

NHÂN LIÊN HỢP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

A. Phương pháp :

– Với một số phương trình ta có thể nhằm được nghiệm x_0 như vậy phương trình luôn đưa về được dạng tích $(x - x_0)P(x) = 0$ ta có thể giải phương trình $P(x) = 0$ hoặc chứng minh $P(x) = 0$ vô nghiệm ,

– Chú ý nếu phương trình có chứa biểu thức $\sqrt[3]{f(x)}$, $\sqrt{f(x)}$ thì ta nên nhằm nghiệm x_0 sao cho $\sqrt[3]{f(x_0)}$, $\sqrt{f(x_0)}$ phải khai căn được

– Chú ý nếu phương trình $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = \sqrt{p(x)} \pm \sqrt{q(x)}$ (bậc 3 cũng tương tự) thì ta nên nhằm theo kiểu sau $f(x) - g(x)$ và $p(x) - q(x)$, $f(x) - p(x)$ và $g(x) - q(x)$ xem có xuất hiện nhân tử chung không

– Chú ý điều kiện của nghiệm của phương trình để ta có thể đánh giá $P(x) = 0$ vô nghiệm

– Phải nhớ các hằng đẳng thức bậc 2 , bậc 3 , bậc 4

B. Ví dụ :

Ví dụ 1: Giải phương trình sau :

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 1} - \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3(x^2 - x - 1)} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}$$

Giải:

$$\begin{aligned} & (\text{Làm nháp } (3x^2 - 5x + 1) - (3x^2 - 3x - 3) = -2(x - 2) \\ & \quad (x^2 - 2) - (x^2 - 3x + 4) = 3(x - 2)) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có : } \sqrt{3x^2 - 5x + 1} - \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3(x^2 - x - 1)} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3x^2 - 5x + 1} - \sqrt{3(x^2 - x - 1)} = \sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}$$

$$\Rightarrow \frac{-2x + 4}{\sqrt{3x^2 - 5x + 1} + \sqrt{3(x^2 - x - 1)}} = \frac{3x - 6}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 - 3x + 4}}$$

$$\Rightarrow (x - 2) \left(\frac{2}{\sqrt{3x^2 - 5x + 1} + \sqrt{3(x^2 - x - 1)}} + \frac{3}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 - 3x + 4}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3x^2 - 5x + 1} + \sqrt{3(x^2 - x - 1)}} + \frac{3}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 - 3x + 4}} = 0(vn) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ (dễ kiểm tra thấy } x = 2 \text{ là nghiệm của phương trình)}$$

Ví dụ 2: Giải phương trình sau (**OLYMPIC 30/4 đề nghị**) : $\sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5}$

Giải: Để phương trình có nghiệm thì : $\sqrt{x^2 + 12} - \sqrt{x^2 + 5} = 3x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3}$

(Làm nháp : Ta nhận thấy : $x = 2$ là nghiệm của phương trình , như vậy phương trình có thể phân tích về dạng

$(x - 2)P(x) = 0$, để thực hiện được điều đó ta phải nhóm , tách các số hạng như sau)

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+12}-4=3x-6+\sqrt{x^2+5}-3 &\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4}=3(x-2)+\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3} \\ &\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+5}+3}-3\right)=0 \\ &\Leftrightarrow x=2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vì } \frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4} &< \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}, \forall x > \frac{5}{3} \\ \Rightarrow \frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4} - \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} - 3 &< 0, \forall x > \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Giải phương trình sau (**ĐH - B2010**)

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$$

Giải: Đk $-\frac{1}{3} \leq x \leq 6$

(Làm nháp: Nhận thấy $x=5$ là nghiệm của phương trình, nên ta biến đổi phương trình)

$$\text{Phương trình đã cho tương đương } \sqrt{3x+1}-4+1-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-5=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{x-5}{\sqrt{6-x}+1} + (x-5)(3x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow x=5 \text{ hoặc } \frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + 3x+1=0$$

$$\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + 3x+1 > 0 \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{3}; 6\right]$$

Do đó phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=5$

B. Bài Tập :

Bài 1: Giải phương trình sau :

$$\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0$$

$$\text{ĐS: } x=1; x=2-\sqrt{2}$$

Hướng dẫn: pt $\Leftrightarrow \sqrt{2x-1}-1+x^2-3x+2=0$. Trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung là $x-1$

