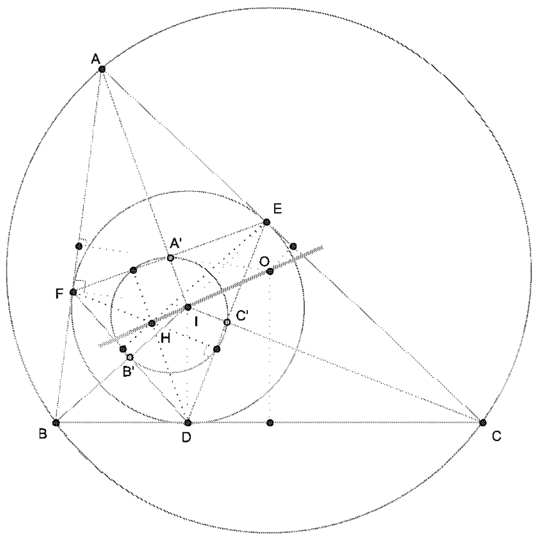
Hạ Vũ Anh

BÀI TẬP HÌNH HỌC



Vĩnh Yên tháng 4 năm 2007

Chương 1

Kiến thức cơ sở

1.1 Véctơ và các phép toán tuyến tính

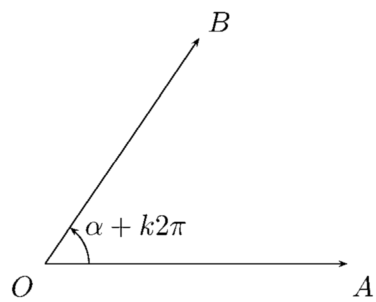
1.2 Hệ thức lượng trong các hình

1.2.1 Hệ thức lượng trong tam giác

1.2.2 Hệ thức lượng trong đường tròn

1.3 Góc định hướng

1.3.1 Góc giữa hai tia



Cho hai véc-tơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$, đặt $\alpha = \angle AOB$. Khi đó góc (định hướng) giữa véc-tơ $\overrightarrow{OA}$ và véc-tơ $\overrightarrow{OB}$, ký hiệu $\angle(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ hay $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$, là góc $\alpha + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

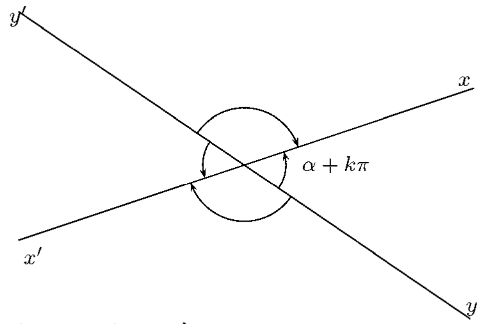
Cho hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$. Khi đó, góc (định hướng) giữa véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và véc-tơ $\overrightarrow{b}$, ký hiệu $\angle(\overrightarrow{a};\overrightarrow{b})$ hay $(\overrightarrow{a};\overrightarrow{b})$, là góc $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$, trong đó

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$$

Cho góc $\angle xOy = \alpha$. Khi đó góc (định hướng) giữa tia Ox và tia Oy, ký hiệu $\angle(Ox; Oy)$ hay (Ox, Oy), là góc $\alpha + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Định lý 1.3.1 (Chalès). $(Ox; Oy) + (Oy; Oz) = (Ox; Oz) \pmod{2\pi}$

1.3.2 Góc giữa hai đường thẳng



Cho hai đường thẳng $x'Ox, y'Oy$ cắt nhau tại O. Đặt $\angle xOy = \angle x'Oy' = \alpha$, khi đó $\angle x'Oy = \angle xOy' = \pi - \alpha$. Vậy, góc (định hướng) giữa đường thẳng $x'Ox$ và đường thẳng $y'Oy$, ký hiệu $\angle(x'Ox; y'Oy)$ hay $(x'Ox; y'Oy)$, là góc $\alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Nhận xét. Nếu $\alpha = \beta \pmod{2\pi}$ thì $\alpha = \beta \pmod{\pi}$. Điều ngược lại nói chung không đúng.

Định lý 1.3.2 (Chalès). $(a; b) + (b; c) = (a; c) \pmod{\pi}$

Từ đó, ta có được các kết quả sau

Định lý 1.3.3. *Bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường thẳng hay đường tròn iff $(AB; AC) = (DB; DC) \pmod{\pi}$ iff $(AB; AD) = (CB; CD) \pmod{\pi}$*

Định lý 1.3.4. *Cho $A, B, C \in (O)$. Khi đó*

$$(AB; AC) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) \pmod{\pi}$$

Định lý 1.3.5. *Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), $AB \cap CD = P, AC \cap BD = Q$. Khi đó*

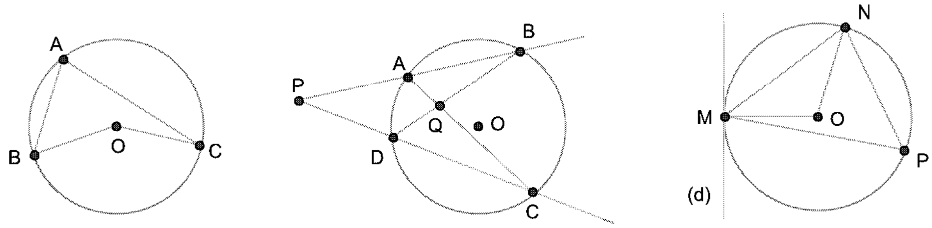
$$Sđ(PA; PD) = Sđ(PB; PC) = \frac{1}{2} \cdot \left(Sđ \overset{\frown}{BC} + Sđ \overset{\frown}{AD} \right) \pmod{\pi}$$

và

$$Sđ(QA; QD) = Sđ(QC; QB) = \frac{1}{2} \cdot \left(Sđ \overset{\frown}{CB} + Sđ \overset{\frown}{AD} \right) \pmod{\pi}$$

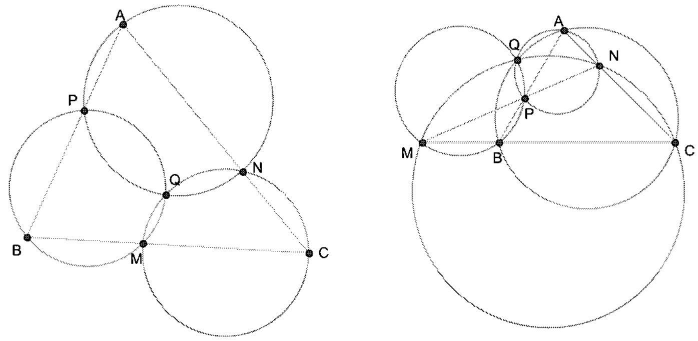
Định lý 1.3.6. *Cho đường thẳng (d) tiếp xúc với đường tròn (O) tại M và $N, P \in (O), \neq M$. Khi đó*

$$Sđ(d; MN) = Sđ(PM; PN) \pmod{\pi}$$



Định lý 1.3.7 (Miquel). *Các điểm M, N, P theo thứ tự nằm trên các đường thẳng chứa các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Khi đó các đường tròn $(ANP), (BPM), (CMN)$ cùng đi qua một điểm.*

Hệ quả 1.3.1. *Một đường thẳng cắt các đường thẳng chứa các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC theo thứ tự tại M, N, P. Khi đó các đường tròn $(ABC), (ANP)$, (BPM), và (CMN) cùng đi qua một điểm.*



Định lý 1.3.8. *1.* $(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}) = \pi + (\overrightarrow{a}; -\overrightarrow{b}) \pmod{2\pi}$

2. Nếu $Ox \upuparrows O'x'; Oy \upuparrows O'y'$ *thì* $(Ox; Oy) = (O'x'; O'y') \pmod{2\pi}$

3. Nếu $Ox \uparrow\downarrow O'x'; Oy \uparrow\downarrow O'y'$ *thì* $(Ox; Oy) = (O'x'; O'y') \pmod{2\pi}$

4. Nếu $a \parallel a', b \parallel b'$ *thì* $(a; b) = (a'; b') \pmod{\pi}$

5. Nếu $a \perp a', b \perp b'$ *thì* $(a; b) = (a'; b') \pmod{\pi}$

1.4 Hàng điểm điều hòa, chùm điều hòa

1.4.1 Tỷ số đơn, tỷ số kép của bộ các điểm thẳng hàng

Tỷ số đơn của bộ ba điểm A, B, C thẳng hàng, ký hiệu (AB, C), là tỷ số $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$

Tỷ số kép của bộ bốn điểm thẳng hàng A, B, C, D, ký hiệu $(ABCD)$, là tỷ số $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$

Nhận xét. Nếu $(ABCD) = \alpha$ thì

1. $(ABCD) = (BCDA) = (CDAB) = (DABC) = \alpha = (DCBA) = (CBAD) = (BADC) = (ADCB)$

2. $(ABCD) = \frac{1}{\alpha} = (BACD) = (ABDC)$ nếu $\alpha \neq 0$

3. $(ABCD) = 1 - (ACBD) = 1 - (DBCA)$

Định lý 1.4.1. *Phép chiếu xuyên tâm bảo toàn tỷ số kép của bộ bốn điểm thẳng hàng*

1.4.2 Hàng điểm điều hòa

Bộ bốn điểm thẳng hàng A, B, C, D được gọi là lập thành một *hàng điểm điều hòa*, nếu $(ABCD) = -1$. Khi đó, cặp điểm A, B chia điều hòa cặp điểm C, D hay cặp điểm A, B liên hợp điều hòa đối với cặp điểm C, D.

Định lý 1.4.2. *Cho A, B, C, D thẳng hàng. Khi đó*

$$\begin{aligned}(ABCD) = -1 &\iff \frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} \quad \textbf{(Hệ thức Descartes)} \\ &\iff IA^2 = IB^2 = \overline{IC} \cdot \overline{ID} \quad \textbf{(Hệ thức Newton)} \\ &\iff \overline{CI} \cdot \overline{CD} = \overline{CA} \cdot \overline{CB} \quad \textbf{(Hệ thức Mc Laurint)}\end{aligned}$$

1.4.3 Chùm điều hòa

Trong mặt phẳng, tập hợp các đường thẳng đồng quy tại một điểm S, được gọi là một chùm đường thẳng tâm S.

Mở rộng. Tập hợp các đường thẳng đôi một song song cũng được gọi là một chùm đường thẳng có tâm tại điểm xa vô tận.

Định lý 1.4.3. *Cho chùm bốn đường thẳng a, b, c, d. Một đường thẳng Δ bất kỳ cắt a, b, c, d tại A, B, C, D theo thứ tự đó. Khi đó $(ABCD)$ không phụ thuộc vào vị trí của Δ*

Giá trị không đổi của tỷ số kép $(ABCD)$ được gọi là tỷ số kép của chùm bốn đường thẳng, ký hiệu $(abcd)$ hay $S(abcd)$ khi cần quan tâm đến tâm của chùm.

Khi $(abcd) = -1$ ta nói rằng chùm bốn đường thẳng a, b, c, d lập thành một chùm điều hòa. Khi đó, cặp đường thẳng a, b liên hợp điều hòa đối với cặp c, d.

Định lý 1.4.4. *Chùm bốn đường thẳng a, b, c, d lập thành một chùm điều hòa khi và chỉ khi mọi đường thẳng song song với một trong bốn đường thẳng, bị ba đường còn lại chia thành hai đoạn bằng nhau.*

Định lý 1.4.5. *Trong một chùm điều hòa, cặp đường liên hợp vuông góc khi và chỉ khi chúng là phân giác của góc tạo bởi cặp còn lại.*

1.4.4 Tứ giác toàn phần

Hình hợp bởi bốn đường thẳng, đôi một cắt nhau, không có ba đường nào đồng quy, được gọi là *hình tứ cạnh toàn phần* hay *hình tứ giác toàn phần*. Mỗi một đường thẳng, được gọi là một cạnh, giao điểm của hai cạnh gọi là đỉnh, cặp đỉnh không chung cạnh gọi là cặp đỉnh đối diện, đoạn thẳng nối cặp đỉnh đối diện gọi là đường chéo.

Định lý 1.4.6 (Về đường thẳng Gauss)**.** *Trong một hình tứ cạnh toàn phần, trung điểm ba đường chéo cùng nằm trên một đường thẳng.*

Định lý 1.4.7. *Trong hình tứ cạnh toàn phần, mỗi đường chéo bị hai đường chéo kia chia điều hòa.*

1.4.5 Tứ giác điều hòa

Cho bốn điểm $A, B, C, D \in (O)$ và một điểm M thay đổi của (O). Khi đó tỷ số kép $M(ABCD)$ không phụ phuộc vào M. Giá trị của tỷ số kép đó được gọi là tỷ số kép của bộ bốn điểm đồng viên A, B, C, D, khi không sợ nhầm lẫn, chúng ta cũng ký hiệu $(ABCD)$.

Với tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O), nếu $(ABCD) = -1$ thì ta nói tứ giác nội tiếp $ABCD$ là một tứ giác điều hòa.

Với mỗi điểm $M \in (O)$, ký hiệu (MM) là để chỉ đường tiếp tuyến của (O) tại M.

Định lý 1.4.8. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Khi đó*

$$\begin{aligned}\text{\textit{Tứ giác} } ABCD \text{ \textit{điều hòa}} &\Longleftrightarrow (ABCD) = -1\\ &\Longleftrightarrow (AA) \cap (CC) = P \in (BD)\\ &\Longleftrightarrow (BB) \cap (DD) = Q \in (AC)\\ &\Longleftrightarrow AB \cdot CD = BC \cdot DA\end{aligned}$$

Định lý 1.4.9. *Tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O) và $(AA) \cap (CC) = P \in (BD), (AC) \cap (BD) = Q$. Khi đó*

$$PQ = \frac{2}{\frac{1}{PB} + \frac{1}{PD}}$$

1.4.6 Cực và đối cực

1.4.6.1 Đường đối cực của một điểm đối với hai đường thẳng cắt nhau

Cho hai đường thẳng $a \cap b = O$ và một điểm $M \notin a, b$. Khi đó điểm N được gọi là liên hợp với M đối với cặp đường thẳng a, b, nếu đường thẳng MN cắt a tại A, cắt b tại B sao cho $(MNAB) = -1$. Ngoài ra, quỹ tích tất cả những điểm N liên hợp với M đối với cặp đường thẳng cắt nhau a, b là một đường thẳng c đi qua $a \cap b$. Đường thẳng đó được gọi là đường đối cực của M đối với cặp đường thẳng cắt nhau a, b, và điểm M được gọi là cực của đường thẳng c đối với hai đường thẳng cắt nhau a, b.

1.4.6.2 Đường đối cực của một điểm đối với một đường tròn.

Cho trước một đường tròn (O). Hai điểm M và N được gọi là liên hợp đối với đường tròn (O) nếu đường tròn đường kính MN trực giao với (O). Từ đó, nếu (MN) cắt đường tròn (O) tại hai điểm A, B, thì M, N liên hợp với nhau đối với đường tròn (O) khi và chỉ khi $(MNAB) = -1$.

Cho trước đường tròn (O) và một điểm $M \neq O$. Đường thẳng MO cắt (O) tại A, B. Khi đó, quỹ tích tất cả những điểm N liên hợp với M đối với (O) là đường thẳng m vuông góc với MO tại H mà $(MHAB) = -1$. Đường thẳng m được gọi là đường đối cực của M đối với đường tròn (O), điểm M được gọi là cực của đường thẳng m đối với đường tròn (O). Ký hiệu x để chỉ đường đối cực của điểm X đối với đường tròn (O).

Định lý 1.4.10. *1.* $M \in n \Longleftrightarrow N \in m$

2. M, N, P *thẳng hàng khi và chỉ khi* m, n, p *đồng quy*

Định lý 1.4.11. *Tứ giác* $ABCD$ *nội tiếp trong đường tròn* (O). *Gọi* P, Q, R *là giao điểm của các cặp đường thẳng* AB *và* CD, BC *và* DA, AC *và* BD *theo thứ tự đó. Khi đó* O *là trực tâm của tam giác* PQR

1.5 Phép biến hình

1.5.1 Phép dời hình

1.5.2 Phép đồng dạng

1.5.3 Phép nghịch đảo

1.6 Một số kiến thức cơ sở của hình học giải tích

Chương 2

Đồng quy, thẳng hàng

1. **cb1**Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại A, B. Xét $M \in (O_1), N \in (O_2)$ thỏa mãn

$$\angle(\overrightarrow{O_1A}; \overrightarrow{O_1M}) \equiv \angle(\overrightarrow{O_2A}; \overrightarrow{O_2N}) \pmod{2\pi} \quad (\star)$$

Chứng minh rằng M, B, N thẳng hàng và trung trực MN luôn đi qua một điểm cố định, khi M, N thay đổi trên hai đường tròn, và thỏa mãn $(\star)$

(IMO 1978)

Nhận xét. Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại A, B. Với $M_i \in (O_i)$, ta luôn có

$$\begin{aligned} M, B, N \text{ thẳng hàng } &\Leftrightarrow \angle(\overrightarrow{O_1A}; \overrightarrow{O_1M}) \equiv \angle(\overrightarrow{O_2A}; \overrightarrow{O_2N}) \pmod{2\pi} \\ &\Leftrightarrow \angle(AM_1; AM_2) \equiv \angle(AO_1; AO_2) \pmod{\pi} \\ &\Leftrightarrow \angle(AO_1; AM_1) \equiv \angle(AM_2; AO_2) \pmod{\pi} \\ &\Leftrightarrow \triangle M_1AM_2 \backsim \triangle O_1AO_2 \quad (\text{tam giác } M_1AM_2 \text{ tự đồng dạng}) \end{aligned}$$

2. **2**Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Lấy $P_i, Q_i \in (O_i)$ sao cho P_1P_2, Q_1Q_2 là các tiếp tuyến chung của chúng. Gọi M_i là trung điểm P_iQ_i, đường thẳng AM_i cắt lại đường tròn (O_i) tại N_i.

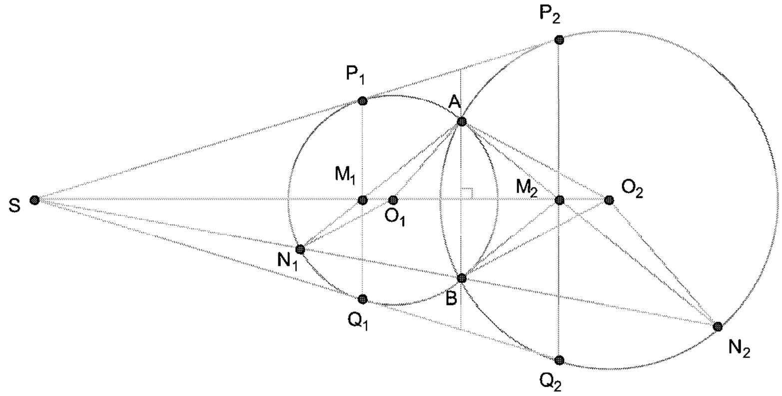
   (a) Chứng minh rằng $\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$

   (IMO 1983)

   (b) Chứng minh rằng N_1, B, N_2 thẳng hàng.

   (VMO 2001)

Lời giải.



Dễ dàng chỉ ra được AB đi qua điểm chính giữa P_1P_2, Q_1Q_2 và do đó AB là trung trực của M_1M_2 (do $P_1Q_1 \parallel P_2Q_2$). Suy ra AM_1BM_2 là một hình thoi, do đó $AM_1 \parallel BM_2$.

Gọi S là tâm vị tự ngoài của hai đường tròn, khi đó

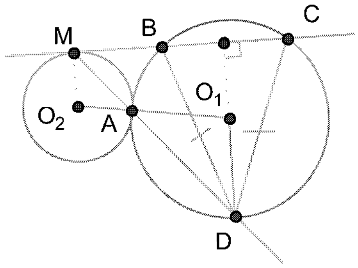
$$\begin{aligned} V_S^{\frac{R_2}{R_1}} : (O_1) &\longrightarrow (O_2) \\ N_1 &\longmapsto B \\ P_1 &\longmapsto P_2 \\ Q_1 &\longmapsto Q_2 \\ \Rightarrow M_1 &\longmapsto M_2 \end{aligned}$$

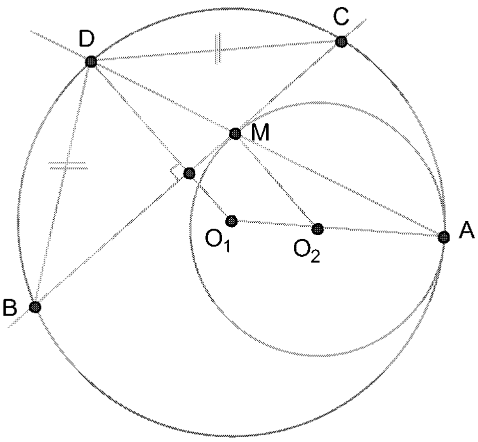
Suy ra $\angle M_1AO_1 = \angle M_1N_1O_1 = \angle M_2BO_2 = \angle M_2AO_2 \Longrightarrow \angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$ và ta cũng được ngay N_1, B, N_2 thẳng hàng.

3. Cho tam giác ABC nhọn, đường cao AH, $H \in BC$. Đường tròn đường kính AH cắt lại các đường thẳng AB, AC tại M, N tương ứng. Đường thẳng Δ_a qua A, vuông góc với MN. Các đường thẳng Δ_b, Δ_c được xác định một cách tương tự. Chứng minh rằng các đường thẳng $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ đồng quy.

(IMO Short-listed)

4. **cb2.**Hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ tiếp xúc nhau tại A. Tiếp tuyến tại M tùy ý của (O_2) cắt (O_1) tại B, C. Chứng minh rằng đường thẳng AM đi qua điểm chính giữa cung BC (Hình vẽ)





5. **3.**Trong mặt phẳng cho ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O)$ mà $(O_1), (O_2)$ tiếp xúc ngoài tại I và tiếp xúc trong với (O) (tại M_1, M_2). Lấy ba điểm A, B, C trên đường tròn (O) sao cho BC là tiếp tuyến chung ngoài của $(O_1), (O_2)$ còn IA là tiếp tuyến chung trong của chúng mà I, A cùng phía đối với đường thẳng BC. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

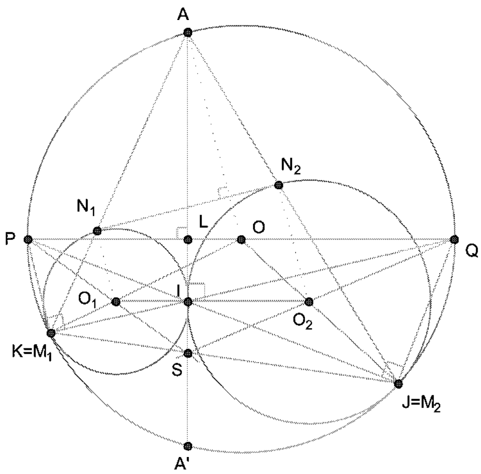
(IMO 1992)

5'. **2**Trong mặt phẳng cho ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O)$ mà $(O_1), (O_2)$ tiếp xúc ngoài tại I và tiếp xúc trong với (O) tại M_1, M_2. Tiếp tuyến chung trong của $(O_1), (O_2)$ cắt (O) tại A, A'.

(a) Đường thẳng AM_i cắt lại đường tròn (O_i) tại N_i. Chứng minh rằng $N_1N_2 \perp OA$

(b) Dựng đường kính PQ của (O) vuông góc với IA. Chứng minh rằng PO_1, QO_2, IA đồng quy

Lời giải.



1. Từ giả thiết suy ra $V_{M_1}^{\frac{R}{R_1}} : (O_1) \longrightarrow (O)$ suy ra $O_1N_1 \parallel OA \Rightarrow \angle AOM_1 = \angle N_1O_1M_1$

Mặt khác, do $\overline{AN_1} \cdot \overline{AM_1} = \overline{AI}^2 = \overline{AN_2} \cdot \overline{AM_2}$ suy ra $M_1M_2N_2N_1$ nội tiếp. Từ đó

$$\angle AN_1N_2 = \angle AM_2M_1 = \frac{1}{2} \cdot \angle AOM_1 = \frac{1}{2} \cdot \angle N_1O_1M_1$$

Vậy $\angle AN_1N_2 + \angle M_1N_1O_1 = 90^\circ$, suy ra $OA \perp N_1N_2$.

2. Giả sử PI, QI cắt lại (O) tại J, K. Khi đó $\angle PJO = \angle OPJ = \angle O_2IJ = \angle O_2JI = \angle O_2JP \Longrightarrow O, O_2, J$ thẳng hàng. Do đó $J \equiv N_2$. Tương tự $K \equiv N_1$.

Trong tam giác PQI, có IL, PM_1, QM_2 là ba đường cao, nên chúng đồng quy. Theo định lý Seva

$$\frac{LP}{LQ} \cdot \frac{M_1Q}{M_1I} \cdot \frac{M_2I}{M_2P} = 1$$

Suy ra

$$\frac{LP}{LQ} = \frac{M_1I}{M_1Q} \cdot \frac{M_2P}{M_2I} = \frac{R_1}{R} \cdot \frac{R}{R_2} = \frac{R_1}{R_2} \Longrightarrow \frac{R_1}{LP} = \frac{R_2}{LQ} \quad (1)$$

Giả sử PO_1, QO_2 cắt IA tại S_1, S_2. Khi đó

$$\frac{S_1I}{S_1L} = \frac{IO_1}{LP} = \frac{R_1}{LP} \quad (2)$$

và

$$\frac{S_2I}{S_2L} = \frac{IO_2}{LQ} = \frac{R_2}{LQ} \quad (3)$$

Từ (1),(2),(3) suy ra $S_1 \equiv S_2 \equiv S$. Suy ra điều phải chứng minh.

6. **3**Trong mặt phẳng cho ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O)$ mà $(O_1), (O_2)$ tiếp xúc ngoài tại I và tiếp xúc trong với (O) (tại M_1, M_2). Tiếp tuyến chung trong của $(O_1), (O_2)$ cắt (O) tại A, A'. Đường thẳng AM_i cắt lại đường tròn (O_i) tại điểm N_i, đường thẳng M_1M_2 cắt lại đường tròn (O_i) tại P_i.

   (a) Các đường thẳng N_iP_i và AA' đồng quy

   (b) Đường thẳng N_1N_2 tiếp xúc với (O_i).

(Balkan 1997)

7. **3**Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ tiếp xúc ngoài nhau tại A. Từ một điểm M trên (O_2) nhưng không nằm trên đường thẳng O_1O_2 kẻ hai tiếp tuyến MB, MC tới (O_1) $(B, C \in (O_1))$. Các đường thẳng AB, AC cắt lại đường tròn (O_2) tại

D, E, đường thẳng DE và tiếp tuyến tại M của (O_2) cắt nhau ở N. Chứng minh rằng N luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

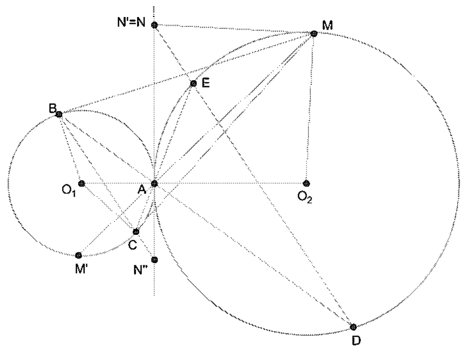
(VMO 2003)

Lời giải 1. (Vị tự)

Bổ đề. Cho tứ giác $ABCD$ nội tieps trong đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A, C của (O) cắt nhau tại E. Khi đó B, D, E thẳng hàng khi và chỉ khi $AB \cdot CD = BC \cdot DA$

Trở lại bài toán. Đường thẳng AM cắt lại (O_1) tại M'. Khi đó, tứ giác $ABM'C$ có tính chất $AB \cdot CM' = BM' \cdot CA$ (1)

Đặt $k = \frac{\overline{AO_2}}{\overline{AO_1}}$ ta có



$$\begin{aligned} V_A^k : (O_1) &\longrightarrow (O_2) \\ B &\longmapsto D \\ C &\longmapsto E \\ M' &\longmapsto M \end{aligned}$$

Suy ra $MD = |k|M'B, ME = |k|M'C, AM = |k|AM', AD = |k|AB, AE = |k|AC$. Kết hớp với (1), ta được

$$AD \cdot ME = AE \cdot MD$$

điều này tương đương với giao hai tiếp tuyến tại A, M của (O_2) nằm trên DE hay N luôn chạy trên tiếp tuyến chung của $(O_1), (O_2)$ tại A (trục đẳng phương của $(O_1), (O_2)$).

Lời giải 2. (Cực và đối cực) Giả sử trục đẳng phương của hai đường tròn cắt MN tại N' và AN cắt BC tại N''.

Ta có $N'' \in BC$ là đường đối cực của M đối với (O_1) suy ra M nằm trên đường đối cực của N'' đối với (O_1). Mà qua phép vị tự V_A^k, đường thẳng BC biến thành đường thẳng DE, đường thẳng $M'N''$ biến thành đường thẳng MN, nên $M'N''$ tiếp xúc với (O_1). Suy ra M' nằm trên đường đối cực của N'' đối với (O_1). Vì vậy $N''A$ tiếp xúc với (O_1). Suy ra NA tiếp xúc với (O_i).

Lời giải 3. (Nghịch đảo) Xét phép nghịch đảo f cực A phương tích 1.

$$\begin{aligned} f : (O_i) &\longmapsto d_i \ : \ \ d_1 \parallel d_2 \\ X &\longmapsto X^\star \\ (MB) &\longmapsto (M^\star B^\star A) \text{ tiếp xúc với } d_1 \\ (MC) &\longmapsto (M^\star C^\star A) \text{ tiếp xúc với } d_1 \\ \text{tiếp tuyến tại } A \text{ của } (O_2) &\longmapsto \text{ đường tròn } \omega \text{ qua } A \text{ tiếp xúc với } d_2 \text{ tại } M^\star \\ N &\longmapsto N^\star \end{aligned}$$

Cần chứng minh $AN^\star \parallel d_i$ hay $AN^\star \parallel E^\star D^\star$

Gọi X là tâm của đường tròn $(D^\star E^\star A), AM^\star \cap d_1 = I$. Ta có

$$\overline{IB^\star}^2 = \overline{IA} \cdot \overline{IM^\star} = \overline{IC^\star}^2 \Rightarrow \overline{IB^\star} = -\overline{IC^\star} \Rightarrow \overline{M^\star E^\star} = -\overline{M^\star D^\star}$$

suy ra $X, M^\star,$ tâm ω thẳng hàng hay $\omega X \perp d_2$ Mà $N^\star \in (\omega) \cap (AD^\star E^\star)$ nên $\omega X \perp AN^\star$. Suy ra $AN^\star \parallel d_2$. đpcm

8. **bt** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn ω_a tiếp xúc với các tia AB, AC tại A_b, A_c và tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại A'. Các điểm $B_a, B_c, B', C_a, C_b, C'$ được xác định một cách tương tự.

