SỞ GD&ĐT NGHỆ AN
TRƯỜNG THPT ĐẶNG THÚC HỨA

MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỌN LỌC BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN

VIẾT BỞI : PHẠM KIM CHUNG – THÁNG 12 NĂM 2010

DANH MỤC CÁC TÀI LIỆU THAM KHẢO

1.	Các diễn đàn : www.dangthuchua.com , www.math.vn , www.mathscope.org , www.maths.vn ,www.laisac.page.tl, www.diendantoanhoc.net , www.k2pi.violet.vn , www.nguyentatthu.violet.vn , ...
2.	Đề thi HSG Quốc Gia, Đề thi HSG các Tỉnh – Thành Phố trong nước, Đề thi Olympic 30-4
3.	Bộ sách : Một số chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi (Nguyễn Văn Mậu – Nguyễn Văn Tiến)
4.	Tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ
5.	Bộ sách : CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI ... (Trần Phương - Lê Hồng Đức)
6.	Bộ sách : 10.000 BÀI TOÁN SƠ CẤP (Phan Huy Khải)
7.	Bộ sách : Toán nâng cao (Phan Huy Khải)
8.	Giải TOÁN HÌNH HỌC 11 (Trần Thành Minh)
9.	Sáng tạo Bất đẳng thức (Phạm Kim Hùng)
10.	Bất đẳng thức – Suy luận và khám phá (Phạm Văn Thuận)
11.	Những viên kim cương trong Bất đẳng thức Toán học (Trần Phương)
12.	340 bài toán hình học không gian (I.F . Sharygin)
13.	Tuyển tập 200 Bài thi Vô địch Toán (Đào Tam)
14.	... và một số tài liệu tham khảo khác .
15.	Chú ý : Những dòng chữ màu xanh chứa các đường link đến các chuyên mục hoặc các website.

PHẦN I : PHƯƠNG TRÌNH – BPT - HỆ PT VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐẠO HÀM

1. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số : $y=-2x+2+m\sqrt{x^2-4x+5}$ có cực đại . ĐS : m < -2

2. Cho hàm số : $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{1+x\sin^2 x}-1, & x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$. Tính đạo hàm của hàm số tại x = 0 và chứng minh hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

3. Tìm cực trị của hàm số : $y=f(x)=\sqrt{|x|}(x-3)$. ĐS : $x=0$; x=1

4. Xác định các giá trị của tham số m để các phương trình sau có nghiệm thực :

a) $(4m-3)\sqrt{x+3}+(3m-4)\sqrt{1-x}+m-1=0$. ĐS : $\frac{7}{9}\le m\le\frac{9}{7}$

b) $\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x}=m$. ĐS : $0<m\le 1$

c) $m\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}+2\right)=2\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$

5. Xác định số nghiệm của hệ phương trình : $\begin{cases}x^2+y^3=2\\ \log_3 x\log_2 y=1\end{cases}$ ĐS : 2

6. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}e^{y^2-x^2}=\dfrac{x^2+1}{y^2+1}\\ 3\log_3(x+2y+6)=2\log_2(x+y+2)+1\end{cases}$. ĐS : (x,y)=(7;7)

7. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}x+\sqrt{x^2-2x+2}=3^{y-1}+1\\ y+\sqrt{y^2-2y+2}=3^{x-1}+1\end{cases}$

8. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}\left(1+4^{2x-y}\right).5^{y-2x+1}=2^{2x-y+1}+1\\ y^3+4x+\ln\left(y^2+2x\right)+1=0\end{cases}$

9. Giải phương trình : $(x-3)\left[\log_3(x-5)+\log_5(x-3)\right]=x+2$

10. Giải bất phương trình : $\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}\le 4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}$. ĐS : $\frac{1}{2}\le x\le 7$

11. Giải bất phương trình : $3\sqrt{3-2x}+\dfrac{5}{\sqrt{2x-1}}-2x\le 6$

12. Giải phương trình : $3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4x+2)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=0$

13. Giải phương trình : $x^3-4x^2-5x+6=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$

14. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm : $\begin{cases}2\sqrt{xy-y}+x+y=5\\ \sqrt{5-x}+\sqrt{1-y}=m\end{cases}$. ĐS : $m\in\left[1;\sqrt{5}\right]$

15. Xác định m để phương trình sau có nghiệm thực : $\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\left[m\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt[4]{x(x-1)}\right]=1$.

16. Tìm m để hệ có nghiệm: $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=3\\ x\sqrt{y+1}+y\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=m\end{cases}$

17. Giả sử f(x) = ax3 + bx2 + cx + d (a≠ 0) đạt cực đại tại $x_1;x_2$. CMR: $\dfrac{f'''(x)}{f'(x)}<\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{f''(x)}{f'(x)}\right]^2,\forall x\neq x_1,x_2$

18. Cho hàm số : $f(x)=\cos^2 2x+2(\sin x+\cos x)^3-3\sin 2x+m$. Tìm m sao cho $f^2(x)\le 36,\ \forall m$

19. Trong các nghiệm(x;y) của BPT : $\log_{x^2+y^2}(x+y)\ge 1$. Tìm nghiệm để P = x + 2y đạt GTLN

20. ***(Đề thi HSG Tỉnh Nghệ An năm 2009)*** Giải phương trình : $2009^x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=1$. ĐS : x=0

21. ***(Đề thi HSG Tỉnh Nghệ An năm 2009)*** . Tìm *m* để hệ phương trình sau có ba nghiệm phân biệt :

$$\begin{cases}x+y=m\\ (y+1)x^2+xy=m(x+1)\end{cases}\quad \text{ĐS}: |m|\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

22. Giải hệ PT : $\begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ x^3 - 2y^3 = 3\left(x^2 - 4y^2\right) - 4\left(x - 8y\right) \end{cases}$

23. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^4 + x^3y + 9y = y^3x + y^2x^2 + 9x \\ x\left(y^3 - x^3\right) = 7 \end{cases}$. ĐS : (x,y)=(1;2)

24. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \left(4x^2 + 1\right)x + \left(y - 3\right)\sqrt{5 - 2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7 \end{cases}$

25. Tìm *m* để hệ phương trình sau có nghiệm : $\begin{cases} 2\sqrt{xy - y} + x + y = 5 \\ \sqrt{5 - x} + \sqrt{1 - y} = m \end{cases}$. ĐS : $m \in \left[1;\sqrt{5}\right]$

26. Xác định *m* để phương trình sau có nghiệm thực : $\left(\sqrt{x} + \sqrt{x - 1}\right)\left[m\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}} + \sqrt[4]{x\left(x - 1\right)}\right] = 1$.

27. Tìm *m* để hệ phương trình : $\begin{cases} 3\left(x + 1\right)^2 + y - m = 0 \\ x + \sqrt{xy} = 1 \end{cases}$ có ba cặp nghiệm phân biệt .

28. Giải hệ PT : $\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1 \end{cases}$

29. **(Đề thi HSG Tỉnh Nghệ An năm 2008)** .Giải hệ phương trình : $\begin{cases} e^{x-y} = \dfrac{\sin x}{\sin y} \\ \sin 2x - \cos 2y = \sin x + \cos y - 1 \\ x,y \in \left(0;\dfrac{\Pi}{4}\right) \end{cases}$

30. Giải phương trình : $16x^3 - 24x^2 + 12x - 3 = \sqrt[3]{x}$

31. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \left(1 + 4^{2x-y}\right).5^{y-2x+1} = 2^{2x-y+1} + 1 \\ y^3 + 4x + \ln\left(y^2 + 2x\right) + 1 = 0 \end{cases}$

32. Giải phương trình : $3^x = 1 + x + \log_3\left(1 + 2x\right)$

33. Giải phương trình : $-2x^3 + 10x^2 - 17x + 8 = 2x^2\sqrt[3]{5x - x^3}$ **ĐS**

34. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 \\ \sqrt{4x + 5} + \sqrt{y^2 + 8} = 6 \end{cases}$

35. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 22} - \sqrt{y} = y^2 + 2y + 1 \\ \sqrt{y^2 + 2y + 22} - \sqrt{x} = x^2 + 2x + 1 \end{cases}$

36. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = \dfrac{1}{2} \\ \left(x + \dfrac{1}{y}\right)^y = \left(y + \dfrac{1}{x}\right)^x \end{cases}$

37. **(Đề thi HSG Tỉnh Quảng Ninh năm 2010)**. Giải phương trình : $(5x - 6)^2 - \dfrac{1}{\sqrt{5x - 7}} = x^2 - \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$

Lời giải : ĐK : $x > \dfrac{7}{5}$

Cách 1 : PT $\Leftrightarrow 6(4x - 6)(x - 1) + \dfrac{4x - 6}{\sqrt{(x - 1)(5x - 7)}.\left[\sqrt{x - 1} + \sqrt{5x - 7}\right]} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Cách 2 : Viết lại phương trình dưới dạng : $\left(5x - 6\right)^2 - \dfrac{1}{\sqrt{(5x - 6) - 1}} = x^2 - \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$

Và xét hàm số : $f(t) = t^2 - \dfrac{1}{\sqrt{t - 1}}, t > \dfrac{5}{7}$

38. (Đề thi HSG Tỉnh Quảng Ninh năm 2010) Xác định tất cả các giá trị của tham số m để BPT sau có nghiệm :

$x^3+3x^2-1\le m(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})^3$

HD : Nhân liên hợp đưa về dạng : $\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)^3(x^3+3x^2-1)\le m$

39. (Đề thi HSG Tỉnh Quảng Bình năm 2010). Giải phương trình :

$$x^3+3x^2+4x+2=(3x+2)\sqrt{3x+1}$$

HD : PT $\Leftrightarrow (x+1)^3+(x+1)=\left(\sqrt{3x+1}\right)^3+\sqrt{3x+1}$. Xét hàm số : $f(t)=t^3+t, t>0$

40. (Đề thi HSG Tỉnh Hải Phòng năm 2010) . Giải phương trình :

$$2\sqrt[3]{2x-1}=27x^3-27x^2+13x-2$$

HD : PT $\Leftrightarrow (2x-1)+2\sqrt[3]{2x-1}=(3x-1)^3+2(3x-1)\Rightarrow f(\sqrt[3]{2x-1})=f(3x-1)$

41. (Đề thi Khối A – năm 2010) Giải hệ phương trình : $\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7\end{cases}$

HD : Từ pt (1) cho ta : $[(2x)^2+1].2x=\left[\left(\sqrt{5-2y}\right)^2+1\right]\sqrt{5-2y}\Rightarrow f(2x)=f(\sqrt{5-2y})$

Hàm số : $f(t)=(t^2+1).t\Rightarrow f'(t)=3t^2+1>0\Rightarrow\ 2x=\sqrt{5-2y}\Rightarrow 4x^2=5-2y\Rightarrow y=\dfrac{5-4x^2}{2}$

Thế vào (2) ta có : $4x^2+\left(\dfrac{5-4x^2}{2}\right)^2+2\sqrt{3-4x}=7$, với $0\le x\le\dfrac{3}{4}$ (Hàm này nghịch biến trên khoảng) và có nghiệm duy nhất : $x=\dfrac{1}{2}$.

