BÀI TẬP LUYỆN THI OLYMPIC TOÁN HỌC TOÀN MIỀN NAM LẦN THỨ XVIII

Chủ đề: PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

(VĂN PHÚ QUỐC- GV. TRƯỜNG ĐH QUẢNG NAM)

1. Giải PT: $\sqrt[3]{3x^2-x+2012}-\sqrt[3]{3x^2-6x+2013}-\sqrt[3]{5x-2014}=\sqrt[3]{2013}$.

HD: Đặt $a=\sqrt[3]{3x^2-x+2012}$; $b=-\sqrt[3]{3x^2-6x+2013}$; $c=-\sqrt[3]{5x-2014}$

Ta có hệ sau: $\begin{cases} a+b+c=\sqrt[3]{2013} \\ a^3+b^3+c^3=2013 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=\sqrt[3]{2013} \\ (a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)=2013 \end{cases}$

Suy ra: $a=-b$ hoặc $b=-c$ hoặc $c=-a$.

2. Giải BPT: $\frac{x}{x+1}+\frac{2x}{(x+1)(2x+1)}+\frac{3x}{(x+1)(2x+1)(3x+1)}+...+\frac{2012x}{(x+1)(2x+1)...(2012x+1)}>1$

HD: $\forall k\in\mathbb{Z}^+$ ta có:

$$\frac{kx}{(x+1)(2x+1)...(kx+1)}=\frac{(kx+1)-1}{(x+1)(2x+1)...(kx+1)}=\frac{1}{(x+1)(2x+1)...[(k-1)x+1]}-\frac{1}{(x+1)(2x+1)...(kx+1)}$$

Áp dụng cho bài toán trên, ta thu được:

$1-\frac{1}{(x+1)(2x+1)...(2012x+1)}>1\Leftrightarrow(x+1)(2x+1)...(2012x+1)<0$.

Nghiệm của BPT là: $x\in\left(-1;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{4}\right)\cup...\cup\left(-\frac{1}{2011};-\frac{1}{2012}\right)$.

3. Giải HPT: $\begin{cases} 2\sqrt{2}x_1=\cos\pi x_2 \\ 2\sqrt{2}x_2=\cos\pi x_3 \\ 2\sqrt{2}x_3=\cos\pi x_4 \\ 2\sqrt{2}x_4=\cos\pi x_1 \end{cases}$; $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}$.

HD: Theo đề: $|x_i|\le\frac{1}{2\sqrt{2}}<\frac{\pi}{2}$ $\forall i=\overline{1,4}\Rightarrow\cos\pi x_i>0$ $\forall i=\overline{1,4}$

Nếu $x_1\ge x_3$ thì $\cos\pi x_2\ge\cos\pi x_4\Rightarrow x_2\le x_4\Rightarrow\cos\pi x_3\le\cos\pi x_1\Rightarrow x_3\ge x_1$. Do đó: $x_1=x_3$.

Chứng minh tương tự ta có được: $x_2=x_4$.

HPT đã cho tương đương với: $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_4 \\ x_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\cos \pi x_2 \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\cos \pi x_1 \end{cases}$

Đồ thị của hai hàm số: $x_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\cos \pi x_2$, $x_2 = \dfrac{1}{\pi}\arccos 2\sqrt{2}x_1$; $x_1 \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$, $x_2 \in \left(0;\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ trong hệ trục tọa độ Ox_1x_2 cắt nhau tại một điểm duy nhất có tọa độ $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)$.

HPT đã cho có nghiệm duy nhất là: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \dfrac{1}{4}$.

4. Giải HPT: $\begin{cases} 30\dfrac{y}{x^2} + 4y = 2012 \\ 30\dfrac{z}{y^2} + 4z = 2012 \\ 30\dfrac{x}{z^2} + 4x = 2012 \end{cases}$ **;** $x, y, z \in \mathbb{R}$

HD: Ta có: $30\dfrac{y}{x^2} + 4y = 2012 \Leftrightarrow y\left(\dfrac{30}{x^2} + 4\right) = 2012 > 0 \Rightarrow y > 0$. Tương tự $x, z > 0$.

Không mất tính tổng quát, giả sử: $x \geq y, x \geq z$.

Trừ vế theo vế của phương trình thứ ba cho phương trình thứ nhất ta được:

$$30\left(\frac{x}{z^2} - \frac{y}{x^2}\right) + 4(x - y) = 0 \Leftrightarrow 30\left(x^3 - yz^2\right) + 4x^2z^2(x - y) = 0.$$

Vì $x \geq y > 0, x \geq z > 0$ nên $x - y \geq 0$; $x^3 - yz^2 \geq 0$.

Do đó: $30\left(x^3 - yz^2\right) + 4x^2z^2(x - y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = yz^2 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$.

5. Cho 2013 số dương: $x_1, x_2, ..., x_{2013} > 0$ thỏa mãn: $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq x_2 - x_1 \\ x_2^2 + x_3^2 \leq x_3 - x_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_{2011}^2 + x_{2012}^2 \leq x_{2012} - x_{2011} \\ x_{2012}^2 + x_{2013}^2 \leq x_{2013} - x_{2012} \end{cases}$.

Chứng minh rằng trong 2013 số đó có hai số a,b sao cho: $|a-b| \le \frac{1}{2012}$.

HD:

Từ $x_1^2 + x_2^2 \le x_2 - x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow 0 < x_1 < x_2$. Chứng minh tương tự được: $x_2 < x_3 < ... < x_{2013}$.

Mặt khác: $x_{2012}^2 + x_{2013}^2 \le x_{2013} - x_{2012} \Rightarrow x_{2013} - x_{2013}^2 \ge x_{2012}^2 + x_{2012} > 0 \Rightarrow 0 < x_{2013} < 1$.

Khi đó: $0 < x_1 < x_2 < ... < x_{2013}$.

Chia đoạn $[0;1]$ thành 2012 đoạn con bằng nhau, độ dài của mỗi đoạn con là $\frac{1}{2012}$.

Theo nguyên lý Dirichlet: $\exists a,b$ trong 2013 số đã cho thuộc về cùng một đoạn con.

Như vậy $|a-b| \le \frac{1}{2012}$.

6. Giải HPT: $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ x^{2012}+y^{2012}+z^{2012}=3 \end{cases}$ **;** $x,y,z \in \mathbb{R}$**.**

HD: Xét các vectơ: $\vec{u} = (x;y;z), \vec{v} = (1;1;1)$. Dễ thấy $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}| = \sqrt{3}$.

Suy ra: $\vec{u},\vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} > 0 \Leftrightarrow x = y = z$.

Kết hợp với phương trình còn lại ta được: $x = y = z = 1$.

7. Giải BPT: $\sqrt{x-2012} + x - 2014 \ge \sqrt{2\left(x^2 - 4028 + 2014^2\right) + 2x - 4024}$ **;** $x \in \mathbb{R}$**.**

Điều kiện: $x \ge 2012$.

BPT đã cho tương đương với: $\sqrt{x-2012} + (x-2014) \ge \sqrt{2(x-2014)^2 + 2(x-2012)}$.

Đặt: $u = \sqrt{x-2012} \ge 0$; $v = x - 2014$.

BPT thành: $u + v \ge \sqrt{2u^2 + 2v^2} \Leftrightarrow \begin{cases} u \ge 0 \\ u+v \ge 0 \\ (u+v)^2 \ge 2u^2 + 2v^2 \end{cases} \Leftrightarrow u = v \ge 0$.

8. Giải HPT: $\begin{cases} 30\sqrt{x_1} + 4\sqrt{x_2} = \sqrt[2013]{x_3^{2012}} \\ 30\sqrt{x_2} + 4\sqrt{x_3} = \sqrt[2013]{x_4^{2012}} \\ \text{.....................................} \\ 30\sqrt{x_{2012}} + 4\sqrt{x_1} = \sqrt[2013]{x_2^{2012}} \\ x_1, x_2, ..., x_{2012} > 0 \end{cases}$

HD: Giả sử: $\left(x_1, x_2, ..., x_{2012}\right)$ là một nghiệm của HPT trên.

Đặt: $M = Max\left\{x_1, x_2, ..., x_{2012}\right\}$; $m = Min\left\{x_1, x_2, ..., x_{2012}\right\}$.

Suy ra: $M \geq m > 0$.

Ta có:

$$\begin{cases} 34\sqrt{M} \geq 30\sqrt{x_1} + 4\sqrt{x_2} = \sqrt[2013]{x_3^{2012}} \\ 34\sqrt{M} \geq 30\sqrt{x_2} + 4\sqrt{x_3} = \sqrt[2013]{x_4^{2012}} \\ \text{...} \\ 34\sqrt{M} \geq 30\sqrt{x_{2012}} + 4\sqrt{x_1} = \sqrt[2013]{x_2^{2012}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 34\sqrt{M} \geq Max\left\{\sqrt[2013]{x_1^{2012}}; \sqrt[2013]{x_2^{2012}}; ...; \sqrt[2013]{x_{2012}^{2012}}\right\} \Rightarrow 34\sqrt{M} \geq 34\sqrt[2013]{M^{2012}}$$

$$\Rightarrow 34^{4026}M^{2013} \geq M^{4024} \Rightarrow M^{2011} \leq 34^{4026} \Rightarrow M \leq \sqrt[2011]{34^{4026}}.$$

Chứng minh tương tự, ta được: $m \geq \sqrt[2011]{34^{4026}}$. Suy ra: $M = m = \sqrt[2011]{34^{4026}}$.

Do đó: $x_1 = x_2 = ... = x_{2012} = \sqrt[2011]{34^{4026}}$. Thử lại thấy đúng.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm dương duy nhất: $x_1 = x_2 = ... = x_{2012} = \sqrt[2011]{34^{4026}}$.

9. Giải HPT: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_2 + \dfrac{2012}{x_2}\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{2}\left(x_3 + \dfrac{2012}{x_3}\right) \\ \text{.............................} \\ x_{2012} = \dfrac{1}{2}\left(x_1 + \dfrac{2012}{x_1}\right) \end{cases}$; $x_1, x_2, ..., x_{2012} \in \mathbb{R}$.

HD: Ta có: $x_i x_{i+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_{i+1} + \dfrac{2012}{x_{i+1}}\right)x_{i+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_{i+1}^2 + 2012\right) > 0 \quad \forall i = \overline{1, 2011}$

$\Rightarrow$ Các x_i cùng dấu $\forall i = \overline{1, 2012}$.

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $x_{i+1} + \dfrac{2012}{x_{i+1}} \geq 2\sqrt{2012} \Rightarrow 2x_i \geq 2\sqrt{2012} \Rightarrow x_i \geq \sqrt{2012} \quad \forall i = \overline{1, 2012}$.

Lấy phương trình đầu tiên lần lượt trừ cho các phương trình số 2, số 3,..., số 2012 vế theo vế ta được:

$$x_1 - x_2 = \frac{1}{2}\left(x_2 - x_3\right)\left(1 - \frac{2012}{x_2 x_3}\right)$$

$$x_2 - x_3 = \frac{1}{2}(x_3 - x_4)\left(1 - \frac{2012}{x_3x_4}\right)$$

....

$$x_{2012} - x_1 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)\left(1 - \frac{2012}{x_1x_2}\right)$$

Vì $x_1 \ge x_2 \ge ... \ge x_{2012}$ nên $1 - \frac{2012}{x_2x_3} \ge 0; 1 - \frac{2012}{x_3x_4} \ge 0; ...; 1 - \frac{2012}{x_{2011}x_{2012}} \ge 0$ và $1 - \frac{2012}{x_1x_2} \le 0$.