   (a) Chứng minh rằng các đường thẳng A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b đồng quy tại $I-$ tâm đường tròn nội tiếp của tam giác. Hơn nữa, I là trung điểm chung của các đoạn thẳng A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b

   (b) Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại tâm vị tự ngoài của $(O), (I)$.
   Nhận xét. Nếu $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ tiếp xúc ngoài với (O) thì điểm đồng quy là tâm vị tự trong của $(O), (I)$.

   (c) Gọi A_0, A_1 theo thứ tự là điểm chính giữa cung BC (không chứa A) của (O), tiếp điểm của (I) với BC, và gọi M_a là trung điểm IA_1. Chứng minh rằng đường thẳng A_0M_a là trục đẳng phương của ω_b và ω_c.

   (c') Gọi A_0, A_1 theo thứ tự là điểm chính giữa cung BC (không chứa A) của (O), tiếp điểm của (I) với BC, và gọi M_a là trung điểm IA_1. Một cách tương tự, cũng có các điểm $B_0, B_1, C_0, C_1, M_b, M_c$. Chứng minh rằng các đường thẳng A_0M_a, B_0M_b, C_0M_c đồng quy. Hãy chỉ rõ vị trí hình học của điểm đồng quy.

(d) Đường tròn (k) tiếp xúc trong với $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ theo thứ tự tại A'', B'', C''. Chứng minh rằng $A'A'', B'B'', C'C''$ đồng quy.

9. Trong mặt phẳng cho tam giác ABC và một đường tròn (C).Gọi $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ là đường tròn tiếp xúc trong với (C) tại A', B', C' và theo thứ tự tiếp xúc với các cặp tia AB và AC,BC và BA,CA và CB. Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

(Vĩnh Phúc, lớp 12 năm 2006)

10. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I, nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi I_a, I_b, I_c lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp trên các cạnh BC, CA, AB. Gọi A', B', C' theo thứ tự là giao điểm của các cặp đường thẳng OI_a và BC, OI_b và CA, OI_c và AB. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của các tam giác ABC, BCI, CAI, ABI và các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

11. Cho tam giác ABC với các đường cao AA_1, BB_1, CC_1. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của các tam giác $AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1$ đồng quy tại một điểm nằm trên đường tròn Euler của tam giác.

12. **4**Cho tam giác ABC. Một đường thẳng Δ cắt các đường thẳng BC, CA, AB tại D, E, F theo thứ tự đó. Gọi O, O_a, O_b, O_c lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, AEF, BFD, CDE và H, H_a, H_b, H_c là trực tâm các tam giác này thheo thứ tự đó. Chứng minh rằng

    (a) $\triangle O_aO_bO_c \backsim \triangle ABC$

    (b) Trung trực các đoạn thẳng $OH, O_aH_a, O_bH_b, O_cH_c$ đồng quy.

Lời giải.

1. Theo bổ đề Mi-ken, các đường tròn $(O_a), (O_b), (O_c), (O)$ đồng quy tại một điểm M. Ta có

$$\begin{aligned}(O_aO_b; O_aO_c) &\equiv (O_aO_b; MF) + (MF; ME) + (ME; O_aO_c) \pmod{\pi} \\ &\equiv \frac{\pi}{2} + (AF; AE) + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \\ &\equiv (AB; AC) \pmod{\pi}\end{aligned}$$

Tương tự $(O_bO_c; O_bO_a) \equiv (BC; BA) \pmod{\pi}$

Vậy $\triangle O_aO_bO_c \backsim \triangle ABC$

C2. Dễ thấy các tam giác MAO_a, MBO_b, MCO_c đồng dạng (cùng hướng). Do đó có phép đồng dạng $Z(M; \frac{MO_b}{MB}; (\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MO_b}))$ mà qua đó $O_a \mapsto A, O_b \mapsto B, O_c \mapsto C$.

2. Gọi O', H' ttheo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm của tam giác $O_aO_bO_c$. Ta có

$$\frac{O'H'}{OH} = \frac{MO_b}{MB} \text{ và } (\overrightarrow{O'H'}; \overrightarrow{OH}) \equiv (\overrightarrow{MO_b}; \overrightarrow{MB}) \pmod{2\pi}$$

Lấy $K : \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{O'H'}$. Khi đó

$$\frac{OK}{OH} = \frac{O'H'}{OH} = \frac{MO_b}{MB} \text{ và } (\overrightarrow{OK}; \overrightarrow{OH}) \equiv (\overrightarrow{O'H'}; \overrightarrow{OH}) \equiv (\overrightarrow{MO_b}; \overrightarrow{MB}) \pmod{2\pi}$$

Suy ra $\triangle KOH \backsim \triangle O_bMB$ mà tam giác O_bMB cân (tại O_b) nên $KO = KH$ hay $K \in t[OH]$. Hoàn toàn tương tự $K \in t[O_aH_a], t[O_bH_b], t[O_cH_c]$

13. Cho tam giác ABC. Gọi A_0, B_0, C_0 theo thứ tự là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp cắt B_0C_0 tại A_1, các điểm B_1, C_1 được xác định tương tự. Chứng minh rằng A_1, B_1, C_1 cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác.

14. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi O_a, O_b, O_c theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác BOC, COA, AOB

    (a) Chứng minh rằng AO_a, BO_b, CO_c đồng quy tại một điểm K

    (b) Gọi P là ảnh của K qua phép nghịch đảo $\mathcal{N}_O^{R^2}$ và P_a, P_b, P_c theo thứ tự đối xứng với P qua các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng AP_a, BP_b, CP_c đồng quy tại một điểm Q nằm trên đường tròn (O)

    (c) Gọi E là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC. Chứng minh rằng E, K, P thẳng hàng.

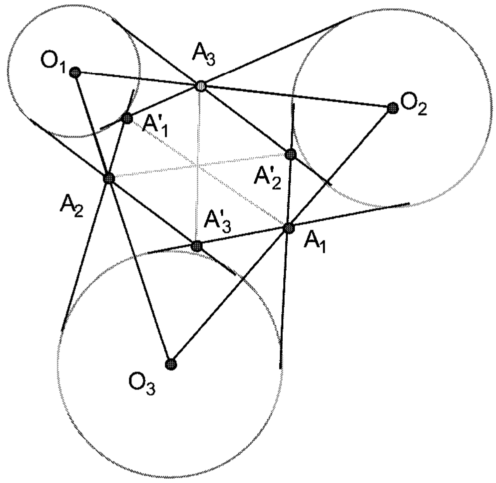
15. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB theo thứ tự tại A_1, B_1, C_1. Gọi A_0, B_0, C_0 lần lượt là trung điểm các đường cao kẻ từ A, B, C. Chứng minh rằng A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 đồng quy tại một điểm trên đường thẳng OI (ở đây O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

(VMO TST)

16. Cho ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$. Gọi A_i là tâm vị tự trong của các đường tròn $(O_{i-1}), (O_{i+1})$ và A_i' là giao điểm của đoạn tiếp tuyến chung trong của

các cặp đường tròn $(O_i), (O_{i-1})$ và $(O_i), (O_{i+1})$ (Hình 1). Chứng minh rằng các đường thẳng $A_iA'_i$ đồng quy.

(Iranian Mathematical Olympiad)



17. **5**Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại D, E, F tương ứng. Gọi $\omega, \omega_a, \omega_b, \omega_c$ theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, AEF, BFD, CDE. Đường tròn ω cắt lại các đường tròn $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ theo thứ tự tại A', B', C'. Chứng minh rằng

   (a) Các đường tròn $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ đồng quy.

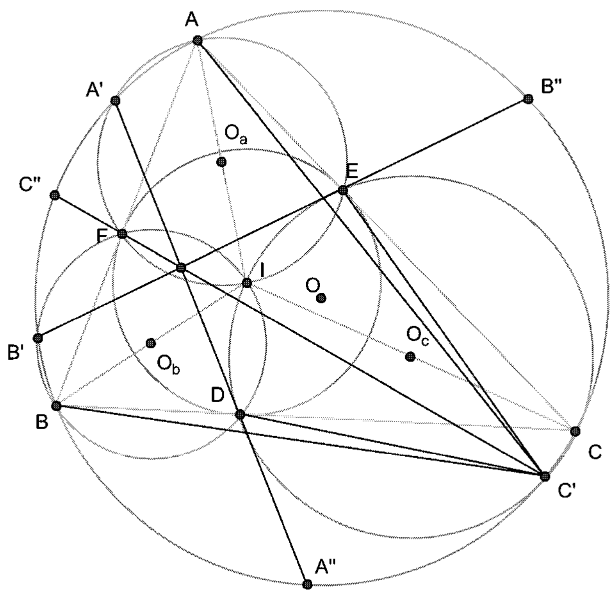
   (b) Các đường thẳng DA', EB', FC' đồng quy.

(Canada 2007)

Lời giải.

1. Dễ thấy $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ cùng đi qua I.

2. Gọi O, O_a, O_b, O_c theo thứ tự là tâm của các đường tròn $\omega, \omega_a, \omega_b, \omega_c$.



Ta có $\angle CAC' = \angle CBC'$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{CC'}$ của (O)) và $\angle CDC' = \angle CEC'$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{CC'}$ của (O_c)) suy ra $\angle BDC' = \angle AEC'$. Vậy $\triangle AEC' \backsim \triangle BDC'$. Suy ra $\frac{AC'}{BC'} = \frac{AE}{BD} = \frac{AF}{BF} \Rightarrow C'F$ là phân giác của góc $\angle AC'B$. Do đó, $C'F$ đi qua điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{AB}$ của (O). Tương tự, $A'D, B'E$ theo thứ tự đi qua điểm chính giữa các cung $\overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}$ của (O).

Gọi A'', B'', C'' lần lượt là điểm chính giữa các cung $\overset{\frown}{BC}$. $\overset{\frown}{CA}, \overset{\frown}{AB}$ của (O). Cần chứng minh $A''D, B''E, C''F$ đồng quy.

Để ý rằng $DE \parallel A''B''$ (cùng vuông góc với IC), $EF \parallel B''C''$ (cùng vuông góc với AI), $FD \parallel A''B''$ (cùng vuông góc với BI), tồn tại một phép vị tự biến tam giác DEF thành tam giác $A''B''C''$. Suy ra điều phải chứng minh.

Lời giải 2. Xét phép nghịch đảo cực I, phương tích r^2, biến X thành $X^\star$. Chứng minh các đường tròn $(A'^\star D^\star I), (B'^\star E^\star I), (C'^\star F^\star I)$ cùng đi qua một điểm $J \neq I$ $(J \in OI)$

18. Cho tam giác ABC với đường cao AD, phân giác BE, trung tuyến CF. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy khi và chỉ khi $a^2(a-c) = (b^2-c^2)(a+c)$

(Irish 1999)

19. Cho lục giác lồi $ABCDEF$ có $AB = BC, CD = DE, EF = FA$ và $\angle ABC + \angle CDE + \angle EFA = 360°$. Chứng minh rằng các đường thẳng theo thứ tự qua A, C, E vuông góc với FB, BD, DF đồng quy.

(Irish 1999)

20. Cho tam giác nhọn ABC với ba đường cao AA_1, BB_1, CC_1. Với một điểm O tùy ý trong tam giác $A_1B_1C_1$, gọi M, N, P, Q, R và S lần lượt là hình chiếu (vuông góc) của O trên các đường thẳng AA_1, BC, BB_1, CA, CC_1 và AB. Chứng minh rằng các đường thẳng MN, PQ, RS đồng quy.

(Ukrainian 1999)

21. Cho tam giác ABC và điểm T nằm trong tam giác, nhìn các cạnh BC, CA, AB dưới cùng một góc $120°$ (T là điểm Toricelli-Fermat của tam giác). Chứng minh rằng các đường thẳng theo thứ tự đối xứng với TA, TB, TC qua BC, CA, AB đồng quy.

22. Cho tam giác ABC nhọn, trực tâm H và ℓ là một đường thẳng tùy ý qua H. Gọi ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c lần lượt là các đường thẳng đối xứng với ℓ qua các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c đồng quy tại một điểm trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

(Bulgarian 1999)

23. Gọi D là trung điểm cạnh đáy AB của tam giác nhọn, cân ABC. Lấy E trên cạnh AB và gọi O là tâm đường tròn (ACE). Chứng minh rằng đường thẳng qua D vuông góc với DO, đường thẳng qua E vuông góc với BC, đường thẳng qua B song song với AC đồng quy.

(Bulgarian 1999)

24. Cho tam giác ABC. Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là trung điểm BC, CA, AB. Lấy B_2 là điểm chính giữa đoạn gấp khúc ABC, các điểm C_2, A_2 được xác định tương tự. Chứng minh rằng $A_1A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ đồng quy.

(Hungarian 2000)

25. Tam giác $A_1A_2A_3$ không cân, không vuông nội tiếp đường tròn (O). Gọi B_i là trung điểm cạnh $A_{i+1}A_{i+2}$ (phép cộng lấy theo modul 3). Trên tia $[OB_i)$ lấy điểm C_i sao cho $\triangle OA_iB_i \backsim \triangle OC_iA_i$. Chứng minh rằng các đường thẳng A_iC_i đồng quy.

26. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Lấy $A' = Đ_{BC}(A)$, các đường thẳng OA', BC cắt nhau tại A''. Một cách tương tự, cũng có các điểm B'', C''. Chứng minh rằng các đường thẳng AA'', BB'', CC'' đồng quy.

27. Cho tam giác ABC. Lấy các điểm A', B', C' ở ngoài tam giác sao cho

$$\angle BCA' = \angle CBA' = \angle CAB$$

$$\angle BAC' = \angle ABC' = \angle BCA$$

$$\angle CAB' = \angle ACB' = \angle ABC$$

.

Chứng minh rằng AA', BB' và CC' đồng quy.

28. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) (O không nằm trên các cạnh của tứ giác). Gọi O_1, O_2, O_3 và O_4 là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác OAB, OBC, OCD và ODA. Chứng minh rằng các đường thẳng O_1O_3, O_2O_4 và OP đồng quy, trong đó $P = AC \cap BD$

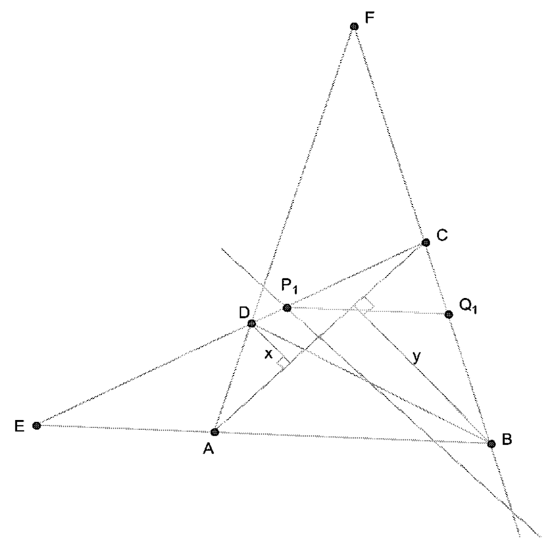
(China Team Selection Test 2006)

29. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O), hai đường chéo cắt nhau tại P. Đường tròn (O_1) qua B, P và đường tròn (O_2) qua P, A cắt nhau tại điểm thứ hai Q và đường tròn (O_i) cắt lại đường tròn (O) tại điểm E_i. Chứng minh rằng PQ, CE_1, DE_2 đồng quy hoặc song song.

(China Team Selection Test 2005)

30. **6** Tứ giác lồi $ABCD$ diện tích S, không có hai cạnh nào song song. Lấy điểm $P_1 \in (CD)$ sao cho P_1, C cùng phía đối với (AB) và $S_{\triangle ABP_1} = \frac{S}{2}$. Tương tự, cũng có $P_2 \in (BC), P_3 \in (AB), P_4 \in (DA)$. Chứng minh rằng P_1, P_2, P_3, P_4 thẳng hàng.

Lời giải 1. (Phương pháp véc tơ)



Đặt $x = d(D; AC), y = d(B; AC)$. Ta có

$$\frac{S_{ACD}}{S_{ABC}} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{1+\frac{x}{y}} = \frac{y}{x+y}$$

Lấy $Q_1 \in (BC)$ sao cho $\frac{BQ_1}{BC} = \frac{x+y}{2y}$. Khi đó $S_{Q_1AB} = \frac{x+y}{2y} \cdot S_{ABC} = \frac{S}{2} \Rightarrow Q_1P_1 \parallel AB$. Ta có $\frac{EP_1}{P_1C} = \frac{BQ_1}{Q_1C} = \frac{y+x}{y-x}$ và khi đó, với mọi điểm O đều có

$$\overrightarrow{OP_1} = \frac{\overrightarrow{OE} + \frac{y+x}{y-x}\overrightarrow{OC}}{1+\frac{y+x}{y-x}} = \frac{y-x}{2y} \cdot \overrightarrow{OE} + \frac{y+x}{2y} \cdot \overrightarrow{OC}$$

Bằng cách làm tương tự, cũng được

$$\overrightarrow{OP_2} = \frac{y-x}{2y} \cdot \overrightarrow{OF} + \frac{y+x}{2y} \cdot \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OP_3} = \frac{x-y}{2x} \cdot \overrightarrow{OE} + \frac{x+y}{2x} \cdot \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OP_4} = \frac{x-y}{2x} \cdot \overrightarrow{OF} + \frac{x+y}{2x} \cdot \overrightarrow{OC}$$

Khi ấy

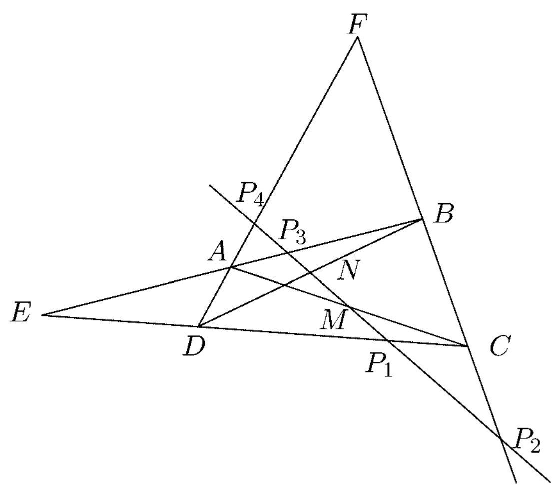
$$\overrightarrow{P_1P_2} = \frac{y-x}{2y} \cdot \overrightarrow{EF} + \frac{y+x}{2y} \cdot CA = \frac{1}{2y} \cdot \left((y-x)\overrightarrow{EF} + (y+x)\overrightarrow{CA}\right)$$

$$\overrightarrow{P_3P_4} = \frac{x-y}{2x} \cdot \overrightarrow{EF} + \frac{x+y}{2x} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2x} \cdot \left((y-x)\overrightarrow{EF} + (y+x)\overrightarrow{CA}\right)$$

Suy ra $\overrightarrow{P_1P_2} \parallel \overrightarrow{P_3P_4}$

Tương tự, cũng có $\overrightarrow{P_2P_3} \parallel \overrightarrow{P_4P_1}$, $\overrightarrow{P_1P_3} \parallel \overrightarrow{P_2P_4}$. Suy ra điều phải chứng minh.

Lời giải 2. (Phương pháp quỹ tích)



Bổ đề. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm hai đường chéo AC, BD của tứ giác lồi $ABCD$. Khi đó $P \in (MN) \Leftrightarrow [PAB] + [PCD] = [PBC] + [PDA]$

Chứng minh bổ đề. Ta có

$$\begin{aligned}[MNP] &= \frac{1}{2}([ANP] + [CNP]) \\ &= \frac{1}{4}([ABP] + [ADP] + [CDP] + [CBP]) \\ &= \frac{1}{4}([PAB] + [PCD] - [PBC] - [PDA])\end{aligned}$$

Vậy

$$P \in (MN) \Leftrightarrow [MNP] = 0 \Leftrightarrow [PAB] + [PCD] = [PBC] + [PDA]$$

Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán, không mất tổng quát, có thể coi tứ giác $ABCD$ định hướng âm. Khi đó

$$[P_1AB] = -\frac{S}{2}\,;\ [P_1CD] = 0$$

Và

$$-S = [ABCD] = [P_1AB] + [P_1CD] + [P_1BC] + [P_1DA]$$

Suy ra

$$[P_1BC] + [P_1DA] = -\frac{S}{2} = [P_1AB] + [P_1CD]$$

Do đó $P_1 \in (MN)$. Hoàn toàn tương tự, cũng được $P_2, P_3, P_4 \in (MN)$. Vậy P_1, P_2, P_3 và P_4 cùng nằm trên một đường thẳng.

31. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại A', B', C'. Tiếp tuyến song song với BC của (I) cắt AB, AC tại E, D. Chứng minh rằng $BD, CE, B'C'$ đồng quy.

32. **7** Cho tam giác ABC và một điểm P ở trong. Lấy $A' \in (BC), B' \in (CA), C' \in (AB)$ sao cho $PA \perp PA', PB \perp PB', PC \perp PC'$.

    (a) Chứng minh rằng A', B', C' thẳng hàng.

    (b) Gọi $A'' = PA \cap BC, B'' = PB \cap CA, C'' = PC \cap BA$, và P' là điểm liên hợp đẳng giác của P đối với tam giác $A''B''C''$. Chứng minh rằng $PP' \perp A'B'$

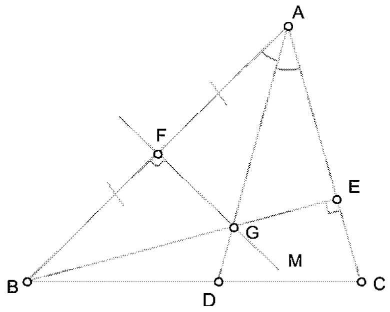
33. Cho tam giác ABC. Lấy $A' = Đ_{BC}(A)$ gọi $A'' = OA' \cap BC$. Các điểm B'', C'' được xác định tương tự. Chứng minh rằng AA'', BB'', CC'' đồng quy.

34. **8** Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng ℓ_a, h_b và trung trực AB đồng quy khi và chỉ khi $\angle BAC = 60°$

Lời giải.

Gọi AD, BE là phân giác trong góc $\angle BAC$, đường cao kẻ từ B. Gọi F là trung điểm của AB (hình vẽ).

Điều kiện cần. Giả sử AD, BE, MF đồng quy tại G. Khi đó $GA = GB$. Hơn nữa



$$\angle GBA = \angle GAB = \angle GAC = \alpha$$

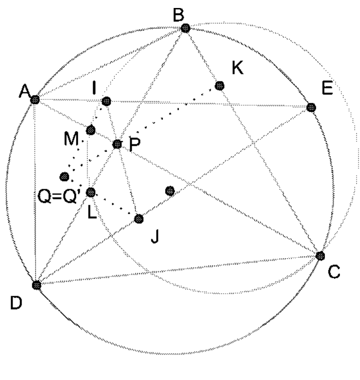
Suy ra $3\alpha = 90°$ điều này tương đương với $\alpha = 30°$ hay $\angle BAC = 60°$

Điều kiện đủ. Nếu $\angle BAC = 60°$ thì $\angle ABE = 90° - \angle BAC = 30°$. Gọi G là giao điểm của AD, BE, ta có $\angle GAB = 30° = \angle GBA$ suy ra $\triangle GAB$ cân, và do đó $GA = GB$. Vậy $G \in t[AB]$

35. **8** Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi P là giao điểm hai đường chéo, và I, J là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác PAB, PCD. Chứng minh rằng các đường thẳng qua P, I, J theo thứ tự vuông góc với BC, CA, BD đồng quy.

Lời giải.

Gọi K, M, N lần lượt là hình chiếu của P, I, J trên BC, CA, BD, gọi $Q = PK \cap JL$ và $Q' = PK \cap IM$. Khi đó PK, IM, JL đồng quy iff $Q \equiv Q'$ iff $PQ = PQ'$.



Do $\triangle PLQ \backsim \triangle PKB$ $(g.g)$ nên

$$PQ = PB \cdot \frac{PL}{PK}$$

Do $\triangle PMQ' \backsim \triangle PKC$ nên

$$PQ' = PC \cdot \frac{PM}{PK}$$

Vậy, cần chứng minh $PB \cdot PL = PC \cdot PM$

Trong tam giác PAB, có I là tâm đường tròn nội tiếp, M là hình chiếu của I trên PA, do đó

$$PM = \frac{-AB + BP + PA}{2}$$

Tương tự

$$PL = \frac{-DC + CP + PD}{2}$$

Vậy, điều phải chứng minh tương tđương với

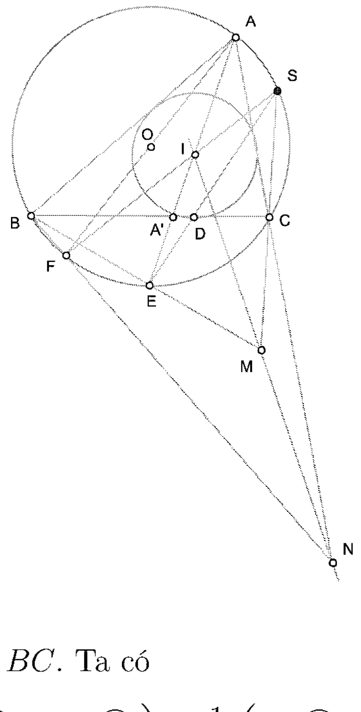
$$PB(-DC + CP + PD) = PC(-AB + BP + PA)$$
$$\Leftrightarrow PB \cdot (CD - PD) = PC \cdot (AB - PA)$$
$$\Leftrightarrow \frac{PB}{PC} = \frac{AB - PA}{CD - PD} \quad \text{(luôn đúng)}$$

Điều phải chứng minh.

36. **9** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn nội tiếp tiếp xúc với cạnh BC tại D, các đường thẳng AI, AO cắt lại đường tròn (O) tại E, F. Gọi $S = FI \cap ED, M = SC \cap BE, N = AC \cap BF$.

   (a) Chứng minh rằng $S \in (O)$

   (b) Chứng minh rằng M, N, I thẳng hàng.



Lời giải. Gọi $A' = AE \cap BC$. Ta có

$$\text{sđ}\angle AA'D = \frac{1}{2}\left(\text{sđ } \overset{\frown}{AC} + \text{sđ } \overset{\frown}{EB}\right) = \frac{1}{2}\left(\text{sđ } \overset{\frown}{AC} + \text{sđ } \overset{\frown}{EC}\right) = \text{sđ}\angle AFE$$

Suy ra $\angle DIE = \angle EAF$

Mặt khác $IA \cdot IE = OI^2 - R^2 = 2Rr = AF \cdot ID \Longrightarrow \dfrac{IA}{AF} = \dfrac{ID}{IE}$

Suy ra $\triangle AIF \backsim \triangle IDE \Rightarrow \angle AFS = \angle AFI = \angle IED = \angle AES \Rightarrow S \in (O)$

Áp dụng định lý Pascal cho lục giác $ASCEFB$ nội tiếp, được M, N, I thẳng hàng.

37. **10** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Xét $P \in AB, Q \in AC$. Chứng minh rằng P, O, Q thẳng hàng iff

$$\sin 2A = \frac{PB}{PA} \cdot \sin 2B + \frac{QC}{QA} \cdot \sin 2C$$

Lời giải. Từ $PA \cdot \overrightarrow{PB} + PB \cdot \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{0}$ suy ra

$$\left(\frac{PB}{PA} + 1\right) \cdot \overrightarrow{OP} = \frac{PB}{PA} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

Tương tự

$$\left(\frac{QC}{QA} + 1\right) \cdot \overrightarrow{OQ} = \frac{QC}{QA} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$$

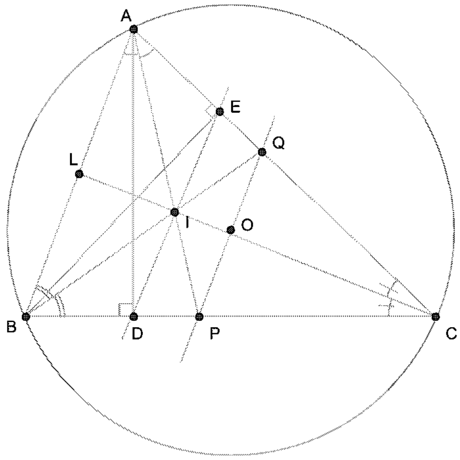
Vậy

$$\begin{aligned} O, P, Q \text{ thẳng hàng } &\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OQ} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{PB}{PA} \cdot \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC} + \frac{QC}{QA} \cdot \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin 2A = \frac{PB}{PA} \cdot \sin 2B + \frac{QC}{QA} \cdot \sin 2C \end{aligned}$$

38. **11** Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I) với các đường cao AD, BE, các đường phân giác trong AP, BQ $(D, P \in BC, E, Q \in CA)$. Chứng minh rằng D, I, E thẳng hàng iff P, Q, O thẳng hàng.

Lời giải. Theo kết quả bài toán 36, ta có

$$\begin{aligned} P, O, Q \text{ thẳng hàng } \Leftrightarrow \sin 2C &= \frac{PB}{PC} \cdot \sin 2B + \frac{QA}{QC} \cdot \sin 2A \\ \Leftrightarrow \sin 2C &= \frac{AB}{AC} \cdot \sin 2B + \frac{BA}{BC} \cdot \sin 2A \\ \Leftrightarrow \cos C &= \cos A + \cos B \qquad (1) \end{aligned}$$



Mặt khác, $\triangle DEC \backsim \triangle ABC$, nên

$$\begin{aligned} D, E, I \text{ thẳng hàng } &\Leftrightarrow \frac{CI}{CL} = \frac{CE}{CB} = \cos C \\ &\Leftrightarrow \frac{a+b}{c} = \cos C \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin A + \sin B}{\sin A + \sin B + \sin C} = \cos C \\ &\Leftrightarrow \cos A + \cos B = \cos C \qquad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

39. Cho tam giác ABC. Gọi A' là trung điểm đoạn nối chân hai phân giác kẻ từ A. Tương tự, có B', C'. Chứng minh rằng A', B', C' thẳng hàng.