42. (Đề thi HSG Tỉnh Nghệ An năm 2008). Cho hệ: $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\\ \sqrt{x+7}+\sqrt{y+7}\le a\end{cases}$ (a là tham số).

Tìm a để hệ có nghiệm (x;y) thỏa mãn điều kiện $x\ge 9$.

HD : Đứng trước bài toán chứa tham số cần lưu ý điều kiện chặt của biến khi muốn quy về 1 biến để khảo sát : $4-\sqrt{x}=\sqrt{y}\ge 0\Rightarrow x\le 16$. Đặt $t=\sqrt{x}, t\in[3;4]$ và khảo sát tìm Min . **ĐS :** $a\ge 4+2\sqrt{2}$

43. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}y^4-4x+2^{xy-2x+4}=5\\ 2^x+x^3=y^3+2^y\end{cases}$

44. Xác định m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x : $\left(e^{\sin x}-e+1\right)^2-2e^{\sin x}\left[e^{\sin x}-(e-1)\sin x-1\right]\le 1$

45. (Đề thi HSG Tỉnh Thừa Thiên Huế năm 2003). Giải PT : $\log_{2+\sqrt{5}}(x^2-2x-11)=\log_{2\sqrt{2+\sqrt{5}}}(x^2-2x-12)$

46. Định giá trị của m để phương trình sau có nghiệm: $(4m-3)\sqrt{x+3}+(3m-4)\sqrt{1-x}+m-1=0$

47. (Olympic 30-4 lần thứ VIII). Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}e^{y^2-x^2}=\dfrac{x^2+1}{y^2+1}\\ 3\log_3(x+2y+6)=2\log_2(x+y+2)+1\end{cases}$

48. Các bài toán liên quan đến định nghĩa đạo hàm :

☞ Cho $f(x)=\begin{cases}(x+1)e^{-x}, x>0\\ -x^2-ax+1, x\le 0\end{cases}$. Tìm a để tồn tại $f'(0)$.

☞ Cho $F(x)=\begin{cases}a\cos x+b\sin x,\ x\le 0\\ ax+b+1,\ x<0\end{cases}$. Tìm a,b để tồn tại $f'(0)$.

☞ $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4},\ x>0\\ 0,\quad ,x=0\end{cases}$ và $f(x)=\begin{cases}x\ln x, x>0\\ 0,\ x=0\end{cases}$. CMR : $F'(x)=f(x)$

☞ Cho f(x) xác định trên R thỏa mãn điều kiện : $\forall a>0$ bất đẳng thức sau luôn đúng $\forall x\in R$: $|f(x+a)-f(x)-a|<a^2$. Chứng minh f(x) là hàm hằng .

☞ Tính giới hạn : $N_1 = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt[3]{\tan x}-1}{2\sin^2 x-1}$ Tính giới hạn : $N_2 = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{-2x^2}-\sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)}$

☞ Tính giới hạn : $N_3 = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+1}-\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$ Tính giới hạn : $N_4 = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\sin x}$

☞ Tính giới hạn : $N_5 = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{\sin 10x}$ Tính giới hạn : $N_6 = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{-2x^2}-\sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)}$

☞ Tính giới hạn : $N_7 = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{e^{\sin 2x}}-\sqrt[3]{e^{\sin 3x}}}{\sin 4x}$ Tính giới hạn : $N_8 = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{4^x-x^4}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}$

☞ Tính giới hạn : $N_9 = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2^{3x}.3^{2x}-\cos 4x}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}$

☞ Cho $P(x)$ là đa thức bậc n có n nghiệm phân biệt $x_1;x_2;x_3...x_n$. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\dfrac{P''(x_1)}{P'(x_1)}+\dfrac{P''(x_2)}{P'(x_2)}+...+\dfrac{P''(x_n)}{P'(x_n)}=0$

b) $\dfrac{1}{P'(x_1)}+\dfrac{1}{P'(x_2)}+...+\dfrac{1}{P'(x_n)}=0$

☞ Tính các tổng sau :

a) $T_n(x)=\cos x+2\cos 2x+...+n\cos nx$

b) $T_n(x)=\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2^2}\tan\dfrac{x}{2^2}+...+\dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{x}{2^n}$

c) CMR : $2.1.C_n^2+3.2.C_n^3+...+n(n-1)C_n^n=n(n-1).2^{n-2}$

d) $S_n(x)=\sin x+4\sin 2x+9\sin 3x+...+n^2\sin nx$

e) $S_n(x)=\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}+\dfrac{2x+3}{(x+1)^2(x+2)^2}+...+\dfrac{2x+(2n-1)}{\left[x+(n-1)\right]^2(x+n)^2}$

49. Các bài toán liên quan đến cực trị của hàm số :

a) Cho $\alpha\in R: a+b\ge 0$. Chứng minh rằng : $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{\alpha}\le\dfrac{a^n+b^n}{2}$

b) Chứng minh rằng với $a>3, n\ge 2$ ($n\in N$, n chẵn) thì phương trình sau vô nghiệm :
$(n+1)x^{n+2}-3(n+2)x^{n+1}+a^{n+2}=0$

c) Tìm tham số m để hàm số sau có duy nhất một cực trị : $y=(m+1)\left[\dfrac{x^2}{1+x^2}\right]^2-3m\left[\dfrac{x^2}{1+x^2}\right]+4m$

d) Cho $n\ge 3, n\in N$ (n lẻ) . CMR : $\forall x\ne 0$, ta có : $\left[1+x+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^n}{n!}\right]\left[1-x+\dfrac{x^2}{2!}-...-\dfrac{x^n}{n!}\right]<1$

e) Tìm cực trị của hàm số : $y=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}$

f) Tìm a để hàm số : $y=f(x)=-2x+a\sqrt{x^2+1}$ có cực tiểu .

g) Tìm m để hàm số : $y=\dfrac{m\sin x-\cos x-1}{m\cos x}$ đạt cực trị tại 3 điểm phân biệt thuộc khoảng $\left(0;\dfrac{9\pi}{4}\right)$

50. Các bài toán chứng minh phương trình có nghiệm :

a) Cho các số thực a,b,c,d,e . Chứng minh rằng nếu phương trình : $ax^2+\left(b+c\right)x+d+e=0$ có nghiệm thực thuộc nửa khoảng $[1;+\infty)$ thì phương tình : $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ có nghiệm.

b) Cho phương tình : $P(x)=x^5-5x^4+15x^3-x^2+3x-7=0$. Chứng minh rằng, phương trình có một nghiệm thực duy nhất.

PHẦN II : PHƯƠNG TRÌNH HÀM-ĐA THỨC

1. Tìm hàm số : $f:R\to R$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$

b) $f(x+y)=f(x)+f(y)+2x^2+3xy+2y^2,\ \forall x,y\in R$

2. Tìm hàm số : $f:R\to R$ thoả mãn điều kiện sau : $f(x-f(y))=f(x+y^{2008})+f(f(y)+y^{2008})+1,\ \forall x,y\in R$

3. Tìm hàm số : $f:R\to R$ thoả mãn điều kiện sau : $f(x+\cos(2009y))=f(x)+2009\cos(f(y)),\ \forall x,y\in R$

4. Tìm hàm số : $f:R\to R$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau :

c) $f(x)\ge e^{2009x}$

d) $f(x+y)\ge f(x).f(y),\ \forall x,y\in R$

5. Tìm hàm số : $f:R\to R$ thoả mãn điều kiện sau : $f(x+y)=f(x).e^{f(y)-1},\ \forall x,y\in R$

6. Tìm hàm số : $f:R\to R$ thoả mãn điều kiện sau : $f(x.f(x+y))=f(y.f(x))+x^2$

7. **(Đề thi HSG Tỉnh Hải Phòng năm 2010)** Tìm hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn :

$$f^2(x)+2yf(x)+f(y)=f(y+f(x)),\ \forall,x,y\in R$$

PHẦN III : BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ

1. Cho $a,b,c\in R: a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng : $a^2b+b^2c+c^2a\le 3$

2. Cho các số thực không âm a,b,c . Chứng minh rằng :
$a^2b^2(a-b)^2+b^2c^2(b-c)^2+c^2a^2(c-a)^2\ge(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$

3. Cho các số thực a,b,c . Chứng minh rằng : $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+\frac{81}{4}\sum\frac{a^2b}{(2a+b)^2}\ge\frac{13}{4}(a+b+c)$

4. Cho các số thực không âm a,b,c thoả mãn : $a+b+c+36abc=2$. Tìm Max của : $P=a^7b^8c^9$

5. Cho 3 số thực dương tuỳ ý x,y,z . CMR : $\sqrt{\frac{a}{a+b}}+\sqrt{\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+a}}\le\frac{3}{\sqrt{2}}$

6. Cho a,b,c >0 . Tìm GTNN của : $P=\frac{(a+b+c)^6}{ab^2c^3}$

7. Cho các số thực dương x,y,z thõa mãn : $x^2+y^2+z^2=1$

CMR : $\frac{2x-(y-z)^2}{yz}+\frac{2y-(z-x)^2}{zx}+\frac{2z-(x-y)^2}{xy}$

8. Cho các số thực dương a,b,c . **CMR** : $\frac{bc}{a+3b+2c}+\frac{ca}{b+3c+2a}+\frac{ab}{c+3a+2b}\le\frac{a+b+c}{6}$

9. Cho các số thực dương a,b,c . CMR : $\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}$

10. Cho các số thực thỏa mãn điều kiện : $\frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{b^2+2}+\frac{1}{c^2+2}=1$. CMR : $ab+bc+ca\le 3$

11. Cho các số thực dương thỏa mãn điều kiện : $a^2+b^2+c^2=3$. **CMR** :
$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\ge 3$$

12. Cho x,y,z là 3 số thực dương tùy ý . CMR : $\sqrt{\frac{x}{x+y}}+\sqrt{\frac{y}{y+z}}+\sqrt{\frac{z}{z+x}}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$

13. Cho các số thực dương a,b,c . **CMR** : $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$

14. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn : abc=1 . CMR : $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}$

15. Cho 3 số thực x,y,z thỏa mãn : xyz=1 và $(x-1)(y-1)(z-1)\ne 0$. CMR :
$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{y}{y-1}\right)^2+\left(\frac{z}{z-1}\right)^2\ge 1$$