Suy ra: $\begin{cases} x_2x_3 \ge 2012 \\ .... \\ x_{2011}x_{2012} \ge 2012 \\ x_1x_2 \le 2012 \end{cases}$. Kết hợp với $|x_i| \ge \sqrt{2012}\ \ \forall i = \overline{1,2012}$ suy ra $x_1 = x_2 = ... = x_{2012} = \sqrt{2012}$.

10. Giải HPT: $\begin{cases} x^2 = 2x - y \\ y^2 = 2y - z \\ z^2 = 2z - t \\ t^2 = 2t - x \end{cases}$ **;** $x, y, z, t \in \mathbb{R}$**.**

HD: Đặt: $X = 1 - x,\ Y = 1 - y,\ Z = 1 - z,\ T = 1 - t$.

Ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} X^2 = Y \\ Y^2 = Z \\ Z^2 = T \\ T^2 = X \end{cases} \Rightarrow X^{16} = Y^8 = Z^4 = T^2 = X$. Như vậy: $X\left(X^{15} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 0 \\ X = 1 \end{array}\right.$

* Với $X = 0 \Rightarrow Y = Z = T = 0 \Rightarrow x = y = z = t = 1$.

* Với $X = 1 \Rightarrow Y = Z = T = 1 \Rightarrow x = y = z = t = 0$.

11. Giải HPT: $\begin{cases} x_1^2 + kx_1 + \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 = x_2 \\ x_2^2 + kx_2 + \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 = x_3 \\ .... \\ x_{2012}^2 + kx_{2012} + \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 = x_1 \end{cases}$; $x_1, x_2, ..., x_{2012} \in \mathbb{R}$, k là một số cho trước.

HD: Cộng vế theo vế của các PT đã cho ta được:

$$0 = \sum_{i=1}^{2012}\left[x_i^2 + (k-1)x_i + \left(\frac{k-1}{2}\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{2012}\left(x_i + \frac{k-1}{2}\right)^2 \Rightarrow x_1 = x_2 = ... = x_{2012} = \frac{1-k}{2}.$$

12. Cho số nguyên $n \geq 3$. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2012x_1 - 4025x_2 + 2013x_3 = 0 \\ 2012x_2 - 4025x_3 + 2013x_4 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2012x_n - 4025x_1 + 2013x_2 = 0 \end{cases} ;\ x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}.$$

HD: Đặt $y_1 = x_1 - x_2$; $y_2 = x_2 - y_3$; ... ; $y_n = x_n - x_2$.

Hệ đã cho thành: $\begin{cases} 2012y_1 = 2013y_2 \\ 2012y_2 = 2013y_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2012y_n = 2013y_1 \end{cases} \Rightarrow 2012^n y_1y_2...y_n = 2013^n y_1y_2...y_n \Rightarrow y_1y_2...y_n = 0$.

Như vậy phải có một chỉ số j sao cho $y_j = 0$. Nhưng $2012y_j = 2013y_{j+1}, ...$ nên $y_1 = y_2 = ... = y_n = 0$.

Suy ra: $x_1 = x_2 = ... = x_n = a \in \mathbb{R}$.

13. Giải HPT: $\begin{cases} x^{2013} + \dfrac{2xy}{\sqrt[2012]{x^2 - 2x + 2^{2012} + 1}} = x^2 + y^{2013} \\ y^{2013} + \dfrac{2xy}{\sqrt[2012]{x^2 - 2y + 2^{2012} + 1}} = y^2 + x^{2013} \end{cases}$; $x, y \in \mathbb{R}$.

HD:

Cộng vế theo vế của hai phương trình trên ta được:

$$2xy\left(\frac{1}{\sqrt[2012]{x^2 - 2x + 2^{2012} + 1}} + \frac{1}{\sqrt[5]{y^2 - 2y + 2^{2012} + 1}}\right) = x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 2xy\left(\frac{1}{\sqrt[2012]{(x-1)^2 + 2^{2012}}} + \frac{1}{\sqrt[2012]{(y-1)^2 + 2^{2012}}}\right) = x^2 + y^2 \qquad (*)$$

Nhận xét: $\left|VT(*)\right| \leq 2|xy| \leq x^2 + y^2 = VP(*)$.

$$VT(*) = VP(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x| = |y| \\ x = y = 1 \end{cases} \\ x = y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0 \\ x = y = 1 \end{array}\right..$$

Vậy tập hợp nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $S = \{(0;0),\ (1;1)\}$.

14. Giải PT: $\dfrac{3 + \sqrt{x}}{x^2 + x\sqrt{x} + x + 3} + \dfrac{x + \sqrt{x} + 2}{x^2 + x\sqrt{x} + 3} + \dfrac{x\sqrt{x} + x + 2}{x^2 + \sqrt{x} + 4} + \dfrac{x^2 + x\sqrt{x} + 2}{x + x\sqrt{x} + 4} + \dfrac{x^2 + 3}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x} + 3} = \dfrac{10}{3}$

HD:

Đặt $a = 2,\ b = \sqrt{x} + 1,\ c = x + 1,\ d = x\sqrt{x} + 1,\ e = x^2 + 1$.

Phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{a+b}{c+d+e} + \frac{b+c}{d+e+a} + \frac{c+d}{e+a+b} + \frac{d+e}{a+b+c} + \frac{e+a}{b+c+d} = \frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{c+d+e}+1\right)+\left(\frac{b+c}{d+e+a}+1\right)+\left(\frac{c+d}{e+a+b}+1\right)+\left(\frac{d+e}{a+b+c}+1\right)+\left(\frac{e+a}{b+c+d}+1\right)=\frac{10}{3}+5$$

$$\Leftrightarrow(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{c+d+e}+\frac{1}{d+e+a}+\frac{1}{e+a+b}+\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{b+c+d}\right)=\frac{25}{3}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{c+d+e}+\frac{1}{d+e+a}+\frac{1}{e+a+b}+\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{b+c+d}\right)\times$$

$$\left[(c+d+e)+(d+e+a)+(e+a+b)+(a+b+c)+(b+c+d)\right]=25 \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho vế trái của (*) thì ta được $VT(*)\geq 25$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=e\Leftrightarrow x=1$.

Vậy x = 1 là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

15. Giải HPT: $\begin{cases}x+y=2\\ x^{2012}+y^{2012}=x^{2011}+y^{2011}\end{cases}$; $x,y\in\mathbb{R}$.

HD:

Hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}x+y=2\\ 2\left(x^{2012}+y^{2012}\right)=2\left(x^{2011}+y^{2011}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2\\ 2\left(x^{2012}+y^{2012}\right)=(x+y)\left(x^{2011}+y^{2011}\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2\\ 2x^{2012}+2y^{2012}=x^{2012}+xy^{2011}+x^{2011}y+y^{2012}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2\\ x^{2012}+y^{2012}=x^{2011}y+xy^{2011}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2\\ x^{2011}(x-y)-y^{2011}(x-y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2\\ (x-y)\left(x^{2011}-y^{2011}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2\\ x-y=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$$

16. Giải HPT: $\begin{cases}y^2=(5x+4)(4-x)\\ y^2-5x^2-4xy+16x-8y+16=0\end{cases}$; $x,y\in\mathbb{R}$.

HD:

Ta có: $y^2-5x^2-4xy+16x-8y+16=0\Leftrightarrow y^2-(4x+8)y-5x^2+16x+16=0$. Xem đây là một phương trình bậc hai theo ẩn y (tham số x).

Ta có: $\Delta'=9x^2$, từ đó: $\left[\begin{array}{l}y=5x+4\\ y=-x+4\end{array}\right.$.

+ Với $y=5x+4$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$(5x+4)^2=(5x+4)(4-x)\Leftrightarrow 6x(5x+4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=4\\ x=-\dfrac{5}{4}\Rightarrow y=0\end{array}\right..$$

+ Với $y=-x+4$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ phương trình ta được:

$$(-x+4)^2=(5x+4)(4-x)\Leftrightarrow 6x(4-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=4\\ x=4\Rightarrow y=0\end{array}\right..$$

Vậy tập hợp nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $S=\left\{(0;4);(4;0);\left(-\frac{4}{5};0\right)\right\}$.

17. Giải HPT: $\begin{cases} 6x^4-\left(x^3-x\right)y^2-\left(y+12\right)x^2=-6 \\ 5x^4-\left(x^2-1\right)^2y^2-11x^2=-5 \end{cases}$; $x,y\in\mathbb{R}$

HD:

+ Xét $x=0$, hệ phương trình đã cho thành: $\begin{cases} 0=-6 \\ -y^2=-5 \end{cases}$ (vô lý)

+ Chia vế theo vế của từng phương trình trong hệ cho $x^2>0$ ta được:

$$\begin{cases} 6x^2-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)y^2-y-12=-\dfrac{6}{x^2} \\ 5x^2-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2y^2-11=-\dfrac{5}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)y^2-y-12=0 \\ 5\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2y^2-11=0 \end{cases}.$$

Đặt $t=x-\dfrac{1}{x}\Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2+2$.

Hệ phương trình thành: $\begin{cases} 6\left(t^2+2\right)-ty^2-y-12=0 \\ 5\left(t^2+2\right)-t^2y^2-11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t^2-ty^2-y=0 \\ 5t^2-t^2y^2-1=0 \end{cases}$

+ Xét $t=0$, hệ phương trình thành: $\begin{cases} -y=0 \\ -1=0 \end{cases}$ (vô lý).

+ Chia vế theo vế của từng phương trình trong hệ cho $t^2>0$ ta được:

$$\begin{cases} 6-\dfrac{y^2}{t}-\dfrac{y}{t^2}=0 \\ 5-y^2-\dfrac{1}{t^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{t}+\dfrac{y}{t^2}=6 \\ y^2+\dfrac{1}{t^2}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{t}\left(y+\dfrac{1}{t}\right)=6 \\ \left(y+\dfrac{1}{t}\right)^2-2.\dfrac{y}{t}=5 \end{cases}$$

Đặt: $a=y+\dfrac{1}{t};\ b=\dfrac{y}{t}$

Hệ phương trình thành: $\begin{cases} ab=6 \\ a^2-2b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\dfrac{a^2-5}{2}=6 \\ b=\dfrac{a^2-5}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3-5a-12=0 \\ b=\dfrac{a^2-5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)\left(a^2+3a+4\right)=0 \\ b=\dfrac{a^2-5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$$

Khi đó: $\begin{cases} y+\dfrac{1}{t}=3 \\ \dfrac{y}{t}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t+\dfrac{1}{t}=3 \\ y=2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2-3t+1=0 \\ y=2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ y=2t \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} t=\dfrac{1}{2} \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$

* Với $t=1$ ta có: $x-\dfrac{1}{x}=1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

* Với $t=\dfrac{1}{2}$ ta có: $x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}$.

18. Giải HPT: $\begin{cases}\sqrt{3+2x^2y-x^4y^2}+x^2\left(1-2x^2\right)=y^4\\ 1+\sqrt{1+(x-y)^2}+x^2\left(x^4-2x^2-2xy^2+1\right)=0\end{cases}$; $x,y\in\mathbb{R}$.

HD:

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}\sqrt{4-\left(x^2y-1\right)^2}=y^4-x^2\left(1-2x^2\right)\le 2\\ 1+\sqrt{1+(x-y)^2}=-x^2\left(x^4-2x^2-2xy^2+1\right)\ge 2\end{cases}.$$

Suy ra: $y^4-x^2\left(1-2x^2\right)\le -x^2\left(x^4-2x^2-2xy^2+1\right) \Leftrightarrow y^4-x^2+2x^4\le -x^6+2x^4+2x^3y^2-x^2$

$\Leftrightarrow x^6-2x^3y^2+y^4=0 \Leftrightarrow \left(x^3-y^2\right)^2=0 \Leftrightarrow x^3=y^2$ (*)

Từ (*) và dấu "=" xảy ra ở bất đẳng thức trên ta suy ra: $x=y=1$.