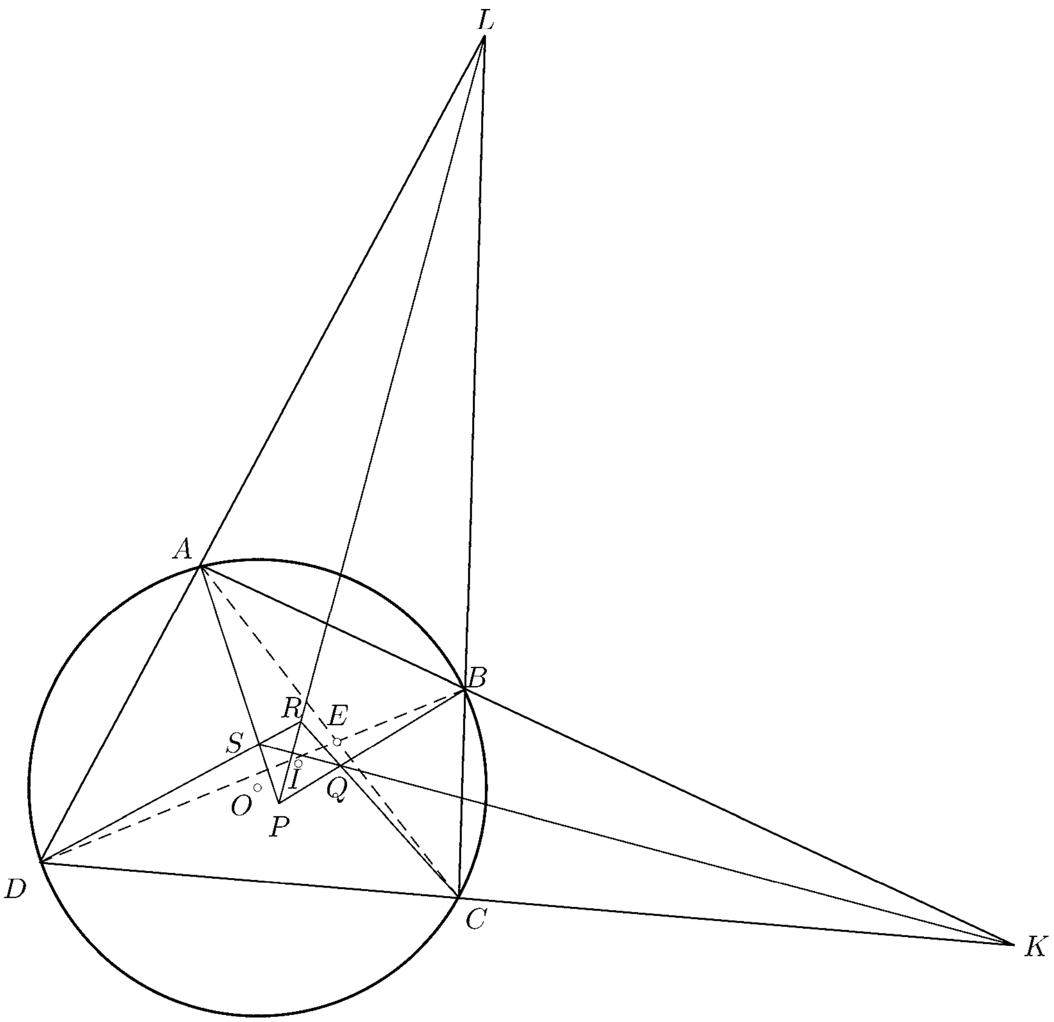
40. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), có hai đường chéo cắt nhau tại E. Phân giác của các góc $\angle DAB, \angle ABC$ cắt nhau tại P, của các góc $\angle ABC, \angle BCD$ cắt nhau tại Q, của các góc $\angle BCD, \angle CDA$ cắt nhau tại R, của các góc $\angle CDA, \angle DAB$ cắt nhau tại S.

    (a) Chứng minh rằng tứ giác $PQRS$ nội tiếp.

    (b) Chứng minh rằng O, E, I thẳng hàng (I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $PQRS$)

    (c) Chứng minh rằng $PR \perp QS$

Lời giải.



1. Ký hiệu $\ell_a, \ell_b, \ell_c, \ell_d$ theo thứ tự là đường phân giác của các góc $\angle DAB, \angle ABC, \angle BCD, \angle$
Khi đó

$$\begin{aligned}
\angle(PS; PQ) &\equiv \angle(\ell_a; \ell_b) \pmod{\pi} \\
&\equiv \angle(\ell_a; AB) + \angle(AB; \ell_b) \pmod{\pi} \\
&\equiv \frac{1}{2} \cdot \angle(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}) + \frac{1}{2} \cdot \angle(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) \pmod{\pi} \\
&\equiv \frac{1}{2} \cdot \Big(\pi + \angle(\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CB})\Big) + \frac{1}{2} \cdot \Big(\angle(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}) \pmod{\pi}\Big) \\
&\equiv \angle(CD; \ell_c) + \angle(\ell_d; CD) \pmod{\pi} \\
&\equiv \angle(\ell_d; \ell_c) \equiv \angle(RS; RQ) \pmod{\pi}
\end{aligned}$$

Do đó bốn điểm P, Q, R, S cùng nằm trên một đường tròn.

2. Khi tứ giác $ABCD$ có một cặp cạnh (đối diện) song song, thì kết luận của bài toán là hiển nhiên. Vậy, ta chỉ cần xét trường hợp tứ giác $ABCD$ không có hai cạnh nào song song. Gọi $K = (AB) \cap (CD), L = (AD) \cap (BC)$.

Bổ đề. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) và có $AC \cap BD = E, (AB) \cap (CD) = F, (DA) \cap (BC) = G$. Khi đó O là trực tâm tam giác PQR

(Đây là một kết quả cơ bản, các em học sinh hãy tự chứng minh (bằng ít nhất ba cách khác nhau))

Áp dụng bổ đề, ta được $OE \perp KL$ (1)

Từ giả thiết suy ra Q là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc $\angle BKC$ của $\triangle BKC$ và S là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ADK. Do đó Q, S nằm trên phân giác của góc $\angle BKC$ hay Q, S, K thẳng hàng. Tương tự, cũng được P, R, L thẳng hàng.

Ta có

$$\begin{aligned}
\angle(CR; CB) \equiv \angle(CR; CL) &\equiv \frac{1}{2} \cdot \angle(\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CL}) \pmod{\pi} \\
&\equiv \frac{1}{2} \cdot \left[\angle(\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{LD}) + \angle(\overrightarrow{LD}; \overrightarrow{CL})\right] \pmod{\pi} \\
&\equiv \frac{1}{2} \cdot \left[\angle(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DL}) + \angle(\overrightarrow{LD}; \overrightarrow{CL})\right] \pmod{\pi} \\
&\equiv \frac{1}{2} \cdot \left[\pi + \angle(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) + \pi + \angle(\overrightarrow{LD}; \overrightarrow{LC})\right] \pmod{\pi} \\
&\equiv \angle(BL; BP) + \angle(LP; LC) \equiv \angle(PR; PB) \pmod{\pi}
\end{aligned}$$

Suy ra B, C, P, R cùng nằm trên một đường tròn, do đó $\overline{LB} \cdot \overline{LC} = \overline{LP} \cdot \overline{LR} \Rightarrow L$ nằm trên trục đẳng phương của (O) và $(PQRS)$. Tương tự cũng có K nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn này. Vậy (KL) là trục đẳng phương của (O) và đường tròn $(PQRS)$ suy ra $KL \perp OI$ (2)

Từ (1), (2) suy ra O, I, E thẳng hàng.

3. Theo chứng minh ở phần 2 thì

$$\angle(RP; RC) = \angle(BP; BQ) = \frac{1}{2} \cdot \angle(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) \pmod{\pi} \tag{3}$$

Tương tự, cũng được

$$\angle(PR; PA) = \angle(DR; DA) = \frac{1}{2} \cdot \angle(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA}) \pmod{\pi} \tag{4}$$

Để ý rằng $\angle(RP; RC) = \angle(SP; SQ) \pmod{\pi}, \angle(PR; PA) = \angle(PR; PS) \pmod{\pi}$ (5)

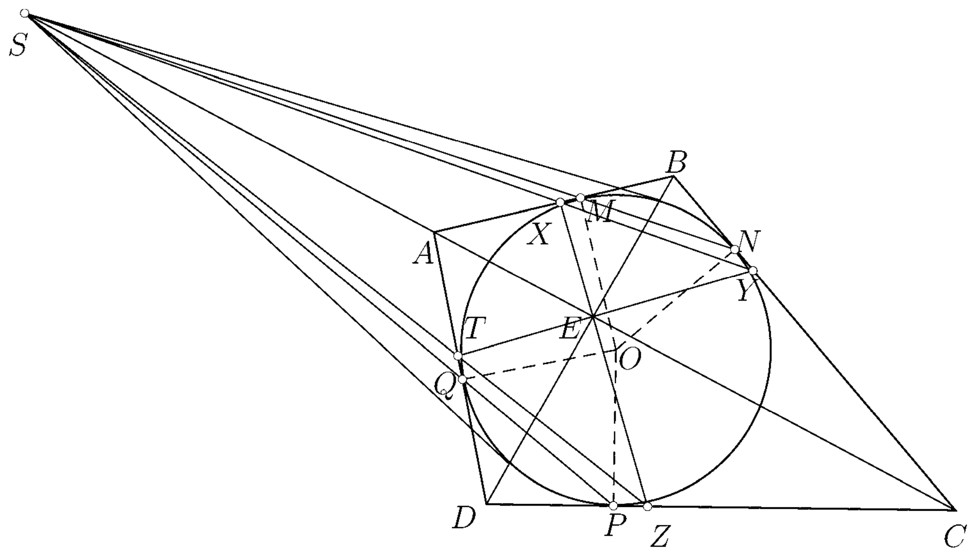
và $\angle(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) + \angle(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA}) = \pi \pmod{2\pi}$ (6)

Từ (3),(4),(5),(6) suy ra $\angle(PR; PS) + \angle(SP; SQ) = \dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét. Về cơ bản, đây chỉ là một bài toán hình học lớp 9, được ghép từ hai bài toán: bài thứ nhất được phát biểu trong lời giải trên dưới dạng bổ đề, bài toán thứ hai là "*Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có $(AB)\cap(CD) = M, (AD)\cap(BC) = N$. Chứng minh rằng phân giác của các góc $\angle BMC$ và $\angle DNC$ vuông góc*". Tuy nhiên, nếu không dùng góc định hướng thì lời giải sẽ phụ thuộc vào hình vẽ. Một số học sinh lớp 11 còn lúng túng trong việc sử dụng khái niệm góc định hướng, và hầu hết các bài tham gia dự thi đều không để ý gì đến trường hợp tứ giác $ABCD$ có một cặp cạnh song song.

41. Cho tứ giác $ABCD$ không có hai cạnh nào bằng nhau, ngoại tiếp đường tròn (O) có hai đường chéo cắt nhau tại E. Gọi M, N, P và Q theo thứ tự là tiếp điểm của AB, BC, CD và DA với (O), gọi X, Y, Z và T lần lượt là giao điểm của tia phân giác các góc $\angle AEB, \angle BEC, \angle CED$ và $\angle DEA$ với các cạnh AB, BC, CD và DA theo thứ tự đó. Chứng minh rằng các đường thẳng AC, MN, PQ, XY, ZT và tiếp tuyến của (O) tại các giao điểm của (O) với BD cùng đi qua một điểm.

Lời giải 1.



Gọi S, S' theo thứ tự là giao điểm của MN, PQ với AC. Áp dụng định lý Ménélaüs cho $\triangle ABC$ với cát tuyến MNS và tam giác ADC với cát tuyến PQS' ta có

$$\boxed{\frac{\overline{QD}}{\overline{QA}}\cdot\frac{\overline{S'A}}{\overline{S'C}}\cdot\frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} = 1} \tag{2.1}$$

và

$$\boxed{\frac{\overline{MB}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{SA}}{\overline{SC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NB}} = 1} \tag{2.2}$$

Để ý rằng $BM = BN, DP = DQ$, từ đó và từ (1),(2) suy ra $\frac{\overline{SA}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{S'A}}{\overline{S'C}} = \frac{MA}{NC}$ vậy $S' \equiv S$ hay AC, MN, PQ đồng quy.

Giả sử XY, ZT cắt AC tại S'', S'''. Ta cần chứng minh $S'' \equiv S''' \equiv S$.

Áp dụng định lý Ménélaüs cho $\triangle ABC$ với cát tuyến XYS'' và tam giác ADC với cát tuyến ZTS''' ta có

$$\boxed{\frac{\overline{XB}}{\overline{XA}} \cdot \frac{\overline{S''A}}{\overline{S''C}} \cdot \frac{\overline{YC}}{\overline{YB}} = 1} \tag{2.3}$$

và

$$\boxed{\frac{\overline{TD}}{\overline{TA}} \cdot \frac{\overline{S'''A}}{\overline{S'''C}} \cdot \frac{\overline{ZC}}{\overline{ZD}} = 1} \tag{2.4}$$

Theo tính chất đường phân giác, ta có $\frac{\overline{XB}}{\overline{XA}} = -\frac{EB}{EA}; \frac{\overline{YC}}{\overline{YB}} = -\frac{EC}{EB}; \frac{\overline{ZC}}{\overline{ZD}} = -\frac{EC}{ED}; \frac{\overline{TD}}{\overline{TA}} = -\frac{ED}{EA}$

Từ đó và (3),(4) suy ra $\frac{\overline{S''A}}{\overline{S''C}} = \frac{\overline{S'''A}}{\overline{S'''C}} = \frac{EA}{EC}$ điều đó có nghĩa là $S'' \equiv S'''$

Ngoài ra, vì tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp được nên $EA : EC = MA : NC$. Từ đó suy ra $S'' \equiv S$, hay các đường thẳng AC, MN, PQ, XY, ZT đồng quy.

42. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi E, F, G theo thứ tự là giáo điểm của các cặp đường thẳng AB và CD, BC và DA, AC và BD. Các đường tròn $(DAE), (DCF)$ cắt nhau tại điểm thứ hai H. Phân giác của góc $\angle AHB$ cắt AB tại I, phân giác của góc $\angle DHC$ cắt CD tại J. Chứng minh rằng I, G, J thẳng hàng.

    Lời giải 1. Từ giả thiết suy ra $(HD; HE) = (AD; AE) = (AD; AB) = (CD; CB) = (CD; CF) = (HD; HF) \pmod{\pi}$ do đó H, D, F thẳng hàng.

    Áp dụng bổ đề Mi-ken cho tam giác BEC, ta được các đường tròn $(BAF), (CFD)$ và (DEA) cùng đi qua một điểm (khác D). Do đó bốn đường tròn $(BAF), (CFD)$, $(DEA), (EAB)$ cùng đi qua H.

    Vậy

$$(HA; HD) = (EA; ED) = (EB; EC) = (HB; HC) \pmod{\pi}$$

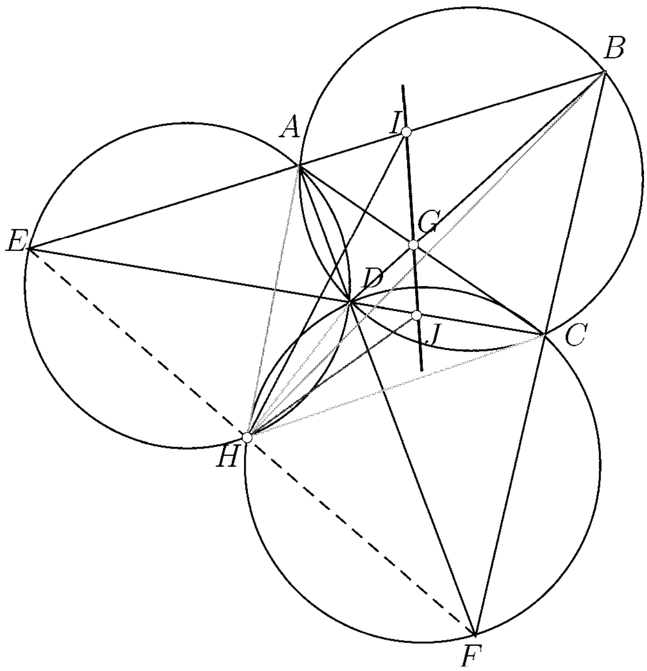
và

$$\begin{aligned}(CB;CH) &= (CB;CD) + (CD;CH) \pmod{\pi}\\ &= (AB;AD) + (FD;FH) \pmod{\pi}\\ &= (EA;EH) \pmod{\pi} = (DA;DH) \pmod{\pi}\end{aligned}$$

Suy ra $\triangle HCB \backsim \triangle HDA$. Vì vậy $\frac{HC}{HD} = \frac{HB}{HA} = \frac{BC}{DA}$

Từ đó $\frac{IB}{IA} = \frac{JC}{JD} = \frac{HC}{HD} = \frac{BC}{DA} = \frac{GC}{GD} = \frac{GB}{GA} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{IC}{ID} = \dfrac{GC}{GD} \\ \dfrac{IB}{IA} = \dfrac{GB}{GA} \end{cases}$

Suy ra GI, GJ là phân giác của góc $\angle AGB, \angle CGD$ theo thứ tự đó và vì vậy, I, G, J thẳng hàng.



Lời giải 2.

Từ giả thiết, suy ra $(HD;HE) \equiv (AD;AE) \equiv (AD;AB) \equiv (CD;CB) \equiv (CD;CF) \equiv (HD;HF) \pmod{\pi}$. Suy ra E, H, F thẳng hàng.

Áp dụng bổ đề Mi-ken cho tam giác BEC ta được các đường tròn (BAF), (CFD) và (EDA) cùng đi qua một điểm (khác D) và do đó, bốn đường tròn (EDA), (FCD), (FAB), (EBC) cùng đi qua H.

Mặt khác

$$(D,C,E,J) = \frac{\overline{ED}}{\overline{EC}} : \frac{\overline{JD}}{\overline{JC}} = \frac{HD \cdot \sin(HE;HD)}{HC\sin(HE;HC)} : \frac{HD\sin(HJ;HD)}{HE\sin(HJ;HE)}$$
$$= \frac{\sin(AD;AB)}{\sin(BC;BA)}$$

và tương tự $(B,A,E,I) = \frac{\sin(AD;AB)}{\sin(BC;BA)}$ Từ đó, và do phép chiếu xuyên tâm (tâm G) bảo toàn tỷ số kép, suy ra G, I, J thẳng hàng.

43. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi $E = AB \cap CD, F = DA \cap BC$. Qua E, kẻ hai tiếp tuyến EG, EH tới đường tròn $(G, H \in (O))$. Chứng minh rằng F, G, H thẳng hàng.

44. Trong mặt phẳng, cho trước ba tam giác $A_iB_iC_i, i = 1,2,3$. Gọi O_i, G_iH_i lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm, trực tâm của tam giác $A_iB_iC_i$ theo thứ tự đó.

    (a) Chứng minh rằng trọng tâm các tam giác $H_1H_2H_3, G_1G_2G_3, O_1O_2O_3$ thẳng hàng.

    (b) Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác $H_1H_2H_3, G_1G_2G_3$ và $O_1O_2O_3$ thẳng hàng.

45. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Các đường trung tuyến qua A, B, C cắt lại đường tròn (O) tại A_1, B_1, C_1. Các đường thẳng qua các đỉnh A, B, C và song song với cạnh đối diện cắt đường tròn ngoại tiếp của tam giác ở điểm A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy.

46. Cho tam giác ABC trực tâm H và điểm X tùy ý. Đường tròn (ω) đường kính XH cắt lại HA, HB, HC tại A_1, B_1, C_1 và xắt lại XA, XB, XC tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy.

47. Tứ giác lồi $ABCD$ không có hai cạnh nào song song, nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi trung điểm các cạnh AB, CD, BC, DA là M, N, P, Q theo thứ tự đó. Chứng minh rằng nếu M, O, N thảng hàng thì P, O, Q thẳng hàng.

Chương 3

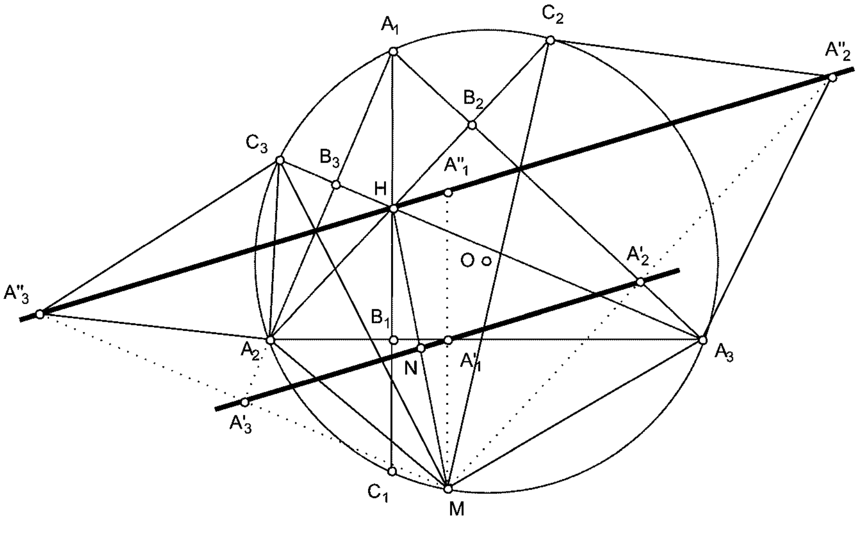
Đường thẳng Ơ - le và đường thẳng Simpson

1. Cho tam giác $A_1A_2A_3$ với trực tâm H, nội tiếp đường tròn (O). Với mỗi điểm $M \in (O)$, gọi A'_i, A''_i là hình chiếu, điểm đối xứng của M qua đường thẳng $A_{i+1}A_{i+2}$.

   (a) Chứng minh rằng các điểm A''_i cùng nằm trên một đường thẳng đi qua H (Đường thẳng Steiner)

   (b) Chứng minh rằng các điểm A'_i cùng nằm trên một đường thẳng đi qua trung điểm HM (Đường thẳng Simson)

Lời giải.



Để ý rằng, các điểm đối xứng với H qua các đường thẳng BC, CA, AB nằm trên đường tròn (O). Do đó

$$(HA_3''; HA_2) = (C_3A_2; C_3M) = (A_1A_2; A_1M) \pmod{\pi}$$

$$(HA_3; HA_2'') = (C_2M; C_2A_3) = (A_1M; A_1A_3) \pmod{\pi}$$

$$(HA_2; HA_3) = (HB_2; HB_3) = (A_1B_2; A_1B_3) = (A_1A_3; A_1A_2) \pmod{\pi}$$

Suy ra $(HA_3''; HA_2'') = 0 \pmod{\pi}$

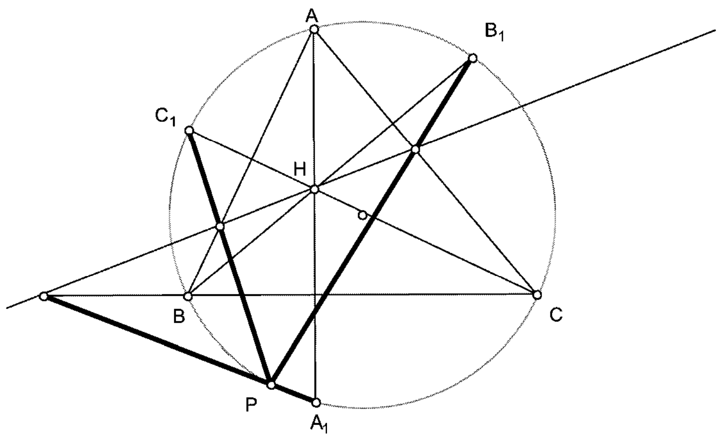
Tương tự, cũng có $(HA_3''; HA_1'') \pmod{\pi}$

Từ đó, suy ra điều phải chứng minh.

2. Cho tam giác ABC nhọn, trực tâm H và ℓ là một đường thẳng tùy ý qua H. Gọi ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c lần lượt là các đường thẳng đối xứng với ℓ qua các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c đồng quy tại một điểm trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

(Bulgarian 1999)

Lời giải.



Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là các điểm đối xứng với H qua các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó, dễ dàng chứng minh được $A_1, B_1, C_1 \in (ABC)$, ngoài ra

$$\begin{aligned}(\ell_a; \ell_b) &= (\ell_a; BC) + (BC; CA) + (CA; \ell_b) \pmod{\pi}\\ &= (BC; \ell) + (BC; CA) + (\ell; CA) \pmod{\pi}\\ &= 2(CB; CA) = (CA_1; CB_1) \pmod{\pi}\end{aligned}$$

Suy ra $\ell_a \cap \ell_b \in (ABC)$

Tương tự, cũng có $\ell_b \cap \ell_c, \ell_c \cap \ell_a \in (ABC)$

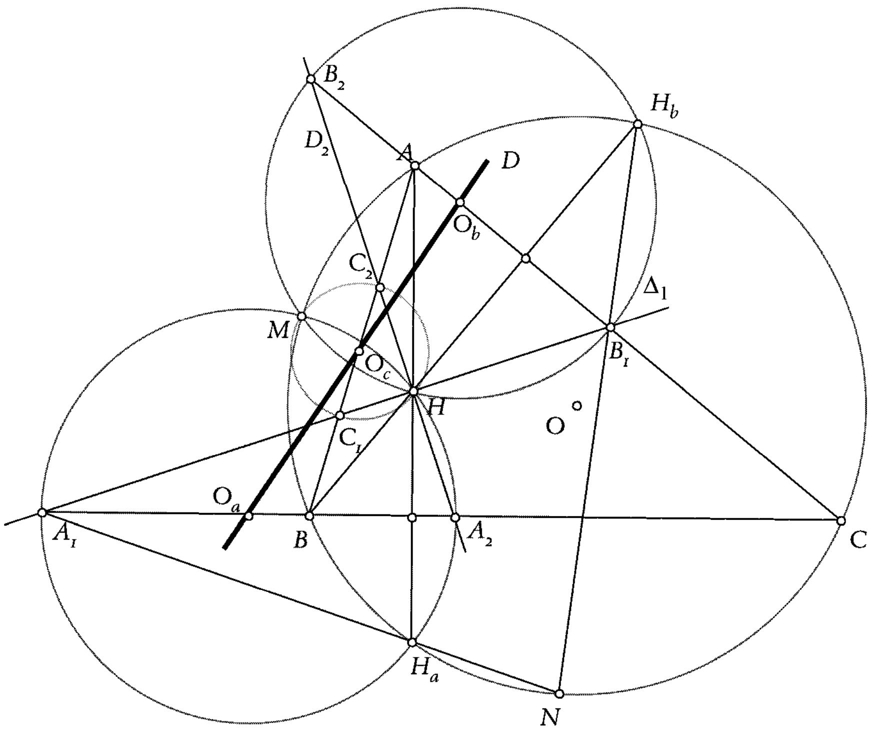
Từ đó, do một đường thẳng và một đường tròn cắt nhau tại nhiều nhất hai điểm, suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét. Đường thẳng ℓ chính là đường thẳng Steiner của điểm đồng quy P nói trong bài toán.

3. Cho tam giác ABC với trực tâm H. Hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 vuông góc với nhau tại H và Δ_1 cắt các đường thẳng BC, CA, AB theo thứ tự tại A_1, B_1, C_1, δ_2 cắt BC, CA, AB tại A_2, B_2, C_2 theo thứ tự đó. Chứng minh rằng trung điểm các đoạn thẳng $A_1A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ cùng nằm trên một đường thẳng Δ và điểm đối xứng với H qua Δ nằm trên đường tròn ngoại tiếp ccuar tam giác ABC

(Định lý Droz-Farny)

Lời giải.



Hình ...

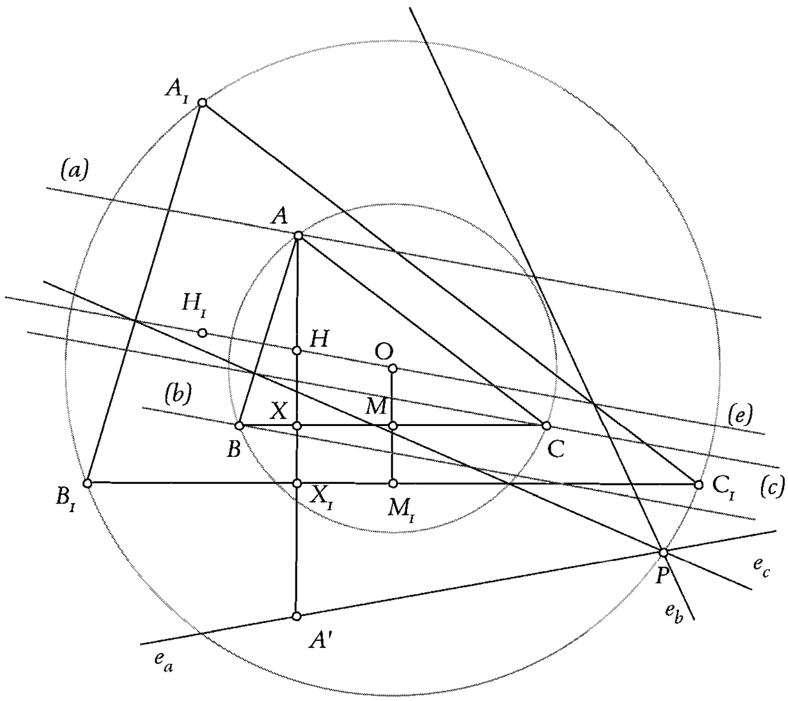
Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC và O_a, O_b, O_c theo thứ tự là trung điểm A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. Gọi H_a, H_b, H_c là các điểm đối xứng với H qua các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó $H_a, H_b, H_c \in (O)$ và các đường thẳng A_1H_a, B_1H_b, C_1H_c đồng quy tại $N \in (O)$ (hình vẽ).

Áp dụng bổ đề Miquel cho tam giác NA_1B_1 với $H_a \in NA_1, H \in A_1B_1, H_b \in B_1N$ ta được các đường tròn $(O_a), (O), (O_b)$ đồng quy tại M (khác H_a, H_b). Hoàn toàn tương tự, cũng được $(O_a), (O), (O_c)$ đồng quy tại M' (khác H_a, H_c). Từ đó, do hai đường tròn phân biệt cắt nhau tại nhiều nhất hai điểm, nên $M' \equiv M$ hay $(O_a), (O_b), (O_c), (O)$ đồng quy tại M. Điều này có nghĩa là O_a, O_b, O_c cùng nằm trên trung trực của HM (ĐPCM)

4. Gọi a, b, c là các đường thẳng song song theo thứ tự đi qua các đỉnh A, B, C của tam giác ABC. Gọi $a' = Đ_{BC}(a), b' = Đ_{CA}(b), c' = Đ_{AB}(c)$. Chứng minh rằng các đường thẳng a', b', c' đồng quy khi và chỉ khi a, b, c song song với đường thẳng Ơ-le của tam giác ABC. Khi chúng đồng quy, điểm đồng quy đối xứng với tâm O của đường tròn (ABC) qua E (E là điểm đồng quy của các đường thẳng đối xứng với đường thẳng Ơ-le qua các đường thẳng chứa cạnh của tam giác)

(Định lý Parry)

Lời giải.



Xét $V_O^2 : X \mapsto X_1 \quad \forall X$. Khi đó H_1 nằm trên đường thẳng Ơ-le của tam giác ABC. Gọi (e) là đường thẳng đi qua H và song song với a, b, c. $A' = Đ_{BC}(A)$.