16. Cho a,b,c là các số thực dương bất kỳ . **CMR** : $\frac{(3a-b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(3b-c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(3c-a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\ge\frac{9}{2}$

17. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn : $a^2+b^2+c^2=1$. CMR :
$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca}\le\frac{9}{2}$$

18. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn : $a^2+b^2+c^2=9$. **CMR** : $2(a+b+c)\le 10+abc$

19. Cho a,b,c là các số thực dương : a+b+c =1 . CMR : $\frac{a^3}{(1-a)^2}+\frac{b^3}{(1-b)^2}+\frac{c^3}{(1-c)^2}\ge\frac{1}{4}$

20. **(Chọn ĐTHSG QG Nghệ An năm 2010)** Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn :
$9(a^4+b^4+c^4)-25(a^2+b^2+c^2)+48=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :
$$F=\frac{a^2}{b+2c}+\frac{b^2}{c+2a}+\frac{c^2}{a+2b}$$

Lời giải :

Từ giả thiết :

$$9(a^4+b^4+c^4)-25(a^2+b^2+c^2)+48=0 \Rightarrow 25(a^2+b^2+c^2)=48+9(a^4+b^4+c^4)\geq 48+3(a^2+b^2+c^2)^2$$

$$\Rightarrow 3(a^2+b^2+c^2)^2-25(a^2+b^2+c^2)+48\leq 0 \Rightarrow 3\leq a^2+b^2+c^2\leq \frac{16}{3}$$

Ta lại có :

$$F=\frac{a^2}{b+2c}+\frac{b^2}{c+2a}+\frac{c^2}{a+2b}=\frac{a^4}{a^2(b+2c)}+\frac{b^4}{b^2(c+2a)}+\frac{c^4}{c^2(a+2b)}\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2b+b^2c+c^2a)+2(a^2c+b^2a+c^2b)}$$

Lại có : $a^2b+b^2c+c^2a=a(ab)+b(bc)+c(ca)\leq \sqrt{(a^2+b^2+c^2)[a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2]}\leq \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3}}$

Tương tự : $(a^2c+b^2a+c^2b)\leq \sqrt{a^2+b^2+c^2}.\frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{3}}$

Từ đó ta có : $F\geq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\geq 1$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi : a=b=c=1.

ĐÁP ÁN CỦA SỞ GD&ĐT NGHỆ AN

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$\frac{a^2}{b+2c}+\frac{(b+2c)a^2}{9}\geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b+2c}\frac{(b+2c)a^2}{9}}=\frac{2a^2}{3}.$$

Tương tự $\frac{b^2}{c+2a}+\frac{(c+2a)b^2}{9}\geq\frac{2b^2}{3}$, $\frac{c^2}{a+2b}+\frac{(a+2b)c^2}{9}\geq\frac{2c^2}{3}$.

Suy ra:
$$F=\frac{a^2}{b+2c}+\frac{b^2}{c+2a}+\frac{c^2}{a+2b}$$
$$\geq\frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)-\frac{1}{9}\left[a^2(b+2c)+b^2(c+2a)+c^2(a+2b)\right]\ (*).$$

Lại áp dụng AM – GM, ta có

$$a^2c+b^2a+c^2b\leq\frac{a^3+a^3+c^3}{3}+\frac{b^3+b^3+a^3}{3}+\frac{c^3+c^3+b^3}{3}=a^3+b^3+c^3\ (**).$$

Từ (*) và (**) suy ra:

$$F\geq\frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)-\frac{1}{9}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\quad\geq\frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)-\frac{1}{9}\left(a^2+b^2+c^2\right)\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}.$$

Đặt $t=\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$, từ giả thiết ta có:

$$25\left(a^2+b^2+c^2\right)-48=9\left(a^4+b^4+c^4\right)\geq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

$$\Rightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-25\left(a^2+b^2+c^2\right)+48\leq 0\Rightarrow 3\leq a^2+b^2+c^2\leq\frac{16}{3}.$$

Do đó $F\geq\frac{2}{9}t^2-\frac{1}{27}t^3=f(t)$ với $t\in\left[3;4\right]$ (***).

Mà $\min\limits_{t\in[3;4]} f(t)=f(3)=1$ (****). Từ (***) và (****) suy ra $F\geq 1$.

Vậy $\min F=1$ xảy ra khi $a=b=c=1$.

21. (Đề thi HSG Tỉnh Nghệ An năm 2009) Cho các số thực dương x,y,z . Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{36}{9+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}$$

Lời giải :

BĐT đã cho tương đương với : $\left(9+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 36$

Ta có : $\left(xyz\right)^2=(xy)(yz)(zx)\leq\left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^3$

Do đó : $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=\left(\frac{xy+yz+zx}{xyz}\right)^2\ge\frac{27\left(xy+yz+zx\right)^2}{(xy+yz+zx)^3}=\frac{27}{xy+yz+zx}$

Lại có : $9+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=6+\left(x^2y^2+1\right)+(y^2z^2+1)+(z^2x^2+1)\ge2\left[3+(xy+yz+zx)\right]$

Nên :

$$\left(VT\right)^2\ge4\left[3+(xy+yz+zx)\right]^2.\frac{27}{xy+yz+zx}=108\left[\frac{9}{xy+yz+zx}+6+(xy+yz+zx)\right]\ge$$

$$\ge108\left(6+2\sqrt{\frac{9}{xy+yz+zx}(xy+yz+zx)}\right)=1296\Rightarrow VT\ge36$$

ĐÁP ÁN CỦA SỞ GD&ĐT NGHỆ AN :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$(xy + yz + zx)(9 + x^2y^2 + z^2y^2 + x^2z^2) \ge 36xyz$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có :

$xy + yz + zx \ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$ (1)

Và $9+ x^2y^2 + z^2y^2 + x^2z^2 \ge 12\sqrt[12]{x^4y^4z^4}$ hay $9 + x^2y^2 + z^2y^2 + x^2z^2 \ge 12\sqrt[3]{xyz}$ (2)

Do các vế đều dương, từ (1), (2) suy ra:

$(xy + yz + zx)(9 + x^2y^2 + z^2y^2 + x^2z^2) \ge 36xyz$ (đpcm).

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$

22. (Đề thi HSG Tỉnh Quảng Ninh năm 2010) Cho các số thực dương x,y thỏa mãn đk : $x+y+1=3xy$. Tìm giá trị lớn nhất của : $M=\frac{3x}{y(x+1)}+\frac{3y}{x(y+1)}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}$

Lời giải :

Ta có : $3xy=x+y+1\ge2\sqrt{xy}+1\Rightarrow\sqrt{xy}\ge1\Rightarrow xy\ge1$ (*)

Ta có :

$$M=\frac{3x}{y^2(3x-1)}+\frac{3y}{x^2(3y-1)}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=\frac{1}{y^2(3x-1)}+\frac{1}{x^2(3y-1)}=\frac{3xy(x+y)-(x+y)^2+2xy}{x^2y^2\left[9xy-3(x+y)+1\right]}=\frac{3xy\left(3xy-1\right)-(1-3xy)^2+2xy}{4x^2y^2}$$

23. (Đề thi HSG Tỉnh Quảng Bình năm 2010) Cho các số thực dương a, b, c . CMR :

$$\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{c^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{a^3}}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

HD : $\begin{cases}\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}+\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}+1\ge3\frac{a}{b}\\ 3\le\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{c^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{a^3}}\end{cases}$

24. (Đề thi HSG Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2010). Cho x, y, z ≥0 thỏa mãn : $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $P=6(y+z-x)+27xyz$

HD : $P\le6\left[\sqrt{2(y^2+z^2)}-x\right]+27x.\frac{y^2+z^2}{2}=6\left[\sqrt{2(1-x^2)}-x\right]+27x\frac{1-x^2}{2}$ $\left(P_{Max}=10\right)$

25. (Đề thi HSG Tỉnh Hải Phòng năm 2010). Cho $a,b,c\ge0: a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng :

$$a^3+2b^3+3c^3\ge\frac{6}{7}$$

HD : Có thể dùng cân bằng hệ số hoặc Svacxơ

26. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn : $xyz=1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{(x^4+y^4)^3}{x^6+y^6}+\frac{(y^4+z^4)^3}{y^6+z^6}+\frac{(z^4+x^4)^3}{z^6+x^6}\ge12$$

Lời giải : Đặt $x^2=a;y^2=b;z^2=c\Rightarrow abc=1$. Bất đẳng thức đã cho trở thành :

$$\frac{(a^2+b^2)^3}{a^3+b^3}+\frac{(b^2+c^2)^3}{b^3+c^3}+\frac{(c^2+a^2)^3}{c^3+a^3}\ge 12$$

Áp dụng Bất đẳng thức AM-GM cho 4 số ta có :

$$(a^2+b^2)^3=\left(a^6+a^4b^2+a^4b^2+a^4b^2\right)+\left(b^6+a^2b^4+a^2b^4+a^2b^4\right)\ge 4\sqrt[4]{a^6b^6}\left(a^3+b^3\right)$$

27. (Đề thi HSG Tỉnh Đồng Nai năm 2010) . Cho a,b,c > 0 . Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{3(a+b+c)}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

HD :

BĐT $\Leftrightarrow \frac{\left[(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)\right]}{2}\left[\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right]\ge\frac{3(a+b+c)}{2}$

Và chú ý : $a^2+b^2\ge\frac{(a+b)^2}{2}$

28. (Đề thi HSG Tỉnh Phú Thọ năm 2010) . Cho $x,y,z>0:x+y+z=9$. Chứng minh rằng :

$$\frac{x^3+y^3}{xy+9}+\frac{y^3+z^3}{yz+9}+\frac{z^3+x^3}{zx+9}\ge 9$$

29. (Đề thi chọn ĐT Ninh Bình năm 2010) . Cho a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác có chu vi bằng 4. Chứng minh rằng : $a^2+b^2+c^2+2abc\le\frac{272}{27}$

HD : Bài này thì chọn phần tử lớn nhất mà đạo hàm .

