$$

$$= \frac{1}{n+1}.(1+x)^{n+1}\Big|_0^1 = C_n^0.x\Big|_0^1 + C_n^1.\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 + C_n^2.\frac{1}{3}.x^3\Big|_0^1 + \dots + C_n^n.\frac{1}{n+1}.x^{n+1}$$

$$= \frac{2^{n+1}-1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2}.C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}.C_n^n \text{ (đpcm)}.$$

Bài 24. CMR:

$$1 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{5}.C_n^2 + \frac{1}{7}C_n^3 + \dots + (-1)^n.\frac{1}{2n+1}C_n^n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

Giải

(*) Xét tích phân: $I = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$.

. Đặt $\begin{cases} u = (1-x^2)^n \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = n.(1-x^2)^{n-1}.-2x\, dx. \\ v = x. \end{cases}$

Taco':

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx = x.(1-x^2)^n \Big|_0^1 + \int_0^1 2x^2.n.(1-x^2)^{n-1} dx.$$

$$= 2n\int_0^1 x^2.(1-x^2)^{n-1} dx = 2n.\left[-\int_0^1 (1-x^2)(1-x^2)^{n-1}dx + \int_0^1 (1-x^2)^{n-1}\right.$$

$$= 2n.\left[I_{n-1} - I_n\right]. \Leftrightarrow I_n = 2n\,I_{n-1} - 2n\,I_n.$$

$$\Leftrightarrow I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.$$

Vậy: $I_0 = 1$

$I_1 = \frac{1}{3}$

$I_2 = \frac{4}{5}.\frac{1}{3} = \frac{1.2}{1.3.5}$.

$\vdots$

$I_n = \frac{1.2.4\dots 2n}{1.3.5\dots(2n+1)}$.

(*) Áp dụng tích phân vào bài toán ta được (đpcm).

Bài 24: CMR

$$\frac{1}{2}.C_n^0 - \frac{1}{4}.C_n^1 + \frac{1}{6}.C_n^2 - \frac{1}{8}.C_n^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+2}C_n^n = \frac{1}{2(n+1)}$$

Giải

. Tương tự ta áp dụng tích phân $I = \int_0^1 x.(1-x^2)^n dx. = \frac{1}{2(n+1)}$.

Bài 25: Có 4 đại biểu Mĩ; 4 Pháp, 4 Anh; 4 Nhật cần chọn 6ng đi dự hội nghị. Hỏi có mấy cách chọn sao cho.

a) Mỗi nước đều có đại biểu.

b) Không có nước nào có hơn 2 đại biểu

-Giải-

a) (*) TH: Lấy ra 6 người bất kì từ 16 ng tạo C_{16}^{6} (cách chọn).

. Bây giờ ta làm như sau:

TH1: Số cách chọn 0 có đại biểu ng Mĩ: C_{12}^{6}.

Tương tự cho các đại biểu ng nước khác.

Vậy số cách chọn hợp lí là:

$$T = C_{16}^{6} - 4 \cdot C_{12}^{6} = 4312 \text{ (cách)}$$

Bài 26: Một bộ bài tú lơ khơ có 52 quân: mỗi loại có 13 quân, cần lấy ra 8 quân trong đó có 1 cơ, 3 rô, không có quá 2 bích. Hỏi có bao nhiêu cách lấy?

-Giải-

(*) . Có 13 cách chọn quân cơ.

. Có C_{13}^{3} cách chọn quân rô.

. TH1: lấy ra 2 quân bích $\Rightarrow C_{13}^{2}$.

$\Rightarrow$ Có C_{13}^{2} cách lấy quân tép.

. $\Rightarrow$ Số cách chọn ở TH này: $13 \cdot C_{13}^{3} \cdot C_{13}^{2} \cdot C_{13}^{2}$.

TH2: lấy ra 1 quân bích $\rightarrow C_{13}^{1}$.

$\Rightarrow$ Có C_{13}^{3} cách lấy quân tép.

$\Rightarrow$ Số cách chọn ở TH này là: $13 \cdot C_{13}^{3} \cdot C_{13}^{1} \cdot C_{13}^{3}$.

Theo quy tắc cộng thì số cách lấy hợp lý:

$$T = 13 \cdot C_{13}^{3} \cdot \left(C_{13}^{2} \cdot C_{13}^{2} + C_{13}^{1} \cdot C_{13}^{3} + C_{13}^{4} \right)$$

(Thiếu: 0 có quân bích).

$$= 39102206 \text{ (cách)}$$

Bài 27: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 c/s đôi một ≠ nhau.

b) Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ ≠ nhau.

- Giải -

a) . gọi số cần lập $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ $(a_1 \neq 0)$

. có $4.4.3.2 = 96$ (số)

b) . a_4 có 2 cách chọn
a_1 có 3 cách
$\overline{a_2a_3}$ có A_3^2 cách
$\Rightarrow 2.3.A_3^2 = 36$ (số).

Bài 28: Một lớp 20 h/s có 14 boy, 6 girl. Hỏi có bao nhiêu cách lập 1 đội có 4 h/s trong đó:

a) số boy = số girl.

b) ít nhất 1 nữ.

- Giải -

a) (*) Vì số nam bằng số nữ $\Rightarrow$ có 2 nam, 2 nữ.

$\Rightarrow$ có $C_{14}^2 . C_6^2 = 1365$ (cách)

b) . Số cách chọn 4 bạn bất kì C_{20}^4

. số cách chọn mà 0 có bạn nữ nào: C_{14}^4.

$\Rightarrow$ số cách chọn hợp lí: $C_{20}^4 - C_{14}^4 = 3844$.

Bài 29: Có 16 h/s gồm 3 giỏi, 5 khá, 8 trung bình. Có bao nhiêu cách chia làm 2 tổ, mỗi tổ có 8 người đều có h/s giỏi và ít nhất 2 h/s khá.

- Giải -

(*) . Vì mỗi tổ có ít nhất 2 học sinh khá nên chỉ có 2 trường hợp

- Tổ 1: có 2 h/s khá $\Rightarrow$ Tổ 2 có 3 h/s khá.
- Tổ 1 có 3 h/s khá $\Rightarrow$ " 2 "

(*) TH1: Tổ 1 có 2 h/s khá $\Rightarrow$ có C_5^2 cách chọn

$\Rightarrow$ có $(C_3^1 . C_8^5 + C_3^2 . C_8^4)$ h/s giỏi + TB

*) TH2: Tổ 1 có 3 h/s khá $\Rightarrow$ có C_5^3 cách

$\Rightarrow$ có $(C_3^1 . C_8^4 + C_3^2 . C_8^3)$ cách chọn h/s giỏi + TB.

còn lại số h/s đó vào tổ 2

Vậy ư: $C_5^2 . (C_3^1 . C_8^5 + C_3^2 . C_8^4) + C_5^3 . (C_3^1 . C_8^4 + C_3^2 . C_8^3)$

$= 7560$ (cách)

. Vì vai trò của hai tổ 1, 2 là như nhau

$\Rightarrow$ có $\frac{7560}{2} = 3780$ (cách).

Bài 30: Có thể lập được bao nhiêu số có 8 chữ số trong đó có các chữ số: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Trong đó 1 và 6 đều có mặt đúng 2 lần còn các chữ số khác xuất hiện 1 lần.

-Giải-

(*) gọi số cần lập có dạng $\overline{a_1 a_2 \ldots a_8}$. $(a_1 \neq 0)$.

. Có C_8^2 cách chọn ra 2 vị trí đặt c/s 1.

. Có C_6^2 " " 6.

Còn lại có A_4^4 cách chọn các c/s đặt vào các vị trí còn lại.

Vậy số cách các số lập được thoả mãn đầu bài:

$T = C_8^2 . C_6^2 . A_4^4 = 10080$ (2 số).