Khi đó

$$\begin{aligned} HA' = AA' - AH &= 2(AX - MO) \\ &= 2(AH + HX - OM) \\ &= 2(HX + OM) \\ &= 2(HX + XX_1) = 2HX_1 \end{aligned}$$

Do đó $A' = Đ_{B_1C_1}(H)$. Vậy $e_a \equiv a'$, tương tự $e_b \equiv b', e_c \equiv c'$.
Do đó, a', b', c' đồng qui tại P khi và chỉ khi e_a, e_b, e_c đồng qui tại P khi và chỉ khi e đi qua H_1 (tức e là đường thẳng Ơ-le của tam giác ABC). ĐPCM

5. Chứng minh rằng trên đường thẳng Ơ-le của tam giác ABC tồn tại một điểm P sao cho $AG_a, BG_b = CG_c$ trong đó G_a, G_b, G_c theo thứ tự là trọng tâm các tam giác PBC, PCA, PAB.

6. Gọi F là điểm Toricelli-Fermat của tam giác ABC. Chứng minh rằng đường thẳng Ơ-le của các tam giác FBC, FCA, FAB đồng quy.
   HD. Bổ đề: Về phía ngoài của tam giác ABC lấy các điểm A', B', C' sao cho $\angle B'AC = \angle C'AB, \angle C'BA = \angle A'BC, \angle A'CB = \angle B'CA$. Khi đó AA', BB', CC' đồng quy.

7. Tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Chứng minh rằng đường thẳng Ơ-le của các tam giác IAB, IBC, ICA đồng quy tại J nằm trên đường thẳng Ơ-le của tam giác ABC.

8. Chứng minh rằng đường thẳng Ơ-le của các tam giác HAB, HBC, HCA đồng quy tại một điểm trên đường thẳng Ơ-le của tam giác ABC.

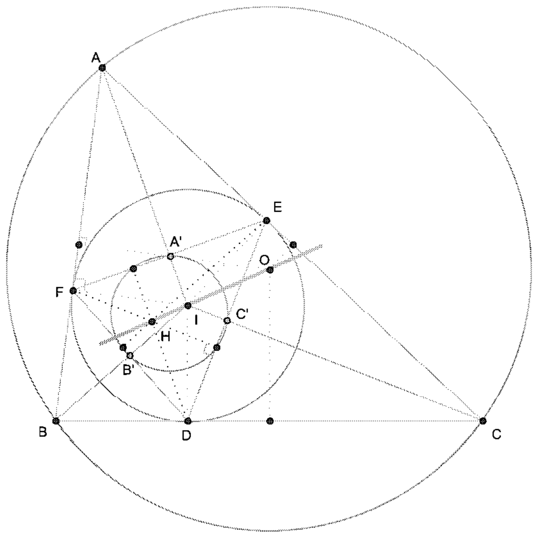
9. **(Khó)** Đường thẳng Ơ-le của tam giác ABC cắt các cạnh BC, CA, AB ở X, Y, Z. Chứng minh rằng đường thẳng Ơ-le của các tam giác AYZ, BZX, CXY tạo thành một tam giác bằng tam giác ABC.

10. Gọi Δ là đường thẳng Ơ-le của tam giác ABC. Chứng minh rằng
    (a) $\Delta \parallel \ell_a \Leftrightarrow \angle BAC = \frac{2\pi}{3}$
    (b) $\Delta \perp \ell_a \Leftrightarrow \angle BAC = \frac{\pi}{3}$

11. Một đường thẳng d đi qua tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC cắt các đường thẳng BC, CA, AB tại D, E, F. Chứng minh rằng đường thẳng Ơ-le của các tam giác AEF, BFD, CDE giới hạn nên một tam giác đều.

12. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F. Chứng minh rằng trực tâm tam giác DEF, tâm đường tròn nội tiếp I và tâm đường tròn ngoại tiếp O của tam giác ABC thẳng hàng.

Lời giải.

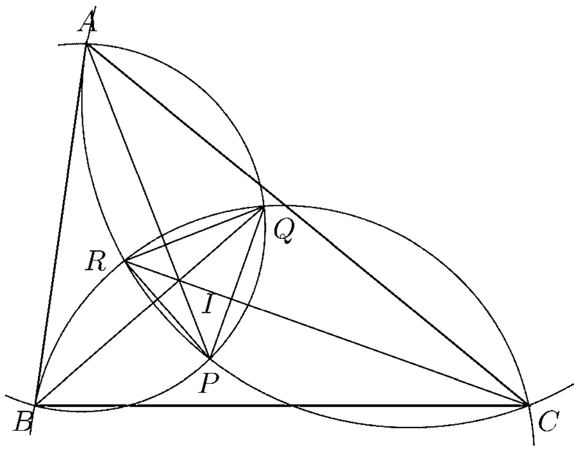


Xét phép nghịch đảo $N_I^{r^2}$ bảo toàn đường tròn (I), biến X thành X'. Khi đó A', B', C' theo thứ tự là trung điểm EF, FD, DE, vì vậy đường tròn (O) biến thành đường tròn Ơ-le của tam giác DEF. Suy ra O', O, H, H', I thẳng hàng. Điều phải chứng minh.

Nhận xét. Để ý rằng nếu $N_I^{r^2} : (O_1) \longrightarrow (O_2)$ thì $V_I^{\frac{k}{p}} : (O_1) \longrightarrow (O_2)$, trong đó $p = P_{I/(O_1)}$. Bởi vậy, ta cũng có thể sử dụng phép vị tự để giải bài toán này.

13. Các điểm P, Q, R được lấy trong tam giác ABC sao cho các tứ giác $ABPQ, BCQR$ và $CARP$ là các từ giác nội tiếp. Biết rằng tâm I đường tròn nội tiếp của tam giác ABC là tâm đẳng phương của các đường tròn $(ABPQ)$, $(BCQR)$, $(CARP)$, chứng minh rằng tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nằm trên đường thẳng Ơle của tam giác PQR.

Lời giải.



Từ giả thiết, suy ra các đường thẳng AP, BQ, CR đồng quy tại I, hay nói cách khác AP, BQ, CR theo thứ tự là phân giác của các góc $\angle CAB, \angle ABC, \angle BCA$.

Khi đó

$$\begin{aligned}
(PI; QR) &\equiv (PI; PQ) + (PQ; QR) \pmod{\pi} \\
&\equiv (PA; PQ) + (PQ; QB) + (QB; QR) \pmod{\pi} \\
&\equiv (BA; BQ) + (AP; AB) + (CB; CR) \pmod{\pi} \\
&\equiv \frac{1}{2}\left[(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA})\right] \pmod{\pi} \\
&\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}
\end{aligned}$$

Suy ra $PI \perp QR$. Chứng minh tương tự, cũng có $QI \perp RP, RI \perp PQ$. Do đó, I là trực tâm của tam giác PQR.

Đặt $k = \overline{IA} \cdot \overline{IP} = \overline{IB} \cdot \overline{IQ} = \overline{IC} \cdot \overline{IP}$ (cùng bằng phương tích của I đối với các đường tròn $(ABPQ), (BCQR), (CARP)$). Xét phép nghịch đảo f, cực I, phương tích k, ta có

$$\begin{aligned}
f \ : \ P &\mapsto A \\
Q &\mapsto B \\
R &\mapsto C
\end{aligned}$$

Do đó $f\ :\ (PQR) \mapsto (O)$. Suy ra IO đi qua tâm đường tròn $(PQR$. Hay O nằm trên đường thẳng Ơle của $\triangle PQR$.

Chú ý. Nếu phép nghịch đảo $\mathcal{N}_I^k$ biến đường tròn (O_1) thành đường tròn (O_2), thì phép vị tự $V_I^{\frac{k}{p}}$ biến (O_1) thành (O_2). Do đó, mặc dù $\mathcal{N}_I^k$ không biến O_1 thành O_2, nhưng vẫn có O_1, O_2, I thẳng hàng.

14. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Xét điểm D thay đổi trên(O), nhưng không trùng với các đỉnh của tam giác. Ký hiệu s_a, s_b, s_c, s_d theo thứ tự là đường thẳng simpson của A, B, C, D đối với các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC.

    (a) Chứng minh rằng s_a, s_b, s_c, s_d đồng quy tại một đểm P.

    (b) Tìm quỹ tích P khi D thay đổi.

    Hint.
    Bổ đề 1. Bốn điểm A_1, A_2, A_3, A_4 cùng nằm trên một đường tròn. Gọi H_i là trực tâm của tam giác $A_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$. Khi đó các đoạn thẳng A_iH_i có cùng trung điểm.
    Bổ đề 2. Với mỗi điểm Q nằm trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác MNP, s_q- đường thẳng simpson của Q đối với tam giác MNP đi qua trung điểm QH, trong đó H là trực tâm tam giác MNP

15. Lục giác lồi $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn (O). Chứng minh rằng các đường thẳng $s(A; BDF), s(B; ACE), s(D; ABF), s(E; ABC)$ đồng quy khi và chỉ khi $CDEF$ là một hình chữ nhật.

16. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Xét một đường kính PQ của (O).

    (a) Chứng minh rằng $s(P; ABC) \perp s(Q; ABC)$

    (b) Tìm quỹ tích giao điểm của $s(P; ABC), s(Q; ABC)$ khi P, Q thay đổi.

17. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và $P \in (O)$. Gọi A', B', C' theo thứ tự là hình chiếu của P trên BC, CA, AB và O_a, O_b, O_c là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AB'C', BC'A', CA'B'$. Chứng minh rằng $\triangle O_aO_bO_c \backsim \triangle ABC$ và đường tròn $(O_aO_bO_c)$ tiếp xúc với (O)

18. Cho tam giác ABC ngoại tiếp quanh đường tròn (I). Các đường thẳng lần lượt vuông góc với IA, IB, IC, cắt tiếp tuyến tại M tùy ý của (I) tại A', B', C' theo thứ tự đó. Chứng minh rằng AA', BB', CC' đồng quy.

19. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$. Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$ (trọng tâm của tứ giác) và H là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OH}$ (H được gọi là trực tâm của tứ giác nội tiếp).

(a) Chứng minh rằng O, G, H cùng nằm trên một đường thẳng, và $\overrightarrow{OH} = 4 \cdot \overrightarrow{OG}$ (đường thẳng Ơ-le của tứ giác nội tiếp)

(b) Gọi H_a, H_b, H_c, H_d theo thứ tự là trực tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng các đường tròn $(H_X; R)$, với $X = a, b, c, d$ đi qua H

(c) Chứng minh rằng đường tròn Ơ-le của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC cùng đi qua một điểm, xác định vị trí hình học điểm đó. Chứng minh rằng tâm đường tròn Ơ-le của các tam giác này cùng nằm trên một đường tròn (đường tròn Ơ-le của tứ giác nội tiếp)

(d) Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua trung điểm mỗi cạnh, vuông góc với cạnh đối diện, đồng quy. Chỉ rõ vị trí hình học điểm đồng quy. (Điểm Monge)

(e) Chứng minh rằng $S(A : BCD), S(B; CDA), S(C; DAB), S(D; ABC)$ đồng quy tại điểm Monge.

(f) Xét P tùy ý trên đường tròn. Gọi s_a, s_b, s_c, s_d theo thứ tự là đường thẳng Simson của P đối với các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng hình chiếu của P trên các đường thẳng này cùng nằm trên một đường thẳng (đường thẳng Simson của P đối với tứ giác (nội tiếp) $ABCD$)

Chương 4

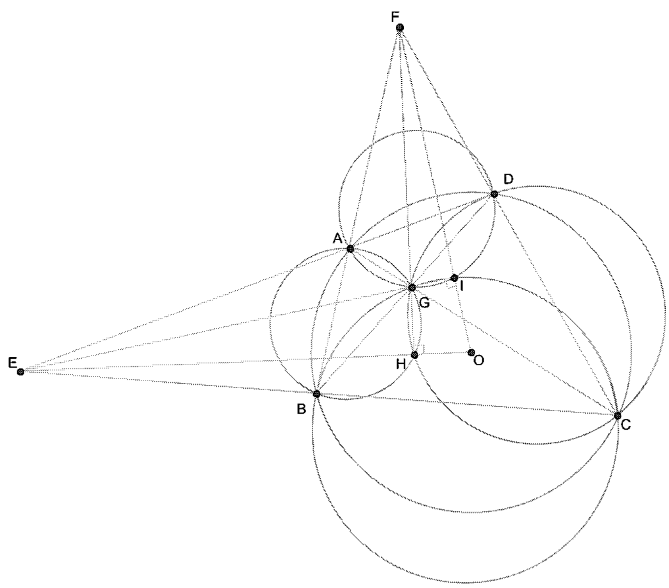
Song song, vuông góc

1. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi $E = AD \cap BC, F = AB \cap CD, G = AC \cap BD$. Đường tròn (ADG) và đường tròn (CDG) cắt nhau tại điểm thứ hai I, đường tròn (ABG) và đường tròn (CDG) cắt nhau tại điểm thứ hai H.

   (a) Chứng minh rằng E, H, O thẳng hàng và F, I, O thẳng hàng.

   (b) Chứng minh rằng $OI \perp EG$ và $OH \perp FG$. Từ đó suy ra O là trực tâm tam giác EFG

Lời giải.



1. Ta có

$$(IA; IB) = (IA; IG) + (IG; IB) = (DA; DG) + (CG; CB) = (OA; OB) \pmod{\pi}$$

Suy ra A, B, O, I đồng viên.

Tương tự, cũng có C, D, O, I đồng viên.

Vậy do $FA \cdot FB = FC \cdot FD$ nên F nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn $(ABO), (CDO)$. Suy ra F, I, O thẳng hàng.

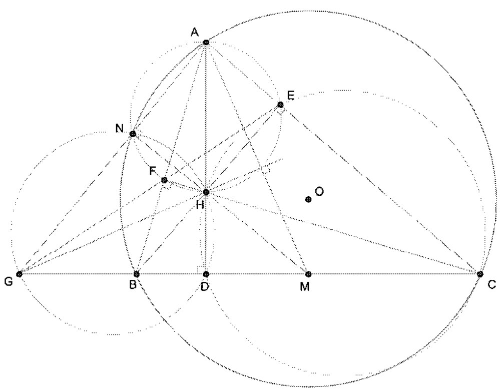
Tương tự, cũng có E, H, O thẳng hàng.

2. $(IO; IG) = (IO; IC) + (IC; IG) = (DO; DC) + (BC; BG) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OC}) \pm \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OD}) = \pm\frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. Suy ra $OI \perp IG$

Tương tự, $OH \perp HG$. ĐPCM

2. Cho tam giác ABC không cân với ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Giả sử $EF \cap BC = G$, gọi M là trung điểm BC. Chứng minh rằng $GH \perp AM$

   Lời giải.



   Để ý rằng tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn tâm M, có $BC \cap EF = G, BF \cap CE = A, BE \cap CF = H$, suy ra M là trực tâm của tam giác AGH. Do đó $MH \perp AG$, mà $AH \perp GM$, nên H là trực tâm của tam giác AGM. Suy ra $GH \perp AM$ đpcm

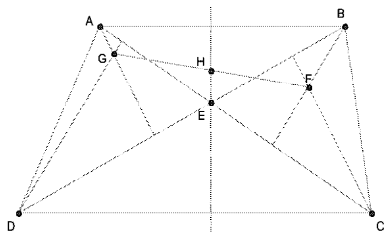
3. Tam giác ABC có $\angle CAB = 40°, \angle ABC = 60°$. Lấy $D \in Ac, E \in AB$ sao cho $\angle CBD = 40°, \angle BEC = 70°, BD \cap CE = F$. Chứng minh rằng $AF \perp BC$.

   (Canadian 1998)

4. Tứ giác $ABCD$ có $AC \cap BD = E, AB \parallel CD$. Gọi G, H theo thứ tự là trực tâm các tam giác EBC, EDA, goin H là trung điểm FG. Chứng minh rằng $EH \perp AB$

(Russian ??)

Lời giải.



Để ý rằng $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{0}$, cần chứng minh $\overrightarrow{EH} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) = 0$

Ta có

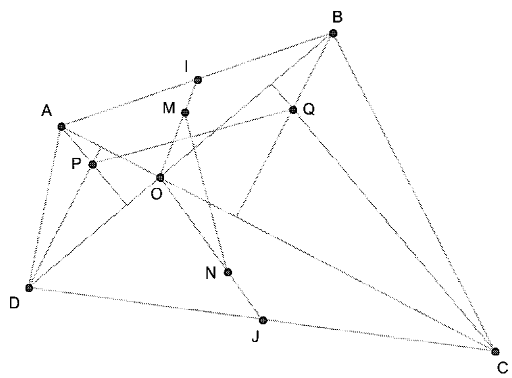
$$\begin{aligned}\overrightarrow{EH} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) &= \overrightarrow{EH} \cdot \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG}\right)\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}\right) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{CB} \\ &= 0\end{aligned}$$

Điều phải chứng minh.

4'. Tứ giác lồi $ABCD$ có $AC \cap BD = E$. Gọi G, H theo thứ tự là trực tâm các tam giác EBC, EDA, gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của AC, BD, FG. Chứng minh rằng $EP \perp MN$

5. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $AC \cap BD = O$. Gọi M, N theo thứ tự là trọng tâm các tam giác OAB, OCD và P, Q theo thứ tự là trực tâm các tam giác ODA, OBC. Chứng minh rằng $MN \perp PQ$

Lời giải.



Ta cần chứng minh $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$.

Gọi I, J là trung điểm của AB, CD theo thứ tự đó. Khi đó $\overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OI}$ và $\overrightarrow{ON} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OJ}$ suy ra $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$. Vậy

$$\begin{aligned}
3\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} &= \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right) \\
&= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OP} \\
&= 0
\end{aligned}$$

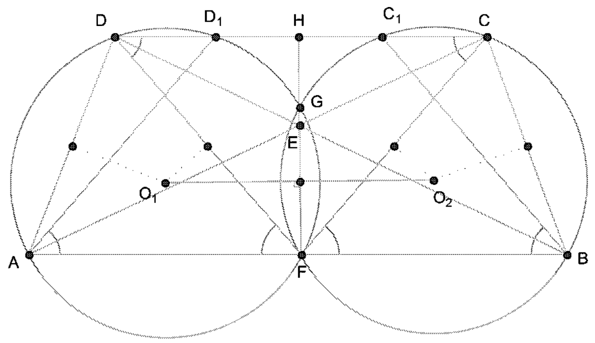
Suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét. Trong lời giải của hai bài toán trên, chúng ta đều sử dụng đến một kết quả: "Tứ giác lồi $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O. Khi đó $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{AD}$, ở đây P, Q theo thứ tự là trực tâm các tam giác OAD, OBC"

6. Cho tam giác cân ABC (với $AB = AC$) nội tiếp đường tròn (O). Với mỗi điểm N trên cạnh BC, xác định $M \in AB, P \in AC$ sao cho $AMNP$ là một hình bình hành. Gọi Q là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A của (O). Chứng minh rằng $NQ \perp MP$

7. Hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có hai đường chéo cắt nhau tại E. Trung trực CD cắt AB tại F, gọi O_1, O_2 theo thứ tự là tâm của các đường tròn $(ADF), (BCF)$. Chứng minh rằng $EF \perp O_1O_2$

Lời giải.



Gọi G là giao điểm thứ hai của $(O_1), (O_2)$. Khi đó $O_1O_2 \perp FG$. Vậy, cần chứng minh $E \in FG-$ trục đẳng phương của $(O_1), (O_2)$.

Lấy $C_1, D_1 \in (CD)$ sao cho $BC_1 \parallel FD, AD_1 \parallel FC$. Gọi $H = (FE) \cap CD$.

Theo giả thiết thì tứ giác $AFCD_1$ là một hình bình hành. Do đó

$$(AF; AD_1) = (CD_1; CF) = (CD; CF) = (DF; DC) = (DF; DD_1) \pmod \pi$$

Suy ra $D_1 \in (O_1)$.
Tương tự, cũng có $C_1 \in (O_2)$

Theo định lý Thalès, ta có

$$\frac{AF}{CH} = \frac{AE}{CE} = \frac{AB}{CD} \Longrightarrow CH = \frac{AF \cdot CD}{AB}$$

Tương tự, cũng có $DH = \dfrac{BF \cdot CD}{AB}$

Vậy

$$HC_1 = |DC_1 - DH| = |BF - DH| = BF \cdot \left|1 - \frac{CD}{AB}\right| \quad (1)$$

Tương tự

$$HD_1 = |CD_1 - CH| = |FA - CH| = AF \cdot \left|1 - \frac{CD}{AB}\right| \quad (2)$$

Từ (1),(2), suy ra

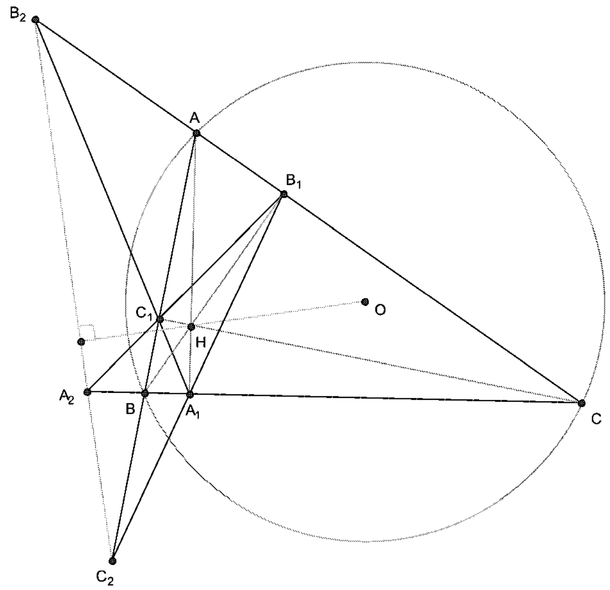
$$HC_1 \cdot HC = HC \cdot BF \cdot \left|1 - \frac{CD}{AB}\right| \quad (3)$$

$$HD_1 \cdot HD = HD \cdot AF \cdot \left|1 - \frac{CD}{AB}\right| \quad (4)$$

Từ (3),(4) và theo định lý Thalès, ta được $HC \cdot HC_1 = HD \cdot HD_1$. Do đó $H \in (GF) \Longrightarrow E \in (GF)$. ĐPCM

8. Cho tam giác ABC không cân với ba đường cao AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại H. Đường thẳng B_1C_1 và đường thẳng BC cắt nhau tại A_2. Các điểm B_2, C_2 được xác định tương tự. Chứng minh rằng các điểm A_2, B_2, C_2 cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với OH, trong đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

Lời giải.



Gọi (E) là đường tròn Ơ-le của tam giác ABC. Dễ dàng chứng minh được A_2, B_2, C_2 nằm trên trục đẳng phương của (E) và (O). Suy ra điều phải chứng minh.

9. Cho tam giác ABC với phân giác trong AD ($D \in BC$). Qua D kẻ đường thẳng $\Delta \perp AD$ cắt AB tại P và cắt trung tuyến m_a tại Q. Qua P, kẻ đường thẳng $\Delta_1 \perp AB$, cắt AD tại O. Chứng minh rằng $OQ \perp BC$

(APMO 2000)

10. Gọi O, E theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn Ơ-le của tam giác ABC. Lấy điểm E' sao cho $\angle E'BA = \angle EBC$ và $\angle E'AB = \angle EAC$. Trung trực của OA cắt BC tại A', các điểm B', C' được xác định tương tự. Chứng minh rằng các điểm A', B', C' cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với OE'

11. Gọi B' là điểm xuyên tâm đối của B trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp I của tam giác tiếp xúc với CA tại M. Lấy $K \in [BA)$, $L \in [BC)$ sao cho $KB = MC, LB = MA$. Chứng minh rằng $B'I \perp KL$

12. Đường tròn (I_a) bàng tiếp trong góc A của tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB tại A', B', C'. Các đường thẳng $A'B', AB$ cắt nhau tại C'', các đường thẳng $CC', A'B'$ cắt nhau tại D. Chứng minh rằng $I_aD \perp CC''$

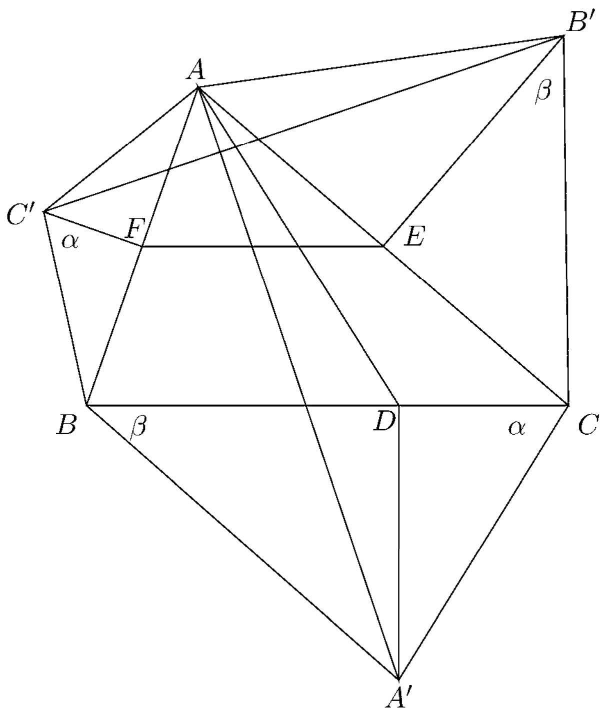
13. Tam giác ABC nhọn, $\ell_c \cap AB = L$. Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của L trên AC, CB, $AN \cap BM = P$. Chứng minh rằng $CP \perp AB$

14. Đường tròn tâm O tiếp xúc trong với hai đường tròn nằm trong nó tại S, T. Giả sử hai đường tròn đó cắt nhau tại M, N (N gần ST hơnM). Chứng minh rằng $OM \perp MN \Leftrightarrow S, N, T$ thẳng hàng

15. Cho tam giác ABC. Lấy các cạnh AB, AC làm đáy, dựng ra ngoài các tam giác cân ABC', ACB' (không nhất thiết đồng dạng). Lấy điểm A' khác phía với A đối với đường thẳng BC sao cho $\angle A'CB = \frac{1}{2}\angle BC'A, \angle A'BC = \frac{1}{2}\angle AB'C$. Gọi D là hình chiếu của A' trên BC. Chứng minh rằng $AA' \perp B'C'$ và $\frac{AA'}{B'C'} = 2 \cdot \frac{A'D}{BC}$

(MOSP 2002)

Lời giải.



Đặt $\alpha = \angle BCA' = \frac{1}{2}\angle BC'A, \beta = \angle A'BC = \frac{1}{2}\angle AB'C$. Ta có $\frac{BC}{A'D} = \cot\alpha + \cot\beta$. Đặt $k = \frac{2}{\cot\alpha + \cot\beta} = 2 \cdot \frac{A'D}{BC}$.

W.L.O.G, coi tam giác ABC định hướng dương, gọi f là phép quay vec-tơ theo góc $+\frac{\pi}{2}$ ta có

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{B'C'}) &= f(\overrightarrow{B'E} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC'}) \\ &= \cot\beta \cdot \overrightarrow{AE} + \cot\alpha \cdot \overrightarrow{AF} + \frac{1}{2}(\cot\alpha + \cot\beta) \cdot \overrightarrow{DA'} \\ &= \frac{1}{2}\left(\cot\alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \cot\beta \cdot \overrightarrow{AC}\right) + \frac{1}{2}(\cot\alpha + \cot\beta) \cdot \overrightarrow{DA'} \qquad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\frac{DB}{DC} = \frac{DB}{DA'} \cdot \frac{DA'}{DC} = \frac{\cot\beta}{\cot\alpha} = \frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$$

Do đó

$$(\tan\alpha + \tan\beta) \cdot \overrightarrow{AD} = \tan\beta \cdot \overrightarrow{AB} + \tan\alpha \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\iff (\cot\alpha + \cot\beta) \cdot \overrightarrow{AD} = \cot\alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \cot\beta \cdot \overrightarrow{AC} \qquad (2)$$

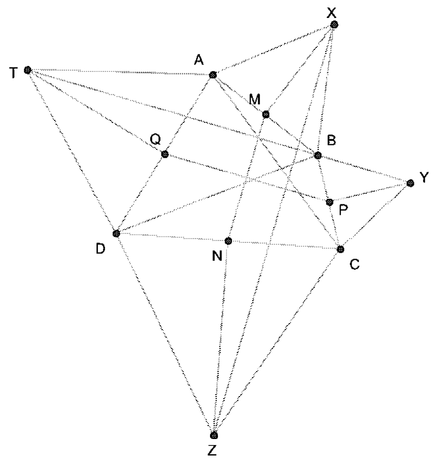
Từ (1) và (2) suy ra

$$f(\overrightarrow{B'C'}) = \frac{1}{2}(\cot\alpha + \cot\beta)\cdot\overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \frac{2}{\cot\alpha + \cot\beta}\cdot f(\overrightarrow{B'C'}) = k\cdot f(\overrightarrow{B'C'})$$

Suy ra điều phải chứng minh

16. Cho tứ giác $ABCD$ có $AC = BD$. Lấy các cạnh làm đáy, dựng ra ngoài các tam giác đều ABX, BCY, CDZ, DAT. có tâm lần lượt là O_1, O_2, O_3, O_4. Chứng minh rằng $O_1O_3 \perp O_2O_4$

Lời giải.



W.L.O.G, coi tứ giác $ABCD$ định hướng âm. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, CD, BC, DA. Do $AC = BD$ nên tứ giác $MPNQ$ là hình thoi, suy ra $MN \perp PQ$. Ký hiệu f là phép quay vec-tơ theo góc $+\frac{\pi}{2}$

Để ý rằng $3\overrightarrow{O_1O_3} = 2\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{XZ}$ và $3\overrightarrow{O_4O_2} = 2\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{TY}$, ta có

$$\begin{aligned} f(2\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{XZ}) &= f(\overrightarrow{XM} + 3\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NZ}) \\ &= f(\overrightarrow{XM}) + 3f(\overrightarrow{MN}) + f(\overrightarrow{NZ}) \\ &= \sqrt{3}\cdot\overrightarrow{AM} + \sqrt{3}\cdot\overrightarrow{NC} + \sqrt{3}\cdot\overrightarrow{TQ} + \sqrt{3}\cdot\overrightarrow{PY} \\ &= \sqrt{3}\cdot\overrightarrow{QP} + \sqrt{3}\cdot(\overrightarrow{TQ} + \overrightarrow{PY}) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \sqrt{3}\cdot f(\overrightarrow{XZ}) = 2\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{TY}$$

Suy ra $XZ \perp TY$. Ngoài ra, dễ dàng nhận thấy $O_1O_3 \parallel XZ, O_2O_4 \parallel YT$. ĐPCM

17. Cho tứ giác $ABCD$. Dựng ra ngoài các tam giác vuông cân $ABO_1, BCO_2, CDO_3, DAO_4$. Chứng minh rằng $O_1O_3 \perp O_4O_2$

18. Cho tam giác ABC $(AB > BC)$ có trung tuyến BM và phân giác BL. Đường thẳng Δ qua M, $\parallel AB$ cắt BL tại D, đường thẳng d qua L, $\parallel BC$ cắt BM tại E. Chứng minh rằng $DE \perp BL$

19. Các điểm A_1, B_1, C_1 theo thứ tự nằm trên các đường thẳng chứa các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC sao cho $AB_1 = B_1C_1, BA_1 = C_1A_1$. Lấy $D = \text{Đ}_{A_1B_1}(C_1)$, $D \neq C$, gọi O, O_1 là tâm đường tròn $(ABC), (A_1B_1C)$. Chứng minh rằng $CD \perp OO_1$

    Hint. Chứng minh C, D, A, B đồng viên và C, D, A_1, B_1 đồng viên

20. Tam giác $A_1A_2A_3$ không cân ngoại tiếp đường tròn (I). Tiếp điểm của (I) với A_iA_{i+1} là A'_{i+2}, gọi $A''_i = A_{i+1}A_{i+2} \cap A'_{i+1}A'_{i+2}$.