30. (Đề thi HSG Tỉnh Bình Định năm 2010) . Cho a,b,c >0 . CMR : $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge a+b+c$

HD : $VT=\sum\frac{a^4}{abc}\ge\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3abc}\ge\frac{(a+b+c)^4}{27abc}\ge a+b+c$

31. (Đề thi chọn HSG QG Tỉnh Bình Định năm 2010) . Cho x,y,z >0 thỏa mãn : $2\sqrt{xy}+\sqrt{xz}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của : $S=\frac{3yz}{x}+\frac{4zx}{y}+\frac{5xy}{z}$

32. (Đề thi chọn HSG Thái Nguyên năm 2010). Cho các số thực x,y,z thỏa mãn điều kiện : $\frac{1}{1+x}+\frac{2}{2+y}+\frac{3}{3+z}=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của : $P=xyz$

33. (Đề thi chọn HSG QG tỉnh Bến Tre năm 2010) . Cho $a,b,c>0:a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{1}{4-\sqrt{ab}}+\frac{1}{4-\sqrt{bc}}+\frac{1}{4-\sqrt{ca}}\le 1$$

34. (Đề thi chọn ĐT trường ĐHSP I Hà Nội 2010) . Cho các số thực dương x,y,z . Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$P=\frac{x^2y}{z^3}+\frac{y^2z}{x^3}+\frac{z^2x}{y^3}+\frac{13xyz}{3(xy^2+yz^2+zx^2)}$$

Lời giải 1 :

Đặt : $\frac{x}{y}=a;\frac{y}{z}=b;\frac{z}{x}=c\Rightarrow abc=1$. Lúc đó : $P=\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}+\frac{13}{3(a+b+c)}$

Ta có : $(a+b+c)=abc(a+b+c)=(ab)(ac)+(ab)(bc)+(ac)(bc)\le\frac{(ab+bc+ca)^2}{3}$

Lại có : $\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}\ge 2\frac{1}{b}\\ \frac{1}{b}+\frac{b}{c^2}\ge 2\frac{1}{c}\\ \frac{1}{c}+\frac{c}{a^2}\ge 2\frac{1}{c}\end{cases}\Rightarrow\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=ab+bc+ca$

Do đó : $P\ge(ab+bc+ca)+\frac{13}{(ab+bc+ca)^2}$ (Với $ab+bc+ca\ge 1$)

Lời giải 2 :

Đặt : $\frac{y}{x}=a;\frac{x}{z}=b;\frac{z}{y}=c\Rightarrow abc=1$. Lúc đó : $P=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+\frac{13abc}{3(ab+bc+ca)}\ge(a+b+c)+\frac{13}{(a+b+c)^2}$

35. Bài toán tương tự : Cho $x,y,z>0:xyz\le 1$. Chứng minh rằng : $\frac{x}{y^2}+\frac{y}{z^2}+\frac{z}{x^2}+\frac{3}{x+y+z}\ge 4$

Lời giải : Đặt : $\frac{1}{x}=a;\frac{1}{y}=b;\frac{1}{z}=c\Rightarrow abc\ge 1$.

BĐT đã cho trở thành : $\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{3abc}{ab+bc+ca}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c}+\frac{9}{(a+b+c)^2}$. Với : $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=3$

36. (Đề thi chọn đổi tuyển ĐH Vinh năm 2010). Cho a,b,c là các số thực thuộc đoạn $[0;1]$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của : $P=\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}$

HD : Dùng pp tiếp tuyến và Bất đẳng thức : $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}\ge 1+\frac{1}{(x+y)^2+1},\forall x,y\ge 0;x+y\le 1$

37. (Đề thi chọn HSG QG tỉnh Lâm Đồng). Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2-ca+a^2}$$

Lời giải :

C1 : (THTT) Ta có : $\left(\frac{a^2}{b}+b\right)+\left(\frac{b^2}{c}+c\right)+\left(\frac{c^2}{a}+a\right)\ge 2(a+b+c)\Rightarrow\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c$

Do đó : $2.VT=2\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)\ge\sum\left[\left(\frac{a^2}{b}+b-a\right)+b\right]=\sum\left[\left(\frac{a^2-ab+b^2}{b}\right)+b\right]\ge 2VP$

C2 : Ta có : $\sum\sqrt{a^2-ab+b^2}\ge a+b+c(\text{Mincopxki})$

Mà : $VT=\sum\frac{a^2-ab+b^2}{b}\underset{\text{Svacxo}}{\ge}\frac{\sum a^2-ab+b^2}{a+b+c}\ge\sum a^2-ab+b^2$

38. (Đề thi chọn đội tuyển trường Lương Thế Vinh – Đồng Nai năm 2010). Cho $a,b,c>0:abc=1$. Chứng minh rằng : $ab^2+bc^2+ca^2\ge a+b+c$

HD : BĐT $\Leftrightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge a+b+c$. Chú ý là : $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+a^2c\ge 3a\left(a^2c=\frac{a}{b}\right)$

Lời giải 2 : Ta có : $ab^2+ab^2+bc^2\ge 3\sqrt[3]{(a^2b^2c^2)b^3}=3b$

39. (Chọn ĐT HSG QG tỉnh Phú Thọ năm 2010). Cho $a,b,c>0$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b+c}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{b}{c+a}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{c}{a+b}\right)^2}\ge\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$$

HD : $2+\frac{b+c}{a}+\frac{b+c}{a}\ge 3\sqrt[3]{2\left(\frac{b+c}{a}\right)^2}\Rightarrow\frac{a}{2(a+b+c)}\le\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b+c}\right)^2}$

40. (Đề thi HSG Tỉnh Nghệ An năm 2008). Cho 3 số dương a,b,c thay đổi . Tìm giá trị lớn nhất của :

$$P=\frac{\sqrt{bc}}{a+3\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{ca}}{b+3\sqrt{ca}}+\frac{\sqrt{ab}}{c+3\sqrt{ab}}.$$

HD : Đặt $\sqrt{\frac{a}{b}}=x;\sqrt{\frac{b}{c}}=y;\sqrt{\frac{c}{a}}=z\Rightarrow xyz=1$. Lúc đó :

$P=\frac{z}{x+3z}+\frac{x}{y+3x}+\frac{y}{z+3y}=-\frac{1}{3}\left(\sum\frac{x}{x+3z}\right)+1$. Lại có :

$$\sum\frac{x}{x+3z}=\sum\frac{x^2}{x^2+3zx}\ge\frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2+(xy+yz+zx)}\ge\frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2+\frac{(x+y+z)^2}{3}}=\frac{3}{4}$$

Do đó : $P\le 1-\frac{1}{3}\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi : x = y = z =1 .

ĐÁP ÁN CỦA SỞ GD&ĐT :

Đặt $x=\sqrt{a}, y=\sqrt{b}, z=\sqrt{c}; x,y,z\in(0;+\infty)$.

Khi đó: $P=\frac{yz}{x^2+3yz}+\frac{zx}{y^2+3zx}+\frac{xy}{z^2+3xy}$.

Ta có $3P=\frac{3yz}{x^2+3yz}+\frac{3zx}{y^2+3zx}+\frac{3xy}{z^2+3xy}$

$=3-\left(\frac{x^2}{x^2+3yz}+\frac{y^2}{y^2+3zx}+\frac{z^2}{z^2+3xy}\right)=3-Q$

áp dụng bđt BCS ta được

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+3yz}}\sqrt{x^2+3yz}+\frac{y}{\sqrt{y^2+3zx}}\sqrt{y^2+3zx}+\frac{z}{\sqrt{z^2+3xy}}\sqrt{z^2+3xy}\right)^2$$

$\le Q.\left(x^2+y^2+z^2+3xy+3yz+3zx\right)$

$\Leftrightarrow Q\ge\frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2+xy+yz+zx}$. Mặt khác $xy+yz+zx\le\frac{(x+y+z)^2}{3}$

Suy ra $Q\ge\frac{3}{4}$, do đó $3P\le\frac{9}{4}\Rightarrow P\le\frac{3}{4}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{3}{4}$.

41. (Đề dự bị HSG Tỉnh Nghệ An 2008) . Cho ba số dương a,b,c thoả mãn : $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}$.

Lời giải 1 : Giả sử : $a\ge b\ge c\Rightarrow\frac{1}{b+c}\ge\frac{1}{c+a}\ge\frac{1}{a+b}$. Áp dụng bất đẳng thức Chebysev ta có :

$$P=\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}.\ge\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\ge$$

$$\ge\frac{3}{2(a+b+c)}\ge\frac{3}{2\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}$$

Lời giải 2 : Áp dụng BĐT Swcharz :

$$P=\frac{a^4}{a^2(b+c)}+\frac{b^4}{b^2(c+a)}+\frac{c^4}{c^2(a+b)}.\ge\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{b(a^2+c^2)+a(b^2+c^2)+c(a^2+b^2)}$$

Lại có : $a(b^2+c^2)=\frac{\sqrt{2}a\sqrt{b^2+c^2}.\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{2}}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2a^2+2(b^2+c^2)}{3}\right]^3$

42. (Đề chọn đội tuyển QG dự thi IMO 2005) . Cho a,b,c >0 . CMR : $\frac{a^3}{(a+b)^3}+\frac{b^3}{(b+c)^3}+\frac{c^3}{(c+a)^3}\ge\frac{3}{8}$

Lời giải : $\frac{b}{a}=x;\frac{c}{b}=y;\frac{a}{c}=z\ ;\Rightarrow xyz=1$. Bất đẳng thức đã cho trở thành : $\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1+y)^3}+\frac{1}{(1+z)^3}\ge\frac{3}{8}$

Áp dụng AM-GM ta có : $\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{8}\ge3\sqrt[3]{\frac{1}{8(1+x)^6}}=\frac{3}{2(1+x)^2}$

Ta cần CM bất đẳng thức : $\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}\ge\frac{3}{4}$

Bổ đề : $\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}\ge\frac{1}{1+xy}\ (\forall x,y>0)$

Bổ đề này được CM bằng cách biến đổi tương đương đưa về BĐT hiển nhiên : $xy(x-y)^2+(1-xy)^2\ge 0$

Do đó : $VT\ge\frac{1}{1+xy}+\frac{1}{(1+z)^2}=\frac{z}{z+1}+\frac{1}{(1+z)^2}=\frac{z(z+1)+1}{(1+z)^2}=\frac{z^2+z+1}{z^2+2z+1}$

Giả sử : $z=Max\{x,y,z\}\Rightarrow 1=xyz\le z^3\Rightarrow z\ge 1$. Xét hàm số : $f(z)=\frac{z^2+z+1}{z^2+2z+1}$; $f'(z)=\frac{z^2-1}{(z+1)^4}\ge 0,\forall z\ge 1$

Suy ra : $f(z)\ge f(1)=\frac{3}{4}$.