19. Giải HPT: $\begin{cases}\dfrac{2xy+y\sqrt{x^2-y^2}}{14}=\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{2}}\\ \sqrt{\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^3}+\sqrt{\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^3}=9\end{cases}$; $x,y\in\mathbb{R}$.

HD:

Điều kiện $\begin{cases}x+y\ge 0\\ x-y\ge 0\end{cases}$.

Đặt $u=\sqrt{\dfrac{x+y}{2}},\ v=\sqrt{\dfrac{x-y}{2}}$; $u,v\ge 0$. Suy ra: $x=u^2+v^2,\ y=u^2-v^2$.

Hệ phương trình đã cho thành: $\begin{cases}\dfrac{2\left(u^2+v^2\right)\left(u^2-v^2\right)+\left(u^2-v^2\right)\sqrt{4u^2v^2}}{14}=u+v\\ u^3+v^3=9\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(u+v)\left(u^3-v^3-7\right)=0\\ u^3+v^3=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u+v=0\\ u^3+v^3=9\end{cases} \vee \begin{cases}u^3-v^3=7\\ u^3+v^3=9\end{cases}$.

Hệ $\begin{cases}u+v=0\\ u^3+v^3=9\end{cases}$ vô nghiệm.

Giải hệ $\begin{cases}u^3-v^3=7\\ u^3+v^3=9\end{cases}$ ta được $\begin{cases}u=2\\ v=1\end{cases}$.

Do đó: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{2}} = 2 \\ \sqrt{\dfrac{x-y}{2}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=8 \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$

20. Giải HPT: $\begin{cases} xy + \sqrt{2\left(x^4+y^4\right)} = 1 \\ x^{2009}y^{2013} + x^{2013}y^{2009} = \dfrac{2}{3^{2011}} \end{cases}$; $x, y \in \mathbb{R}$.

HD:

Ta có: $(xy)^{2009}\left(x^4+y^4\right) = x^{2009}y^{2013} + x^{2013}y^{2009} = \dfrac{2}{3^{2011}} > 0 \Rightarrow xy > 0$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ phương trình ta có:

$1 - xy = \sqrt{2\left(x^4+y^4\right)} \geq 2|xy| = 2xy$ (Bất đẳng thức Cauchy)

$\Rightarrow xy \leq \dfrac{1}{3}$ và $x^4 + y^4 = \dfrac{(1-xy)^2}{2}$.

Lại có: $x^{2009}y^{2013} + x^{2013}y^{2009} = (xy)^{2009}\left(x^4+y^4\right) = (xy)^{2009}.\dfrac{(1-xy)^2}{2}$

$$= 2(xy)^{2008}.(xy).\frac{1-xy}{2}.\frac{1-xy}{2} \leq 2(xy)^{2008}.\frac{1}{3^3} \leq \frac{2}{3^{2011}}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} xy = \dfrac{1-xy}{2} \\ xy = \dfrac{1}{3} \\ x^4 = y^4 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy tập hợp nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $S = \left\{\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}};-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$.

21. Giải HPT: $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ \sqrt[2011]{x} - \sqrt[2011]{y} = \left(\sqrt[2013]{y} - \sqrt[2013]{x}\right)\left(x+y+xy+2014\right) \end{cases}$; $x, y \in \mathbb{R}$.

HD:

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta suy ra: $-1 \leq x, y \leq 1$.

Do đó: $x + y + xy + 2014 = (x+1)(y+1) + 2013 > 0$.

+ Nếu $x > y$ thì phương trình thứ hai của hệ có vế trái dương, vế phải âm. Điều này vô lý.

+ Nếu $x < y$ thì phương trình thứ hai của hệ có vế trái âm, vế phải dương. Điều này vô lý.

+ Nếu $x=y$ thì phương trình thứ hai của hệ thỏa mãn. Thay vào phương trình thứ nhất ta được: $2x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

22. Giải PT: $3\left(1+\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\right)^4+\tan^6 x=7$

HD:

Đặt $a=\frac{\cos 2x}{\cos^2 x+1}$, $b=\tan^2 x$.

Phương trình đã cho thành: $3a^4+4b^3=7$.

Dễ thấy a, b ≥ 0 và $a+b=2$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$a^4+1+1+1\geq 4a,\ b^3+1+1\geq 3b$.

Suy ra: $3\left(a^4+3\right)\geq 12a$, $4\left(b^3+2\right)\geq 12b \Rightarrow 3a^4+4b^3\geq 7$.

Dấu bằng xảy ra $a^4=b^4=1 \Rightarrow a=b=1$ hay $\tan x=\pm 1 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

là nghiệm của phương trình đã cho.

23. Giải HPT: $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=9\\ \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)=18\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

HD:

Điều kiện $x,y\neq 0$.Đặt $u=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $v=\frac{1}{\sqrt[3]{y}}$.

Hệ phương trình đã cho thành: $\begin{cases}u^3+v^3=9\\ (u+v)(1+u)(1+v)=18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(u+v)^3-3uv(u+v)=9\\ (u+v)(1+u+v+uv)=18\end{cases}$.

Đặt $S=u+v, P=uv$. Điều kiện $S^2\geq 4P$.

Hệ phương trình thành: $\begin{cases}S^3-3PS=9\\ S(S+P+1)=18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}S^3-3PS=9 & (1)\\ PS=18-S-S^2 & (2)\end{cases}$

Thay (2) vào (1) ta được: $S^3+3S^2+3S-63=0 \Leftrightarrow (S+1)^3=64 \Leftrightarrow S=3 \Rightarrow P=2$.

Với $\begin{cases}S=3\\ P=2\end{cases}$ ta suy ra: u,v là nghiệm của phương trình: $X^2-3X+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}X=1\\ X=2\end{array}\right.$.

Khi đó: $\begin{cases}u=1\\ v=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}u=2\\ v=1\end{cases}$. Suy ra: $\begin{cases}x=\frac{1}{8}\\ y=1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=1\\ y=\frac{1}{8}\end{cases}$.

24. Giải BPT: $\sqrt{6}\left(x^2-3x+1\right)+\sqrt{x^4+x^2+1}\le 0$; $x\in\mathbb{R}$

HD:

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$6\left(x^2-3x+1\right)+\sqrt{6\left(x^4+x^2+1\right)}\le 0 \Leftrightarrow 6\left[2\left(x^2-x+1\right)-\left(x^2+x+1\right)\right]+\sqrt{6\left(x^4+x^2+1\right)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow 12\left(x^2-x+1\right)+\sqrt{6\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)}-6\left(x^2+x+1\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow 12\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)+\sqrt{\frac{6\left(x^2-x+1\right)}{x^2+x+1}}-6\le 0 \quad (\text{ vì } x^2+x+1>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}\ )$$

Đặt $t=\sqrt{\frac{6\left(x^2-x+1\right)}{x^2+x+1}}$, $t>0$.

Bất phương trình thành: $2t^2+t-6\le 0 \Leftrightarrow 0<t\le\frac{3}{2}$.

Do đó: $\frac{6\left(x^2-x+1\right)}{x^2+x+1}\le\frac{9}{4}\Leftrightarrow 5x^2-11x+5\le 0\Leftrightarrow \frac{11-\sqrt{21}}{10}\le x\le\frac{11+\sqrt{21}}{10}$.

Vậy tập hợp nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S=\left[\frac{11-\sqrt{21}}{10};\frac{11+\sqrt{21}}{10}\right]$.

25. Giải HPT: $\begin{cases}\sqrt{x+y+1}+1=4\left(x+y\right)^2+\sqrt{3\left(x+y\right)}\\ 12x\left(2x^2+3y+7xy\right)=-1-12y^2\left(3+5x\right)\end{cases}$, $x,y\in\mathbb{R}$.

HD:

Đặt $u=\sqrt{x+y+1}\ge 0$; $v=\sqrt{3\left(x+y\right)}\ge 0$.

Hệ phương trình đã cho thành: $\begin{cases}3u^2-v^2=3\\ 9u+9=4v^4+9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3u^2-v^2=3\\ 9u+\left(3u^2-v^2\right)^2=4v^4+9\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3u^2-v^2=3\\ 9u-9v+9u^4-6u^2v^2-3v^4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3u^2-v^2=3\\ \left(u-v\right)\left(9u^3+9u^2v+3uv^2+3v^3\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2u^2-v^2=3\\ u=v\end{cases}\Leftrightarrow u=v=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Khi đó: $\begin{cases}\sqrt{x+y+1}=\frac{\sqrt{6}}{2}\\ \sqrt{3\left(x+y\right)}=\frac{\sqrt{6}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x+y=\frac{1}{2}\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}-x$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ phương trình đã cho ta tìm được: $\left[\begin{array}{l}y=\frac{4}{3}\Rightarrow x=-\frac{5}{6}\\ y=-\frac{1}{6}\Rightarrow x=\frac{7}{10}\end{array}\right.$.

26.Giải HPT: $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2y}=2\left(y^4-x^4\right) \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}=\left(3y^2+x^2\right)\left(3x^2+y^2\right) \end{cases}$, $x,y\in\mathbb{R}$

HD:

Điều kiện $x,y\neq 0$.

Với điều kiện trên, hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x}=5y^4+x^4+10x^2y^2 \\ \dfrac{1}{y}=5x^4+y^4+10x^2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=5xy^4+x^5+10x^3y^2 \\ 1=5x^4y+y^5+10x^2y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^5=3 \\ (x-y)^5=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\sqrt[5]{3} \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt[5]{3}+1}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt[5]{3}-1}{2} \end{cases}$$ (thỏa điều kiện).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm: $\left(\dfrac{\sqrt[5]{3}+1}{2};\dfrac{\sqrt[5]{3}-1}{2}\right)$.

27. Giải BPT: $\sqrt{4x+6}-\sqrt[3]{x^3+7x^2+12x+6}\geq x^2-2$; $x\in\mathbb{R}$.

HD:

Điều kiện: $x\geq -\dfrac{3}{2}$.

Với điều kiện trên, bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt{(x+2)^2-(x^2-2)}-(x+2)-\left[\sqrt[3]{(x+2)^3-(x^2-2)}-(x+2)\right]\geq x^2-2$$

Đặt $A=\sqrt{4x+6}+x+2$, $B=\sqrt[3]{\left(x^3+7x^2+12x+6\right)^2}+(x+2)\sqrt[3]{x^3+7x^2+12x+6}+(x+2)^2$ (*)

Thế thì $x\geq -\dfrac{3}{2}$ ta có: $A>0$, $B>0$

Khi đó $(*)\Leftrightarrow \dfrac{(x+2)^2-(x^2-2)-(x+2)^2}{A}+\dfrac{(x+2)^3-(x^2-2)-(x+2)^3}{B}\geq x^2-2$

$\Leftrightarrow \left(2-x^2\right)\left(\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}+1\right)\geq 0 \Leftrightarrow 2-x^2\geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}\leq x\leq \sqrt{2}$ (thỏa điều kiện $x\geq -\dfrac{3}{2}$)

Vậy tập hợp nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S=\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

28. Giải BPT: $\sqrt{x^5+x^3+x}\leq \sqrt{\left(x^2+1\right)^3}-\sqrt{x^2\left(x^2-x+1\right)}$ **;** $x\in\mathbb{R}$**.**

HD:

Điều kiện: $x\geq 0$.