    (a) Chứng minh rằng $IA''_1 \perp A_1A'_1$

    (b) Gọi S là điểm đồng quy của A_iAi'. Chứng minh rằng $IS \perp A''_1A''_2$

    (c) Gọi (C_i) là đường tròn nhỏ hơn qua I, tiếp xúc với hai cạnh của góc $\angle A_i$, B_{i+2} là giao điểm thứ hai của hai đường tròn $(C_i), (C_{i+1})$. Chứng minh rằng tâm các đường tròn (A_jB_jI) thẳng hàng.

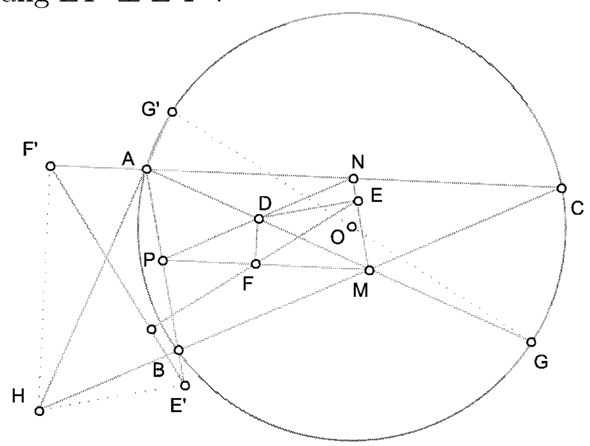
21. Tứ giác $ABCD$ có $AB = AD, \angle B = \angle D = 90°$. Lấy $E \in BC, F \in CD$ sao cho $DE \perp AF$. Chứng minh rằng $AE \perp BF$.

22. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), gọi E là tâm đường tròn Ơ-le của tam giác. Lấy E' sao cho $\angle E'BA = \angle EBC, \angle E'AB = \angle EAC$. Trung trực OA cắt BC tại A'. Các điểm B', C' được xác định tương tự. Chứng minh rằng A', B', C' cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với OE'

23. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với BC tại M. Gọi B' là điểm xuyên tâm đối của B trên đường tròn (ABC). Lấy $K \in [BA), L \in [BC) : KB = MC, LB = MA$. Chứng minh rằng $B'I \perp KL$

24. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là điểm chính giữa $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A, D và N là điểm chính giữa $\overset{\frown}{DA}$ không chứa B, C của đường tròn ngoại tiếp. Phân giác của các góc $\angle DAB, \angle ABC$ cắt nhau ở P và của các góc $\angle BCD, \angle CDA$ cắt nhau ở Q. Chứng minh rằng $MN \perp PQ$

25. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N, P là trung điểm của BC, CA, AB và D là trung điểm của MN. Gọi E, F là hình chiếu của D trên các đường thẳng MN, MP. Đường thăn gr AM cắt lại đường tròn (O) tại G, gọi G' là điểm xuyên tâm đối của G trên (O). Các đường thẳng AG, BC cắt nhau tại H, gọi E', F' là hình chiếu của H tren các đường thẳng AB, AC. Chứng minh rằng $EF \perp E'F'$.



26. Tam giác ABC không cân ngoaoj tiếp đường tròn (I). Đường tròn (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại A', B', C', gọi P là điểm đồng quy của AA', BB', CC', gọi $M = CA \cap C'A', N = BC \cap B'C'$. Chứng minh rằng $IP \perp MN$

27. Cho điểm L nằm trên cạnh BC của tam giác ABC. Trên tia AB, vượt quá B lấy điểm M sao cho $\angle ALC = 2\angle AMC$, trên tia AC, vượt quá C lấy điểm N sao cho $\angle ALB = 2\angle ANB$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Chứng minh rằng $OL \perp BC$

28. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi $P = AC \cap BD, Q = (AA) \cap (CC), R = (DD) \cap (BB)$. Chứng minh rằng $OP \perp RQ$

29. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại D, E, F. $FD \cap CA = P, DE \cap AB = Q$. Gọi M, N là trung điểm PE, QF.

Chứng minh rằng $OI \perp MN$ (O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC)

(Chinese 2007)

30. Hai đường chéo của tứ giác lồi, nội tiếp $ABCD$ cắt nhau ở E. Gọi K, L theo thứ tự là trung điểm các cạnh CD, AB và M, N là hình chiếu của E trên các đường thẳng BC, DA theo thứ tự đó. Chứng minh rằng $KL \perp MN$

Chương 5

Quỹ tích

1. Cho góc $\angle xOy$. Xét các điểm $M \in [Ox), N \in [Oy)$ sao cho $OM + ON = d - const$. Tìm quỹ tích trung điểm MN

2. Trong mặt phẳng cho trước một tam giác $A_0B_0C_0$. Xét các tam giác ABC thỏa mãn

   (a) $A_0 \in BC, B_0 \in CA, C_0 \in AB$

   (b) $\angle ABC = \angle A_0B_0C_0, \angle BCA = \angle B_0C_0A_0, \angle CAB = \angle C_0A_0B_0$

   Tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC

3. Cho tam giác ABC và điểm M ở bên trong tam giác. Gọi D, E, F là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Tìm quỹ tích của M sao cho $\angle DEF = 90°$

4. Cho trước đoạn thẳng AB. Tìm tất cả những điểm C trong mặt phẳng sao cho trong tam giác ABC có đường cao kẻ từ A, trung tuyến kẻ từ B có cùng độ dài ($h_a = m_b$)

(Taiwan 97)

5. Tam giác $A_1A_2A_3$ vuông tại A_3. Xác định dãy điểm $(A_n)_{n\geq 3}$ như sau: A_{n+1} là hình chiếu vuông góc của A_n trên đường thẳng $A_{n-1}A_{n-2}$.

   (a) Chứng minh rằng có đúng một điểm P nằm trong các tam giác $A_{n-2}A_{n-1}A_n, n \geq 3$.

   (b) Cho A_1, A_3 cố định, tìm quỹ tích P khi A_2 thay đổi.

(APMO 97)

6. Cho tam giác ABC nhọn và $P \in AB$. Lấy $B' \in [AC), A' \in [BC) : \angle B'PA = \angle A'PB = \angle ACB$. Các đường tròn $(APB'), (A'PB)$ cắt lại nhau ở Q. Tìm quỹ tích Q khi P chạy khắp đoạn AB.

(Hungarian 98)

7. Tam giác cân ABC có $BC = a, CA = AB = b$. Xét $M \in AC, N \in AB$ sao cho
$$a^2 \cdot AM \cdot AN = b^2 \cdot BN \cdot CM$$
các đường thẳng BM, CN cắt nhau tại P. Tìm quỹ tích P.

(Romanian 98)

8. Cho tam giác ABC cân $(AB = AC)$. Dựng ra ngoài các hình vuông $BAXX', CAYY'$. Xét điểm M bất kỳ trên cạnh BC, gọi N, P là hình chiếu của M trên BY, CX. Gọi I là trung điểm BC.
   (a) Chứng minh rằng $IN = IP$
   (b) Tìm quỹ tích trung điểm NP

(Turkey 98)

9. Cho trước hai đường tròn $(O_1), (O_2)$. Lấy $M_i \in (O_i)$ cố định, sao cho O_iM_i cắt nhau. Xét $N_i \in (O_i)$ sao cho các góc $\angle M_iO_iN_i$ theo cùng chiều kim đồng hồ là bằng nhau.
   (a) Tìm quỹ tích trung điểm N_1N_2
   (b) Các đường thẳng O_iN_i cắt nhau tại P. Các đường tròn $(N_1PN_2), (O_1PO_2)$ cắt nhau tại điểm thứ hai Q. Chứng minh rằng vị trí điểm Q không phụ thuộc cách chọn N_1, N_2

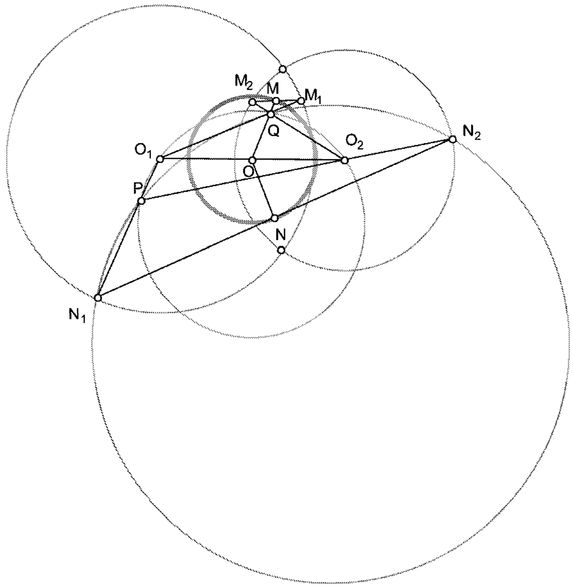
(Vietnam 2000)

Lời giải.

1. Gọi O, M, N theo thứ tự là trung điểm của O_1O_2, M_1M_2, N_1N_2, ký hiệu $\alpha = (\overrightarrow{O_iM_i}; \overrightarrow{O_iN_i})$ (mod 2π), f là phép quay véc-tơ theo góc α. Khi đó

$$2f(\overrightarrow{ON} = f(\overrightarrow{O_1M_1} + \overrightarrow{O_2M_2}) = f(\overrightarrow{O_1M_1}) + f(\overrightarrow{O_2M_2}) = \overrightarrow{O_1N_1} + \overrightarrow{O_2N_2} = 2\overrightarrow{ON}$$

Suy ra $ON = OM$. Vậy quỹ tích điểm N là đường tròn tâm O, bán kính OM.



2. Từ giả thiết $(QO_1; QO_2) \equiv (PO_1; PO_2) = \beta - const$ suy ra Q nằm trên cung chứa góc β bị trương bởi dây O_1O_2 (1)

Ngoài ra

$(O_1Q; O_1O_2) \equiv (PQ; PO_2) \equiv (PQ; PN_2) \equiv (PN_1; PN_2) \equiv (QN_1; QN_2)$ (2)

Từ (1),(2) suy ra các tam giác QO_1O_2, QN_1N_2 đồng dạng (cùng hướng). Suy ra $\triangle QO_1N_1 \backsim \triangle QO_2N_2 \Longrightarrow \frac{QO_1}{QO_2} = \frac{R_1}{R_2}$

Vậy Q nằm trên đường tròn Apolonius dựng trên đoạn O_1O_2 theo tỷ số $\frac{R_1}{R_2}$ khi $R_1 \neq R_2$ hoặc trên trung trực O_1O_2 khi $R_1 = R_2$ (3)

Từ (1) và (3) suy ra Q cố định

10. Trong mặt phẳng cho tam giác ABC cân tại A. Xét đường tròn (O) thay đổi, qua A nhưng không tiếp xúc với AB, AC, có tâm nằm trên BC. Gọi M, N theo thứ tự là giao điểm thứ hai của (O) với AB, AC. Tìm quỹ tích trực tâm của tam giác ANM.

(Vietnam 2002)

11. Cho hai đường tròn đồng tâm $(O; R), (O; r), R > r$. Cho P cố định trên $(O; r)$, B thay đổi trên $(O; R)$, đường thẳng PB và đường tròn $(O; R)$ cắt nhau tại điểm thứ hai C. Đường thẳng vuông góc với PB tại P, cắt đường tròn nhỏ hơn tại A

(a) Chứng minh rằng $AB^2 + BC^2 + CA^2$ không đổi.

(b) Tìm quỹ tích trung điểm BC

12. Trong mặt phẳng cho trước hai điểm A, B phân biệt và một đường tròn (O) đi qua A, nhưng không qua B. Với mỗi điểm $M \in (O)$, dựng đường tròn (ω_1) qua A, M, tiếp xúc với AB tại A. Đường tròn (ω_1) cắt lại tiếp tuyến At của đường tròn (ω_2) ngoại tiếp tam giác ABM tại $N \neq A$. Tìm quỹ tích N khi M thay đổi trên (O)

13. Trong mặt phẳng cho đường tròn $(O; R)$, đường kính AB. Một dây cung $CD \perp AB$ tại H mà $\frac{HA}{HB} = \frac{5}{3}$

    Xét điểm E thay đổi trên (CD), đường thẳng vuông góc với AE tại E cắt (O) tại P, Q. Đường thẳng AE cắt lại (O) tại F. Tìm quỹ tích các trung điểm M, N của PF và QF

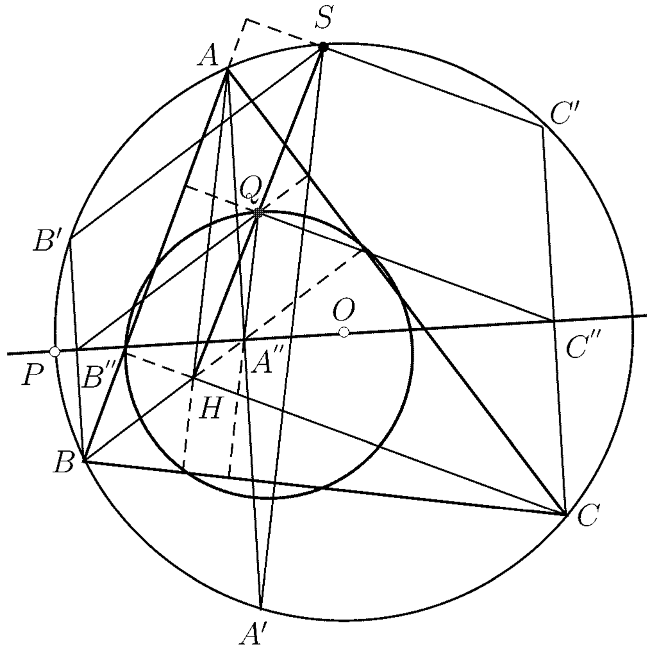
14. Cho tam giác ABC. Điểm M chạy trên cạnh BC, kẻ các tiếp tuyến chung ngoài (khác cạnh) và các tiếp tuyến chung trong của đường tròn nội tiếp các tam giác ABM, ACM cắt nhau ở N. Tìm $\{N\}$

15. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Xét P tùy ý trên đường tròn. Tìm quỹ tích *cực-trực giao* của đường thẳng OP đối với tam giác ABC

    Lời giải.

    Gọi A', B', C' theo thứ tự là các điểm đối xứng với A, B, C qua (OP),A'', B'', C'' là hình chiếu của A, B, C trên (OP), d_a, d_b, d_c là các đường thẳng theo thứ tự qua A', B', C', lần lượt vuông góc với BC, CA, AB. Các đường thẳng d_a, d_b cắt nhau tại S.

    Ta có $(SA'; SB') \equiv (CB; CA) \pmod{\pi} \equiv (C'A'; C'B') \pmod{\pi}$ (do tính đối xứng). Suy ra giao điểm của d_a, d_b nằm trên (O). Tương tự, giao điểm của các cặp đường thẳng d_b vàd_c, d_c vàd_a cũng nằm trên (O). Vậy d_a, d_b, d_c đồng quy tại $S \in (O)$. Gọi H là trực tâm $\triangle ABC$ và Q là trung điểm HS. Khi đó, trong hình thang $SHCC'$ có $C''Q$ là đường trung bình, suy ra $C''Q \parallel C'S$ và do đó $C''Q \perp AB$.



Tương tự, cũng có $A''Q \perp BC, B''Q \perp CA$. Vậy, Q là cực trực giao của (OP) đối với tam giác ABC.

Từ đó $V_H^{\frac{1}{2}} : S \mapsto Q$ suy ra khi P thay đổi trên (O) thì Q thay đổi trên đường tròn Ơ-le của tam giác ABC.

Ngược lại, với mỗi Q nằm trên đường tròn Ơ-le của tam giác , tia HQ cắt đường tròn (O) tại S. Các đường thẳng qua S theo theo thứ tự vuông góc với BC, CA, AB cắt lại (O) tại A', B', C', các đường thẳng qua Q vuông góc với BC, CA, AB theo thứ tự cắt AA', BB', CC' tại A'', B'', C'' theo thứ tự đó. Khi đó A'', B'', C'' tương ứng là trung điểm của AA', BB', CC' (Định lý Thalès). Mặt khác,

$$\begin{aligned}
(AB'; AA') &\equiv (SB'; SA') && \text{(do } A, A', B', S \text{ đồng viên)}\\
&\equiv (CA; CB) && \text{(do } SB' \perp CA, SA' \perp CB)\\
&\equiv (B'A; B'B) && \text{(do } A, B, C, B' \text{ đồng viên}
\end{aligned}$$

Suy ra $AA' \| BB'$. Một cách tương tự, cũng có $AA' \| BB' \| CC'$. Do đó, trung điểm của AA', BB', CC' và O cùng nằm trên một đường thẳng, đường thẳng này cắt (O) tại P, P'và Q là cực trực giao của (POP') đối với tam giác ABC.

Kết luận. Quỹ tích cực trực giao của (OP) (với $P \in (O)$) đối với tam giác ABC là đường tròn Ơ-le của tam giác.

16. Đường tròn ω_1 được gọi là cắt xuyên tâm đối đường tròn ω_2 nếu dây cung chung của chúng là đường kính của ω_2.

(a) Cho trước đường tròn (O). Chứng minh rằng với mỗi điểm I trong mặt phẳng, có một đường tròn tâm I, cắt xuyên tâm đối (O)

(b) Xét hai đường tròn không đồng tâm $(O_1), (O_2)$. Chứng minh rằng có vô số đường tròn (O) cắt xuyên tâm đối cả $(O_1), (O_2)$ và tìm quỹ tích tâm tất cả các đường tròn đó.

(c) Cho trước ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$ với tâm phân biệt.

i. Chứng minh rằng khi O_1, O_2, O_3 không thẳng hàng, có duy nhất đường tròn (O) cắt xuyên tâm đối cả ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$.

ii. Chứng minh rằng khi O_1, O_2, O_3 thẳng hàng, có thể có hoặc có thể không có đường tròn (O) cắt xuyên tâm đối cả ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$. Hơn nữa, khi tồn tại, thì các đường tròn này luôn đi qua hai điểm cố định. Xác định vị trí hình học của hai điểm đó.

17. Cho hình bình hành $ABCD$. Xét hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ thảo mãn (O_1) tiếp xúc với hai cạnh của góc $\angle BAD$, (O_2) tiếp xúc với hai cạnh của góc $\angle BCD$, $(O_1), (O_2)$ tiếp xúc với nhau tại M, (O_i) nằm trong hình bình hành. Tìm quỹ tích của M

18. Cho hình bình hành $ABCD$ với $\triangle ABD$ nhọn và $\angle BAD = \frac{\pi}{4}$. Xét $K \in AB, L \in BC, M \in CD, N \in DA$ sao cho tứ giác $KLMN$ nội tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp của các tam giác ANK, CLM bằng nhau. Tìm quỹ tích giao điểm của KM, LN

19. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự. Với mỗi $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$, lấy M, N thuộc cùng một phía đối với đường thẳng AC sao cho C, M, N thẳng hàng, $\angle CAN = \angle CBM = \alpha$ và A, B, M, N đồng viên. Tìm quỹ tích giao điểm của AM, BN

20. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N là điểm chính giữa của các cung $\overset{\frown}{BC}$ (không chứa A), $\overset{\frown}{CA}$ (không chứa B) và X là một điểm tùy ý trên cung $\overset{\frown}{AB}$ không chứa C. Gọi O_a, O_b là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác XAC, XBC. Đường tròn (O) cắt lại đường tròn (XO_1O_2) tại P. Chứng minh rằng $\triangle PNO_a \backsim \triangle PMO_b$ và tìm quỹ tích điểm P khi X thay đổi trên $\overset{\frown}{AB}$.

21. Cho trước hai điểm A, B phân biệt trong mặt phẳng. Xét các tam giác ABC có tính chất: tồn tại $D \in BC$, $E \in CA$ sao cho

(a) $\frac{BD}{BC} = \frac{CE}{CA} = \frac{1}{3}$

(b) A, B, D, E đồng viên.

Tìm quỹ tích giao điểm của AD, BE

22. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Tìm tất cả các điểm P trong tứ giác sao cho

$$[PAB] \cdot [PCD] = [PBC] \cdot [PDA]$$

23. **(?)** Cho tam giác ABC nhọn. Tìm tất cả các điểm M ở bên trong tam giác sao cho

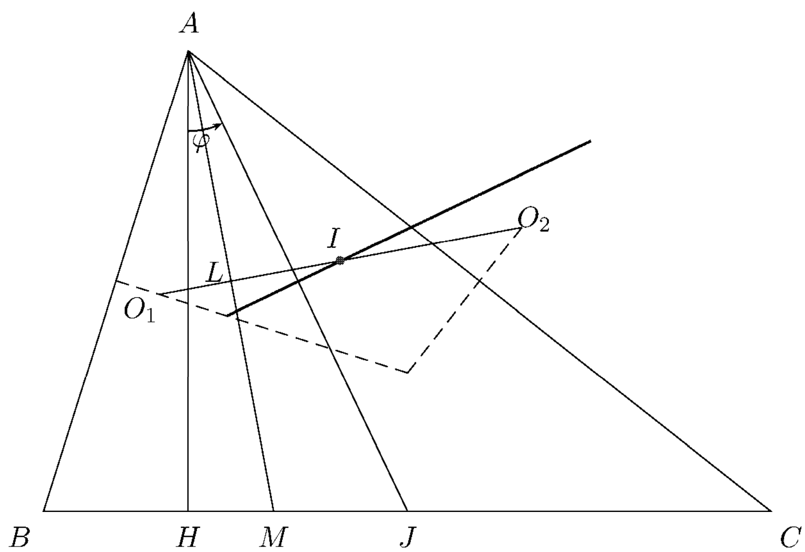
$$AB - FG = \frac{MF \cdot AG + MG \cdot BF}{CM}$$

trong đó, F, G theo thứ tự là hình chiếu của M trên BC, CA

24. Cho hình vuông $ABCD$. Xét $K \in AB, L \in BC, M \in CD$ sao cho tam giác KLM đều. Tìm quỹ tích trung điểm KL

25. Cho tam giác ABC và điểm M thay đổi trên cạnh BC. Gọi O_1, O_2 theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABM, ACM. Tìm quỹ tích trung điểm O_1O_2

Lời giải.



Gọi J là trung điểm BC, H là hình chiếu của A trên BC.

Ta có $\triangle AO_1O_2 \backsim \triangle ABC \Rightarrow \triangle AO_1I \backsim \triangle ABJ \Rightarrow \triangle ABO_1 \backsim \triangle AJI \Rightarrow IJ = IA$ hay I nằm trên trung trực của AJ. Gọi $L = AM \cap O_1O_2$.

Ta có $\triangle AO_1O_2 \backsim \triangle ABC \Rightarrow \triangle ALI \backsim \triangle AHJ$. Đặt $\varphi = (\overrightarrow{AH}; \overrightarrow{AJ}), k = \frac{AJ}{AH}$

Khi đó $I = V_A^k \circ Q_A^{\varphi}(L)$, nhưng $L = V_A^{\frac{1}{2}}(M)$ suy ra $I = V_A^k \circ Q_A^{\varphi} \circ V_A^{\frac{1}{2}}(M)$. Do đó $\{I\} = V_A^k \circ Q_A^{\varphi} \circ V_A^{\frac{1}{2}}([BC])$

26. Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định. Xeta điểm A thay đổi trên đường tròn. Gọi H là trực tâm $\triangle ABC$ và I là hình chiếu của H trên phân giác của góc $\angle BAC$. Tìm $\{I\}$

27. Cho điểm M thay đổi trên cạnh BC của tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp của các tam giác ABM, ACM tiếp xúc với AM tại Y, T và tiếp xúc BC tại X, Z theo thứ tự đó. Tìm $\{XY \cap ZT\}$

28. Cho tam giác ABC. Véc-tơ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC}$ trượt trên (AC). Gọi D, E là hình chiếu của M, N trên BC, AB. Tìm quỹ tích tâm đường tròn (BDE)

29. Cho tam giác OAB cân tại O. Điểm C tùy ý trên AB. Các đường thẳng qua C, lần lượt song song với OA, OB cắt OB, OA theo thứ tự đó tại D, E. Tìm quỹ tích của

    (a) trọng tâm tam giác ODE

    (b) tâm đường tròn ngọa tiếp tam giác ODE

    (c) trực tâm tam giác ODE

30. Cho tam giác ABC. Một đường thẳng cắt AB, AC tại X, Y sao cho $BX = CY$. Tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AXY

31. Cho hai đương tròn $(O_1), (O_2)$. Xét $M_i \in (O_i)$. Tìm quỹ tích trung điểm M_1M_2

32. Cho ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$. Xét $M_i \in (O_i)$. Tìm quỹ tích trọng tâm tam giác $M_1M_2M_3$

Chương 6

Bất đẳng thức hình học

Chương 7

Các bài toán tổng hợp

1. Xét điểm M trên đoạn AB, không trùng với A, B. Về cùng một phía của đường thẳng, dựng các hình vuông $AMCD, BMFE$. Đường tròn ngoại tiếp của hai hình vuông cắt nhau tại điểm thứ hai N.

   (a) Chứng minh rằng F, A, N thẳng hàng và B, C, N thẳng hàng.

   (b) Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.

   (c) Tìm quỹ tích trung điểm PQ, trong đó P, Q theo thứ tự là tâm của hai hình vuông $AMCD, BMFE$

2. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) với $\angle B < \angle C < \angle A = 90°$. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BC tại D. Gọi $E = Đ_{BC}(A)$, X là hình chiếu của A trên BE, Y là trung điểm AX. Đường thẳng BY cắt lại đường tròn (O) tại Z. Chứng minh rằng BD tiếp xúc với đường tròn (ADZ)

   (IMO Shortlisted 1998)

2'. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến (O) (B, C là tiếp điểm). Gọi D là giao điểm của đoạn AO với đường tròn. Gọi X là hình chiếu của B trên CD, Y là trung điểm BX. Đường thẳng DY cắt lại (O) tại Z. Chứng minh rằng $AZ \perp ZC$

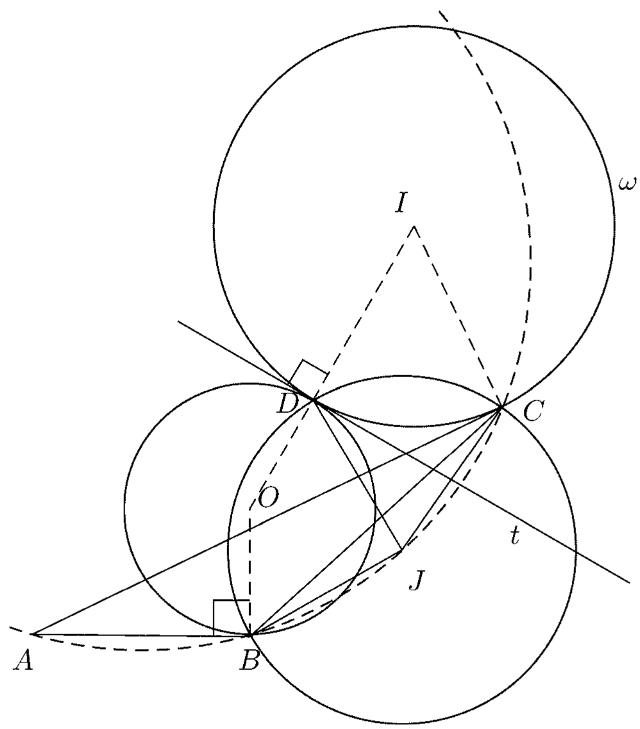
3. Tứ giác lồi $ABCD$ không có hai cạnh nào song song. Xét điểm X ở trong tứ giác sao cho $\angle ADX = \angle BCX < 90°$ và $\angle DAX = \angle CBX < 90°$. Trung trực AB, CD cắt nhau tại Y. Chứng minh rằng $\angle AYB = 2\angle ADX$

   (IMO Shortlisted 2000)

4. Cho trước đường tròn (O) và hai điểm A, B sao cho AB tiếp xúc với đường tròn (O) tại B. Lấy điểm C không nằm trên (O) sao cho AC cắt (O) tại hai điểm phân biệt, dựng đường tròn (ω) tiếp xúc với AC tại C, tiếp xúc với (O) tại D sao cho B, D nằm về hai phía của đường thẳng AC. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

(IMO Shortlisted 2002)

Lời giải.



Gọi I và J theo thứ tự là tâm các đường tròn (ω) và (BCD), t là tiếp tuyến chung tại D của (O) và(ω).
Từ giả thiết suy ra O, J nằm trên trung trực BD và I, J nằm trên trung trực CD. Suy ra $Đ_{OJ} : (BA) \mapsto (t)$ và $Đ_{IJ} : (DJ) \mapsto (CJ)$ và $(Dt) \mapsto (CA)$. Khi đó

$$(BA; BJ) \equiv (DJ, t) \pmod{\pi} \equiv (CA; CJ) \pmod{\pi}$$

5. Cho $(O_1) \cap (O_2) = \{P; Q\}$. Xét $A_i, B_i \in (O_i)$ sao cho A_1, P, A_2 thẳng hàng và B_1, P, B_2 thẳng hàng. Gọi $C = A_1B_1 \cap A_2B_2$

(a) Chứng minh rằng A_1, A_2, C, Q đồng viên.

(b) Gọi O là tâm của đường tròn (A_1A_2C). Chứng minh rằng O luôn chạy trên một đường tròn cố định.