43. (Đề thi HSG Tỉnh Hà Tĩnh năm 2008) . Cho $x,y,z\ge 0:x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$P=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}+\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$$

Lời giải 1 : $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\ge(1-x)\Leftrightarrow\sqrt{1-x}\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\ge 0\Leftrightarrow\sqrt{1-x}\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\ge 0$ (luôn đúng)

Thiết lập các BĐT tương tự ta có : $P\ge 2$

Chú ý : Để tìm Max cần sử dụng BĐT phụ : $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\le 1+\sqrt{\frac{1-x-y}{1+x+y}},\ x+y\le\frac{4}{5}$ ***và*** $MaxP=1+\frac{2}{\sqrt{3}}$

44. (Đề thi HSG lớp 11 tỉnh Hà Tĩnh năm 2008) . Cho $x,y,z>0:x+y+z=1$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{1+x}{y+z}+\frac{1+y}{z+x}+\frac{1+z}{x+y}\le 2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)$$

Giải : BĐT $\Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)+3\le 2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\Leftrightarrow\frac{3}{2}\le\frac{xz}{y(y+z)}+\frac{xy}{z(z+x)}+\frac{yz}{x(x+y)}$

Ta lại có : $VP=\frac{xz}{y(y+z)}+\frac{xy}{z(z+x)}+\frac{yz}{x(x+y)}=\frac{(xz)^2}{xyz(y+z)}+\frac{(xy)^2}{xyz(z+x)}+\frac{(yz)^2}{xyz(x+y)}\ge\frac{\left(xz+yz+zx\right)^2}{2xyz(x+y+z)}$

Mà : $xyz(x+y+z)=(xy)(yz)+(xz)(zy)+(zx)(xy)\le\frac{(xy+yz+zx)^2}{3}\Rightarrow VP\ge\frac{3}{2}$

45. (Đề thi HSG Tỉnh Quảng Bình – 2010) . Cho $a,b,c\ge 0:a+b+c=3$. Chứng minh rằng :

$$a\sqrt{b^3+1}+b\sqrt{c^3+1}+c\sqrt{a^3+1}\le 5$$

46. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh tam giác ABC . Tìm GTNN của : $P=\sqrt{\frac{2a}{2b+2c-a}}+\sqrt{\frac{2b}{2a+2c-b}}+\sqrt{\frac{2c}{2b+2a-c}}$

HD : $\sqrt{\frac{2a}{2b+2c-a}}=\frac{\sqrt{6}a}{\sqrt{(3a)(2b+2c-a)}}\ge\frac{\sqrt{6}a}{(a+b+c)}$

47. Cho $a,b,c\ge 0:a+b+c=1$. Tìm GTLN, GTNN của : $P=\sqrt{a^2+a+1}+\sqrt{b^2+b+1}+\sqrt{c^2+c+1}$

HD .

Tìm GTNN : Áp dụng BĐT Mincopxki ta có :

$$P=\sqrt{a^2+a+1}+\sqrt{b^2+b+1}+\sqrt{c^2+c+1}=\sum\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\ge\sqrt{\left(a+b+c+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

Tìm GTLN :

Bổ đề : CM bất đẳng thức : $\sqrt{1+a+a^2}+\sqrt{1+b+b^2}\le 1+\sqrt{1+(a+b)+(a+b)^2}$

Bình phương 2 vế ta có : $\sqrt{(1+a+a^2)(1+b+b^2)}\le ab+\sqrt{1+a+b+(a+b)^2}\Leftrightarrow\sqrt{1+a+b+(a+b)^2}+(1-a-b)\ge 0$

48. (Đề thi chọn HSG QG tỉnh Hải Dương năm 2008) . Cho $a,b,c>0:a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P=\frac{a^2}{a+2b^3}+\frac{b^2}{b+2c^3}+\frac{c^2}{c+2a^3}$

HD : AM-GM ngược dấu .

Ta có : $\frac{a^2}{a+2b^3}=a-\frac{2ab^3}{a+2b^3}\ge a-\frac{2ab^3}{3\sqrt[3]{ab^6}}=a-\frac{2}{3}b\sqrt[3]{a^2}\ge a-\frac{2}{9}b(a+a+1)=a-\frac{2}{9}b-\frac{4}{9}ab$

Do đó : $P\ge(a+b+c)-\frac{2}{9}(a+b+c)-\frac{4}{9}(ab+bc+ca)\ge\frac{7}{3}-\frac{4}{9}\frac{(a+b+c)^2}{3}=1$

49. (Đề chọn ĐT trường chuyên Bến Tre) . Cho $x,y,z\ge0$. Tìm GTLN của : $M=\frac{1}{x+y+z+1}-\frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)}$

Giải : Đặt $x+y+z=t\ge0$, ta có : $(1+x)(1+y)(1+z)\le\left(\frac{x+y+z+3}{3}\right)^3$. Lúc đó : $M\ge\frac{1}{t+1}-\frac{27}{(t+3)^3}$

Xét hàm số : $f(t)=\frac{1}{t+1}-\frac{27}{(t+3)^3}, t\ge0$

50. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng : $\frac{3a^4+1}{b+c}+\frac{3b^4+1}{c+a}+\frac{3c^4+1}{a+b}\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$

HD : Ta có : $3a^4+1=a^4+a^4+a^4+1\ge4\sqrt[4]{a^12}=4a^3$

Do đó : $VT\ge\sum\frac{4a^3}{b+c}=\sum\frac{4a^4}{ab+ac}\underset{\text{Svacxo}}{\ge}...$

51. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c}\ge\frac{4}{a+b}+\frac{4}{a+c}+\frac{4}{b+c}$

HD :

52. Cho $a,b,c>0:a+b+c=1$. Chứng minh rằng : $\frac{b\sqrt{c}}{a\left(\sqrt{3c}+\sqrt{ab}\right)}+\frac{c\sqrt{a}}{b\left(\sqrt{3a}+\sqrt{bc}\right)}+\frac{a\sqrt{b}}{c\left(\sqrt{3b}+\sqrt{ac}\right)}\ge\frac{3\sqrt{3}}{4}$

53. Cho $a,b,c>0$. CMR : $\frac{a}{3a^2+2b^2+c^2}+\frac{b}{3b^2+2c^2+a^2}+\frac{c}{3c^2+2a^2+b^2}\le\frac{1}{6}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

54. Cho $a,b,c>0:ab+bc+ca=3$. CMR : $\frac{a}{2a^2+bc}+\frac{b}{2b^2+ca}+\frac{c}{2c^2+ab}\ge abc$

55. Cho $a,b,c>0$. CMR : $\frac{1+a^3}{1+a^2c}+\frac{1+b^3}{1+c^2b}+\frac{1+c^3}{1+b^2a}\ge3$

56. Cho $a,b,c>0:abc=27$. CMR : $\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}+\frac{1}{\sqrt{1+c}}\le\frac{3}{2}$

57. Cho $a,b,c>0$. CMR : $\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(c+b)}+\frac{1}{a(a+c)}\ge\frac{27}{(a+b+c)^2}$

58. Cho $a,b,c>0$. CMR : $\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$

59. Cho $a,b,c\in(1;2)$. CMR : $\frac{b\sqrt{a}}{4b\sqrt{c}-c\sqrt{a}}+\frac{a\sqrt{c}}{4a\sqrt{b}-b\sqrt{c}}+\frac{c\sqrt{b}}{4c\sqrt{a}-a\sqrt{b}}\ge1$

60. Cho $a,b,c>0:abc=1$ .CMR : $1+\frac{3}{a+b+c}\ge\frac{6}{ab+bc+ca}$

61. Cho $x,y,z>0$. CMR : $\frac{x^2z}{xyz+y^3}+\frac{y^2x}{xyz+z^3}+\frac{z^2y}{xyz+x^3}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)$

62. Cho $a,b,c>0:\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. CMR : $\frac{a^2}{a+bc}+\frac{b^2}{b+ac}+\frac{c^2}{c+ba}\ge\frac{a+b+c}{4}$

63. Cho $x,y,z>0$. Tìm Min của : $P=\sqrt[3]{4(x^3+y^3)}+\sqrt[3]{4(y^3+z^3)}+\sqrt[3]{4(z^3+x^3)}+2\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{z^2}+\frac{z}{x^2}\right)$

64. Cho $a,b,c>0:a+b+c=3$. CMR : $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge ab+bc+ca$

65. Cho $a,b,c>0:abc=1$. CMR: $\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\le1$

66. Cho $x,y,z>0$. CMR : $\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(x+y)(y+z)}}+\frac{z}{z+\sqrt{(x+z)(y+z)}}\le1$

67. (Đề thi HSG Tỉnh Bình Phước năm 2008). Cho $a,b,c>0$. CMR : $\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\ge\frac{a+b+c}{2}$

68. (Đề thi HSG Tỉnh Thái Bình năm 2009) . Cho các số thực *x*, *y*, *z* thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $F=\sqrt{3x^2+7y}+\sqrt{5y+5z}+\sqrt{7z+3x^2}$

69. (Đề thi HSG TP Hồ Chí Minh năm 2006) . Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa: $a+b+c=3$**.** Chứng minh: $\frac{a^2}{b^2+1}+\frac{b^2}{c^2+1}+\frac{c^2}{a^2+1}\geq\frac{3}{2}$**.**

70. Cho a,b,c > 0 . Chứng minh rằng : $\sqrt{\frac{2a}{a+b}}+\sqrt{\frac{2b}{b+c}}+\sqrt{\frac{2c}{c+a}}\leq 3$

HD : Đặt $x=\sqrt{\frac{a}{b}};y=\sqrt{\frac{b}{c}};z=\sqrt{\frac{c}{a}}\Rightarrow xyz=1$. Áp dụng Bổ đề : $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\leq\frac{2}{1+xy}\ (xy\leq 1)$

71. Chứng minh các Bất đẳng thức :

a) $\log_{b+c}a^2+\log_{c+a}b^2+\log_{a+b}c^2\geq 3\ (a,b,c>2)$

b) $2\left(\frac{\log_b c}{b+c}+\frac{\log_c a}{c+a}+\frac{\log_a}{a+b}\right)\geq\frac{9}{a+b+c}\ (a,b,c>1)$

c)

72. Cho $x,y,z\geq 0: xy+yz+zx=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của : $P=x^2y^3+y^2z^3+z^2x^3+(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$

Giải :

73.

PHẦN IV : GIỚI HẠN DÃY SỐ

1. Cho dãy số : $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = 7 - \log_3\left(x_n^2 + 11\right) \end{cases}$. Chứng minh dãy số có giới hạn và tính giới hạn đó.

HD : Xét hàm số : $f(x) = 7 - \log_3(x^2+11), x \in (0;5)$, ta có : $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+11)\ln 3} < 0, \forall x \in (0;5)$

Do đó : $0 < f(5) < f(x) < f(0) < 5$. Mà $x_{n+1} = f(x_n)$, do đó bằng quy nạp ta CM được rằng : $0 < x_n < 5, \forall n$

Lại xét hàm số : $g(x) = 7 - \log_3(x^2+11) - x,\ x \in (0;5)$. Ta có : $g'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+11)\ln 3} - 1 < 0, \forall x \in (0;5)$

Suy ra phương trình f(x)=x có nghiệm duy nhất $x = 4$.