Bài 2: Giải phương trình sau :

$$3(2+\sqrt{x-2})=2x+\sqrt{x+6} \text{ (HVKTQS 2000)}$$

$$\text{ĐS: } x=3; x=\frac{11-3\sqrt{5}}{2}$$

Hướng dẫn: pt $\Leftrightarrow 3(\sqrt{x-2}-1)=2x-6+\sqrt{x+6}-3$. Trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung là $x-3$

Bài 3: Giải phương trình sau :

$$\sqrt{\frac{1-x}{x}} = \frac{2x+x^2}{1+x^2}$$

$$\text{ĐS: } x=\frac{1}{2}$$

Hướng dẫn: pt $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1-x}{x}} - 1 = \frac{2x+x^2}{1+x^2} - 1$. Trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung là $2x-1$

Bài 4: Giải phương trình sau :

$$9(\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2}) = x + 3 \text{ (HSG k12 Hà Nội -2010) } \quad \text{ĐS : } x = 6$$

Hướng dẫn: pt $\Leftrightarrow 9(\sqrt{4x+1} - 5 + 4 - \sqrt{3x-2}) = x - 6$. Trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung là $x-6$

Bài 5: Giải phương trình sau :

$$\sqrt{x^2+12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2+5} \quad \text{ĐS : } x = 2$$

Hướng dẫn: pt $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+12} - 4 = 3x - 6 + \sqrt{x^2+5} - 3$. Trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung là $x-3$

Bài 6: Giải phương trình sau :

$$\sqrt[3]{x^2-1} + x = \sqrt{x^3-2} \quad \text{ĐS : } x = 3$$

Hướng dẫn: pt $\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2-1} - 2 + x - 3 = 5 - \sqrt{x^3-2}$. Trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung là $x-3$

Bài 7: Giải phương trình sau :

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2x^2 - 5x - 1 \text{ (THTT)} \quad \text{ĐS : } x=3$$

Hướng dẫn: pt $\Leftrightarrow \sqrt{x-2} - 1 + \sqrt{4-x} - 1 = 2x^2 - 5x - 3$. Trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung là $x-3$

Bài 8: Giải phương trình sau :

$$\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{2x^2} + \sqrt[3]{2x^2+1} \quad \text{ĐS : } x=1 ; x = -\frac{1}{2}$$

Hướng dẫn: pt $\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x^2} - \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{2x^2+1} - \sqrt[3]{x+2} = 0$. Trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung là $2x^2-x-1$

Bài 9: Giải phương trình sau :

$$\sqrt[3]{x+24} + \sqrt{12-x} = 6 \quad \text{ĐS : } x=3 ; x = -24 ; x = -88$$

Hướng dẫn: pt $\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+24} - 3 + \sqrt{12-x} - 3 = 0$. Trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung là $x-3$

Bài 10: Giải phương trình sau :

$$(1+\sqrt{1+x})(\sqrt{1+x}+2x-5) = x \quad \text{ĐS : } x = 2$$

Hướng dẫn: Trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung là $x-2$

Bài 11: Giải phương trình sau :

$$\sqrt{2x^2+3x+5} + \sqrt{2x^2-3x+5} = 3x \quad \text{ĐS : } x = 4$$

Hướng dẫn: pt $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+3x+5} - 7 + \sqrt{2x^2-3x+5} - 5 = 3x - 12$. Trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung là $x-4$

Bài 12: Giải phương trình sau :

$$\sqrt{2x-3} - \sqrt{x} = 2x - 6 \quad \text{ĐS : } x = 3$$

Hướng dẫn: Trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung là $x-3$

Bài 13: Giải phương trình sau :

$$\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} = \frac{x+3}{5} \quad (\text{THTT}) \quad \text{ĐS : } x = 2$$

Hướng dẫn: pt $\Leftrightarrow \sqrt{4x+1} - 3 + 2 - \sqrt{3x-2} = \frac{x+3}{5} - 1$. Trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung là $x-2$

Bài 14: Giải phương trình sau :

$$\sqrt{12x+13} - \sqrt{4x+13} = \sqrt{x+1} \quad (\text{THTT}) \quad \text{ĐS : } x = 3$$

Hướng dẫn: pt $\Leftrightarrow \sqrt{12x+13} - 5 + 3 - \sqrt{4x+13} = \sqrt{x+1} - 2$. Trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung là $x-3$

Bài 15: Giải phương trình sau :

$$\sqrt{2x^2+16x+18} + \sqrt{x^2-1} = 2x + 4 \quad (\text{THTT}) \quad \text{ĐS : } x = \pm 1 ; x = \frac{\sqrt{513}-32}{7}$$

Hướng dẫn: pt $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+16x+18} - (2x + 4) + \sqrt{x^2-1} = 0$. Trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung là $\sqrt{x^2-1}$

Bài 16: Giải phương trình sau :

$$\sqrt{2x^2-1} + \sqrt{x^2-3x-2} = \sqrt{2x^2+2x+3} + \sqrt{x^2-x+2} \quad (\text{THTT}) \quad \text{ĐS : } x = -2$$

Hướng dẫn: pt $\Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x-2} - \sqrt{x^2-x+2} = \sqrt{2x^2+2x+3} - \sqrt{2x^2-1}$. Trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung là $x+2$

Bài 17: Giải phương trình sau :

$$\sqrt{x^2-3x+2} + x^2-4x+3 \geq 2\sqrt{x^2-5x+4} \quad (\text{THTT}) \quad \text{ĐS : } x = 1 ; x \geq 4$$

Hướng dẫn: pt $\Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+2} - \sqrt{x^2-5x+4} + x^2-4x+3 - \sqrt{x^2-5x+4} \geq 0$. Trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung là $x-1$

Bài 18: Giải phương trình sau :

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-3} = \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} \quad \text{ĐS : } x = 2$$

Hướng dẫn: pt $\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+3} = \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-3}$. Trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung là $x-2$

Bài 19:Giải phương trình sau :

$$\sqrt[4]{x^2 + 77} - \sqrt[3]{x^2 - 3} = 2$$

$$\text{ĐS : } x = \pm 2$$

Hướng dẫn: $pt \Leftrightarrow \sqrt[4]{x^2 + 77} - 3 + 1 - \sqrt[3]{x^2 - 3} = 0$. Trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung là $x^2 - 4$

Bài 20:Giải phương trình sau :

$$2x^2 - 11x + 21 - 3\sqrt[3]{4(x-1)} = 0$$

$$\text{ĐS : } x = 3$$

Hướng dẫn: $pt \Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 15 - 3(\sqrt[3]{4(x-1)} - 2) = 0$. Trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung là $x - 3$

Bài 21:Giải phương trình sau :

$$\sqrt[3]{x+6} + x^2 = 7 - \sqrt{x-1} \quad (\text{HSG 2010 Lâm đồng}) \quad \text{ĐS : } x = 2$$

Hướng dẫn: $pt \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+6} - 2 + x^2 - 4 = 1 - \sqrt{x-1}$. Trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung là $x - 2$

Bài 22:Giải phương trình sau :

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} + \sqrt{2x-5} = 2x^2 - 5x \quad (\text{THTT 338/2010}) \quad \text{ĐS : } x = 3$$

Hướng dẫn: $pt \Leftrightarrow \sqrt{x-2} - 1 + \sqrt{4-x} - 1 + \sqrt{2x-5} - 1 = 2x^2 - 5x - 3$ Trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung là $x - 3$

Bài 23:Giải phương trình sau :

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{x-1} = x^2 - 1 \quad (\text{THTT -2009})$$

$$\text{ĐS : } x = 2$$

Hướng dẫn: $pt \Leftrightarrow \sqrt{x+6} - 2 + \sqrt{x-1} - 1 = x^2 - 4$ Trục căn thức làm xuất hiện nhân tử chung là $x - 2$

Bài 24:Giải phương trình sau :

$$3x^4 - 4x^3 = 1 - \sqrt{(1+x^2)^3} \quad (\text{THTT -2009})$$

$$\text{ĐS : } x = 0$$

Hướng dẫn: Trục căn thức về phải của phương trình làm xuất hiện nhân tử chung là x^2