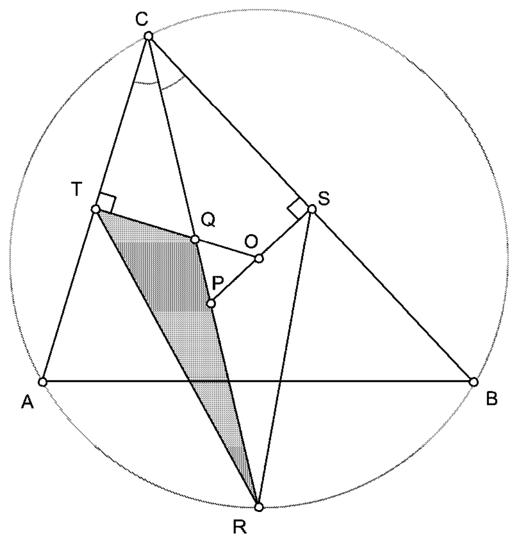
6. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác nhọn ABC tiếp xúc với BC tại K. Gọi M là trung điểm của đường cao AD của tam giác và L là giao điểm thứ hai của đường tròn (I) với KM. Chứng minh rằng đường tròn (I) và đường tròn (BCL) tiếp xúc nhau (tại L)

(IMO Shortlisted 2002)

7. Cho tam giác ABC. Gọi R, P, Q theo thứ tự là giao điểm của ℓ_c với đường tròn ngoại tiếp, trung trực BC và trung trực CA. Gọi S, T là trung điểm BC, CA. Chứng minh rằng $S_{\triangle RQT} = S_{\triangle RPS}$

(IMO 2007)

Lời giải . Nếu $CA = CB$ thì kết luận của bài toán là hiển nhiên. Do đó, ta chỉ cần giải bài toán trong trường hợp $CA \neq CB$



Ta có $\triangle CTQ \backsim \triangle CSP \Longrightarrow \frac{CQ}{CT} = \frac{CP}{CS} \Longrightarrow \frac{CQ}{CT} \cdot \frac{CS}{CP} = 1$

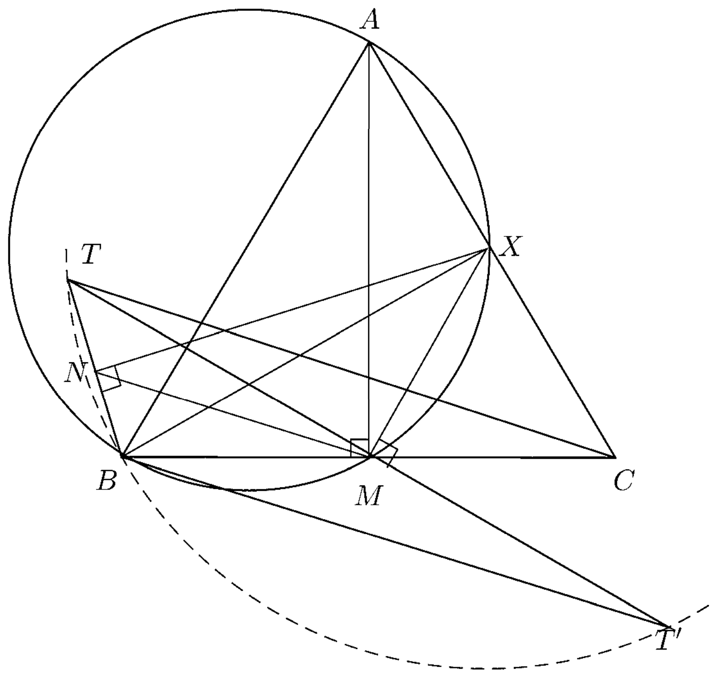
Ngoài ra $\angle TQR = \angle SPR$, do đó PQ, CR có cùng trung điểm.

Vậy

$$\frac{S_{\triangle RTQ}}{S_{\triangle RPS}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot QR \cdot QT \cdot \sin \angle TQR}{\frac{1}{2} \cdot PR \cdot PS \cdot \sin \angle RPS} = \frac{QR}{PR} \cdot \frac{QT}{PS} = \frac{CP}{CQ} \cdot \frac{CQ}{CP} = 1$$

8. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M là trung điểm cạnh đáy BC, xét điểm X tùy ý trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AM}$ của đường tròn (ABM). Lấy điểm T trong miền góc $\angle AMB$ sao cho $\angle TMX = 90^\circ$ và $TX = BX$. Chứng minh rằng $\angle MTB - \angle CTM$ không phụ thuộc vào X

Lời giải.



Gọi N là trung điểm của BT. Khi đó $MN \parallel TC$ và do đó $\angle CTM = \angle TMN = \angle TXN = \angle NXB$

Ngoài ra $\angle MTB = \angle MXN$. Vậy

$$\angle MTB - \angle MTC = \angle MXB = \angle MAB = \frac{1}{2}\angle CAB = \text{const}$$

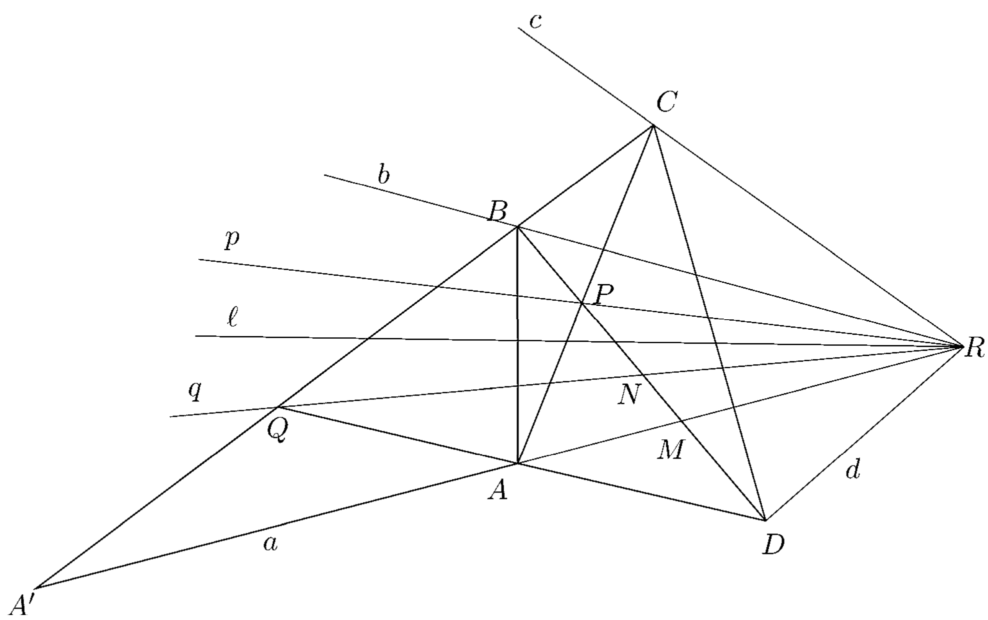
8'. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M là trung điểm cạnh đáy BC, xét điểm X tùy ý trên đường tròn (ABM). Lấy điểm T khác phía X đối với AM sao cho $\angle TMX = 90^\circ$ và $TX = BX$. Chứng minh rằng $\angle MTB - \angle CTM$ không phụ thuộc vào X

Hint. Góc định hướng

9. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $P = AC \cap BD$, $Q = AD \cap BC$, và R là một điểm tùy ý trong mặt phẳng, không nằm trên các đường thẳng AB, BC, CD, DA, AC, BD.

Chứng minh rằng $(RA; RD) \equiv (RC; RB) \pmod{\pi} \Leftrightarrow (RB; RP) \equiv (RQ; RA)$ $\pmod{\pi}$

Lời giải.



Gọi ℓ là phân giác của $\angle ARB$. Ký hiệu $x := RX$, $\forall X$ và gọi $p' = \text{Đ}_\ell(q)$.

Ta có

$$\begin{aligned}
(abcq) &= (A'BCQ) \\
&= (MBPD) \quad \text{(chiếu tâm xuyên tâm, tâm chiếu } A) \\
&= (abpd) = (badp)
\end{aligned}$$

Nếu $(a; d) \equiv (c; b) \pmod{\pi}$, do tính đối xứng ta có

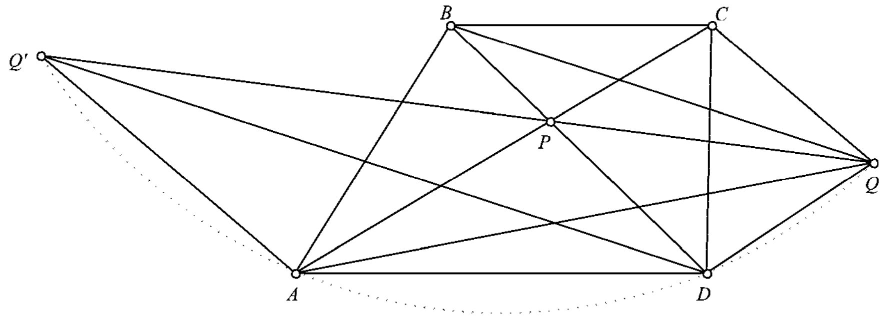
$$(badp') = (abcq) = (badp)$$

Suy ra $p' \equiv p$ hay $(RB; RP) \equiv (RQ; RA) \pmod{\pi}$

Chiều ngược lại chứng minh tương tự

10. Cho hình thang $ABCD$ có $AC \cap BD = P$. Xét điểm Q nằm trong dải giữa hai đường thẳng song song BC, DA sao cho $\angle AQD = \angle CQB$ Chứng minh rằng $\angle BQP = \angle DAQ$

Lời gải.



Đặt $\frac{AD}{BC} = k$. Xét phép vị tự tâm P tỷ số $-k$:

$$\begin{aligned} V_P^{-k} \ :\ & C \mapsto A \\ & B \mapsto D \\ & Q \mapsto Q' \end{aligned}$$

Khi đó

$(QB;QP) \equiv (Q'D;Q'P) \pmod{\pi}$ và $(QC;QB) \equiv (Q'A;Q'D) \pmod{\pi}$ (1)

Vậy, nếu $(QB;QP) \equiv (AD;AQ) \pmod{\pi}$ thì $(Q'D;Q'Q) \equiv (AD;AQ) \pmod{\pi}$. Suy ra bốn điểm A, D, Q, Q' đồng viên.

Do đó $(Q'A;Q'D) \equiv (QA;QD) \pmod{\pi}$ (2)

Từ (1),(2) suy ra $(QC;QB) \equiv (QA;QD) \pmod{\pi}$

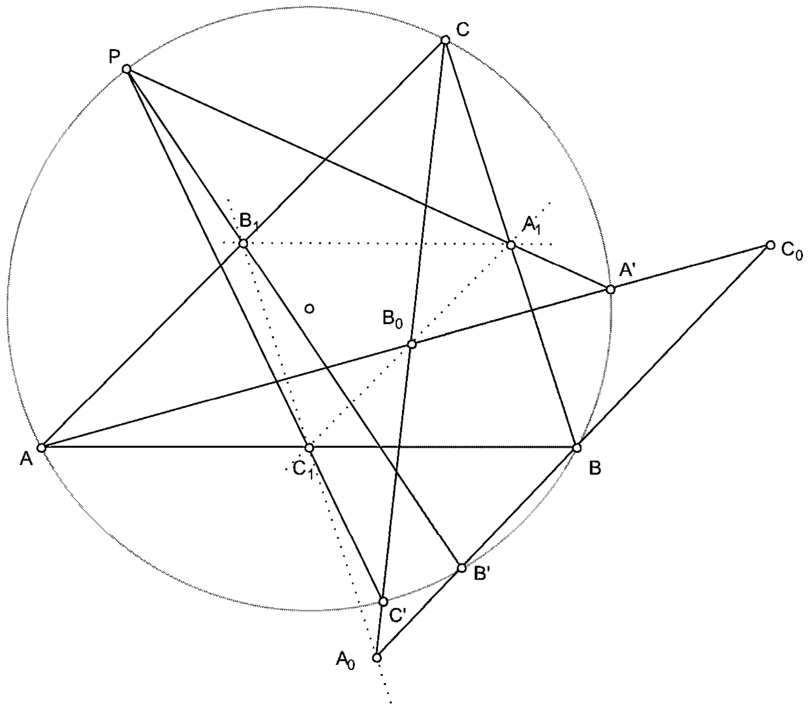
Ngược lại, tương tự

Nhận xét. Bài toán 10 là trường hợp riêng của bài toán 9, khi $Q \to \infty$ (khi $AD \parallel BC$)

11. Cho trước tam giác ABC cố định. Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Xét điểm P tùy ý trên đường tròn (O) ngoại tiếp của tam giác. Các đường thẳng PA_1, PB_1, PC_1 cắt lại đường tròn (O) tại A', B', C'. Giả sử rằng các điểm A, B, C, A', B', C' phân biệt, và các đường thẳng AA', BB', CC' giới hạn nên một tam giác τ. Chứng minh rằng diện tích của tam giác τ không phụ thuộc cách chọn điểm P

    Trả lời. $S(\tau) = \frac{1}{2} \cdot S(ABC)$

    Lời giải . Gọi $A_0 = BB' \cap CC', B_0 = CC' \cap AA', C_0 = AA' \cap BB'$



Áp dụng định lý Pascal cho các lục giác nội tiếp $ABCC'PA', CABB'PC', BCAA'PB'$ ta được các bộ ba điểm sau thẳng hàng $(A_1; B_0; C_1), (A_0; B_1; C_1), (A_1; B_1; C_0)$.

Do $AC \parallel A_1C_1$ nên $\dfrac{B_0C_0}{AC_0} = \dfrac{A_1C_0}{B_1C_0}$ (1)

Do $BC \parallel B_1C_1$ nên $\dfrac{A_1C_0}{B_1C_0} = \dfrac{BC_0}{A_0C_0}$ (2)

Từ (1),(2) suy ra

$$\frac{B_0C_0}{AC_0} = \frac{BC_0}{A_0C_0} \Longleftrightarrow C_0A_0 \cdot C_0B_0 = C_0A \cdot C_0B$$

Từ đó

$$S(A_0B_0C_0) = \frac{1}{2} \cdot C_0A_0 \cdot C_0B_0 \cdot \sin \angle A_0C_0B_0 = \frac{1}{2} \cdot C_0A \cdot C_0B \cdot \sin \angle BC_0A = S(ABC_0)$$

Từ đó, để ý rằng C_0 nằm trên đường trung bình A_1B_1 của tam giác, suy ra $S(\tau) = S(A_0B_0C_0) = \frac{1}{2} \cdot S(ABC)$

Nhận xét. AA_0, BB_0, CC_0 song song, và song song với đường thẳng Simson của điểm Q, xuyên tâm đối với P

12. Tìm số thực dương k nhỏ nhất có tính chất: Cho tứ giác lồi $ABCD$ và các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự nằm trên các cạnh AB, BC, CD, DA. Xét diện

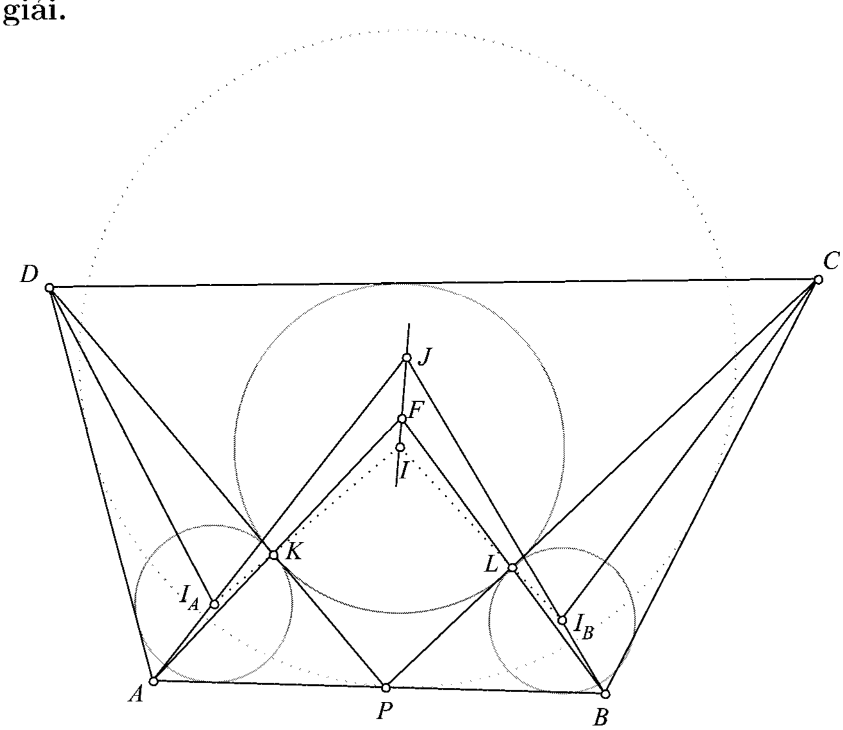
tích của các tam giác $AA_1D_1, BB_1A_1, CC_1B_1, DD_1C_1$, gọi S là tổng của hai diện tích nhỏ nhất trong chúng, và S_1 là diện tích của tứ giác$A_1B_1C_1D_1$. Khi đó luôn có $kS_1 \geq S$

13. Cho tam giác nhọn ABC với $\angle ABC > \angle BCA$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp và D là chân đường cao kẻ từ A. Lấy điểm K trên đường thẳng AD khác phía A đối với D sao cho $AK = 2R$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp). Đường thẳng DI cắt AC tại E và đường thẳng KI cắt đường thẳng BC tại F. Chứng minh rằng nếu $IE = IF$ thì $\angle ABC \leq 3\angle BCA$

    Lời giải.

14. Cho điểm P nằm trên cạnh AB của tứ giác lồi $ABCD$ và đường tròn ω tâm I, nội tiếp trong tam giác CDP. Giả sử rằng ω tiếp xúc với đường tròn nội tiếp của các tam giác APD, BPC tại K, L theo thứ tự đó. $AC \cap BD = E, AK \cap BL = F$. Chứng minh rằng E, I, F thẳng hàng

    Lời giải.



Gọi $(J; R)$ là đường tròn tiếp xúc với AB, AD, BC và $(I_A; r_A), (I_B; r_B)$ là đường tròn nội tiếp các tam giác ADP, BCP.

Ta có $V_A^{\frac{R}{r_A}} \circ V_K^{-\frac{r_A}{r}} : (I; r) \mapsto (J; R)$

Suy ra tâm vị tự của $(I), (J)$ là giao điểm của AK, IJ (1)

Mặt khác $V_B^{\frac{R}{r_B}} \circ V_L^{-\frac{r_B}{r}} : (I; r) \mapsto (J; R)$

Suy ra tâm vị tự của $(I), (J)$ là giao điểm của BL, IJ (2)

Từ (1),(2) suy ra $F \in IJ$ (3)

(Nếu $I \equiv J$ thì $F \equiv I \equiv J$)

Tứ giác $APCD$ có đường tròn nội tiếp của hai tam giác APD, PCD tiếp xúc với đường chéo PD tại cùng một điểm, nên $APCD$ ngoại tiếp được một đường tròn. Tương tự, tứ giác $BCDP$ ngoại tiếp được một đường tròn. Gọi $(J_A; \rho_A), (J_B; \rho_B)$ theo thứ tự là đường tròn nội tiếp các tứ giác $DAPC, BCDP$.

Ta có $V_A^{\frac{R}{\rho_A}} \circ V_C^{\frac{\rho_A}{r}} : (I; r) \mapsto (J; R)$

Suy ra tâm vị tự ngoài của $(I), (J)$ là giao điểm của AC, IJ (4)

$V_B^{\frac{R}{\rho_B}} \circ V_D^{\frac{\rho_B}{r}} : (I; r) \mapsto (J; R)$

Suy ra tâm vị tự ngoài của $(I), (J)$ là giao điểm của BD, IJ (5)

Từ (4),(5) suy ra $E \in IJ$ (6)

Từ (5),(6) suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét.

(a) Nhận thấy rằng AB, KL, I_AI_B đồng quy. Do đó, áp dụng định lý Desargues cho hai tam giác AI_AK, BI_BL, ta được $J = AI_A \cap BI_B, I = I_AK \cap I_BL, F = KA \cap LB$ thẳng hàng.

(b) Cũng vậy, J_AJ_B, AB, CD đồng quy. Do đó, áp dụng định lý Desargues cho các tam giác J_AAC, J_BBD cũng được $I = J_AC \cap J_BD, J = AJ_A \cap BJ_B, E = AC \cap BD$ thẳng hàng

15. Xét 5 điểm A, B, C, D, E sao cho $ABCD$ là một hình bình hành và $BCED$ là một tứ giác nội tiếp. Một đường thẳng Δ qua A, cắt CD, BC tại F, G tương ứng. Biết rằng $EF = EG = EC$, chứng minh rằng Δ là phân giác của góc $\angle DAB$

(IMO 2007)

16. Cho tam giác ABC thỏa mãn $AB + BC = 3CA$. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với AB, BC tại D, E. Gọi K, L tương ứng là điểm đối xứng với D, E qua I. Chứng minh rằng tứ giác $ACKL$ nội tiếp

17. Cho tam giác ACE. Lấy $B \in AC, D \in AE$, $BE \cap CD = F$. Giả sử rằng $AB + BF = AD + DF$, chứng minh rằng $AC + CF = AE + EF$

Hint. Hai tam giác ABE, ACD có cùng đường tròn bàng tiếp trong góc A

18. Cho tứ giác $AEDB$ nội tiếp đường tròn (O) với đường kính AB. Tia ED và tia AB cắt nhau tại C. Gọi OF là đường kính của đường tròn (O_1) ngoại tiếp tam giác OBD, và G là giao điểm thứ hai của CF với (O_1). Chứng minh rằng bốn điểm A, E, G, O đồng viên.

    Hint.

    (a) Nếu $AD \cap BE = M$ thì $M \in CG$

    (b) **Bổ đề.** Tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi $P = AC \cap BD, Q = AD \cap BC, R = AB \cap CD$. Khi đó O là trực tâm tam giác PQR

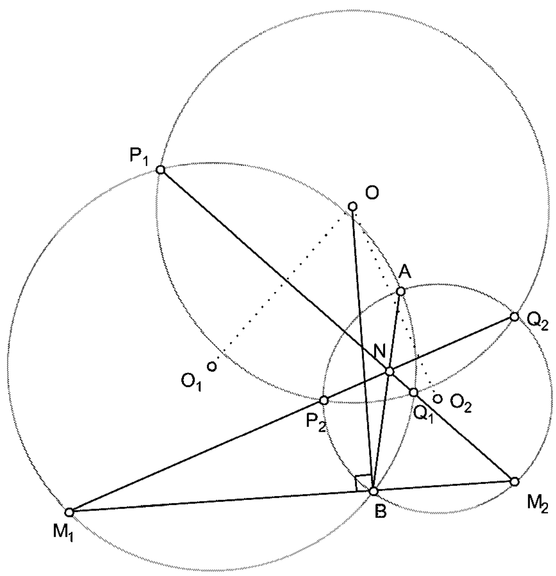
19. Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại A, B. Một đường thẳng Δ qua B, cắt lại đường tròn (O_i) tại M_i $(i = 1, 2)$. N là một điểm tùy ý trên AB, $\neq A, B$. Đường thẳng M_iN cắt đường tròn (O_j) tại P_i, Q_i $\quad (i \neq j = 1, 2)$

    (a) Chứng minh rằng các điểm P_1, P_2, Q_1, Q_2 cùng nằm trên một đường tròn (O).

    (b) Chứng minh rằng $OB \perp M_1M_2$

(SMO 2004 - Final Round)

Lời giải.



Ta có

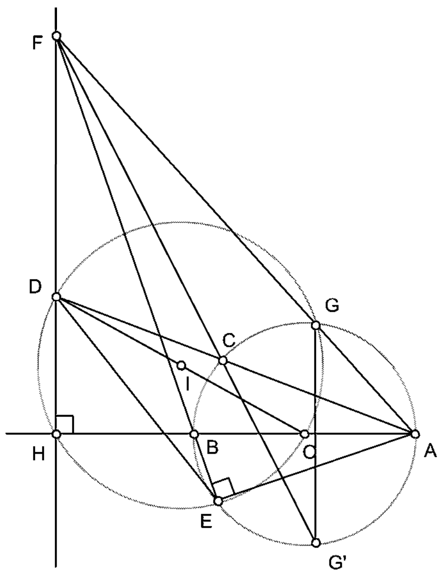
$$P_{N/(O_1)} = \overline{NP_1} \cdot \overline{NQ_1} = \overline{NA} \cdot \overline{LB} = P_{N/(O_2)} = \overline{NP_2} \cdot \overline{NQ_2}$$

Suy ra P_1, P_2, Q_1, Q_2 cùng nằm trên một đường tròn. Gọi O là tâm của đường tròn đó.

20. Cho đường tròn (O) và đường thẳng Δ không có điểm chung, và AB là đường kính của (O) vuông góc với Δ (B gần Δ hơn. C là điểm tùy ý trên đường tròn khác A, B. Đường thẳng AC cắt Δ tại D, kẻ tiếp tuyến DE với (O) ($E \in (O)$ và cùng phía với B đối với AC). Đường thẳng BE cắt Δ tại F, đường thẳng AF cắt lại (O) tại $G \neq A$. Chứng minh rằng $Đ_{(AB)}(G) \in (CF)$

(Shortlisted 2004 - G2)

Lời giải.



Gọi $H = AB \cap \Delta$ và $G' = Đ_{(AB)}(G)$. Ta có tứ giác $AEHF$ nội tiếp, nên

$$(FD; FE) \equiv (FH; FE) \equiv (AH; AE) \equiv (AB; AE) \equiv (EB; ED) \pmod{\pi}$$

Suy ra $DE = DF$

Do đó $DF^2 = DE^2 = DC \cdot DA \Rightarrow \dfrac{DF}{DC} = \dfrac{DA}{DF} \Rightarrow \triangle DAF \backsim \triangle DFC$. Vậy

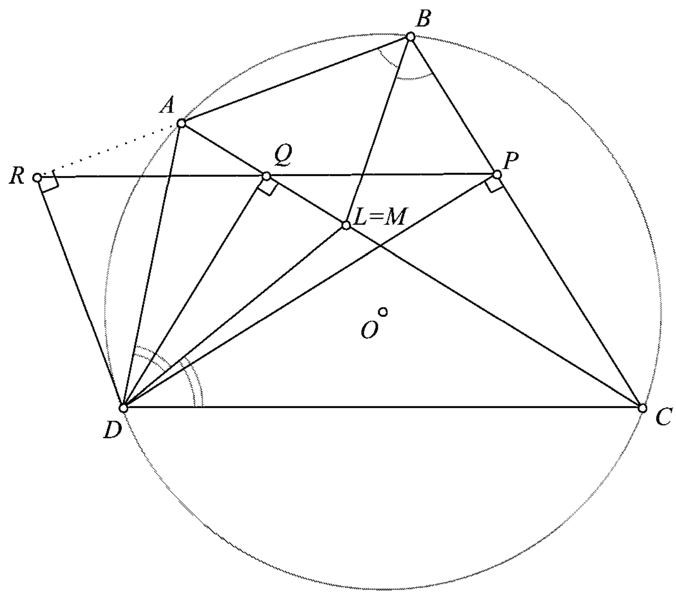
$$(CD; CF) \equiv (FA; FD) \equiv (GA; GG') \equiv (CA; CG') \equiv (CD; CG') \pmod{\pi}$$

Suy ra $G' \in CF$

21. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi P, Q, R theo thứ tự là hình chiếu của D trên các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng $QP = QR$ khi và chỉ khi phân giác của các góc $\angle ABC, \angle ADC$ cắt nhau tại một điểm nằm trên AC

(Shortlisted 2003 - G1)

Lời giải 1.



Theo định lý Simson, P, Q, R thẳng hàng.
Ngoài ra, do các bộ bốn điểm $(P, Q, D, C), (D, Q, R, A)$ đồng viên, nên

$$(CD; CA) \equiv (CD; CQ) \equiv (PD; PQ) \equiv (PD; PR) \pmod{\pi}$$

và

$$(AD; AC) \equiv (AD; AQ) \equiv (RD; RQ) \equiv (RD; RP) \pmod{\pi}$$

Suy ra $\triangle DCA \backsim \triangle DPR$ (g.g)
Một cách tương tự, cũng có $\triangle DAB \backsim \triangle DQP, \triangle DBC \backsim \triangle DRQ$
Vậy

$$\frac{DA}{DC} = \frac{DR}{DP} = \frac{DB \cdot \frac{QR}{BC}}{DB \cdot \frac{PQ}{BA}} = \frac{QR}{PQ} \cdot \frac{BA}{BC}$$

Do đó $QP = QR \iff \dfrac{DA}{DC} = \dfrac{BA}{BC} \iff$ phân giác của $\angle ABC$ và $\angle ADC$ cắt nhau tại $M \in AC$. ĐPCM

Lời giải 2. Giả sử phân giác của các góc $\angle ABC, \angle ADC$ cắt AC tại L, M theo thứ tự đó. Khi đó $\dfrac{LA}{LC} = \dfrac{BA}{BC}$ và $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{DA}{DC}$

Do đó các đường phân giác này cắt nhau tại một điểm trên AC khi và chỉ khi $L \equiv M$, điều này tương đương với $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{BA}{BC}$ hay $DA \cdot BC = AB \cdot CD$. Vậy cần chứng minh $AB \cdot CD = DA \cdot BC \iff QP = QR$

Từ giải thiết $(DP; DQ) \equiv (CB; CA) \equiv \gamma \pmod{\pi}$ và $(DQ; DR) \equiv (AC; AB) \equiv \alpha \pmod{\pi}$

Do đó, theo định lý sine, ta có $PQ = CD \cdot \sin\gamma$ và $QR = AD \sin\alpha$. Vậy $QP = QR \iff \dfrac{DA}{DC} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \dfrac{BC}{BA} \iff AB \cdot CD = DA \cdot BC$ (ĐPCM)

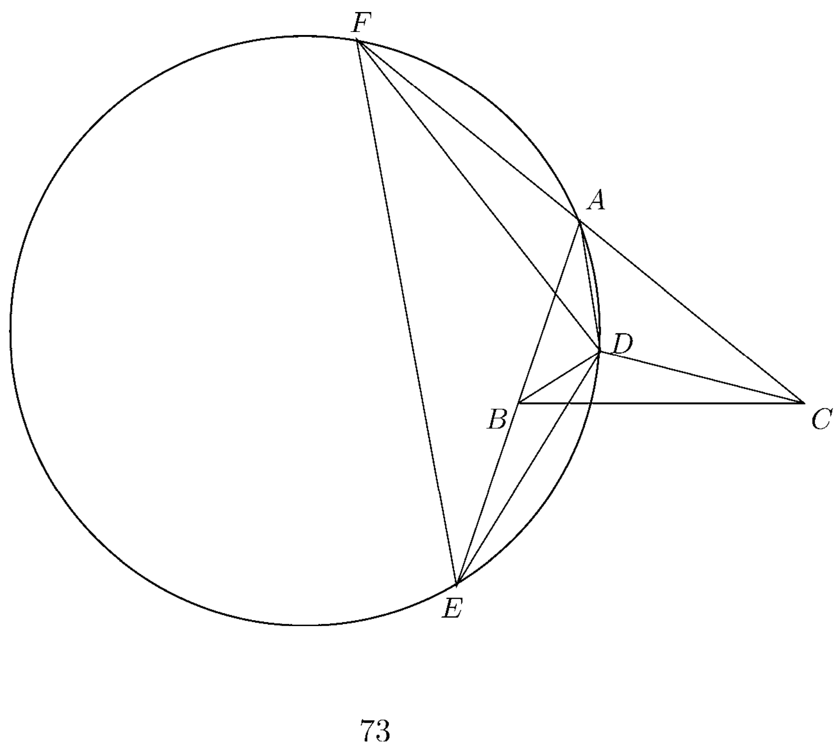
Nhận xét.

(a) Lời giải 2 không sử dụng đến định lý Simson.

(b) Từ lời giải 2, ta thấy, $QP = QR$ iff tứ giác $ABCD$ điều hòa iff AC là phân giác của góc $\angle BMD$ (trong đó M là trung điểm AC) iff BD là phân giác góc $\angle ANC$ (trong đó N là trung điểm BD) iff $(AA) \cap (CC) \in (BD)$ iff $(BB) \cap (DD) \in (AC)$

22. Cho tam giác ABC và điểm D ở trong sao cho $\angle DAB = \angle DCA, \angle DBA = \angle DAC$. Lấy $E \in (AB), F \in (CA)$ sao cho $AB = BE, AC = AF$. Chứng minh rằng AD, E, F đồng viên

Lời giải.



Từ giả thiết, suy ra $\triangle DAB \backsim \triangle DCA$ và A là trung điểm CF, B là trung điểm AE. Từ đó, nếu $k = \dfrac{DB}{DA}$, $\varphi = (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA})$ thì

$$\begin{aligned} V_D^k \circ Q_D^\varphi \,:\, C &\mapsto A \\ A &\mapsto B \\ F &\mapsto E \end{aligned}$$

Suy ra $(DE; DF) \equiv (AE; AF) \pmod{\pi}$ suy ra A, D, E, F đồng viên.

23. Cho ba điểm ABC thẳng hàng theo thứ tự. Một đường tròn với tâm O không nằm trên (AC) đi qua A, C. Tiếp tuyến tại A, C của (O) cắt nhau tại P, đoạn PB cắt (O) tại Q. Chứng minh rằng giao điểm của phân giác của góc $\angle AQC$ với đường thẳng AC không phụ thuộc (O).

(Shortlisted 2003 - G2)

24. Tứ giác lồi $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau ở O. Các đường tròn $(AOD), (BOC)$ cắt nhau tại điểm thứ hai M. Đường thẳng OM cắt lại các đường tròn $(AOB), (COD)$ tại S, T. Chứng minh rằng M là trung điểm ST.

25. Cho tam giác ABC nhọn với trực tâm H. Đường tròn ω_a có tâm tại trung điểm BC, đi qua H, cắt BC tại A_1, A_2; đường tròn ω_b có tâm tại trung điểm CA, đi qua H, cắt CA tại B_1, B_2; đường tròn ω_c có tâm tại trung điểm AB, đi qua H, cắt AB tại C_1, C_2. Chứng minh rằng các điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ cùng nằm trên một đường tròn.

(IMO 2008 - Prob. 1)

26. Cho tứ giác lồi $ABCD$ với $BA \neq BC$. Gọi ω_1, ω_2 theo thứ tự là đường tròn nội tiếp của các tam giác ABC, ADC. Giả sử có đường tròn thứ ba ω tiếp xúc với các tia BA, vượt quá A, tia BC, vượt quá C và cũng tiếp xúc với các đường thẳng DA, DC. Chứng minh rằng các tiếp tuyến chung ngoài của ω_1, ω_2 cắt nhau tại một điểm trên đường tròn ω.

(IMO 2008 - Prob. 6)

27. Đường tròn nội tiếp của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1 theo thứ tự đó. Các đường thẳng A_1B_1, A_1C_1 cắt đường thẳng qua A, song song với BC tại K, L, đường thẳng AA_1 cắt lại đường tròn nội tiếp tại M. Chứng minh rằng $\angle B_1MC_1 = \angle KML$

28. Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lần lượt lấy các điểm X, Y, Z sao cho $\triangle ABC \backsim \triangle XYZ$. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ cách đều trực tâm hai tam giác ABC, XYZ.

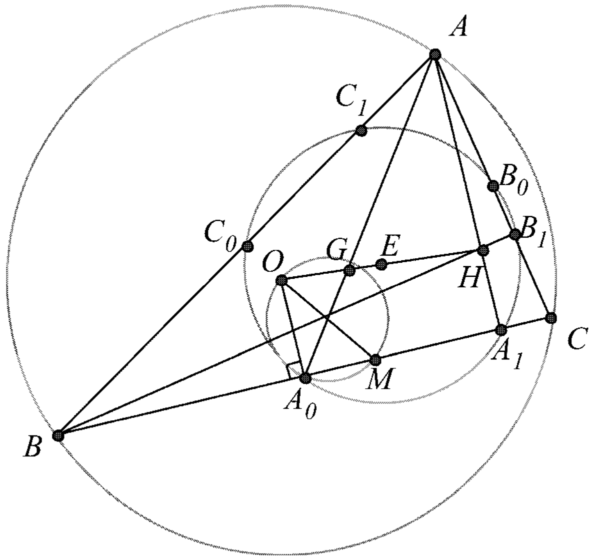
29. Cho tam giác $A_1A_2A_3$ ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi M_i là trung điểm cạnh đối diện đỉnh A_i và gọi N_i, B_i lần lượt là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp, bàng tiếp với cạnh $A_{i+1}A_{i+2}$.

    (a) Chứng minh rằng $A_iB_i \parallel IM_i$

    (b) Chứng minh rằng các đường thẳng A_iN_i, M_iI, B_iG đồng quy (G là trọng tâm tam giác ABC).

30. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm trên đường tròn, còn điểm M nằm trong đường tròn. Xét dây cung BC của đường tròn đi qua M. Chứng minh rằng đường tròn Euler của tam giác ABC luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Lời giải.



Gọi G, H là trọng tâm, trực tâm của tam giác ABC, và gọi A_0, A_1 theo thứ tự là trung điểm của BC, chân đường cao kẻ từ A của tam giác. Các điểm B_0, B_1, C_0, C_1 được xác định tương tự.

Vì A_0 là trung điểm BC nên $OA_0 \perp BC$ suy ra A_0 luôn nằm trên đường tròn ω_1 cố định (đường tròn đường kính OM). Do $V(A; \frac{2}{3}) : A_0 \mapsto G$ nên G thay đổi trên đường tròn ω_2 là ảnh của ω_1 qua phép vị tự $V(A; \frac{2}{3})$.

Mặt khác, với E là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC, thì $\overrightarrow{OE} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{OG}$ nên $E = V(O; \frac{3}{2})(G)$ suy ra $E = V(O; \frac{3}{2}) \circ V(A; \frac{2}{3})(A_0)$. Vậy, E nằm trên đường tròn ω_3 cố định (là ảnh của ω_1 qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{v}} = V(O; \frac{3}{2}) \circ V(A; \frac{2}{3})$ với $\overrightarrow{v} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OA}$) có tâm O', bán kính $r = OM$ cho trước. Suy ra đpcm.

31. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). Trên AI, CI lấy M, N sao cho $\angle MBN = \frac{1}{2}\angle ABC$. Chứng minh rằng $\angle MDN = \frac{1}{2}\angle ADC$

32. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên cung $\overset{\frown}{AB}$ không chứa C lấy điểm K và trên cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A lấy L sao cho $KL \parallel AC$. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AKB, BLC cách đều điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{ABC}$

33.

34.

35.

36.

37.

38.

39.

40.

41.

42.

43.

Chương 8

Phương pháp tọa độ với bài toán hình học phẳng

Mở đầu

Đối với học sinh phổ thông, kỹ năng làm toán thường thể hiện ở khả năng lựa chọn một phương pháp giải thích hợp cho mỗi bài toán cụ thể.

Việc lựa chọn được một cách giải hợp lý , ngắn gọn và rõ ràng, trong sáng, không chỉ dựa vào việc nắm vững kiến thức đã học, mà cần phải hiểu sâu sắc mối liên hệ chặt chẽ giữa các phân môn khác nhau của toán học trong chương trình học, biết áp dụng nó vào việc tìm tòi lời giải cho mỗi bài toán đặt ra. Trong việc học toán và làm toán, việc áp dụng phương pháp cũng như công cụ của lĩnh vực này, của phân môn này, để giải quyết vấn đề cho lĩnh vực khác hay phân môn khác đôi khi khá hiệu quả. Hơn nữa, việc làm này giúp cho người học hiểu rõ được vai trò và ý nghĩa của mỗi phân môn một cách sâu sắc và cụ thể.

Trong các kỳ olimpic, bài toán hình học cổ điển luôn là một trong những bài toán hay. Cái hay của bài toán không chỉ ở độ khó của bài toán, mà còn ẩn chứa trong kết quả của bài toán, những đặc trưng, tính chất hình học được khai thác.

Về mặt nguyên tắc, bất kỳ một bài toán hình học nào cũng có thể giải được bằng phương pháp tọa độ (phương pháp đại số). Tuy nhiên, nhiều bài toán hình học giải bằng phương pháp tổng hợp thông thường lại đi đến kết quả một cách khá nhanh chóng, và đương nhiên lời giải cũng đẹp hơn nhiều. Cũng vậy, nhiều bài toán hình học được giải một cách nhanh chóng, gọn gàng, nếu sử dụng phương pháp vectơ.

Có thể nói rằng, phương pháp tọa độ là một phương pháp vạn năng, có thể giải được mọi bài toán hình học. Nhưng việc giải nhanh hay chậm, lại phụ thuộc rất nhiều vào phương pháp, kỹ năng tính toán của chúng ta, phụ thuộc vào việc chọn hệ trục tọa độ lúc ban đầu như thế nào.

Trong kỳ thi học sinh giỏi quốc gia lớp 12 năm nay, nhiều học sinh ngỡ ngàng và gặp nhiều khó khăn khi gặp bài toán: "Trong mặt phẳng cho tam giác ABC có B, C cố định, A thay đổi. Gọi G và H theo thứ tự là trọng tâm và trực tâm của $\triangle ABC$. Tìm quỹ tích đỉnh A, biết rằng trung điểm GH nằm trên BC". Sở dĩ họ gặp khó khăn là do họ chưa thấy được sự liên hệ chặt chẽ giữa đại số và hình học. ngoài ra việc khảo sát về các cô-nic trong chương trình học của chúng ta còn sơ sài, vì vậy việc tìm ra một lời giải thuần túy hình học là không thể (ít nhất là đến thời điểm này).

Các bài toán được trình bày trong báo cáo này, đều được giải bằng phương pháp toạn độ, mặc dù cũng có thể được giải bằng phương pháp khác. Vì vậy, với mỗi bài toán đó, các bạn đồng nghiệp, các em học sinh hãy thử cố gắng giải bằng nhiều cách khác nhau, hãy thử tìm khai thác các tính chất, đặc trưng hình học của bài toán. Việc tiếp cận, khai thác bài toán từ nhiều hướng, nhiều khía cạnh sẽ đem lại những lợi ích lớn.

Do khuôn khổ của bài viết, trong bản báo cáo này, chúng tôi chỉ đề cập đến việc giải toán hình học phẳng trong hệ tọa độ Descartes vuông góc, chứ không nêu phương pháp giải bằng hình học afin, trong hệ tọa độ afin. Và chúng tôi cũng chỉ trình việc chọn hệ trục tọa độ như thế nào khi tiếp cận với mỗi bài toán hình học cổ điển. Việc giải toán hình học bằng công cụ tọa độ, không chỉ đơn thuần là tính toán trên các biểu thức. Nếu như vậy, sẽ làm cho bài toán trở lên nặng nề, phức tạp hơn. Điều quan trọng nhất, cần phải chọn được một hệ tọa độ thích hợp; ngoài ra, khai thác tốt các tính chất, đặc trưng hình học của bài toán sẽ giúp cho quá trình toán đơn giản, hiệu quả và nhanh gọn hơn.

Vĩnh Yên, tháng 4 năm 2007

Hạ Vũ Anh - THPT Chuyên Vĩnh Phúc

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ GIẢI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG

Khi đứng trước một bài toán hình học, chung ta thường xem xét, phân tích kỹ càng giả thiết, kết luận của bài toán, nhằm mục đích tìm tòi lời giải cho bài toán.

Nếu các yếu tố cho trong bài toán như giao điểm, trung điểm, tính song song, tính vuông góc... thì phương pháp tọa độ là một lựa chọn tốt để giải bài toán. Tuy nhiên, nếu trong bài toán có nhiều hơn một đường tròn, có đường phân giác hay diện tích của hình, ta cũng có thể chọn một hệ tọa độ thích hợp để giải.

Vấn đề đặt ra là hệ tọa độ đó sẽ được chọn như thế nào? Chúng ta hãy cùng tìm hiểu vấn đề này thông qua một số ví dụ sau.

Ví dụ 1. Cho điểm A nằm trên đường tròn (O) và gọi (Δ) là tiếp tuyến tại A của đường tròn (O). Xét điểm M trong mặt phẳng có tính chất khoảng cách từ M tới (Δ) bằng độ dài tiếp tuyến MT kẻ tới đường tròn $(T \in (O))$.

1. Tìm quỹ tích M

2. Chứng minh rằng đường tròn tâm M, bán kính MT luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

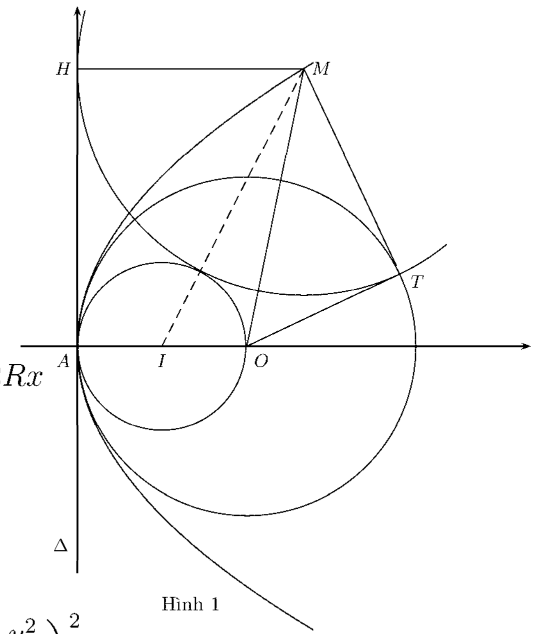
Lời giải.

1. Chọn hệ trục tọa độ Axy sao cho $A(0;0), O(R;0)$ (và do đó đường thẳng Δ có phương trình $x=0$).

Khi đó, với mỗi điểm $M(x;y)$ trong hệ trục, ta có$MH = d(M;Ay) = |x|$ và $MT^2 = MO^2 - OT^2 = (x-R)^2 + y^2 - R^2$

Vậy

$$MH = MT \Leftrightarrow x^2 = (x-R)^2+y^2-R^2 \Leftrightarrow y^2 = 2Rx$$



Hình 1

Suy ra M chạy trên parabol $\mathcal{P}: y^2 = 2Rx$

Ngược lại, với mỗi điểm $M(\frac{y^2}{2R}; y) \in \mathcal{P}$ thì $d(M;Ay) = \frac{y^2}{2R}$ và

$$MT^2 = MO^2 - R^2 = \left(\frac{y^2}{2R} - R\right)^2 + y^2 - R^2 = \left(\frac{y^2}{2R}\right)^2$$

Do đó $MT = d(M;Ay)$

Vậy, quỹ tích điểm M cần tìm là đường parabol, có đỉnh tại A, tiêu điểm là trung điểm I của AO

2. Gọi ℓ là đường chuẩn của $\mathcal{P}$, khi đó ℓ có phương trình $x = -\frac{R}{2}$

Từ giả thiết, suy ra, với $M(x_0;y_0)$, thì $MI = d(M;\ell) = x_0 + \frac{R}{2} = MT + \frac{R}{2}$

Vậy, đường tròn tâm M, bán kính MT luôn tiếp xúc với đường tròn đường kính AO cố định.

Nhận xét.

(i) Nếu bỏ giả thiết Δ tiếp xúc với (O) thì quỹ tích là một parabol, thu được parabol ở trên bằng một phép tịnh tiến theo phương đường thẳng qua O vuông góc với Δ

(ii) Để ý rằng, đường tròn tâm M, bán kính MT trực giao với đường tròn (O). Do đó, phép nghịch đảo cực O, phương tích R^2 giữ bất biến hai đường tròn này, biến Δ thành đường tròn đường kính AO. Từ đó, do tính bảo giác và tính đối hợp của phép nghịch đảo, suy ra đường tròn tâm M, bán kính MT luôn tiếp xúc với đường tròn đường kính AO. Kết hợp với định nghĩa parabol, ta cũng được quỹ tích của M là parabol có đỉnh A, tiêu điểm là trung điểm AO

Ví dụ 2. Cho điểm A nằm trên đường thẳng Δ. Xét B, C trong mặt phẳng sao cho

- $AB = b, AC = c$, $(b, c > 0$ cho trước)
- Đường thẳng Δ là phân giác của góc $\angle BAC$

Gọi M là đỉnh thứ tư của hình bình hành dựng trên hai cạnh AB và AC. Tìm quỹ tích M.

Lời giải.

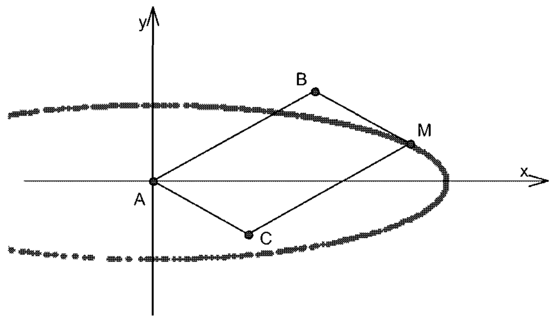
Trước hết, từ giả thiết ta nhận được B, C nằm về cùng một phía của đường thẳng qua A, vuông góc với Δ và các đường thẳng AB, AC đối xứng nhau qua đường thẳng Δ.

Chọn hệ trục tọa độ Axy sao cho $B(b_1; b_2), C(c_1; c_2)$ trong đó $b_1^2 + b_2^2 = b^2, c_1^2 + c_2^2 = c^2$, và $b_1c_1 \geq 0, b_2c_2 \leq 0$. Khi đó, do $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ nên $M(b_1 + c_1; b_2 + c_2)$

+ Nếu $b_1c_1 = 0$ thì $M(0; b_2 + c_2) \in Ay$

+ Nếu $b_1c_1 \neq 0$ thì W.L.O.G, coi $b_2 = kb_1, c_2 = -kc_1$, với $k \neq 0, \infty$.

Khi đó từ giả thiết suy ra



Hình 2

$$\begin{cases} b_1^2 = \frac{b^2}{1+k^1} \\ c_1^2 = \frac{c^2}{1+k^2} \\ b_1c_1 = \frac{bc}{1+k^2} \\ b_2c_2 = \frac{-k^2bc}{1+k^2} \end{cases} \quad (I)$$

Từ đó, với $M(x; y)$ thì $x = b_1 + c_1, y = b_2 + c_2$. Suy ra

$$\begin{cases} x = b_1 + c_1 \\ y = k(b_1 - c_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = b_1^2 + c_1^2 + 2b_1c_1 \\ y^2 = k^2(b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1) \end{cases} \xrightarrow{\text{Do (I)}} \frac{x^2}{(b+c)^2} + \frac{y^2}{(b-c)^2} = 1 \qquad (\star)$$

Vì vậy, M chạy trên đường elip có phương trình cho ở $(\star)$

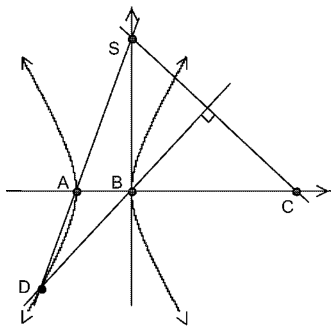
Ví dụ 3. Cho ba điểm A, B và C thẳng hàng theo thứ tự, gọi Δ là đường thẳng vuông góc với đường thẳng AC tại B. Với mỗi điểm $S \in \Delta$, gọi D là giao điểm của đường thẳng qua B vuông góc với SC với đường thẳng SA. Tìm $\{D\}$

Lời giải. Chọn hệ tọa độ Bxy sao cho $A(-a;0), C(c;0)(a,c>0), S(0,s), s\neq 0$. Khi đó

$$(SA):\ -\frac{x}{a}+\frac{y}{s}=1, (SC):\ \frac{x}{c}+\frac{y}{s}=1 \Longrightarrow (BD):\ \frac{x}{s}-\frac{y}{c}=0$$

Từ đó, tọa độ của D là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} -\frac{x}{a}+\frac{y}{s}=1 \\ \frac{x}{s}-\frac{y}{c}=0 \end{cases}$$



Hình 3

Khử s từ hệ, ta thu được $-\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{c}=x$

Hay

$$\frac{(x+\frac{a}{2})^2}{\frac{a^2}{2}}-\frac{y^2}{\frac{ac}{2}}=1 \quad (\star)$$

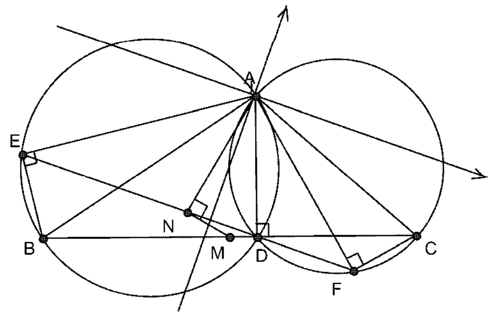
Vậy, khi S chạy trên khắp trục tung, thì D chạy trên đường hyperbol $(\star)$

Nhận xét. Đối với các ví dụ 1,2 thì chúng ta không có nhiều sự lựa chọn trong việc chọn hệ trục tọa độ. Nhưng đối với ví dụ 3, tất nhiên trục hoành sẽ vẫn là đường thẳng AC, nhưng gốc tọa độ hoàn toàn có thể chọn là một trong ba điểm A, B hay C hoặc một điểm bất kỳ nào đó trên đường thẳng. Việc lựa chọn gốc tọa độ tại B khiến cho việc tính toán có vẻ đơn giản hơn (viết phương trình các đường thẳng, giải hệ tương giao, ...)

Ví dụ 4. (APMO 1998) Cho tam giác ABC với đường cao AD, δ là một đường thẳng đi qua D. Lấy $E, F\in\delta$, khác D, sao cho $AE\perp BE, AF\perp CF$. Gọi

M, N theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng BC, EF. Chứng minh rằng $AN \perp MN$

Lời giải.



Hình 4

Chọn A làm gốc tọa độ, trục hoành chứa đường thẳng qua A song song với δ. Giả sử $D(d; a), E(e; a), F(f; a) \Rightarrow N(\frac{e+f}{2}; a)$.

Khi đó, đường thẳng AE có phương trình $ax - ey = 0$,
đường thẳng AD có phương trình $ax - dy = 0$,
đường thẳng AF có phương trình $ax - fy = 0$.

Từ đó, do $BE \perp EA$ nên BE có phương trình $ex + ay - e^2 - a^2 = 0$,
do $CF \perp AF$ nên CF có phương trình $fx + ay - f^2 - a^2 = 0$,
do $BC \perp AD$ nên BC có phương trình $dx + ay - d^2 - a^2 = 0$

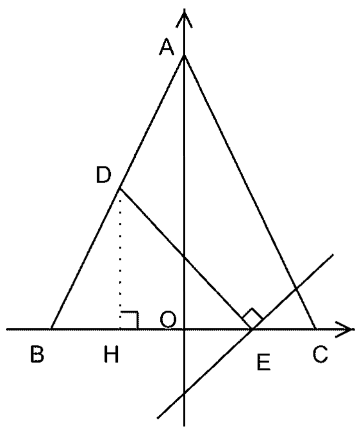
Từ đó, tìm được $B(d+e; a - \frac{de}{a}), C(d+f; a - \frac{df}{a})$. Suy ra $M(d + \frac{e+f}{2}; a - \frac{d(e+f)}{2a})$

$\Longrightarrow \overrightarrow{MN} = (-d; \frac{d(e+f)}{2a}) \Longrightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AN} = -d \cdot \frac{e+f}{2} + a \cdot \frac{d(e+f)}{2a} = 0$ điều phải chứng minh.

Nhận xét. Việc chọn hệ tọa độ sao cho B, C trên trục hoành, A, D trên trục tung là hoàn toàn hợp lý. Tuy nhiên, chúng ta sẽ gặp khó khăn khi tìm tọa độ E, F. Cũng vậy, nếu chọn A làm gốc, trục hoành song song với BC, thì phương trình của AE, AF đã có thể tìm được ngay, nhưng còn khó khăn khi xác định sự thẳng hàng của E, D, F. Bởi vậy, việc chọn hệ tọa độ như trong lời giải nêu trên là thích hợp nhất.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC cân tại A. Xét D trên cạnh AB và điểm E trên cạnh BC sao cho hình chiếu của DE trên BC có độ dài bằng $\frac{BC}{2}$.
Chứng minh rằng đường thẳng vuông góc với DE tại E luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.



Hình 5

Gọi O là trung điểm BC, chọn hệ tọa độ sao cho $A(0;a), B(-b;0), C(b;0)$ (hình 5).

Khi đó các đường thẳng AB, AC lần lượt có phương trình

$$(AB) : -\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$$

$$(AC) : \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$$

Gọi H là hình chiếu của D trên BC. Do $EH = \frac{BC}{2}$ nên $E \in [OC], H \in [OB]$.

Vậy, nếu $E(x_0;0), 0 \leq x_0 \leq b$ thì $H(x_0 - b;0)$ và do đó $D(x_0 - b; \frac{ax_0}{b})$.

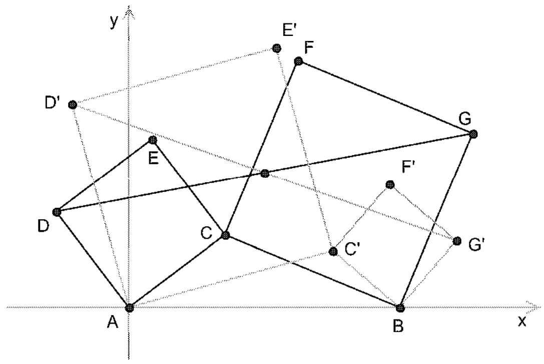
Gọi Δ là đường thẳng qua E vuông góc với DE. Suy ra Δ nhận $\overrightarrow{DE} = (b; -\frac{ax_0}{b})$ làm một vectơ pháp tuyến, vì vậy $\Delta : b^2x - ax_0y - b^2x_0 = 0$
Phương trình này tương đương với $-(b^2 + ay)x_0 + b^2x = 0$
Suy ra Δ luôn đi qua điểm $(0; -\frac{b^2}{a})$ cố định.

Ví dụ 6. (Poland 1992) Trong mặt phẳng cho trước hai điểm A, B. Xét điểm C thay đổi trên một nửa mặt phẳng bờ AB. Dựng ra ngoài của tam giác ABC các hình vuông $ACED$ và $BCFG$. Chứng minh rằng đường thẳng DG luôn đi qua một điểm cố định khi C thay đổi.

Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ Axy sao cho $A(0;0)$, $B(b;0)$ và $C(x_0;y_0)$, với $y_0 > 0$. Khi đó $D(-y_0;x_0), G(b + y_0; b - x_0)$. Vậy $\overrightarrow{DG} = (b + 2y_0; b - 2x_0)$ và do đó đường thẳng DG có phương trình

$$\frac{x + y_0}{b + 2y_0} = \frac{y - x_0}{b - 2x_0}$$

hay $(b - 2x)x_0 + (b - 2y)y_0 + b(x - y) = 0$



Hình 6

Từ đó đường thẳng DG luôn đi qua điểm $I(\frac{b}{2};\frac{b}{2})$ cố định.

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng cho hai điểm A, B. Tìm quỹ tích tất cả những điểm M sao cho

$$|\angle MAB - \angle MBA| = 90°$$

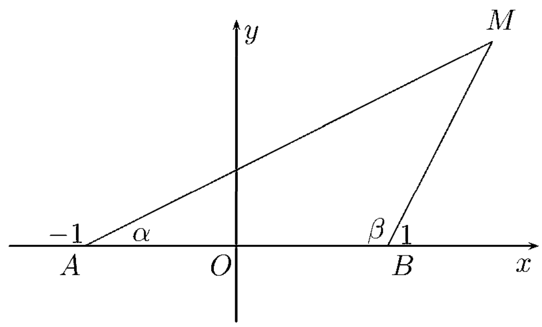
Lời giải.

Đặt $\angle MAB = \alpha, \angle MBA = \beta$ $(0° \leq \alpha, \beta \leq 180°)$. Khi đó, vì sự tồn tại điểm M nên $\alpha + \beta \neq 180°$

Nếu $\alpha = 0°$ thì $\beta = 90°$ và $M \equiv A$. Nếu $\beta = 0°$ thì $\alpha = 90°$ và $M \equiv B$. Vậy, chỉ cần xét $\alpha, \beta \neq 0°, 90°$

W.L.O.G, có thể coi $AB = 2$. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $A(-1;0), B(1;0)$

Do $|\alpha - \beta| = 90°$ nên $\alpha = \beta + 90°$ hoặc $\alpha = \beta - 90°$. Điều này tương đương với $\tan\alpha = -\cot\beta$ hay tích hệ số góc của các đường thẳng MA, MB bằng 1. Vậy, tọa độ của M là nghiệm của hệ



Hình 7

$$\begin{cases} y = k(x+1) \\ ky = (x-1) \end{cases}$$

Khử k từ hệ, thu được $x^2 - y^2 = 1$

Vậy, quỹ tích M là hyperbol vuông có hai đỉnh thực là hai điểm A, B đã cho.

Nhận xét.

1. Chúng ta hoàn toàn có thể chọn hệ trục tọa độ một cách tùy ý, gốc ở vị trí

bất kỳ. Nhưng việc chọn hệ tọa độ sao cho A, B nằm trên trục hành đã giúp ta tiết kiệm thời gian tính toán và giải bài toán đi rất nhiều. Với cách chọn tọa độ như vậy, chúng ta sẽ có ngay hệ số góc của MA bằng $\tan\alpha$ và hệ số góc của MB bằng $-\tan\beta$.

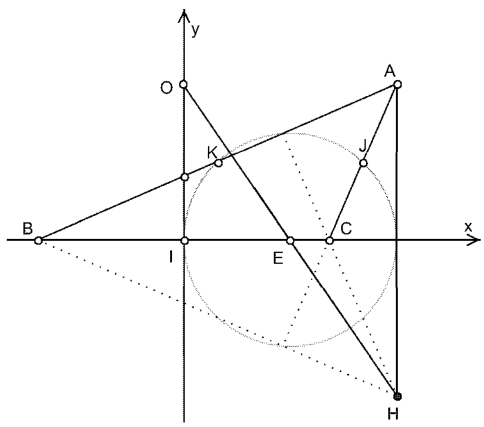
2. Để tránh việc phải phân chia trường hợp $\alpha = 0°$ hay $\neq 0°$ (tương ứng $\beta = 90°$ hay $\neq 90°$), có thể để ý đến $|\angle MAB - \angle MBA| = 90° \Leftrightarrow |\cos\angle MAB| = |\sin\angle ABM|$, chúng ta cũng thu được kết quả như trên.

3. Việc coi $AB = 2$ là hoàn toàn tự nhiên, bởi vì nếu $AB = a > 0$ thì bằng phép vị tự tâm O, tỷ số $\frac{2}{a}$ ta thu được ngay $AB = 2$.

Ví dụ 8. (CRUX 2003) Trong mặt phẳng cho tam giác ABC có hai đỉnh B, C cố định, còn đỉnh A thay đổi. Tìm quỹ tích điểm A sao cho tâm đường tròn Ơle của tam giác ABC nằm trên BC.

Lời giải. Gọi I, J, K theo thứ tự là trung điểm các cạnh BC, CA, AB và O, H, E là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm, tâm đường tròn Ơle của tam giác ABC. Khi đó E là tâm đường tròn (IJK) và cũng là trung điểm OH.

W.L.O.G có thể coi $BC = 2$. Chọn hệ trục tọa độ Ixy, sao cho $B(-1; 0), C(1; 0), A(x_0; y_0)$, với $y_0 \neq 0$. Khi đó $I(0; 0), J(\frac{x_0+1}{2}; \frac{y_0}{2}), K(\frac{x_0-1}{2}; \frac{y_0}{2})$. Vì E là tâm đường tròn (IJK), nên E nằm trên trung trực của đoạn JK. Từ đó, và do $E \in BC$, suy ra $E(\frac{x_0}{2}; 0)$.Vì E là tâm đường tròn (IJK) nên $EI = EJ = EK$.



Hình 8

Từ đó ta được

$$\frac{x_0^2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{y_0^2}{4} \Rightarrow x^2 - y^2 = 1$$

Ngược lại, với A mỗi điểm $A(x_0;y_0) \in \mathcal{H} : x^2 - y^2 = 1$, bỏ đi hai điểm B, C thì có điểm $E(\frac{x_0}{2};0) \in BC$ cách đều I, J, K, do đó tâm đường tròn Ơle của tam giác ABC nằm trên BC.

Vậy, quỹ tích đỉnh A của tam giác là đường hyperbol $\mathcal{H} : x^2 - y^2 = 1$, bỏ đi hai đỉnh B, C.

Nhận xét.

1. Để ý rằng "Với mọi tam giác ABC, tâm đường tròn Ơle của tam giác nằm trên đường thẳng BC khi và chỉ khi $|\angle ABC - \angle ACB| = 90°$", nên bài toán 8 cũng có thể được giải như ở bài toán 7.

2. Ta cũng có thể sử dụng nhận xét E là trung điểm OH để giải quyết bài toán, tuy nhiên, việc tính toán, tìm tọa độ của E sẽ tương đối vất vả.

Ví dụ 9. (IMO 2000) Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt M, N. Tiếp tuyến chung (gần M hơn) tiếp xúc với (O_i) tại A_i. Đường thẳng qua M, song song với A_1A_2, cắt lại đường tròn (O_i) ở điểm B_i. Các đường thẳng A_iB_i cắt nhau tại C, các đường thẳng A_iN cắt đường thẳng B_1B_2 ở D, E. Chứng minh rằng $CD = CE$

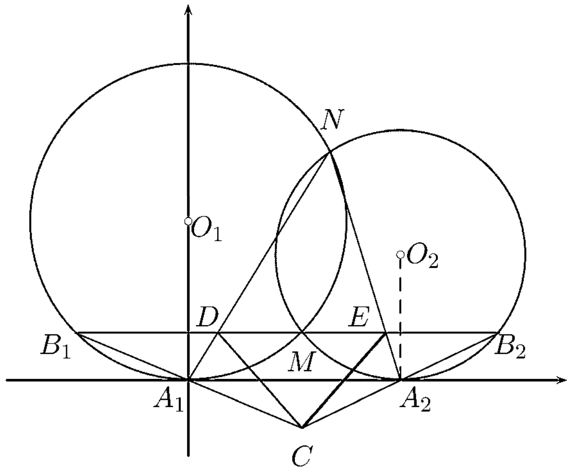
Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ A_1xy sao cho $A_1(0;0), A_2(a;0), O_1(0;r_1), O_2(a;r_2)$. Giả sử trong hệ trục tọa độ $M(s;t)$, khi đó $B_1(-s;t), B_2(2a-s;t)$. Từ đó $B_1B_2 = 2a = 2A_1A_2$, để ý rằng $A_1A_2 \parallel B_1B_2$, suy ra A_1, A_2 theo thứ tự là trung điểm B_1C, B_2C, do đó $C(s;-t)$. Vậy $\overrightarrow{CM} = (0;2t), \overrightarrow{B_1B_2} = (2a;0)$ suy ra $CM \perp B_1B_2$ hay $CM \perp DE$ (1)

Gọi K là giao điểm của MN với A_1A_2. Ta có

$$\mathcal{P}_{K/(O_1)} = \overline{KA_1}^2 = \overline{KM} \cdot \overline{KN} = \mathcal{P}_{K/(O_2)} = \overline{KA_2}^2$$

Suy ra K là trung điểm A_1A_2. Từ đó, do $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ nên M là trung điểm DE(2)



Hình 9

Từ (1),(2) suy ra CM là trung trực của DE. đpcm

Nhận xét.

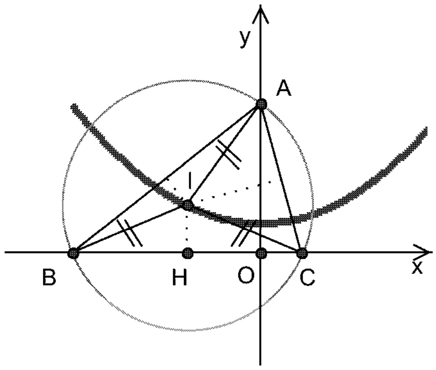
1. Trong ví dụ này, chúng ta hoàn toàn có thể chọn hệ trục tọa độ sao cho trục hoành chứa đường thẳng O_1O_2, tuy nhiên, khi đó việc tìm phương trình của B_1B_2 (và do đó tọa độ của B_1, B_2) không đơn giản.Việc chọn hệ trục tọa độ như trong lời giải ở trên là việc làm khôn ngoan, vì tọa độ của A_i, M, B_i tìm được một cách khá dễ dàng.

2. Trong lời giải nêu trên, việc viết phương trình của hai đường tròn, giải hệ phương trình tương giao để tìm tọa độ M, N là không cần thiết. Ở trên, chúng ta chỉ sử dụng đến đặc điểm O_iA_i là trung trực của đoạn MB_i, và do đó việc tìm tọa độ của các điểm B_i dễ dàng hơn rất nhiều so với việc đi viết phương trình các đường tròn.

3. Trong lời giải trên, đã kết hợp giữa phương pháp tọa độ và phương pháp tổng hợp (chỉ ra K là trung điểm A_1A_2). Điều đó giúp cho lời giải ngắn gọn và đẹp hơn.

Ví dụ 10. Trong mặt phẳng cho trước đường thẳng Δ và một điểm $A \notin \Delta$. Xét $B, C \in \Delta$ sao cho $BC = b > 0$ cho trước. Tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Lời giải. Gọi O là hình chiếu của A trên Δ và đặt $a = d(A; \Delta)$. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $A(a; 0), O(0; 0)$ (tức là trục hoành chứa Δ, trục tung chứ OA).



Hình 10

Giả sử trong hệ trục này $B(x_0; 0), C(x_0 + b; 0)$ (vì độ dài $BC = b$). Gọi H là trung điểm BC, khi đó $H(x_0 + \frac{b}{2}; 0)$ và $HB = HC = \frac{b}{2}$. Gọi $I(x; y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó $x = x_0 + \frac{b}{2}$ và $IA = IB$ suy ra

$$2ay = (x_0 + \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4}$$

hay

$$y = \frac{x^2}{2a} - \frac{b^2}{8a} \qquad (\star)$$

Vậy khi đoạn BC trượt trên Ox thì tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nằm trên parabol $\mathcal{P}$ có phương trình $(\star)$

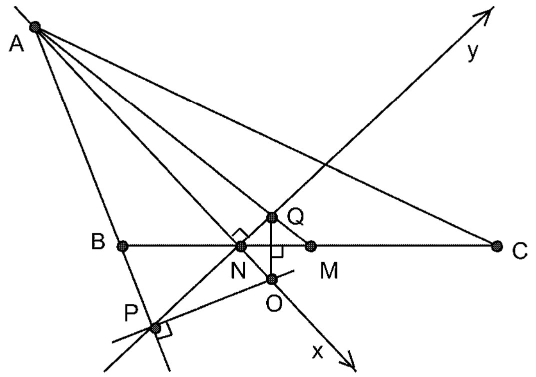
Ngược lại, với mỗi điểm $I \in \mathcal{P}$, dễ dàng kiểm tra được $d(I; Ox) < IA$, do đó đường tròn tâm I, bán kính IA cắt Ox tại hai điểm B, C. Dễ dàng kiểm tra được $BC = b$.

Vậy quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là parbol có phương trình cho ở $(\star)$.

Ví dụ 11. (APMO 2000) Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm cạnh BC và N là chân đường phân giác của góc $\angle BAC$. Đường thẳng vuông góc với NA tại N cắt các đường thẳng AB, AM tại P, Q theo thứ tự đó. Gọi O là giao điểm của đường thẳng vuông góc với AB tại P với AN, chứng minh rằng $OQ \perp BC$.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Nxy sao cho A, O nằm trên trục hoành. Giả sử AB có phương trình $y = ax + b$, khi đó $A(-\frac{b}{a}; 0), P(0; b)$ và AC có phương trình $y = -ax - b$ (do A thuộc trục hoành, AB, AC đối xứng nhau qua trục hoành).



Hình 11

Do $PO \perp AB$ nên PO có phương trình $y = -\frac{1}{a}x + b$ và $O(ab; 0)$

Do BC qua gốc tọa độ N, nên BC có phương trình $y = cx$. Suy ra $B(\frac{b}{c-a}; \frac{bc}{c-a}), C(-\frac{b}{c+a}; -\frac{b}{c-\dots}$ do đó $M(\frac{ab}{c^2-a^2}; \frac{abc}{c^2-a^2}) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{bc}{a(c^2-a^2)}(c; a^2)$. Từ đó, đường thẳng AM có phương trình $y = \frac{a^2}{c} \cdot x + \frac{ab}{c}$ suy ra $Q(0; \frac{ab}{c})$. Vậy đường thẳng QO có phương trình $x + cy - ab = 0$. Suy ra đường thẳng OQ, BC vuông góc với nhau.

Nhận xét. Trong bài toán trên, nếu chọn hệ tọa độ mà AN không nằm trên trục hoành, thì việc viết phương trình phân giác AN là rất khó. Khi chọn hệ tọa độ như vậy, giúp cho ta tránh được việc phải xác định tọa độ các đỉnh, phương trình các cạnh, các đường trong tam giác.

Ví dụ 12. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A chuyển động trên đường tròn. Xét điểm B chuyển động trên đường tròn $(A; R')$ với $R' \neq R$. Biết rằng A, B chuyển động với cùng vận tốc góc, nhưng ngược hướng, lúc ban đầu O, A, B thẳng hàng theo thứ tự; tìm quỹ tích điểm B.

Lời giải.

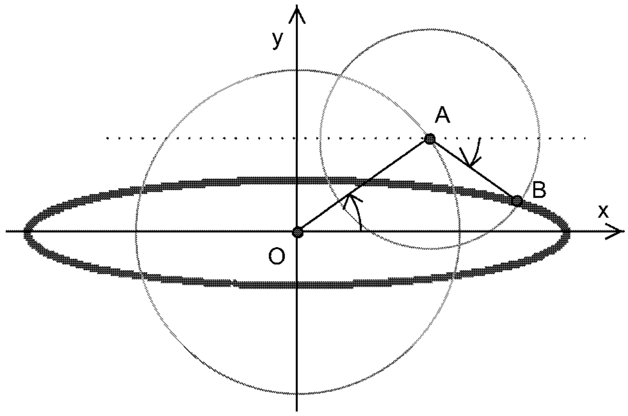
Chọn hệ tọa độ Oxy sao cho ở vị trí ban đầu $A, B \in Ox$. Khi đó $\overrightarrow{OA} = (R\cos t; R\sin t)$ và $\overrightarrow{AB} = (R'\cos t; -R'\sin t)$
Vì $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ nên với $B(x; y)$ thì

$$\begin{cases} x = (R + R')\cos t \\ y = (R - R')\sin t \end{cases}$$

Khử t từ hệ thu được

$$\frac{x^2}{(R + R')^2} + \frac{y^2}{(R - R')^2} = 1 \quad (\star)$$

Vậy quỹ tích cần tìm là elip có phương trình $(\star)$



Hình 12

Bài tập

1. Trong mặt phẳng cho tam giác ABC có B, C cố định, A thay đổi. Gọi G và H theo thứ tự là trọng tâm và trực tâm của $\triangle ABC$. Tìm quỹ tích đỉnh A, biết rằng trung điểm GH nằm trên BC.

   (Việt Nam 2007)

2. Cho hai điểm D, E tương ứng trên hai cạnh AB, AC của tam giác ABC sao cho $DE \parallel BC$. Gọi P là một điểm tùy ý nằm bên trong tam giác, F, G là giao điểm của các đường thẳng BP, CP với DE. Gọi O_1, O_2 theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác PGD, PEF, chứng minh rằng $AP \perp O_1O_2$

   (Iran 1996)

3. Trong mặt phẳng cho Δ, điểm $A \notin \Delta$. Cho trước số thực $a > 0$, tìm quỹ tích những điểm M sao cho tổng khoảng cách từ M đến A và Δ bằng a.

4. Giả sử $ABCD$ là một tứ giác lồi có A, B cố định, C, D thay đổi sao cho $AB \parallel CD$. Biết rằng $CD = b, AD + BC = c$ với b, c là các độ dài cho trước; tìm quỹ tích giao điểm hai đường chéo của tứ giác.

5. Cho ba điểm A, B và C thẳng hàng theo thứ tự. Về cùng một phía của đường thẳng, dựng các tia $Am, Cn \perp AC$. Xét $M \in Am, N \in Cn$ sao cho $\angle MBN = 90°$. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một đường cong cố định.

6. Cho tam giác ABC. Một đường thẳng cắt các cạnh BC, CA và AB của tam giác ABC tại D, E và F tương ứng. Chứng minh rằng trực tâm các tam giác ABC, CDF và DEB thẳng hàng.

7. Cho trước góc vuông xOy, xét $M \in Ox, N \in Oy$ sao cho $MN = a-$const. Tìm quỹ tích trung điểm MN.

8. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Tìm quỹ tích tâm những đường tròn đi qua A và tiếp xúc ngoài với (O).

9. Cho hai đường tròn C_1, C_2 có cùng tâm O, hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 vuông góc tại O. Một tia Ot quay quanh O, cắt C_1, C_2 tại A_1, A_2 theo thứ tự đó. Qua A_i vẽ đường thẳng $\Delta'_i \parallel \Delta_i$, tìm quỹ tích giao điểm của Δ'_1 và Δ'_2.

10. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi D là trung điểm BC, E là hình chiếu của D trên CA và F là trung điểm DE. Chứng minh rằng $AF \perp BE$

11. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Xác định quỹ tích các điểm M của mặt phẳng sao cho đường tròn ngoại tiếp các tam giác MAB, MCD có cùng bán kính.

12. Cho A, B, C và D thẳng hàng theo thứ tự đó. Các đường tròn ω_1, ω_2 với đường kính AC, BD cắt nhau tại hai điểm phân biệt X, Y. Lấy $Z \in (XY)$, không trùng với $XY \cap AD$. CZ cắt lại ω_1 tại M và BZ cắt lại ω_2 tại N. Chứng minh rằng AM, DN và XY đồng quy

(IMO 1995)

13. Cho điểm P ở trong tứ giác lồi $ABCD$. Đường phân giác của các góc $\angle APB, \angle BPC, \angle CPD$ và $\angle DPA$ cắt các cạnh AB, BC, CD và DA tại K, L, M và N theo thứ tự đó. Xác định vị trí của P sao cho tứ giác $KLMN$ là một hình bình hành.

(Tournament of Towns 1995)

14. Cho tam giác ABC có $AC > AB$. Lấy điểm X trên tia đối của tia AB, điểm Y trên tia đối của tia AC sao cho $BX = CA, CY = AB$. Gọi P là giáo điểm của đường thẳng XY với đường trung trực của BC. Chứng minh rằng $\angle BPC + \angle BAC = 180°$.

(BMO 2006 Round 2)

15. Cho hình vuông $ABCD$, dựng các tam giác đều ABK, BCL, CDM và DAN về phía trong của hình vuông. Chứng minh rằng trung điểm các đoạn thẳng KL, LM, MN, NK và trung điểm của các đoạn $AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN$ là đỉnh của một thập nhị diện đều.

(IMO 1977)

16. Cho hai đường tròn $(C_1), (C_2)$ nằm bên trong và tiếp xúc trong với đường tròn (C) tại M, N theo thứ tự đó và $(C_1) \ni C_2$. Trục đẳng phương của $(C_1), (C_2)$ cắt (C) tại A, B. Các đường thẳng MA, MB cắt lại đường tròn (C) ở E, F. Chứng minh rằng EF tiếp xúc với (C_2).

(IMO 1999)

17. Cho hình vuông $ABCD$ và góc nhọn mAn (với các tia AM, An nằm giữa các tia AB, AD). Gọi B_1, B_2 là hình chiếu của B trên Am, An và D_1, D_2 là hình chiếu của D trên Am, An theo thứ tự đó. Chứng minh rằng $B_1B_2 \perp D_1D_2$

KẾT LUẬN

Qua các bài toán ở trên, tất nhiên chưa đủ để thấy hết những ưu điểm, nhược điểm của phương pháp tọa độ. Tuy nhiên, cũng là vừa đủ để chúng ta có thể thấy việc chọn hệ tọa độ như thế nào là thích hợp.

Muốn giải một bài toán bằng phương pháp tọa độ, ta cần phải chọn hệ trục tọa độ sao cho hình vẽ của chúng ta được quan sát tốt nhất trên hệ trục đó, việc tính toán cũng đơn giản nhất. Để chọn được một hệ trục tọa độ tốt, chúng ta cần phải căn cứ vào các yếu tố cố định bài toán đã cho, chú ý đến tính đối xứng của hình.

Tuy nhiên, khi đã chọn được một hệ trục tọa độ tốt rồi, cũng cần phải có phương pháp tính và kỹ năng tính tốt, thì việc giải một bài toán hình học bằng phương pháp tọa độ mới trở lên đẹp đẽ, ngắn gọn.

Thông qua bài viết này, chúng tôi muốn trao đổi với các em học sinh và các bạn đồng nghiệp một điều rằng "không phải phương pháp tọa độ làm mất đi vẻ đẹp của hình học, mà phương pháp tọa độ làm tăng thêm vẻ quyến rũ của hình học."

Chương 9

Hình học không gian

1. Cho tứ diện $ABCD$

   (a) Chứng minh rằng các mặt phẳng đi qua trung điểm mỗi cạnh và vuông góc với cạnh đối diện đồng quy tại một điểm M (điểm Monge)

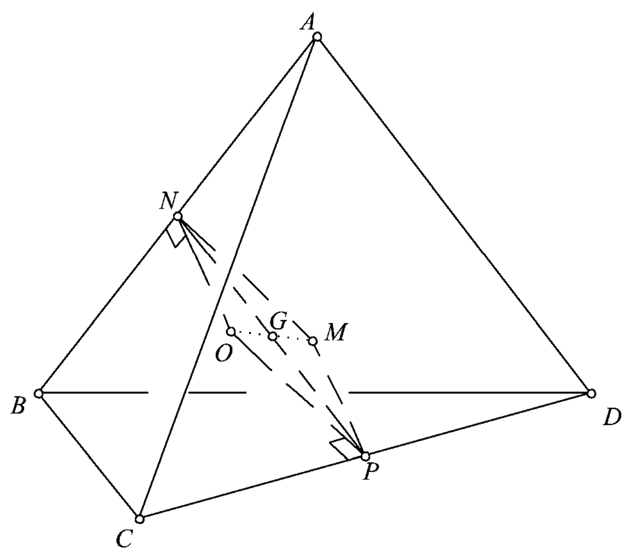
   (b) Chứng minh rằng nếu $M \in (BCD)$ thì

      i. hình chiếu của A trên mặt phẳng (BCD) nằm trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác BCD

      ii. trực tâm các tam giác ABC, ACD, ADB và điểm A đồng phẳng

      iii. tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, ACD, ADB và điểm A đồng phẳng.

Lời giải.

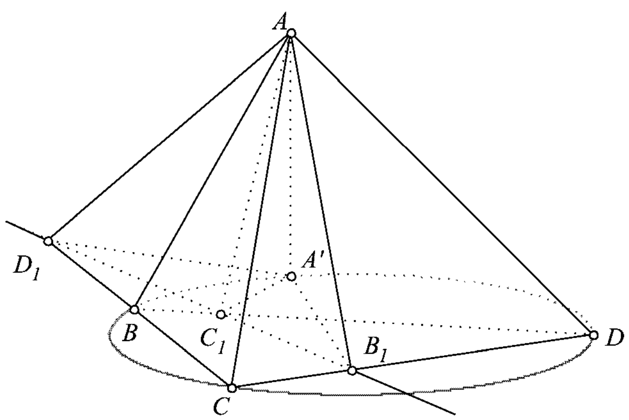


(a) Gọi N, P theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, CD. Gọi O, G theo thứ tự là tâm mặt cầu ngoại tiếp và trọng tâm của tứ diện, lấy $M = Đ_G(O)$. Ta cần chứng minh M thuộc vào mặt phẳng đi qua trung điểm một cạnh, vuông góc với cạnh đối diện.

Theo cách xác định điểm M ta có $MN \parallel OP, OP \perp CD \Rightarrow MN \perp CD$. Do đó M nằm trên mặt phẳng đi qua trung điểm AB và vuông góc với CD. Tương tự, có đpcm

(b)
(i) Giả sử điểm Monge $M \in (BCD)$. Gọi (π) là mặt phẳng qua A, song song với (BCD) và (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện. Vì G là trung điểm OM, và G chia đoạn trọng tuyến kẻ từ A theo tỷ số -3, nên, theo định lý Thalès, ta được O cách đều (BCD) và (π). Suy ra hình chiếu của đường tròn $(\pi) \cap (S)$ trên mặt phẳng (BCD) trùng với đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và do đó hình chiếu của A trên mặt phẳng (BCD) nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Cách 2. Gọi X' là hình chiếu của X trên mặt phẳng (BCD). Khi đó N', Q', S', P, R và T theo thứ tự là trung điểm BA', DA', CA', CD, BC và DB. Theo định lý ba đường vuông góc, ta có $M'N' \perp CD, MQ' \perp BC, M'S' \perp BD, M'P \perp BA', M'R \perp DA', M'T \perp CA'$. Vậy, nếu gọi M'' là điểm đối xứng với M' qua trọng tâm tam giác BCD thì $M''N', M''Q', M''S', M''P, M''R, M''T$ lần lượt vuông góc với $BA', DA', CA', CD, BC, DB$ suy ra bốn điểm A', B, C, D đồng viên.

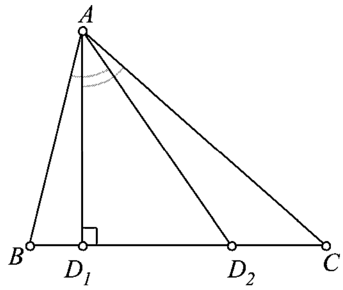


(ii) Gọi B_1, C_1, D_1 theo thứ tự là hình chiếu của A trên CD, DB, BC. Theo định lý ba đường vuông góc, $A'B_1, A'C_1, A'D_1$ theo thứ tự vuông góc với CD, DB, BC. Mà A' nằm trên đường tròn (BCD). Suy ra B_1, C_1, D_1 thẳng hàng (Định lý về đường thẳng Simson). Vậy, các đường thẳng AB_1, AC_1, AD_1 đồng phẳng. Suy ra điều phải chứng minh.

(iii) **Bổ đề.** Tam giác ABC với trực tâm H nội tiếp đường tròn tâm O. Khi đó, hai đường thẳng AH, AO đối xứng với nhau qua phân giác trong góc $\angle BAC$

Gọi O_b, O_c, O_d theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ACD, ADB, ABC và B_2, C_2, D_2 là giao điểm của AO_b, AO_c, AO_d với CD, DB, BC theo thứ tự đó. Ta cần chứng minh B_2, C_2, D_2.

Ta có



$$\frac{D_2B}{D_2C} = \frac{[ABD_2]}{[ACD_2]} = \frac{AB \cdot \sin \angle BAD_2}{AC \cdot \sin \angle CAD_2}$$

$$= \frac{AB \cdot \sin \angle CAD_1}{AC \cdot \sin \angle BAD_1} = \frac{AB^2 \cdot [CAD_1]}{AC^2 \cdot [BAD_1}$$

Suy ra $\dfrac{D_2B}{D_2C} = \dfrac{AB^2}{AC^2} \cdot \dfrac{D_1C}{D_1B}$

Tương tự, cũng có $\dfrac{C_2D}{C_2B} = \dfrac{AD^2}{AB^2} \cdot \dfrac{C_1B}{C_1D}$ và $\dfrac{B_2C}{B_2D} = \dfrac{AC^2}{AD^2} \cdot \dfrac{B_1D}{B_1C}$

Vậy

$$\frac{D_2B}{D_2C} \cdot \frac{B_2C}{B_2D} \cdot \frac{C_2D}{C_2B} = 1 \quad \text{(Do (ii))}$$

Từ đó, B_2, C_2, D_2 thẳng hàng. ĐPCM

2. Chứng minh rằng trong một tứ diện trực tâm: trọng tâm các mặt, điểm chia đoạn nối đỉnh với trực tâm theo tỷ số -2 cùng nằm trên một mặt cầu.

   Bổ đề 1. Gọi O, G, H theo thứ tự là tâm mặt cầu ngoại tiếp, trọng tâm, trực tâm của tứ diện trực tâm $ABCD$. Khi đó

   (a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$

   (b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2 \cdot \overrightarrow{OH}$
   Và do đó G là trung điểm OH.

   Bổ đề 2. Tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ có các đường cao đồng quy tại H. Gọi O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện, B_i, C_i theo thứ tự là điểm đối xứng với A_i qua O và trọng tâm của mặt $A_jA_kA_\ell$. Khi đó

   (a) $2 \cdot \overrightarrow{HC_i} = \overrightarrow{C_iB_i}$

   (b) $3 \cdot \overrightarrow{GD_i} = \overrightarrow{GE_i}$, trong đó D_i là trực tâm mặt $A_jA_kA_\ell$, G là trọng tâm của tứ diện, và E_i là giao điểm của tia GD_i với mặt cầu ngoại tiếp.

3. Cho tứ diện gần đều $ABCD$. Gọi H là hình chiếu của A trên mặt phẳng (BCD) và H_1 là trực tâm của mặt này. Gọi h_1, h_2 là độ dài hai đoạn thẳng mà H_1 chia ra trên một đường cao của tam giác BCD.

   (a) Chứng minh rằng H, H_1 đối xứng nhau qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

   (b) Chứng minh rằng $AH^2 = 4h_1 \cdot h_2$

4. Hình chóp đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, các cạnh bên bằng b. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Một mặt phẳng (π) qua M, N, cắt SA, BC tại P, Q theo thứ tự đó.

   (a) Chứng minh rằng $\dfrac{AP}{AS} = \dfrac{BQ}{BC} = k$

   (b) Tìm k sao cho tứ giác $MPNQ$ có diện tích bé nhất.

   (c) Xác định k sao cho (π) chia hình chóp thành hai phần tương đương.

5. Tứ diện $ABCD$ có các đường cao AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 đồng quy tại H. Lấy $A_2 \in AA_1 \ : \ AA_2 = 2A_2A_1$, tương tự, có B_2, C_2, D_2. Chứng minh rằng H, A_2, B_2, C_2, D_1 đồng cầu.

6. Lấy điểm A_i' trên mặt đối diện đỉnh A_i của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ sao cho mỗi cặp hai điểm trong bốn điểm đó nằm trên mặt phẳng qua một cạnh của tứ diện. Chứng minh rằng A_iA_i' đồng quy.

7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $SO \perp (ABCD)$ ($O = AC \cap BD$). Lấy $A' \in SA, B' \in SB, C' \in SC, D' \in SD$, gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của $A'C', B'D'$. Chứng minh rằng A', B', C', D', S đồng cầu khi và chỉ khi $(MN) \parallel (ABCD)$

8. Cho hình chóp $SABC$ có $SA = a, SB = b, SC = c$ và SA, SB, SC đôi một vuông góc. Xét đường thẳng Δ bất kỳ qua S, gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là các điểm đối xứng với A, B, C qua Δ. Các mặt phẳng qua A_1, B_1, C_1 lần lượt vuông góc với các đường thẳng SA, SB, SC cắt nhau tại điểm M. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng giá trị của đại lượng

$$\frac{MA^2}{SA^2} + \frac{MB^2}{SB^2} + \frac{MC^2}{SC^2} - \frac{MH^2}{SH^2}$$

   không phụ thuộc vào vị trí của Δ

Bổ đề 1. Gọi α, β, γ là các góc tạo bởi một đường chéo (chính) của một hình hộp chữ nhật với ba cạnh cùng xuất phát từ một đầu mút của đường chéo đó. Khi đó

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Bổ đề 2. Nếu H là trực tâm mặt đáy của hình chóp $S.ABC$ với SA, SB, SC đôi một vuông góc, thì $SH \perp mp(ABC)$ và

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2}$$

9. Cho tam giác ABC đều và một mặ phẳng (P). Gọi α, β và γ tương ứng là góc tạo bởi các đường thẳng BC, CA và AB với (P). Chứng minh rằng trong ba đại lượng $\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$, có một đại lượng bằng tổng của hai đại lượng kia.

10. Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Gọi A' là hình chiếu của A trên mặt phẳng SBC. Chứng minh rằng tam giác $A'SB$ vuông cân.

    Khái quát. Cho hình (H) trên mặt SAB của hình chóp đều $S.ABCD$. Gọi $(H'), (H'')$ lần lượt là hình chiếu của H trên mặt đáy và mặt SBC. Chứng minh rằng $(H') \backsim (H'')$

11. Cho tứ diện đều $ABCD$ trọng tâm G. Gọi Δ là một đường thẳng tùy ý qua trọng tâm của tứ diện. Chứng minh rằng tổng bình phương khoảng cách từ A, B, C, D tới Δ không đổi.

11'. (Việt Nam 1998) Trong không gian cho bốn tia Ox, Oy, Oz, Ot đôi một tạo với nhau các góc bằng nhau. Một tia thứ năm Ou lần lượt tạo với các tia Ox, Oy, Oz, Ot các góc $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

   (a) Chứng minh rằng $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta$ không đổi.

   (b) Chứng minh rằng $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta$ không đổi.

12. Trong không gian cho một đường thẳng Δ và hai điểm A, B phân biệt, không nằm trên Δ. Tìm điểm M trên Δ sao cho $\dfrac{MA}{MB}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Mục lục