+ Nếu $x=0$ thì BPT luôn đúng

+ Nếu $x>0$ thì chia cả 2 vế của BPT cho: $\sqrt{x^2\left(x^2+1\right)}>0$

Ta được: $\sqrt{\dfrac{x^5+x^3+x}{x^2\left(x^2+1\right)}} \le \sqrt{\dfrac{\left(x^2+1\right)^3}{x^2\left(x^2+1\right)}}-\sqrt{\dfrac{x^2\left(x^2-x+1\right)}{x^2\left(x^2+1\right)}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+\dfrac{1}{x\left(x^2+1\right)}} \le \dfrac{x^2+1}{x}-\sqrt{1-\dfrac{x}{x^2+1}} \Leftrightarrow \sqrt{x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}} \le x+\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}} \le x+\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}$.

Đặt $t=x+\dfrac{1}{x}$; $t \ge 2$.

BPT trên thành: $\sqrt{t-\dfrac{1}{t}} \le t-\sqrt{1-\dfrac{1}{t}} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \left(\sqrt{t-\dfrac{1}{t}}-1\right)^2 \ge 0$ (luôn đúng $\forall t \ge 2$).

Vậy nghiệm của BPT là: $x \ge 0$.

29. Giải HPT: $\begin{cases} x^2\left(y+z\right)^2=\left(3x^2+x+1\right)y^2z^2 \\ y^2\left(z+x\right)^2=\left(4y^2+y+1\right)z^2x^2 \\ z^2\left(x+y\right)^2=\left(5z^2+z+1\right)x^2y^2 \end{cases}$ $;x,y,z \in \mathbb{R}$.

HD:

+ TH 1: $xyz=0$.

Nếu $x=0$ thì hệ có nghiệm $\left(0;0;z\right),\left(0;y;0\right)$.

Tương tự cho trường hợp $y=0$ hoặc $z=0$.

+ TH2: Chia cả hai vế của các PT trong hệ cho $x^2y^2z^2>0$ ta được:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{y}\right)^2=3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2} \\ \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}\right)^2=4+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y^2} \\ \left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)^2=5+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2} \end{cases}$$

Đặt $a=\dfrac{1}{x},b=\dfrac{1}{y},c=\dfrac{1}{z}$. HPT thành: $\begin{cases} \left(b+c\right)^2=3+a+a^2 \\ \left(c+a\right)^2=4+b+b^2 \\ \left(a+b\right)^2=5+c+c^2 \end{cases}$.

Cộng vế theo vế các PT trên rồi rút gọn ta được: $\left(a+b+c\right)^2-\left(a+b+c\right)-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=4 \\ a+b+c=-3 \end{array}\right.$.

30. Giải HPT: $\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x \end{cases}$ **;** $x, y, z \in \mathbb{R}$**.**

HD:

HPT đã cho tương đương với: $\begin{cases} y\left(1 - x^2\right) = 2x \\ z\left(1 - y^2\right) = 2y \\ x\left(1 - z^2\right) = 2z \end{cases}$ (I)

Vì một trong các giá trị x, y, z bằng 1 đều không thỏa hệ phương trình này nên: $x, y, z \neq \pm 1$.

Khi đó $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2x}{1 - x^2} \\ z = \dfrac{2y}{1 - y^2} \\ x = \dfrac{2z}{1 - z^2} \end{cases}$.

Đặt $x = \tan t$, $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Suy ra: $y = \tan 2t$; $z = \tan 4t$, $x = \tan 8t$.

Do đó: $\tan t = \tan 8t \Leftrightarrow t = \dfrac{k\pi}{7}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Như vậy: $x = \tan\dfrac{k\pi}{7}; y = \tan\dfrac{k2\pi}{7}; z = \tan\dfrac{k4\pi}{7}$.

Vì $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $k \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

31. Giải HPT: $\begin{cases} (2 - x)(3x - 2z) = 3 - z \\ y^3 + 3y^2 = x^2 - 3x + 2 \\ y^2 = -z^2 + 6z \\ z \leq 3 \end{cases}$ **;** $x, y, z \in \mathbb{R}$**.**

HD:

HPT đã cho tương đương với: $\begin{cases} 3x^2 - 2(3 + z)x + 3z + 3 = 0 \\ y^3 + 3y^2 = x^2 - 3x + 2 \\ y^2 = -z^2 + 6z \\ z \leq 3 \end{cases}$

PT thứ nhất có nghiệm $x \Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z \leq 0 \\ z \geq 3 \end{array}\right.$ (1)

PT thứ ba có nghiệm $y \Leftrightarrow -z^2 + 6z \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq z \leq 6$. (2)

Từ (1), (2) và kết hợp với $z \leq 3$ ta suy ra: $z = 0$ hoặc $z = 3$.

Đáp số: Có 2 nghiệm: $(1; 0; 0), (2; -3; 3)$.

32. Giải HPT: $\begin{cases} x^3-3x=y\left(3x^2-1\right) \\ y^3-3y=z\left(3y^2-1\right) \\ z^3-3z=x\left(3z^2-1\right) \end{cases}$; $x,y,z\in\mathbb{R}$.

HD:

Xét PT: $x^3-3x=y\left(3x^2-1\right)$. Vì $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ không thỏa PT nên $y=\frac{x^3-3x}{3x^2-1}$.

Đặt $x=\tan t$ với $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3}\right)\setminus\left\{\pm\frac{\pi}{6}\right\}$.

Dễ dàng suy ra được: $y=\tan 3t,\ z=\tan 9t,\ x=\tan 27t$.

33. Giải HPT: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{2012} \\ \frac{1}{3x+2y}+\frac{1}{3y+2z}+\frac{1}{3z+2x}=\frac{1}{x+2y+2z}+\frac{1}{y+2z+2x}+\frac{1}{z+2x+2y} \end{cases}$ **;** $x,y,z\in\mathbb{R}$

HD:

Điều kiện: $\begin{cases} x,y,z\ge 0 \\ Min\left\{x^2+y^2;y^2+z^2;z^2+x^2\right\}>0 \end{cases}$.

Áp dụng BĐT Cau chy ta có:
$$\frac{1}{3x+2y}+\frac{1}{x+2y+2z}=\frac{2\left(2x+2y+z\right)}{\left(3x+2y\right)\left(x+2y+2z\right)}\ge\frac{2\left(2x+2y+z\right)}{\left(2x+2y+z\right)^2}=\frac{2}{2x+2y+z}.$$

Tương tự chứng minh được: $\frac{1}{3y+2z}+\frac{1}{y+2x+2z}\ge\frac{2}{x+2z+2y}$; $\frac{1}{3z+2x}+\frac{1}{z+2y+2x}\ge\frac{2}{y+2x+2z}$.

Suy ra: $\frac{1}{3x+2y}+\frac{1}{3y+2z}+\frac{1}{3z+2x}\ge\frac{1}{x+2y+2z}+\frac{1}{y+2z+2x}+\frac{1}{z+2x+2y}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$

$3\sqrt{x}=\sqrt{2012}\Leftrightarrow x=\frac{2012}{9}$. Do đó: $x=y=z=\frac{2012}{9}$.

34. Tìm mọi cặp số thực $(x;y)$ thỏa hệ: $\begin{cases} y^6+y^3+2x^2=\sqrt{xy-x^2y^2} \\ 4xy^3+y^3+\frac{1}{2}\ge 2x^2+\sqrt{1+\left(2x-y\right)^2} \end{cases}$.

HD:

Điều kiện: $xy-x^2y^2\ge 0\Leftrightarrow 0\le xy\le 1$.

Ta có: $xy-x^2y^2=\frac{1}{4}-\left(xy-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}\Leftrightarrow\sqrt{xy-x^2y^2}\le\frac{1}{2}$.

Khi đó: $y^6+y^3+2x^2=\sqrt{xy-x^2y^2}\le\frac{1}{2}$.

Suy ra: $4xy^3+y^3+\frac{1}{2}\ge 4xy^3+2y^3+y^6+2x^2\qquad(1)$

Mà: $4xy^3+y^3+\frac{1}{2}\ge 2x^2+\sqrt{1+(2x-y)^2}$ (2)

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta được:

$$4xy^3+1\ge y^6+4x^2+\sqrt{1+(2x-y)^2}\Leftrightarrow 1-\sqrt{1+(2x-y)^2}\ge (y^3-2x)^2\Leftrightarrow\begin{cases}1-\sqrt{1+(2x-y)^2}=0\\ y^3-2x=0\end{cases}.$$

35. Giải HPT: $\begin{cases}x_1^2+x_1-x_2-1=0\\ x_2^2+x_2-x_3-1=0\\ x_3^2+x_3-x_4-1=0\\ x_4^2+x_4-x_1-1=0\end{cases}$ **;** $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}$**.**

HD:

HPT đã cho có dạng: $\begin{cases}f(x_1)=x_2\\ f(x_2)=x_3\\ f(x_3)=x_4\\ f(x_4)=x_1\end{cases}$ với $f(t)=t^2+t-1$ đồng biến trong $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$, nghịch biến trong $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $f(t)\ge f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4}$. Suy ra: $x_k\ge -\frac{5}{4}\ \forall k=\overline{1,4}$.

* Trường hợp: $x_1\ge -\frac{1}{2}\Rightarrow f(x_4)\ge -\frac{1}{2}>-\frac{11}{6}=f\left(-\frac{5}{4}\right)$, mà $x_4\ge -\frac{5}{4}$ nên $x_4\in\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Lập luận tương tự: $x_3>-\frac{1}{2};x_2>-\frac{1}{2}$.

Nếu $x_1\le x_2$ thì $f(x_1)\le f(x_2)\Rightarrow x_2\le x_3\Rightarrow f(x_2)\le f(x_3)\Rightarrow x_3\le x_4\Rightarrow f(x_3)\le f(x_4)\Rightarrow x_4\le x_1$.

Từ đó: $x_1\le x_2\le x_3\le x_4\le x_1$ nên $x_1=x_2=x_3=x_4$.

Thay vào một trong bốn PT của hệ ta được $x_1=x_2=x_3=x_4=1$.

* Trường hợp: $x_1<-\frac{1}{2}$, nếu có $k\ne 1$ để $x_k\ge -\frac{1}{2}$ thì theo trên $x_k>-\frac{1}{2}\ \forall k$ là mâu thuẫn.

Vậy $x_k<-\frac{1}{2}\ \forall k$.

Nếu $x_1\le x_3$ thì $f(x_1)\ge f(x_3)\Rightarrow x_2\ge x_4\Rightarrow f(x_2)\le f(x_4)\Rightarrow x_3\le x_1\Rightarrow x_1=x_3$. Tương tự $x_2=x_4$.

Hệ trở thành: $\begin{cases}x_1=x_3,x_2=x_4\\ f(x_1)=x_2\\ f(x_2)=x_1\end{cases}\Rightarrow x_1+f(x_1)=x_2+f(x_2)$.

Đặt $g(x)=x+f(x)=x^2+2x-1$. Đồ thị của hàm số này có trục đối xứng là đường $x=-1$.

Từ $x_1+f(x_1)=x_2+f(x_2)$ suy ra: $g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow x_1$ và x_2 đối xứng qua $x=-1$ tức là: $x_1=-1-m$ và $x_1=-1+m$. Thay vào hệ $\begin{cases} x_1=x_3, x_2=x_4 \\ f(x_1)=x_2 \\ f(x_2)=x_1 \end{cases}$ ta tìm được $m=0$. Suy ra: $x_1=x_2=x_3=x_4=-1$.

36. Giải PT: $\dfrac{2012}{x+y}+\dfrac{x}{y+2011}+\dfrac{y}{4023}+\dfrac{2011}{2012+x}=\dfrac{2}{z}$ **;** $x,y,z\in\mathbb{Z}^+$**.**

HD:

* Ta có BĐT thức sau: $\dfrac{1}{ab}\ge\dfrac{4}{(a+b)^2}$; $a,b>0$.

* $\text{VP}=\dfrac{2}{z}\le 2\ \forall z\in\mathbb{Z}^+$. Dấu "=" xảy ra khi $z=1$.

$$\begin{aligned}
{}^*\text{VT} &=\left(\frac{2012}{x+y}+\frac{y}{4023}\right)+\left(\frac{x}{y+2011}+\frac{2011}{2012+x}\right)\\
&=\frac{2012.4023+y(x+y)}{(x+y).4023}+\frac{x(2012+x)+2011(y+2011)}{(y+2011)(x+2012)}\\
&\ge 4\frac{2012.4023+xy+y^2}{(x+y+4023)^2}+4\frac{x^2+2012x+2011y+2011^2}{(x+y+4023)^2}\\
&=2\frac{(x+y+4023)^2+(2012-y)^2+(2011-x)^2}{(x+y+4023)^2}\ge 2.
\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=2011, y=2012$.

37. Tìm m để bất phương trình sau vô nghiệm: $\left|\dfrac{2\left(\sin x+\dfrac{1}{\sin x}\right)^2-\left(\sin x-\dfrac{1}{\sin x}\right)-7}{3\left(\sin x+\dfrac{1}{\sin x}\right)^2+\left(\sin x-\dfrac{1}{\sin x}\right)+m-12}\right|>2.$

HD:

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\left|\frac{2\left(\sin x-\dfrac{1}{\sin x}\right)^2-\left(\sin x-\dfrac{1}{\sin x}\right)+1}{3\left(\sin x-\dfrac{1}{\sin x}\right)^2+\left(\sin x-\dfrac{1}{\sin x}\right)+m}\right|>2.$$

Đặt $t=\sin x-\dfrac{1}{\sin x}$ $(x\ne k\pi\ , t\in\mathbb{R})$.

Bài toán tương đương với việc tìm m để bất phương trình sau đúng với mọi t:

$$\left|\frac{2t^2-t+1}{3t^2+t+m}\right|\le 2.$$

Vì mẫu thức xác định $\forall t \in \mathbb{R}$ nên $\Delta = 1 - 12t < 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{12}$. Khi đó $3t^2 + t + m > 0 \ \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Vì $2t^2 - t + 1 > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ nên $\dfrac{2t^2 - t + 1}{3t^2 + t + m} \le 2 \ \ \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 4t^2 + 3t + 2m - 1 \ge 0 \ \ \forall t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta = 9 - 16(2m - 1) \le 0 \Leftrightarrow m \ge \dfrac{35}{12}$.

Vậy $m \ge \dfrac{35}{12}$ là giá trị cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

38. Giải phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x(1-x)^2} + \sqrt[4]{(1-x)^3} = \sqrt{1-x} + \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2(1-x)} \ \ ; \ x \in \mathbb{R}$

HD:

Điều kiện: $0 \le x \le 1$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[4]{x} \\ v = \sqrt[4]{1-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u \ge 0 \\ v \ge 0 \\ u^4 + v^4 = 1 \end{cases}$

Từ phương trình đã cho ta được :

$u^2 + uv^2 + v^3 = v^2 + u^2 + u^2 v$

$\Leftrightarrow (u - v)\left[u + v - \left(u^2 + uv + v^2\right)\right] = 0$

$\Leftrightarrow (u - v)(u + v)(1 - u - v) = 0$

$\Leftrightarrow (u - v)(1 - u - v) = 0$

(do u , v không âm và u , v không đồng thời bằng 0 nên $u + v > 0$).

Ta được các hệ :

$a) \begin{cases} u - v = 0 \\ u^4 + v^4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^4 = \dfrac{1}{2} \\ v^4 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$. Do đó $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ 1 - x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

$b) \begin{cases} u + v = 1 \\ u^4 + v^4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ \left[(u+v)^2 - 2uv\right]^2 - 2u^2v^2 = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ 2u^2v^2 - 4uv = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ \left[\begin{array}{l} uv = 0 \\ uv = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u + v = 1 \\ uv = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} u + v = 1 \\ uv = 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases} \end{array}\right.$. Do đó $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ 1 - x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ 1 - x = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

39. Giải phương trình : $\sqrt[2012]{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt[2010]{x + \sqrt{x^2 + 1}} = 2 \, ; \ x \in \mathbb{R}$.

HD:

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 1 \ge 0 \\ x \ge \sqrt{x^2 - 1} \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 1$.

Khi đó: $\sqrt[2010]{x+\sqrt{x^2+1}} > \sqrt[2010]{x+\sqrt{x^2-1}} \geq \sqrt[2012]{x+\sqrt{x^2-1}}$ (do $x \geq 1$).

Suy ra: $\sqrt[2012]{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt[2010]{x+\sqrt{x^2+1}} > \sqrt[2012]{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt[2012]{x+\sqrt{x^2-1}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được:
$\sqrt[2012]{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt[2012]{x+\sqrt{x^2-1}} \geq 2\sqrt{\sqrt[2012]{x-\sqrt{x^2-1}}.\sqrt[2012]{x+\sqrt{x^2-1}}} = 2$

Do đó: $\sqrt[2012]{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt[2010]{x+\sqrt{x^2+1}} > 2$. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

40. Giải PT: $\left(8\sin^3 x+1\right)^3-162\sin x+27=0$.

HD:

Đặt $u=2\sin x$ ĐK: $-2 \leq u \leq 2$

PT đã cho thành: $\left(u^3+1\right)^3-81u+27=0 \Leftrightarrow \left(u^3+1\right)^3=81u-27$.

Đặt $3v=u^3+1 \Rightarrow 3u=v^3-1$. Do đó, ta có:

$$\begin{cases} u^3+1=3v \\ v^3+1=3u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3+1=3v \\ \left(u^3-v^3\right)=3\left(v-u\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3+1=3v \\ \left(u-v\right)\left(u^2+uv+v^2+3\right)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^3+1=3v \\ \left(u-v\right)\left[\left(u+\dfrac{v}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}v^2+3\right]=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3+1=3v \\ u=v \end{cases} \Rightarrow 3u-u^3=1$$

Lúc đó:

$$6\sin x-8\sin^3 x=1 \Leftrightarrow 3\sin x-4\sin^3 x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 3x=\sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ 3x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3} \\ x=\dfrac{5\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right..$$

41. Tìm m để PT: $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=2012m$ có nghiệm.

HD:

$$\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=m \Leftrightarrow \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=2012m$$

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, xét: $A\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; B$\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và đỉnh $M\left(x;0\right)$ ta có: $AB=1$.

Với mọi điểm M thì $\left|AM-BM\right|<AB=1$.

Mà $AM=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$; BM=$\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

Suy ra: $\left|2012m\right|<1 \Leftrightarrow -1<2012m<1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2012}<m<\frac{1}{2012}$.

42. Giải HPT: $\begin{cases} x+\sqrt{1-y^2}=1 \\ y+\sqrt{1-x^2}=\sqrt{3} \end{cases}$; $x,y \in \mathbb{R}$.

HD:

ĐK: $-1 \leq x,\ y \leq 1$.

Đặt $x = \cos\alpha$; $y = \cos\beta$, $\alpha,\ \beta \in [0;\pi]$.

Hệ phương trình thành: $\begin{cases} \cos\alpha + \sin\beta = 1 \\ \cos\beta + \sin\alpha = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2\alpha + 2\cos\alpha.\sin\beta + \sin^2\beta = 1 & (1) \\ \cos^2\beta + 2\sin\alpha.\cos\beta + \sin^2\alpha = 3 & (2) \end{cases}$

Cộng vế theo vế của (1) và (2) ta được: $\sin(\alpha+\beta) = 1 \Leftrightarrow \alpha+\beta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (3)

Kết hợp (3) và PT: $\cos\alpha + \sin\beta = 1$ ta giải được:

$\cos\alpha = \frac{1}{2}$ hay $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (thỏa ĐK)

Vậy $(x,y) = \left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ là nghiệm duy nhất của hệ.

43. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$30.\sqrt[2012]{2011^{2012} - x^{2014}} + 4.\sqrt[2011]{2012^{2011} - x^{2014}} = 68378m$.

HD:

Điều kiện đủ: Nếu phương trình có nghiệm x_0 thì $-x_0$ cũng là nghiệm của nó. Do đó phương trình có nghiệm duy nhất thì điều kiện đủ là: $x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$. Thay vào phương trình, ta được: $m = 1$

Điều kiện cần: Với $m = 1$, phương trình có dạng:

$30.\sqrt[2012]{2011^{2012} - x^{2014}} + 4.\sqrt[2011]{2012^{2011} - x^{2014}} = 68378$

Đánh giá $30.\sqrt[2012]{2011^{2012} - x^{2014}} + 4.\sqrt[2011]{2012^{2011} - x^{2014}} \le 68378$. Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $x = 0$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m = 3$.

44. Giải PT: $\sqrt{11x^2 - 14x + 9} + \sqrt{11x^2 - 2x + 3} + \sqrt{17x^2 + 2x + 3} = 2\sqrt{2}(x+2)$; $x \in \mathbb{R}$

HD:

Ta có: $VT(*) = \sqrt{(3x-1)^2 + 2(2-x)^2} + \sqrt{(3x-1)^2 + 2(1+x)^2} + \sqrt{(3x-1)^2 + 2(2x+1)^2}$

$$\ge \sqrt{2(2-x)^2} + \sqrt{2(1+x)^2} + \sqrt{2(2x+1)^2} = \sqrt{2}\left[|2-x| + |1+x| + |2x+1|\right]$$

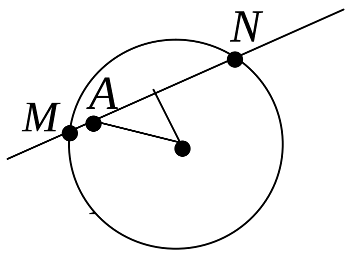
$$\ge \sqrt{2}\left[(2-x) + (1+x) + (2x+1)\right] = 2\sqrt{2}(x+2).$$

Vậy $VT(*) = 2\sqrt{2}(x+2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1=0 \\ 2-x \ge 0 \\ 1+x \ge 0 \\ 2x+1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x \le 2 \\ x \ge -1 \\ x \ge \frac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$

45. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m^2+2m)x + (1-m^2)y + m^2 - 2m - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 9 = 0 \end{cases}$.

Chứng minh rằng hệ phương trình trên luôn có hai nghiệm phân biệt (x_1, y_1) và (x_2, y_2). Tìm m để biểu thức $P = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

HD:
Nghiệm của hệ phương trình này là toạ độ giao điểm của đường thẳng $\Delta:\left(m^2+2m\right)x+\left(1-m^2\right)y+m^2-2m-2=0$ và đường tròn $(C):(x+1)^2+y^2=10$ tâm $I(-1;0)$, bán kính $R=\sqrt{10}$.
Ta có: $\left(m^2+2m\right)x+\left(1-m^2\right)y+m^2-2m-2=0$
$\Leftrightarrow (x-y+1)m^2+(2x-2)m+(y-2)=0$. Phương trình này nghiệm đúng với mọi m khi $x=1$, y = 2 nghĩa là: Δ luôn đi qua điểm cố định $A(1;2)$ và A nằm trong (C). Do đó Δ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1;y_1)$, $N(x_2;y_2)$. Vậy hệ đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt.



Ta có: $P=MN^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $IA\perp\Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{u_\Delta}=0 \Leftrightarrow \left(m^2-1\right).2+\left(m^2+2m\right).2=0$
$\Leftrightarrow 4m^2+4m-2=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$. Vậy $m=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$.

46. Tìm giá trị của m để hệ phương trình sau có đúng hai nghiệm: $\begin{cases}(x+y)^8=256\\ x^8+y^8=\left(\dfrac{30}{4}\right)^{2012}.m+2\end{cases}$

HD:
Giả sử $(x_0;y_0)$ là một nghiệm của hệ phương trình đã cho. Khi đó $(y_0;x_0)$, $(-x_0;-y_0)$, $(-y_0;-x_0)$ cũng là các nghiệm của hệ. Vì vậy điều kiện cần để hệ có đúng hai nghiệm là: $x_0\neq 0$, $x_0=y_0$.
Thay nghiệm này vào hệ phương trình trên ta được $x_0=\pm1$ và $m=0$.
Ngược lại với $m=0$, ta được hệ phương trình: $\begin{cases}(x+y)^8=256\\ x^8+y^8=2\end{cases}$.
Áp dụng liên tiếp hữu hạn lần bất đẳng thức Bunhiacoski, ta được:
$(x+y)^8\le 2^7\left(x^8+y^8\right)=256$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y$. Từ đây, ta dễ dàng giải ra được nghiệm của hệ là: $(1;1)$, $(-1;-1)$.

47. Giải PT: $\sqrt[4]{4(x+1)}=\dfrac{1}{8}\left(x^3-3x^2-8x+40\right)$; $x\in\mathbb{R}$.

HD:
Điều kiện: $x\ge -1$.
Phương trình đã cho tương đương với:
$$x^3-3x^2-8x+40=8\sqrt[4]{4x+4}.$$
Xét hàm số: $f(x)=x^3-3x^2-8x+40$; $g(x)=8\sqrt[4]{4x+4}$ trên $[-1;+\infty)$.
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho bốn số không âm, ta được:
$g(x)=\sqrt[4]{2^4.2^4.2^4.(4x+4)}\le\dfrac{1}{4}\left(2^4+2^4+2^4+4x+4\right)=x+13.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $4x+4=2^4 \Leftrightarrow x=3$.

Mặt khác $f(x)\ge x+13 \Leftrightarrow x^3-3x^2-8x+40\ge x+13$

$\Leftrightarrow x^3-3x^2-9x+27\ge 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2-9)\ge 0 \Leftrightarrow (x-3)^2(x+3)\ge 0$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=3$.

Ta có: $g(x)\le x+13\le f(x)$. Cả hai dấu "=" xảy ra khi $x=3$.

Vậy $f(x)=g(x)$ xảy ra khi $x=3$.

48. Giải HPT: $\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{(1-y)(1-x^2)}}+\dfrac{y}{\sqrt{(1-x)(1-y^2)}}=\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{(1-x^2)(1-y^2)}} \\ \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{(1-x^2)(1-y^2)}} \end{cases}$; $x,y\in\mathbb{R}$.

HD:

+ Điều kiện: $-1<x,y<1$.

+ Với điều kiện đó, hệ phương trình đã cho được viết thành:

$$\begin{cases} x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}=2\sqrt{2} \\ x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1 \end{cases}$$

+ Từ đây điều kiện của bài toán là: $\begin{cases} -1<x,y<1 \\ x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}>0 \\ x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1 \end{cases}$ (*)

+ Áp dụng bất đẳng thức Bunhiakovsky, ta có :

$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\le\sqrt{(x^2+1-x^2)(y^2+1-y^2)}=1$

Do đó : $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1\Leftrightarrow \begin{cases} 0<x,y<1 \\ \dfrac{x}{\sqrt{1-y^2}}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{y} \end{cases}$ (do kết hợp với (*))

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<x,y<1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \quad (1)$$

+ Lại áp dụng bất đẳng thức Bunhiakovsky hai lần (có kết hợp với (1)), ta được : $x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}\le\sqrt{(x^2+y^2)(x+y+2)}=\sqrt{x+y+2}$

$$\le\sqrt{\sqrt{(1+1)(x^2+y^2)}+2}=\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Do đó : $x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}=\sqrt{2+\sqrt{2}}\Leftrightarrow \begin{cases} 0<x,y<0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{1+y}}=\dfrac{y}{\sqrt{1+x}} \\ x^2+y^2=1 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

+ Từ (1) và (2) ta được hệ đã cho tương đương với: $\begin{cases} 0 < x, y < 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x = y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy $x = y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

49. Tìm tất cả các cặp số thực $(x; y)$ sao cho: $\begin{cases} x \geq y \geq 1 \\ 2x^2 - xy - 5x + y + 4 = 0 \end{cases}$.

HD:

$2x^2 - xy - 5x + y + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 4 + y(1-x) = 0$.

Ta có: $x \geq y \geq 1 \Rightarrow x(1-x) \leq y(1-x)$.

Như vậy: $0 = 2x^2 - 5x + 4 + y(1-x) \geq 2x^2 - 5x + 4 + x(1-x) = (x-2)^2 \Rightarrow x = y = 2$.

50. Giải PT: $\sqrt{\dfrac{x-7}{2011}} + \sqrt{\dfrac{x-6}{2012}} + \sqrt{\dfrac{x-5}{2013}} = \sqrt{\dfrac{x-2011}{7}} + \sqrt{\dfrac{x-2012}{6}} + \sqrt{\dfrac{x-2013}{5}}$ **;** $x \in \mathbb{R}$.

HD:

Điều kiện: $x \geq 2013$

PT đã cho tương đương với:

$$\left(\sqrt{\frac{x-7}{2012}} - \sqrt{\frac{x-2012}{7}}\right) + \left(\sqrt{\frac{x-6}{2011}} - \sqrt{\frac{x-2011}{6}}\right) + \left(\sqrt{\frac{x-5}{2010}} - \sqrt{\frac{x-2010}{5}}\right) = 0 \quad (*)$$

Cho $b > a > 0$ với $a + b = 2018$. Ta có: $\sqrt{\dfrac{x-a}{b}} - \sqrt{\dfrac{x-b}{a}} = \dfrac{\dfrac{x-a}{b} - \dfrac{x-b}{a}}{\sqrt{\dfrac{x-a}{b}} + \sqrt{\dfrac{x-b}{a}}} = \dfrac{(a-b)(x-a-b)}{ab\left(\sqrt{\dfrac{x-a}{b}} + \sqrt{\dfrac{x-b}{a}}\right)}$

Như vậy:

+ Nếu $x < 2018$ thì $VT(*) > 0$.

+ Nếu $x > 2018$ thì $VT(*) < 0$.,

+ Nếu $x = 2018$ thì thấy thỏa mãn PT (*).

Vậy $x = 2018$ là nghiệm của phương trình đã cho.

51. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ sao cho a và $4a + 3b + 2c$ cùng dấu. Chứng minh rằng phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ không thể có cả hai nghiệm cùng thuộc khoảng $(1; 2)$.

HD:

Ta có: $0 \leq \dfrac{4a + 3b + 2c}{a} = 4 + 3\dfrac{b}{a} + 2\dfrac{c}{a} = 4 - 3(x_1 + x_2) + 2x_1x_2 = (x_1 - 1)(x_2 - 2) + (x_1 - 2)(x_2 - 1)$ (*)

Giả sử PT: $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm $x_1, x_2 \in (1; 2)$ thì $(x_1 - 1)(x_2 - 2) + (x_1 - 2)(x_2 - 1) < 0$. Điều này mâu thuẫn với (*). Vậy ta có điều phải chứng minh.

52. Giải HBPT: $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4<0 \\ (x_1+x_2)(x_3+x_4)-x_1x_2-x_3x_4<0 \\ (x_1+x_2)x_3x_4-(x_3+x_4)x_1x_2<0 \\ x_1>0,x_2>0,x_3>0,x_4>0 \end{cases}$.

HD:

Đặt $A=-x_1-x_2+x_3+x_4$

$B=x_1x_2-x_1x_3-x_1x_4-x_2x_3-x_2x_4+x_3x_4$

$C=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4-x_1x_3x_4-x_2x_3x_4$

$D=x_1x_2x_3x_4$.

Từ HBPT đã cho ta có: $A,B,C,D>0$.

Xét $P(X)=(X-x_1)(X-x_2)(X+x_3)(X+x_4)=X^4+AX^3+BX^2+CX+D=0$ (1)

Vì tất cả các hệ số của PT (1) đều dương nên nó không có nghiệm dương. Vì thế $x_1\le 0,x_2\le 0$. Nhưng theo HBPT thì $x_1>0,x_2>0$.

Vậy HBPT đã cho vô nghiệm.

53. Giải HPT: $\begin{cases} 3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=4\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=5\left(z+\dfrac{1}{z}\right) \\ xy+yz+zx=1 \end{cases}$ **;** $x,y,z\in\mathbb{R}$.

HD:

Từ PT thứ nhất suy ra: x,y,z cùng dấu.

Nếu (x,y,z) là nghiệm của hệ thì $(-x;-y;-z)$ cũng là nghiệm của hệ.

Giả sử $x,y,z>0$. Đặt $x=\tan\dfrac{A}{2},y=\tan\dfrac{B}{2},z=\tan\dfrac{C}{2}$; $A,B,C\in(0;\pi)$.

Từ PT thứ hai ta có: $A+B+C=\pi\Rightarrow A,B,C$ là ba góc của một tam giác.

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

PT thứ nhất tương đương với: $\dfrac{\sin A}{3}=\dfrac{\sin B}{4}=\dfrac{\sin C}{5}\Rightarrow\triangle ABC$ là tam giác vuông tại $C\Rightarrow z=1$.

Nghiệm của HPT là: $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2};1\right),\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{2};-1\right)$.

54. Giải HPT: $\begin{cases} (1+x)(1+x^2)(1+x^4)=1+y^7 \\ (1+y)(1+y^2)(1+y^4)=1+x^7 \end{cases}$ **;** $x,y\in\mathbb{R}$.

HD:

Xét các trường hợp sau:

TH: $xy=0$. HPT có nghiệm $(0;0)$

TH: $xy<0$. Không mất tính tổng quát, giả sử $x>0>y$.

Khi đó: $1+y^7<1<(1+x)(1+x^2)(1+x^4)$. HPT vô nghiệm

TH: $x,y>0$; $x\ne y$. Không mất tính tổng quát, giả sử $x>y>0$.

Khi đó: $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)>1+x^7>1+y^7$. HPT vô nghiệm

TH: $x,y<0$; $x\ne y$. Không mất tính tổng quát, giả sử $x<y<0$.

HPT đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=(1-x)(1+y^7)\\(1-y)(1+y)(1+y^2)(1+y^4)=(1-y)(1+x^7)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-x^8=1-x+y^7-xy^7\\1-y^8=1-y+x^7-x^7y\end{cases}$$

Suy ra: $x^8-y^8=(x-y)+(x^7-y^7)-xy(x^6-y^6)$.

Từ $x<y<0$, $x^8-y^8>0$, $x-y<0$, $x^7-y^7<0$, $-xy<0$ và $x^6-y^6>0$.

HPT vô nghiệm

55. Cho a, b là hai số thực. Hãy **giải HPT:** $\begin{cases}\dfrac{x-y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=a\\\dfrac{y-x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=b\end{cases}$; $x,y\in\mathbb{R}$.

HD:

Đặt $u=x+y, v=x-y$. Khi đó $0<x^2-y^2=uv<1$; $x=\dfrac{u+v}{2}, v=\dfrac{u-v}{2}$.

HPT đã cho thành: $\begin{cases}\dfrac{\frac{u+v}{2}-\frac{u-v}{2}\sqrt{uv}}{\sqrt{1-uv}}=a\\\dfrac{\frac{u-v}{2}-\frac{u+v}{2}\sqrt{uv}}{\sqrt{1-uv}}=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v-(u-v)\sqrt{uv}=2a\sqrt{1-uv}\\u-v-(u+v)\sqrt{uv}=2b\sqrt{1-uv}\end{cases}$

Cộng vế theo vế và trừ vế theo vế của hai PT trong hệ này ta được: $\begin{cases}u-u\sqrt{uv}=a\sqrt{1-uv}\\v+v\sqrt{uv}=b\sqrt{1-uv}\end{cases}$

Nhân vế theo vế của hai PT trong hệ này ta được: $uv(1-uv)=(a^2-b^2)(1-uv)\Leftrightarrow uv=a^2-b^2$

56. Cho các số thực $m,n,p\in\mathbb{R}$ thỏa mãn: $30m+4n+2012=0$. Chứng minh phương trình $mx^2+nx+p=0$ luôn có nghiệm.

HD:

* Với $m=0$ thì $n=-\dfrac{2012}{4}p$. PT trở thành: $bx+c=0\Leftrightarrow p\left(1-\dfrac{2012}{4}x\right)=0$

+ $p=0$ suy ra PT có nghiệm $x\in\mathbb{R}$.

+ $p\neq 0$ suy ra PT có nghiệm $x=\dfrac{4}{2012}$.

* Với $m\neq 0$, ta có tam thức bậc hai: $f(x)=mx^2+nx+p$

Xét $mf\left(\dfrac{4}{2012}\right)=m\left(\dfrac{16}{2012^2}m+\dfrac{4}{2012}n+p\right)=\dfrac{m}{2012^2}\left[16m+2012(4n+2012p)\right]$

$$=\frac{m}{2012^2}(16m-2012.30m)<0.$$

Vậy PT luôn có nghiệm.

57. Giải HPT: $\begin{cases}y^3-6x^2+12x-8=0\\z^3-6y^2+12y-8=0\\x^3-6z^2+12z-8=0\end{cases}$ **;** $x,y,z\in\mathbb{R}$**.**

HD:

Cộng vế theo vế của ba PT ta được: $(x-2)^3+(y-2)^3+(z-2)^3=0$.

Nếu $x>2$ thì từ PT thứ nhất của hệ suy ra $y^3=6x(x-2)+8>8\Rightarrow y>2$

Với $y>2$ kết hợp với PT thứ hai ta suy ra $z>2$.

Do đó: $(x-2)^3+(y-2)^3+(z-2)^3>0$.

Nếu $x<2$ thì từ PT thứ ba ta suy ra: $6z(z-2)=x^3-8<0\Rightarrow 0<z<2$. Dễ dàng suy ra $0<y<2$.

Do đó: $(x-2)^3+(y-2)^3+(z-2)^3<0$.

Rõ ràng $x=y=z=2$ là nghiệm của HPT đã cho.

58. Cho $a>1$. **Giải HPT** sau: $\begin{cases}\sqrt{x+a}+\sqrt{y+a}+\sqrt{z+a}=3\sqrt{a+\dfrac{1}{a}}\\ \sqrt{a-x}+\sqrt{a-y}+\sqrt{a-z}=3\sqrt{a-\dfrac{1}{a}}\end{cases}$; $x,y\in\mathbb{R}$.

HD:

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có được: $A^2\le 3(3a+x+y+z)$; $B^2\le 3(3a-x-y-z)$.

Suy ra: $A^2+B^2\le 18a$. Lại có: $A^2+B^2=9\left(a+\dfrac{1}{a}+a-\dfrac{1}{a}\right)=18a$.

Do đó: $\begin{cases}\sqrt{x+a}=\sqrt{y+a}=\sqrt{z+a}=\sqrt{a+\dfrac{1}{a}}\\ \sqrt{a-x}=\sqrt{a-y}=\sqrt{a-z}=\sqrt{a-\dfrac{1}{a}}\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{a}$.

59. Giải PT: $4x=\sqrt{30+\dfrac{1}{4}\sqrt{30+\dfrac{1}{4}\sqrt{30+\dfrac{1}{4}\sqrt{x+30}}}}$ **;** $x\in\mathbb{R}$

HD:

Điều kiện: $x>0$.

Đặt $t=\dfrac{1}{4}\sqrt{30+\dfrac{1}{4}\sqrt{30+x}}$ ta thu được hệ: $\begin{cases}4x=\sqrt{30+\dfrac{1}{4}\sqrt{30+t}}\\ 4t=\sqrt{30+\dfrac{1}{4}\sqrt{30+x}}\end{cases}$.

Giả sử $x\ge t$ suy ra: $4t=\sqrt{30+\dfrac{1}{4}\sqrt{30+x}}\ge\sqrt{30+\dfrac{1}{4}\sqrt{30+t}}=4x\Rightarrow t\ge x$. Do đó $t=x$.

Từ đó ta có PT: $4x=\sqrt{30+\dfrac{1}{4}\sqrt{30+x}}$.

Đặt $z=\dfrac{1}{4}\sqrt{30+x}$ ta thu được hệ: $\begin{cases}4x=\sqrt{30+z}\\ 4z=\sqrt{30+x}\end{cases}$.

Giả sử $x\ge z\Rightarrow 4z=\sqrt{30+x}\ge\sqrt{30+z}=4x\Rightarrow z\ge x$. Do đó: $z=x$.

60. Giải HPT: $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ z^2+2z(x+y)=8 \\ z(y-x)=4\sqrt{3} \end{cases}$ **;** $x,y,z\in\mathbb{R}$ **.**

HD:

Cộng vế theo vế của PT thứ nhất cho PT thứ hai ta được:

$$2x^2+2y^2+z^2+2zx+2xy=12 \Leftrightarrow \left(x+\frac{z}{2}\right)^2+\left(y+\frac{z}{2}\right)^2=6.$$

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có:

$$(zy-zx)^2=\left[(2y)\left(x+\frac{z}{2}\right)+(-2x)\left(y+\frac{z}{2}\right)\right]^2 \le \left(4x^2+4y^2\right)\left[\left(x+\frac{z}{2}\right)^2+\left(y+\frac{z}{2}\right)^2\right]$$

$\Rightarrow (zy-zx)^2 \le 8.6 \Rightarrow z(y-x)\le 4\sqrt{3}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} z(y-x)\ge 0 \\ \dfrac{x+\frac{z}{2}}{2y}=\dfrac{y+\frac{z}{2}}{-2x} \end{cases}$.

61. Giải HPT: $\begin{cases} 2x(y^2+1)=y(y^2+9) \\ 2y(z^2+1)=z(z^2+9) \\ 2z(x^2+1)=x(x^2+9) \end{cases}$ **;** $x,y,z\in\mathbb{R}$ **.**

HD:

HPT đã cho tương đương với: $\begin{cases} x=\dfrac{y(y^2+9)}{2(y^2+1)} \\ y=\dfrac{z(z^2+9)}{2(z^2+1)} \\ z=\dfrac{x(x^2+9)}{2(x^2+1)} \end{cases}$.

Đặt $f(t)=\dfrac{t(t^2+9)}{2(t^2+1)}$; $t\in\mathbb{R}$.

Giả sử: $x=Max\{x,y,z\}$ tức là: $x\ge y$; $x\ge z$.

Ta có: $x\ge y \Leftrightarrow f(y)\ge f(z)\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow (y-z)\left[(yz-3)^2+(y-z)^2\right]\ge 0 \Leftrightarrow y\ge z \Leftrightarrow f(z)\ge f(x)$.

Lập luận tương tự ta được $z\ge x$. Vậy $x=y=z$.

62. Giải HPT: $\begin{cases} \sqrt{x-x^2}+\sqrt{y-y^2}+\sqrt{z-z^2}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}} \\ (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)=\dfrac{2\sqrt{3}}{9} \end{cases}$ **;** $x,y,z\in\mathbb{R}$ **.**

HD:

Điều kiện: $0 \le x, y, z \le 1$.

Giả sử: $x = Max\{x, y, z\} \Rightarrow \begin{cases} x \ge y \\ x \ge z \end{cases}$, có 2 trường hợp:

+ Nếu $x \ge y \ge z$ thì $(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z) \le 0$. HPT vô nghiệm.

+ Nếu $x \ge z \ge y$ thì ta sẽ chứng minh $P = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z) \le \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Thật vậy!

$$\begin{aligned} 4P &= 4(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z) \le 4(z-y)(x-z)(x+y+z) \\ &= 2(z-y)\left[\left(\sqrt{3}+1\right)(x-z)\right]\left[\left(\sqrt{3}-1\right)(x+y+z)\right] \\ &\le \frac{1}{27}\left[2(z-y)+\left(\sqrt{3}+1\right)(x-z)+\left(\sqrt{3}-1\right)(x+y+z)\right]^3 \\ &= \frac{1}{27}\left[2\sqrt{3}x-\left(3-\sqrt{3}\right)y\right]^3 \le \frac{1}{27}\left(2\sqrt{3}x\right)^3 \le \frac{8\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow P \le \frac{2\sqrt{3}}{9}. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 1; y = 0; z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Tương tự cho các trường hợp $y = Max\{x, y, z\}$; $z = Max\{x, y, z\}$

63. Tìm tất cả các bộ ba $(x;y;z)$ nguyên dương sao cho $\begin{cases} \dfrac{x-y\sqrt{2012}}{y-z\sqrt{2012}} \in \mathbb{Q} \\ x^2+y^2+z^2 \in \wp \end{cases}$; $\wp$: tập hợp các số nguyên tố.

HD:

Theo đề ta có: $\frac{x-y\sqrt{2012}}{y-z\sqrt{2012}} = \frac{m}{n}$ với $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$; $(m;n) = 1$

Suy ra: $xn - ym = (yn - zm)\sqrt{2012}$.

Vì $\sqrt{2012} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ nên $\begin{cases} ny - mz = 0 \\ nx - my = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{m}{n} \Rightarrow xz = y^2$.

Mặt khác: $x^2 + y^2 + z^2 = (x+z)^2 - 2xz + y^2 = (x+z)^2 - y^2 = (x+z+y)(x+z-y)$.

Do $x+y+z > 1$ và $x^2+y^2+z^2 \in \wp$ nên $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = x+y+z \\ z+z-y = 1 \end{cases}$.

Vì $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ nên $x^2 \ge x;\ y^2 \ge y;\ z^2 \ge z \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \ge x+y+z$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

64. Giải HPT: $\begin{cases} x\left(x^2+y^2+z^2\right) = xyz + 8 \\ y\left(x^2+y^2+z^2\right) = 2xyz - 2 \\ z\left(x^2+y^2+z^2\right) = 3xyz + 18 \end{cases}$ **;** $x, y, z \in \mathbb{R}$**.**

HD:

Đặt $a = x^2 + y^2 + z^2$; $b = xyz$.

HPT thành: $\begin{cases} xa = b+8 \\ ya = 2b-2 \\ za = 3b+18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2a^2 = b^2+2b+8 \\ y^2a^2 = 4b^2-8b+4 \\ z^2a^2 = 9b^2+108b+324 \end{cases}$.

Cộng vế theo vế của ba PT trong hệ ta được: $a^3 = 14b^2 + 116b + 392$.

Nhân vế theo vế của ba PT trong hệ ta được: $a^3b = (b+8)(2b-2)(3b+18)$.

Suy ra: $b(14b^2+116b+392) = (b+8)(2b-2)(3b+18) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow b = -2 \Rightarrow a = 6$.

65. Giải HPT: $\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2) = -5 \\ (y-z)(y^2+z^2) = 13 \\ (x-z)(x^2+z^2) = 40 \end{cases}$ **;** $x, y, z \in \mathbb{R}$

HD:

Ta thấy $x = y$ hoặc $y = -z$ hoặc $x = -z$ không là nghiệm của hệ đã cho.

Nhân PT thứ nhất, thứ hai, thứ ba của HPT đã cho lần lượt với $x-y$; $y+z$; $x+z$ ta thu được:

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 5(y-x) \\ y^4 - z^4 = 13(y+z) \\ z^4 - x^4 = -40(x+z) \end{cases}.$$

Cộng vế theo vế của từng PT ta được: $18y - 45x - 27z = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{2y-5x}{3}$

Ta có: $\dfrac{(x+y)(x^2+y^2)}{(x-z)(x^2+z^2)} = \dfrac{-5}{40} = -\dfrac{1}{8}$.

Thay $z = \dfrac{2y-5x}{3}$ vào PT này và biến đổi ta thu được $y = -2x$; $z = -3x$.

66. Tìm bộ ba số thực $(x;y;z)$ phân biệt thỏa mãn: $\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = y + \dfrac{1}{z} = z + \dfrac{1}{x} \\ 4x + y + 3z = 1 \\ xyz < 0 \end{cases}$; $x, y, z \in \mathbb{R}$.

HD:

Điều kiện: $x, y, z \neq 0$.

Đặt $x + \dfrac{1}{y} = y + \dfrac{1}{z} = z + \dfrac{1}{x} = k$. Ta có: $yz + 1 = kz$; $zx + 1 = kx$.

Từ đó suy ra: $k^2x = k(zx+1) = kzx + k = (yz+1)x + k = xyz + x + k \Rightarrow (k^2-1)x = xyz + k$.

Tương tự: $(k^2-1)y = xyz + k$. Suy ra: $(k^2-1)(x-y) = 0$. Do $x \neq y$ nên $k = \pm 1$.

Mặt khác $xyz = -k < 0$ nên $k = 1$. Khi đó: $x + \dfrac{1}{y} = y + \dfrac{1}{z} = z + \dfrac{1}{x} = 1 \Rightarrow x \neq 1$; $y = \dfrac{1}{1-x}, z = 1 - \dfrac{1}{x}$.

67. Giải HPT: $\begin{cases} \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = x\left(1+2\sqrt{1-y^2}\right) \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+y}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+\sqrt{xy}}} \end{cases}$ **;** $x, y \in \mathbb{R}$ **.**

HD:

Điều kiện: $-1 < x, y \le 1$ và $xy \ge 0$.

Từ PT thứ nhất suy ra: $0 < x \le 1$. Do đó: $0 \le y \le 1$.

Ta có: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+y}}\right)^2 \le 2\left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y}\right)$.

Dễ dàng chứng minh được: $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y} \le \dfrac{2}{1+\sqrt{xy}}$.

Khi đó: $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+y}} \le \dfrac{2}{\sqrt{1+\sqrt{xy}}}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$. Thay $y = x$ vào hệ đầu tiên ta được: $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = x\left(1+2\sqrt{1-x^2}\right)$.

Đặt $x = \sin t$; $t \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

68. Cho các PT: $x^2 + ax + 1 = 0$ (1) ; $x^2 + bx + 1 = 0$ (2) ; $x^2 + cx + 1 = 0$ (3).
Biết rằng tích một nghiệm của (1) với một nghiệm nào đó của (2) là nghiệm của (3).
Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$.

HD:

Gọi x_1, x_2 lần lượt là các nghiệm của (1) và (2).

Ta có: $x_1 + \dfrac{1}{x_1} = -a$; $x_2 + \dfrac{1}{x_2} = -b$; $x_1x_2 + \dfrac{1}{x_1x_2} = -c$.

Suy ra: $x_1^2 + \dfrac{1}{x_1^2} = a^2 - 2$; $x_2^2 + \dfrac{1}{x_2^2} = b^2 - 2$; $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = ab + c$.

69. Giải PT: $\left|x^2 + y^2 - 2xy + 3x - 2y - 1\right| + 4 = 2x - \left|x^2 - 3x + 2\right|$ **;** $x, y \in \mathbb{R}$ **.**

HD:

PT đã cho $\Leftrightarrow \left|(x-y)^2 + 2(x-y) + 1 + x - 2\right| + \left|x^2 - 3x + 2\right| = 2(x-2) \quad (x \ge 2)$

$$\Leftrightarrow \left|(x-y+1)^2 + (x-2)\right| + \left|(x-2)(x-1) = 2(x-2)\right|$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)^2 + (x-2) + (x-2)(x-1) = 2(x-2)$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)^2 + (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}.$$

70. Giải HPT: $\begin{cases} \dfrac{x_1 - 1}{2012} = \dfrac{x_2 - 2}{2011} = \ldots = \dfrac{x_{2012} - 2012}{1} \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{2012} = 2012.2013 \end{cases}$ **;** $x_1, x_2, \ldots, x_{2012} \in \mathbb{R}$ **.**

HD:

Ta có: $\frac{x_1-1}{2012}=\frac{x_2-2}{2011}=...=\frac{x_{2012}-2012}{1}=\frac{(x_1+x_2+...+x_{2012})-(1+2+...+2012)}{2012+2011+...+1}=1$

Suy ra: $x_1=x_2=...=x_{2012}=1$.

***Tổng quát hóa đề toán trên* Giải HPT:** $\begin{cases}\frac{x_1-a_1}{b_1}=\frac{x_2-a_2}{b_2}=...=\frac{x_{2012}-a_{2012}}{b_{2012}}\\ x_1+x_2+...+x_{2012}=a\end{cases}$ **;** $x_1,x_2,...,x_{2012}\in\mathbb{R}$

71. Giải HPT: $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ x_2+x_3+x_4=0\\ ....\\ x_{98}+x_{99}+x_{100}=0\\ x_{99}+x_{100}+x_1=0\\ x_{100}+x_2+x_1=0\end{cases}$ **;** $x_1,x_2,...,x_{100}\in\mathbb{R}$**.**

HD: Cộng vế theo vế của các PT trên ta thu được: $x_1+x_2+...+x_{100}=0$. Vế trái của PT này gồm 100 số hạng nên ta có thể viết lại PT này như sau: $(x_1+x_2+x_3)+(x_4+x_5+x_6)+...+(x_{97}+x_{98}+x_{99})+x_{100}=0$.

Theo đề mỗi tổng trong ngoặc đơn bằng 0 nên $x_{100}=0$.

Làm tương tự như trên, cuối cùng ta thu được: $x_1=x_2=...=x_{100}=0$.

72. Tìm các số nguyên x,y thỏa mãn PT: $\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+...+\sqrt{x}}}}_{2012}=y$.

HD:

Nếu x,y là các số nguyên thỏa mãn điều kiện đề bài thì $\sqrt{x+\sqrt{x}}=m$ và $\sqrt{x}=k$ là các số nguyên. Suy ra: $k(k+1)=m^2$.

Nếu $k>0$ thì $k^2<m^2<(k+1)^2\Rightarrow k<m<k+1$ và do đó m không phải là số nguyên, tức $k=0$.

Do đó $x=y=0$.

73. Giả sử x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 là các số nguyên dương thỏa mãn hệ sau: $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1000\\ x_1-x_2+x_3-x_4+x_5>0\\ x_1+x_2-x_3+x_4-x_5>0\\ -x_1+x_2+x_3-x_4+x_5>0\\ x_1-x_2+x_3+x_4-x_5>0\\ -x_1+x_2-x_3+x_4+x_5>0\end{cases}$

Tìm giá trị lớn nhất của $(x_1+x_3)^{x_2+x_4}$.

HD:

Nếu ký hiệu y_1,y_2,y_3,y_4,y_5 theo thứ tự là vế trái của các PT thứ hai đến thứ sáu trong hệ trên thì y_i,x_i $\left(i=\overline{1,5}\right)$ là các số nguyên dương. Ngoài ra $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1000$ và $y_1+y_2=2x_1$; $y_2+y_3=2x_2$; $y_3+y_4=2x_3$; $y_4+y_5=2x_4$; $y_5+y_6=2x_5$.

Từ đó suy ra các y_i cùng tính chẵn lẻ.

Để ý rằng: $x_1+x_3=\frac{1}{2}\left(y_1+y_2+y_3+y_4\right)=\frac{1}{2}\left(1000-y_5\right)$; $x_2+x_4=\frac{1}{2}\left(1000-y_1\right)$.

Nhưng $y_1;y_5$ là các số nguyên dương và là số chẵn nên $y_1\ge 2$; $y_5\ge 2$ suy ra: $x_1+x_3\le 499$; $x_2+x_4\le 499$. Do đó: $\left(x_1+x_3\right)^{x_2+x_4}\le 499^{499}$.

74. Giải HPT: $\begin{cases}1-x_1x_2=0\\1-x_1x_3=0\\\text{.................}\\1-x_{n-1}x_n=0\\1-x_nx_1=0\end{cases}$ **;** $x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{R}$**.**

HD:

Dễ thấy các ẩn $x_1,x_2,...,x_n\ne 0$. Từ PT thứ nhất và thứ hai ta được: $x_1=x_3$. Từ PT thứ ba và thứ tư ta được: $x_3=x_5$ .... Bây giờ nếu n lẻ thì theo cách suy luận này ta được: $x_1=x_3=x_5=...=x_{n-2}=x_n$.

Tương tự ta cũng có: $x_1=x_4=...=x_{n-1}$. Từ PT cuối cùng ta được: $x_1^2=1\Leftrightarrow x_1=\pm1$. Thay giá trị này vào PT thứ nhất ta được: $x_2=\pm1$.

Đối với n lẻ ta có: $x_1=x_2=...=x_n=\pm1$. Thử lại thấy đúng.

Đối với n chẵn, tương tự như trên ta được: $x_1=x_3=...=x_{n-1}$; $x_2=x_4=...=x_n$.

Từ PT đầu tiên ta có: $x_2=\frac{1}{x_1}$. Giả sử $x_1=x_3=...=x_{n-1}=a\Rightarrow x_2=x_4=...=x_n=\frac{1}{a}$ $\left(a\ne 0\right)$.

75. Giải HPT: $\begin{cases}x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_4=2\\x_1x_2+x_1x_4+x_2x_4+x_3=2\\x_1x_3+x_1x_4+x_3x_4+x_2=2\\x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4+x_1=2\end{cases}$ **;** $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}$**.**

HD:

Trừ theo từng vế từng đôi một các PT của hệ đã cho, ta được: $\begin{cases}\left(x_1-x_2\right)\left(x_3+x_4-1\right)=0\\\left(x_1-x_3\right)\left(x_2+x_4-1\right)=0\\\left(x_1-x_4\right)\left(x_2+x_3-1\right)=0\\\left(x_2-x_3\right)\left(x_1+x_4-1\right)=0\\\left(x_2-x_4\right)\left(x_1+x_3-1\right)=0\\\left(x_3-x_4\right)\left(x_1+x_2-1\right)=0\end{cases}$

Từ đó xét 4 trường hợp:

TH1: $x_1=x_2=x_3=x_4$

TH2: $x_1=x_2=x_3\ne x_4$

TH3: $x_1=x_2\ne x_3$ và $x_1\ne x_4$

TH4: $x_i\ne x_j$ với $i\ne j$.