Theo định lý Lagrage $\exists c \in (x_n;4)$ sao cho : $\left|f(x_n) - f(4)\right| = \left|f'(c)\right|\left|x_n - 4\right| \le \dfrac{1}{\sqrt{11}\ln 3}\left|x_n - 4\right|$

(Vì $\left|f'(c)\right| = \dfrac{2c}{(c^2+11)\ln 3} \le \dfrac{2c}{2\sqrt{11c^2}\ln 3} = \dfrac{1}{\sqrt{11}\ln 3}$). Do đó : $\left|x_{n+1} - 4\right| \le \left(\dfrac{1}{\sqrt{11}\ln 3}\right)^{n-1}\left|x_1 - 4\right| \to 0$

2. Cho phương trình : $x^{2n+1} = x + 1$ với n nguyên dương. Chứng minh phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm thực với mỗi n nguyên dương cho trước. Gọi nghiệm đó là x_n. Tìm $\lim x_n$

Giải : Từ phương trình : $x^{2n+1} = x + 1 \Leftrightarrow x(x^{2n} - 1) = 1 \Rightarrow x(x^{2n} - 1) > 0 \Rightarrow x(x-1) > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < 0 \end{array}\right.$

Đặt $f_n(x) = x^{2n+1} - x - 1$.

+) Nếu x <0 : Hàm y= $f_n(x)$ liên tục trên R và $f(0) = -1; \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, suy ra phương trình không có nghiệm trên khoảng $(0;-\infty)$.

+) Nếu x >1 , ta có : $f_n'(x) = (2n+1).x^{2n} - 1 > 0$. Hơn nữa $f(1) = -1; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, suy ra phương trình có nghiệm $x_n \in (1;+\infty)$ duy nhất.

Xét hiệu :

$f_{n+1}(x_n) - f_n(x_n) = \left(x_n^{2n+2} - x_n - 1\right) - \left(x_n^{2n+1} - x_n - 1\right) = x_n^{2n+1}(x_n - 1) > 0, \forall x_n > 1 \Rightarrow f_{n+1}(x_n) > f_n(x_n)$

Hay : $f_{n+1}(x_n) > f_n(x_n) = 0 = f_{n+1}(x_{n+1}) \Rightarrow x_n > x_{n+1}$. (Do hàm f(x) tăng) .

Vậy dãy $\{x_n\}$ là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 1 nên có giới hạn . Giả sử : $\lim x_n = a (a \ge 1)$

Ta sẽ chứng minh a=1 . Thật vậy, giả sử $a > 1$.

3. **(Đề thi HSG Tỉnh Quảng Bình năm 2010)** Cho dãy số $\{u_n\}: \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{u_n^2}{2010} \end{cases}$. Đặt : $S_n = \dfrac{u_1}{u_2} + \dfrac{u_2}{u_3} + ... + \dfrac{u_n}{u_{n+1}}$.

Tìm : $\lim S_n$

Lời giải :

Ta có : $u_{k+1} - u_k = \dfrac{u_k^2}{2010} \Rightarrow \dfrac{u_{k+1} - u_k}{u_k} = \dfrac{u_k}{2010} \Rightarrow \dfrac{u_{k+1} - u_k}{u_k.u_{k+1}} = \dfrac{u_k}{2010.u_{k+1}} \Rightarrow \dfrac{u_k}{u_{k+1}} = 2010\left[\dfrac{1}{u_k} - \dfrac{1}{u_{k+1}}\right]$ (*)

Từ hệ thức (*) cho k = 1,2...,n ta có : $S_n = 2010\left(1 - \dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$

Lại có : $u_{n+1} = u_n + \dfrac{u_n^2}{2010} \ge u_n \Rightarrow$ Dãy $\{u_n\}$ tăng .

Giả sử $\{u_n\}$ bị chặn trên . Suy ra tồn tại giới hạn hữu hạn : $\lim u_n = a (a > 1)$. Do đó, từ :

$u_{n+1} = u_n + \dfrac{u_n^2}{2010} \Rightarrow \lim u_{n+1} = \lim\left(u_n + \dfrac{u_n^2}{2010}\right) \Rightarrow a = a + \dfrac{a^2}{2010} \Rightarrow a = 0$ (Vô lý)

Suy ra dãy $\{u_n\}$ tăng và không bị chặn trên, nên : $\lim u_n = +\infty \Rightarrow \lim \dfrac{1}{u_{n+1}} = 0 \Rightarrow \lim S_n = 2010$

4. (Đề thi HSG Tỉnh Bình Định năm 2010). Cho dãy số $\{x_n\}:\begin{cases} 1<x_1<2 \\ x_{n+1}=1+x_n-\dfrac{x_n^2}{2}, \forall n\ge 1\end{cases}$. Chứng minh dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn và tìm giới hạn đó .

Lời giải :

Xét hàm số : $f(x)=1+x-\dfrac{x^2}{2}, x\in(1;2)$. Ta có : $f'(x)=1-x<0, \forall x\in(1;2)$. Do đó :

$1=f(2)<f(x)<f(1)=\dfrac{3}{2}<2$. Từ đó thay x bởi : $x_1;x_2,...,x_n$ ta có : $1<x_1,x_2,...,x_n<2$

Suy ra dãy $\{x_n\}$ bị chặn .

Giả sử dãy số có giới hạn là a, lúc đó a thỏa mãn pt : $a=1+a-\dfrac{a^2}{2}\Rightarrow a=\sqrt{2}$

Ta sẽ CM giới hạn này bằng định lý kẹp :

Xét hiệu : $\left|x_{n+1}-\sqrt{2}\right|=\left|\left(1+x_n-\dfrac{x_n^2}{2}\right)-\left(1+\sqrt{2}-\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2}\right)\right|=\dfrac{1}{2}\left|\left(x_n-\sqrt{2}\right)\right|\left|x_n+\sqrt{2}-2\right|$

Lại có : $1<x_n<2\Rightarrow\sqrt{2}-1<x_n+\sqrt{2}+2<\sqrt{2}\Rightarrow\left|x_n+\sqrt{2}+2\right|<\sqrt{2}$

Do đó : $\left|x_{n+1}-\sqrt{2}\right|<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left|\left(x_n-\sqrt{2}\right)\right|$ (*) . Từ (*) cho n = 1,2,... và nhân lại với nhau ta có :

$\left|x_{n+1}-\sqrt{2}\right|<\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\left|\left(x_1-\sqrt{2}\right)\right|$. Mà $\lim\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\left|\left(x_1-\sqrt{2}\right)\right|=0\Rightarrow \lim x_n=\sqrt{2}$

5. (Bài toán tương tự). Cho dãy số $\{u_n\}:\begin{cases} u_1=\dfrac{1}{3} \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n^2}{2}-1, \forall n\ge 1\end{cases}$. Tìm $\lim u_n$.

6. (Đề thi HSG Tỉnh Bến Tre năm 2010). Cho dãy số $\{x_n\}:\begin{cases} x_1=1 \\ x_{n+1}=\sqrt{x_n^2+x_n+1}-\sqrt{x_n^2-x_n+1}\end{cases}$. Chứng minh rằng dãy số trên có giới hạn và tìm giới hạn đó .

Lời giải :

Ta có : $x_{n+1}=\sqrt{x_n^2+x_n+1}-\sqrt{x_n^2-x_n+1}=\dfrac{2x_n}{\sqrt{x_n^2+x_n+1}+\sqrt{x_n^2-x_n+1}}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được rằng : $x_n>0, \forall n=1,2,...$

Lại có :

$$\sqrt{x_n^2+x_n+1}+\sqrt{x_n^2-x_n+1}=\sqrt{\left(x_n+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(-x_n+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}\underset{\text{Mincopxki}}{\ge}$$

$$\underset{\text{Mincopxki}}{\ge}\sqrt{\left[\left(x_n+\dfrac{1}{2}\right)+\left(-x_n+\dfrac{1}{2}\right)\right]^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=2$$

Từ đó suy ra : $x_{n+1}<x_n$

Vậy dãy $\{x_n\}$ giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên tồn tại giới hạn hữu hạn. Giả sử

$\lim x_n=a\Rightarrow a=\sqrt{a^2+a+1}-\sqrt{a^2-a+1}\Rightarrow a=0$

7. (Đề thi HSG Tỉnh Nghệ An năm 2009). Cho dãy số : $\{x_n\}:\begin{cases} x_1=2 \\ x_n=\dfrac{x_1+2x_2+...+(n-1)x_{n-1}}{n(n^2-1)}, n>1\end{cases}$

Tính $\lim U_n$ với $U_n=(n+1)^3.x_n$

Lời giải : Ta có :

+) $x_2 = \dfrac{1}{3}$

+) Với $n \geq 3$ ta có : $\left[x_1 + 2x_2 + ... + (n-1)x_{n-1}\right] + nx_n = n(n^2-1)x_n + nx_n = n^3x_n$

$\left[x_1 + 2x_2 + ... + (n-2)x_{n-2}\right] + (n-1)x_{n-1} = (n-1)\left[(n-1)^2 - 1\right]x_{n-1} + (n-1)x_{n-1} = (n-1)^3x_{n-1}$

Từ đó suy ra : $n^3x_n = nx_n + (n-1)^3x_{n-1} \Rightarrow \dfrac{x_n}{x_{n-1}} = \dfrac{(n-1)^3}{n^3-n} = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^2\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ (*)

Từ (*) cho n = 3,4...ta có :

$$\frac{x_n}{x_2} = \frac{x_n}{x_{n-1}}.\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}...\frac{x_3}{x_2} = \left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2.\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^2...\left(\frac{2}{3}\right)^2\right].\left[\frac{n}{n+1}.\frac{n-1}{n}...\frac{3}{4}\right] = \frac{12}{n^2(n+1)} \Rightarrow x_n = \frac{4}{n^2(n+1)}$$

Do đó : $\lim U_n = \lim \dfrac{4(n+1)^3}{n^2(n+1)} = 4$.

9. **(Đề thi HSG Tỉnh Hà Tĩnh năm 2010) .** Cho dãy $\{x_n\}: \begin{cases} x_0 > 0 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}, \forall n \geq 0 \end{cases}$. Chứng minh dãy có giới hạn và tìm giới hạn đó .

Lời giải :

Bằng quy nạp ta chứng minh được $x_n > 0, \forall n > 0$

+) TH1 : Nếu $x_0 = 1$, quy nạp ta được $x_n = 1, \forall n > 0$. Hiển nhiên $\lim x_n = 1$

+) TH1 : Nếu $x_0 > 1$,

Xét hàm số : $f(x) = \dfrac{x(x^2+3)}{3x^2+1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ ta có : $f'(x) = \dfrac{x^2(x-1)^2}{(3x^2+1)^2} > 0, \forall x \in (1;+\infty) \Rightarrow f(x) > f(1) = 1$

Do đó : $x_2 = f(x_1) > 1,....$ quy nạp ta có : $x_n > 1, \forall n$

Lại có : $x_{k+1} < x_k \Leftrightarrow \dfrac{x_k(x_k^2+3)}{3x_k^2+1} < x_k \Leftrightarrow \dfrac{2x_k(x_k^2-1)}{3x_k^2+1} > 0$ đúng với $x_k > 1$

Từ đó ta có : $x_1 > x_2 > .... > x_n > x_{n+1} > 1$. Dãy số giảm và bị chặn dưới nên tồn tại giới hạn hữu hạn .

Giả sử : $\lim x_n = a > 0 \Rightarrow a = \dfrac{a\left(a^2+3\right)}{3a^2+1} \Rightarrow a = 1$

+) TH3 : Nếu $0 < x_0 < 1$, Xét hàm số : $f(x) = \dfrac{x(x^2+3)}{3x^2+1}$ trên khoảng $(0;1)$ ta có :

$f'(x) = \dfrac{x^2(x-1)^2}{(3x^2+1)^2} > 0, \forall x \in (0;1) \Rightarrow 0 = f(0) < f(x) < f(1) = 1$

Do đó : $x_2 = f(x_1) \in (0;1),...$ quy nạp ta có : $x_n \in (0;1), \forall n$

ta có : $x_{k+1} > x_k \Leftrightarrow \dfrac{x_k(x_k^2+3)}{3x_k^2+1} > x_k \Leftrightarrow \dfrac{2x_k(x_k^2-1)}{3x_k^2+1} < 0$ đúng với $0 < x_k < 1$

Do đó : $0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < x_{n+1} < 1$. Dãy số tăng và bị chặn trên nên tồn tại giới hạn hữu hạn . Giả sử :

$\lim x_n = a > 0 \Rightarrow a = \dfrac{a\left(a^2+3\right)}{3a^2+1} \Rightarrow a = 1$

Kết luận : $\lim x_n = 1$

10. **(Bài toán tương tự) .** Cho $\alpha > 0; a > 0$ là hai số tùy ý. Dãy $\{u_n\}: \begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n(u_n^2+3a)}{3u_n^2+a}, n = 0,1,... \end{cases}$. Chứng minh dãy có giới hạn và tìm giới hạn đó.

11. **(Chọn đội tuyển ĐH Vinh năm 2010) .** Cho dãy số $\{u_n\}: \begin{cases} u_0 > 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1 + \sqrt{2(u_n^2+1)}}{u_n - 1}, n = 0,1... \end{cases}$. Tìm $\lim u_n$

12. (Đề thi chọn ĐT HSG QG Kon Tum năm 2010) . Cho dãy số thực $\{a_n\}$ xác định như sau : $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n} (n \ge 1) \end{cases}$.

Chứng minh rằng : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$

13. (Đề thi HSG Tỉnh Hải Dương năm 2006) . Cho dãy số thực $x_1 = 2006; x_{n+1} = \sqrt{3} + \dfrac{x_n}{\sqrt{x_n^2 - 1}}$. Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty} x_n$

14. (Đề thi HSG Tỉnh Phú Thọ năm 2008) . Cho dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn :

$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1}, \forall n > 0 \end{cases}$. Đặt $y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i + 2}$. Tìm $\lim y_n$.

HD : $x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1} = \sqrt{\left(x_n^2 + 3x_n + 1\right)^2} = x_n^2 + 3x_n + 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x_n+2} = \dfrac{1}{x_n+1} - \dfrac{1}{x_{n+1}+1}$

Sau đó chứng minh dãy tăng và không bị chặn trên .

15. Cho dãy $(x_n) : \begin{cases} x_1 = a > 1 \\ 2010x_{n+1} = x_n^2 + 2009x_n \end{cases}$. Tìm : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{x_1}{x_2-1} + \dfrac{x_2}{x_3-1} + ... + \dfrac{x_n}{x_{n+1}-1}\right)$

HD : Xét hàm số : $f(x) = \dfrac{x^2}{2010} + \dfrac{2009x}{2010}, x > 1$. Ta có : $f'(x) > 0$, $\forall x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) = 1$. Bằng quy nạp chứng minh được rằng : $x_n > 1, \forall n$. Xét hiệu : $x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_n^2}{2010} - \dfrac{x_n}{2010} = \dfrac{x_n(x_n-1)}{2010} > 0, x_n > 1 \Rightarrow x_{n+1} > x_n$

Giả sử $\exists \lim x_n = a(a>1) \Rightarrow 2010a = a^2 + 2009a \Rightarrow a = 0; a = 1$ (Không thỏa mãn). Vậy $\lim x_n = +\infty$

Lại có :

$2010x_{n+1} = x_n^2 + 2009x_n \Rightarrow 2010(x_{n+1} - x_n) = x_n(x_n - 1) \Rightarrow \dfrac{x_n}{x_{n+1}-1} = 2010\dfrac{x_{n+1}-x_n}{(x_n-1)(x_{n+1}-1)} = 2010\left[\dfrac{1}{x_n-1} - \dfrac{1}{x_{n+1}-1}\right]$

16. (Bài tương tự) . Cho dãy số : $(x_n) : \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^{24}}{24} + x_n, n \in N^* \end{cases}$. Tìm giới hạn $\lim\left(\dfrac{x_1^{23}}{x_2} + \dfrac{x_2^{23}}{x_3} + ... + \dfrac{x_n^{23}}{x_{n+1}}\right)$

17. (Đề thi HSG Tỉnh Bình Phước năm 2008) . Đặt $f(n) = (n^2+n+1)^2 + 1$ với n là số nguyên dương . Xét dãy số $(x_n) : x_n = \dfrac{f(1).f(3).f(5)...f(2n-1)}{f(2).f(4).f(6)...f(2n)}$. Tính giới hạn của dãy số : $u_n = n^2.x_n$

HD : Chú ý : $\dfrac{f(k-1)}{f(k)} = \dfrac{(k-1)^2+1}{(k+1)^2+1}$

18. Cho dãy số (a_n) xác định bởi : $\begin{cases} a_1 = 2008 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = n^2 a_n, n > 1 \end{cases}$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 a_n$

HD : Ta có $a_1 + a_2 + ... + a_n = n^2 a_n \Rightarrow (n-1)^2 a_{n-1} = (n^2-1)a_n \Rightarrow a_n = \dfrac{n-1}{n+1}a_{n-1}$ **(1)**

Trong (1) cho n=1,2,3....và nhân nó lại để tìm : a_n

19. Cho dãy số (x_n) thỏa : $x_1 = 1, x_{n+1} = 1 + \dfrac{2006}{1+x_n}$ $(n \ge 1)$. Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn và tìm giới hạn ấy

20. (Đề thi HSG QG năm 2009) . Cho dãy số $(x_n) : \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_n = \dfrac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2}, \forall n \ge 2 \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy (y_n) với $y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i^2}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$ và tìm giới hạn đó .

Giải :

Xét hàm số : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+4x}+x}{2}$, ta có : $f'(x)=\dfrac{2x+4}{4\sqrt{x^2+4x}}+\dfrac{1}{2}>0,\forall x>0$

Lại có : $x_2=f(x_1)>0,(\text{do } x_1>0)$.... bằng quy nạp ta chứng minh được $x_n>0,\forall n$.

Xét hiệu : $x_n-x_{n-1}=\dfrac{\sqrt{x_{n-1}^2+4x_{n-1}}+x_{n-1}}{2}-x_{n-1}=\dfrac{\sqrt{x_{n-1}^2+4x_{n-1}}-x_{n-1}}{2}=\dfrac{4x_{n-1}}{\sqrt{x_{n-1}^2+4x_{n-1}}+x_{n-1}}>0,(\text{do } x_n>0,\forall n)$

Suy ra dãy $\{x_n\}$ tăng và $x_n>0,\forall n$. Giả sử tồn tại giới hạn hữu hạn $a=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\ (a>0)$. Suy ra :

$a=\dfrac{\sqrt{a^2+4a}+a}{2}\Leftrightarrow a=\sqrt{a^2+4a}\Rightarrow a=0$ (Vô lý) .

Vậy dãy $\{x_n\}$ tăng và không bị chặn trên nên : $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$

Lại có :

$$x_n=\frac{\sqrt{x_{n-1}^2+4x_{n-1}}+x_{n-1}}{2}\Rightarrow(2x_n-x_{n-1})^2=x_{n-1}^2+4x_{n-1}\Rightarrow x_n(x_n-x_{n-1})=x_{n-1}\Rightarrow\frac{x_n(x_n-x_{n-1})}{x_n^2.x_{n-1}}=\frac{x_{n-1}}{x_n^2.x_{n-1}}\Rightarrow\frac{1}{x_n^2}=\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{x_n}$$

Do đó : $y_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i^2}=\left(\dfrac{1}{x_1^2}\right)+\left(\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right)+...+\left(\dfrac{1}{x_{n-1}}-\dfrac{1}{x_n}\right)=\dfrac{1+x_1}{x_1^2}-\dfrac{1}{x_n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=6$.

21. Xét dãy số thực $(x_n),n\in N$ xác định bởi : $\begin{cases}x_0=2009\\ x_n=\sqrt[3]{6x_{n-1}-6\sin(x_{n-1})},\ \forall n\ge1\end{cases}$. Chứng minh dãy có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó .

HD : Sử dụng bất đẳng thức : $x-\dfrac{x^3}{6}\le\sin x\le x,\ \forall x\ge0$

Xét hàm số : $f(x)=\sqrt[3]{6x-6\sin x},x>0$. Ta có : $f'(x)=\dfrac{1}{3}\dfrac{6(1-\cos x)}{\sqrt[3]{(6x-6\sin x)^2}}>0,\forall x>0$

Do đó : $f(x)>0,\forall x>0$. Mà $x_2=f(x_1)>0(\text{do } x_1>0)\Rightarrow...x_n=f(x_{n-1})>0,\forall n$

Xét hiệu : $x_n-x_{n-1}=\sqrt[3]{6x_{n-1}-6\sin(x_{n-1})}-x_{n-1}=\dfrac{6x_{n-1}-x_{n-1}^3-6\sin(x_{n-1})}{\sqrt[3]{[6x_{n-1}-6\sin(x_{n-1})]^2}-x_{n-1}\sqrt[3]{6x_{n-1}-6\sin(x_{n-1})}+x_{n-1}^2}<0$

(Sử dụng Bất đẳng thức : $x-\dfrac{x^3}{6}\le\sin x\Rightarrow6x-x^3-6\sin x<0,\forall x>0$ ***)***

Do đó dãy $\{x_n\}$ giảm và bị chặn dưới, nên tồn tại giới hạn hữu hạn . Giả sử : $\lim x_n=a(a\ge0)$, ta có pt :

$a=\sqrt[3]{6a-6\sin a}\Leftrightarrow a^3=6a-6\sin a$. Xét hàm số : $g(t)=t^3+6\sin t-6t$, ta có :

$g'(t)=3t^2+6\cos t-6,\ g''(t)=6t-6\sin t\ge0,\forall t\ge0\Rightarrow g'(t)\ge g(0)=0\Rightarrow g(t)\ge g(0)=0$. Do đó pt có nghiệm duy nhất $a=0$.

22. Cho dãy (x_n) được xác định bởi: $x_1=5;\ x_{n+1}=x_n^2-2\quad\forall n=1,2,...$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_1.x_2...x_n}$

23. Cho dãy $(x_n):\begin{cases}x_1=\sqrt3\\ x_{n+1}=\sqrt{9x_n^2+11x_n+3};\ n\ge1,n\in N.\end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$

HD : Chứng minh dãy (x_n) tăng và không bị chặn :

Dễ thấy $x_n>0,\forall n$, xét : $x_{n+1}-x_n=\sqrt{9x_n^2+11x_n+3}-x_n=\dfrac{8x_n^2+11x_n+3}{\sqrt{9x_n^2+11x_n+3}+x_n}>0,\forall x_n>0$

Giả sử $\exists\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a(a>0)\Rightarrow a=\sqrt{9a^2+11a+3}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\ a=-\dfrac{3}{8}\end{array}\right.$ (Không thỏa mãn) $\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$

Do đó : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{9+\dfrac{11}{x_n}+\dfrac{3}{x_n^2}}=3$

24. Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức

$$\begin{cases} u_1 = 2008 \\ u_{n+1} = u_n^2 - 4013u_n + 2007^2;\ n \ge 1, n \in N. \end{cases}$$

a) Chứng minh: $u_n \ge n + 2007;\ \forall n \ge 1, n \in N$.

b) Dãy số (x_n) được xác định như sau:

$$x_n = \frac{1}{u_1 - 2006} + \frac{1}{u_2 - 2006} + ... + \frac{1}{u_n - 2006};\ n \ge 1, n \in N.$$

Tìm $\lim x_n$?

25. (Đề thi HSG Tỉnh Trà Vinh-2009) Cho dãy số (U_n) xác định bởi: $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \log_3 \sqrt[3]{U_n^3 + 1} + \frac{4}{3}, \forall n \ge 1 \end{cases}$ Tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

26. Cho dãy số (x_n): $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{2^{x_n}(x_n \ln 2 - 1) + 1}{2^{x_n} \ln 2 - 1} \end{cases}$. Chứng minh dãy (x_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó .

HD : Chứng minh dãy giảm và bị chặn dưới .

27. Cho phương trình : $x^n + x^{n-1} + ... + x - 1 = 0$. Chứng tỏ rằng với n nguyên dương thì phương trình có nghiệm duy nhất dương x_n và tìm $\lim\limits_{x \to +\infty} x_n$.

28. Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = C_{2n}^n \sqrt{n}.4^{-n} \end{cases}$ . . Tìm $\lim u_n$

29. (Đề thi HSG Tỉnh Nghệ An năm 2008) . Cho phương trình: $\frac{1}{2008^x} - x + n = 0$ (1). Chứng minh rằng: với mỗi n $\in N^*$ phương trình (1) có nghiệm duy nhất, gọi nghiệm đó là x_n. Xét dãy (x_n), tìm $\lim (x_{n+1} - x_n)$.

Đáp án :

Với $n \in N^*$, xét $f(x) = \frac{1}{2008^x} - x + n$; $x \in R$.

$f'(x) = -\frac{\ln 2008}{2008^x} - 1 < 0\ \forall x \in R$.

=> f(x) nghịch biến trên R (1).

Ta có: $\begin{cases} f(n) = \dfrac{1}{2008^n} > 0 \\ f(n+1) = \dfrac{1}{2008^{n+1}} - 1 < 0 \end{cases}$

=> f(x) =0 có nghiệm $x_n \in (n; n + 1)$ (2).

Từ (1) và (2) => đpcm.

Ta có: $x_n - n = \frac{1}{2008^{x_n}} > 0 \Rightarrow x^n > n$.

=> $0 < x^n - n < \frac{1}{2008^n}$.

Mặt khác: $\lim \frac{1}{2008^n} = 0 \Rightarrow \lim(x_n - n) = 0$.

Khi đó $\lim (x_{n-1} - x_n) = \lim\{[x_{n+1} - (n + 1)] - (x_n - n) + 1\} = 1$

MỘT SỐ BÀI TOÁN TÌM GIỚI HẠN KHI BIẾT CÔNG THỨC TỔNG QUÁT CỦA DÃY SỐ .

30. Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = \dfrac{-9u_{n-1} - 24}{5u_{n-1} + 13}, n \ge 2 \end{cases}$. Tìm $\lim u_n = ?$

Giải :

31. Cho dãy số $(u_n):\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_n = 2u_{n-1}^2 - 1, \forall n \ge 2 \end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n}$

HD : Tìm được : $u_n = \cos\dfrac{2^{n-1}\pi}{3}$ và chú ý : $0 \le \left|\dfrac{u_n}{n}\right| \le \dfrac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 0$

32. Cho dãy số $(u_n):\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_n = \dfrac{\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - u_{n-1}^2}}}{2}, \forall n \ge 2 \end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n.u_n$

HD : Tìm được $u_n = \sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}.6}$ suy ra : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n.u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{3}\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{3.2^n}}{\dfrac{\pi}{3.2^n}} = \dfrac{\pi}{3}$

33. Cho dãy số $(u_n):\begin{cases} u_1 = \sqrt{3} \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}}{1 + \sqrt{1 + u_{n-1}^2}}, \forall n \ge 2 \end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n.u_n$

HD : Tìm được $u_n = \tan\dfrac{\pi}{3.2^{n-1}}$

34. Cho dãy số $(u_n):\begin{cases} u_1 = \dfrac{2}{3} \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}}{2(2n-1)u_{n-1} + 1}, \forall n \ge 2 \end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$

35. Cho dãy số : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 2 \\ u_{n+2} = u_n + 2u_{n+1}, n \in N^* \end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

HD : Tìm được $u_n = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right]$. Suy ra :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}\right]}{\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{n} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{n}\right]} = \frac{\left[1 - \left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{n+1}\right]}{\left[\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\left(1-\sqrt{2}\right)}\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{n+1}\right]} = \sqrt{2} + 1$$

36. Cho dãy số $(u_n):\begin{cases} u_1 = \sqrt{3} \\ u_n = \dfrac{\sqrt{3} + u_{n-1}}{1 - \sqrt{3}u_{n-1}}, \forall n \ge 2 \end{cases}$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n}$

HD : $u_n = \tan\dfrac{n\pi}{3}$

37. Cho dãy số (u_n) xác định như sau : $u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}}$ (n dấu căn) . Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_1.u_2...u_n}{2^n}$

HD : Đặt : $x_n = \dfrac{u_n}{2} \Rightarrow x_n = \cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ và chú ý : $\dfrac{u_1.u_2...u_n}{2^n} = x_1.x_2...x_n = \dfrac{1}{2^n}\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2}}{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}$

38. Cho dãy số $(b_n):\begin{cases} b_1 = \dfrac{1}{2} \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(b_n + \sqrt{b_n^2 + \dfrac{1}{4^n}}\right)(n \ge 1) \end{cases}$. Chứng minh dãy hội tụ và tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$

HD : Chứng minh : $b_n = \dfrac{1}{2^n}.\cot\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

PHẦN V : HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

1. Cho hình chóp tam giác đều có thể tích là 1. Tìm giá trị lớn nhất của bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp.
2. Cho tứ diện ABCD có : AB=a; CD=b ; góc giữa AB và CD bằng α . Khoảng cách giữa AB và CD bằng d. Tính thể tích khối tứ diện ABCD theo a,b,d và α .
3. Trong các tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và thể tích bằng 36. Hãy xác định tứ diện sao cho diện tích tam giác ABC nhỏ nhất.
4. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Các điểm M, N di động trên các cạnh AD và BB_1 sao cho $\frac{MA}{MD}=\frac{NB}{NB_1}$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm các cạnh AB, C_1D_1 . Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn cắt đường thẳng IJ.
5. Gọi O là tâm của một hình tứ diện đều . Từ một điểm M bất kì trên một mặt của tứ diện , ta hạ các đường vuông góc tới ba mặt còn lại. Giả sử K, L và N là chân các đường vuông góc nói trên. Chứng minh rằng đường thẳng OM đi qua trọng tâm tam giác KLN.
6. Cho hình chóp S.ABC . Từ điểm O nằm trong tam giác ABC ta vẽ các đường thẳng lần lượt song song với các cạnh SA, SB, SC tương ứng cắt các mặt (SBC), (SCA), (SAB) tại các điểm D,E,F .
   a) Chứng minh rằng : $\frac{OD}{SA}+\frac{DE}{SB}+\frac{DF}{SC}=1$
   b) Tìm vị trí của điểm O trong tam giác ABC để thể tích của hình chóp ODEF đạt giá trị lớn nhất.
7. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Hãy xác định M thuộc đường chéo AC_1 và điểm N thuộc đường chéo B_1D_1 của mặt phẳng $A_1B_1C_1D_1$ sao cho MN song song với A_1D.
8. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, SB của tứ diện đều S.ABC . Trên các AS và CN ta chọn các điểm P, Q sao cho PQ // BM . Tính độ dài PQ biết rằng cạnh của tứ diện bằng 1.
9. Gọi O là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện ABCD. Chứng minh rằng nếu $\widehat{ODC}=90^0$ thì các mặt phẳng (OBD) và (OAD) vuông góc với nhau .
10. Trong hình chóp tam giác đều S.ABC (đỉnh S) độ dài các cạnh đáy bằng 6 . Độ dài đường cao SH = $\sqrt{15}$. Qua B vẽ mặt phẳng vuông góc với AS, mặt phẳng này cắt SH tại O . Các điểm P, Q tương ứng thuộc các cạnh AS và BC sao cho PQ tiếp xúc với mặt cầu tâm O bán kính bằng $\sqrt{\frac{2}{5}}$. Hãy tính độ dài bé nhất của đoạn PQ.
11. Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a . Đường thẳng (d) đi qua D_1 và tâm O của mặt phẳng BCC_1B_1 . Đoạn thẳng MN có trung điểm K thuộc đường thẳng (d) ; M thuộc mặt phẳng (BCC_1B_1) ; N thuộc mặt đáy (ABCD) . