

## PHƯƠNG TRÌNH BIẾN ĐỔI VỀ TÍCH HOẶC ĐẶT ẨN PHỤ ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP

### A. Phương pháp :

– Chú ý một số phân tích trước khi đặt ẩn phụ

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

$$4x^4 + 1 = (2x^2 - 2x + 1)(2x^2 + 2x + 1)$$

– Chú ý phải nhớ các hằng đẳng thức

– Đặt 2 ẩn phụ (hoặc biến đổi) sao cho phương trình cần giải xuất hiện 1 trong các dạng sau :

$$u + v = 1 + uv \Leftrightarrow (u-1)(v-1) = 0$$

$$au + bv = ab + vu \Leftrightarrow (u-b)(v-a) = 0$$

$$A^2 = B^2$$

$$u^2 + \alpha uv + \beta v^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{u}{v}\right)^2 + \alpha \left(\frac{u}{v}\right) + \beta = 0$$

$$\alpha u + \beta v = \sqrt{mu^2 + nv^2} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha u + \beta v)^2 = mu^2 + nv^2 \\ \alpha u + \beta v \geq 0 \end{cases}$$

### B. Ví dụ :

**Ví dụ 1:** Giải phương trình :  $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = 1 + \sqrt[3]{x^2 + 3x + 2}$

**Giải:**

$$\text{Đặt : } \begin{cases} u = \sqrt[3]{x+1} \\ v = \sqrt[3]{x+2} \end{cases}$$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow u + v = 1 + uv \Leftrightarrow (u-1)(v-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

### Ví dụ 2:

Giải phương trình :  $2\sqrt{x+3} = 9x^2 - x - 4$

**Giải:**

Đk:  $x \geq -3$  phương trình tương đương :

$$(1 + \sqrt{3+x})^2 = 9x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} + 1 = 3x \\ \sqrt{x+3} + 1 = -3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-5 - \sqrt{97}}{18} \end{cases}$$

### Ví dụ 3:

Giải phương trình sau :  $x = (2004 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{1 - \sqrt{x}})^2$  (THTT 3-2005)

**Giải:** đk  $0 \leq x \leq 1$

$$\text{Đặt } y = \sqrt{1 - \sqrt{x}} \text{ pttt} \Leftrightarrow 2(1-y)^2(y^2 + y - 1002) = 0 \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

**Ví dụ 4:**

Giải phương trình sau :  $2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 - 1}$

**Giải:**

Đk:  $x \geq 1$

(Làm nháp :  $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ ); tách  $2x^2 + 5x - 1 = \alpha(x-1) + \beta(x^2 + x + 1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

PT được viết lại :  $3(x-1) + 2(x^2 + x + 1) = 7\sqrt{(x-1)(x^2 + x + 1)}$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt{x-1} \geq 0 \\ v = \sqrt{x^2 + x + 1} > 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta được PT: } 3u^2 + 2v^2 = 7uv \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{9}v \\ u = 4v \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 4 \pm \sqrt{6}$$

**C. Bài Tập :**

**Bài 1:** Giải phương trình :

$$\sqrt{\sqrt{3} - x} = x\sqrt{\sqrt{3} + x}$$

$$\text{ĐS: } x = \frac{\sqrt[3]{10} - 1}{\sqrt{3}}$$

*Hướng dẫn:* Bình phương hai vế rồi nhóm vào hằng đẳng thức bậc 3

**Bài 2:** Giải phương trình sau :

$$2\sqrt{x+3} = 9x^2 - x - 4$$

$$\text{ĐS : } x = 1; x = \frac{-5 - \sqrt{97}}{18}$$

*Hướng dẫn:* nhóm thành  $A^2 = B^2$

**Bài 3:** Giải phương trình sau :

$$2 + 3\sqrt{9x^2(x+2)} = 2x + 3\sqrt{3x(x+2)^2}$$

$$\text{ĐS: } x = 1$$

*Hướng dẫn:* nhóm thành  $A^3 = 0$

**Bài 4.** Giải phương trình :

$$2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}$$

$$\text{ĐS: } x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$$

*Hướng dẫn:*  $u = \sqrt{x+1}, v = \sqrt{x^2 - x + 1}$  (xem ví dụ 4)

**Bài 5.** Giải phương trình :

$$x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{(x+2)^3} - 6x = 0$$

$$\text{ĐS: } x = 2; x = 2 - 2\sqrt{3}$$

*Hướng dẫn:* Đặt  $u = \sqrt{x+2} \Rightarrow pt : x^3 - 3xu^2 + 2u^3 = 0$

**Bài 6:** Giải phương trình :

$$2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3+8} \quad \text{ĐS: } x = 3 \pm \sqrt{13}$$

*Hướng dẫn:* Đặt  $u = \sqrt{x+2}, v = \sqrt{x^2+2x+4}$  ( xem ví dụ 4)

**Bài 7:** Giải phương trình :

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x^3+x^2+x+1} = 1 + \sqrt{x^2-1} \quad \text{ĐS: } x = 2$$

*Hướng dẫn:* Đặt  $u = \sqrt{x-2}, v = \sqrt{x^3+x^2+x+1}$  :

**Bài 8:** Giải phương trình :

$$\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x^2+4x+1} \quad \text{ĐS: } x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

*Hướng dẫn:* Đặt  $u = \sqrt{x^2+2x}, v = \sqrt{2x-1}$  và bình phương : ( xem ví dụ 4)

**Bài 9:** Giải phương trình :

$$5\sqrt{x^3+1} = 2(x^2+2) \quad \text{ĐS: } x = \frac{5-\sqrt{37}}{2}$$

*Hướng dẫn:* Đặt  $u = \sqrt{x+1}, v = \sqrt{x^2-x+1}$  ( xem ví dụ 4)

**Bài 10:** Giải phương trình :

$$10\sqrt{x^3+8} = 3(x^2-x+6) \quad \text{ĐS: } x = \frac{11 \pm \sqrt{177}}{2}$$

*Hướng dẫn:* Đặt  $u = \sqrt{x+2}, v = \sqrt{x^2+2x+4}$

**Bài 11:** Giải phương trình :

$$\sqrt{x-1} + x-3 = \sqrt{2(x-3)^2+2x-2} \quad \text{ĐS: } x = 5$$

*Hướng dẫn:* Đặt  $u = \sqrt{x-1}, v = x-3$  ( xem ví dụ 4)

**Bài 12:** Giải phương trình :

$$\sqrt{5x^2+14x+9} - \sqrt{x^2-x-20} = 5\sqrt{x+1} \quad \text{ĐS: } x=8 ; x = \frac{5+\sqrt{61}}{2}$$

*Hướng dẫn:* chuyển về rồi bình phương hai vế và Đặt  $u = \sqrt{x^2-4x-5}, v = \sqrt{x+4}$  ( xem ví dụ 4)

**Bài 13:** Giải phương trình :

$$\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt[3]{x^2-x-8} + \sqrt[3]{x^2-8x-1} = 2 \quad \text{ĐS: } x=\pm 1 ; x=0 ; x=9$$

*Hướng dẫn:* Đặt  $a = \sqrt[3]{7x+1}, b = \sqrt[3]{x^2-x-8}, c = \sqrt[3]{x^2-8x-1}$  rồi đưa về phương trình tích

**Bài 14:** Giải phương trình :

$$\sqrt[3]{x^2-7x+8} - \sqrt[3]{x^2-6x-7} - \sqrt[3]{2x^2-13x-12} = 3$$

*Hướng dẫn:* Đặt  $a = \sqrt[3]{x^2 - 7x + 8}$ ,  $b = \sqrt[3]{x^2 - 6x - 7}$ ,  $c = \sqrt[3]{2x^2 - 13x - 12}$  rồi đưa về phương trình tích

**ĐS:**  $x = \frac{3}{2}$ ;  $x = 5$ ;  $x = \frac{7 \pm 5\sqrt{5}}{2}$ ;  $x = 3 \pm \sqrt{29}$

**Bài 15:** Giải phương trình :

$$x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2 + 8x - 7} + 1 \quad \text{ĐS : } x = 3$$

*Hướng dẫn:* Đặt  $a = \sqrt{7-x}$ ,  $b = \sqrt{x+1}$  rồi đưa về phương trình tích

**Bài 16:** Giải phương trình :

$$x^2 + \sqrt{x+1} = 1 \quad \text{ĐS: } x = 0; x = -1; x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

*Hướng dẫn:* Đặt  $a = \sqrt{x+1}$ , rồi đưa về phương trình tích

**Bài 17:** Giải phương trình :

$$2x^2 - 3x + 2 = x\sqrt{3x-2} \quad \text{ĐS : } x = 1 ; x = 2$$

*Hướng dẫn:* Đặt  $u = \sqrt{3x-2} \Rightarrow pt : 2x^2 - u^2 = 2xu$

**Bài 18:** Giải phương trình :

$$\sqrt{x^2 + 9x - 1} + x\sqrt{11 - 3x} = 2x + 3 \text{ (THTT2009)} \quad \text{ĐS: } x = \frac{2}{3}; x = \frac{10}{3}$$

*Hướng dẫn:* Đặt  $a = \sqrt{11-3x}$ , chuyển về và bình phương hai vế rồi đưa về phương trình tích

**Bài 19:** Giải phương trình :

$$\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 + \frac{x+1}{x-3} = 12 \left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2 \quad \text{ĐS : } x = \frac{8 \pm \sqrt{46}}{2}$$

*Hướng dẫn:* Đặt  $u = \frac{x+1}{x-2}$ ;  $v = \frac{x-2}{x-3}$ , (xem ví dụ 4)

**Bài 20:** Giải phương trình :

$$\sqrt{3x-2} = -4x^2 + 21x - 22 \text{ (THTT 2009)} \quad \text{ĐS : } x = \frac{19 + \sqrt{73}}{8}; x = \frac{23 - \sqrt{97}}{8}$$

*Hướng dẫn:* Đưa về dạng  $A^2 = B^2$

**Bài 20:** Giải phương trình :

$$10\sqrt[3]{x^3 + 1} = 3(x^2 + 2) \text{ (THTT 2009)} \quad \text{ĐS : } x = 5 \pm \sqrt{33}$$

*Hướng dẫn:*  $u = \sqrt{x+1}$ ,  $v = \sqrt{x^2 - x + 1}$  (xem ví dụ 4)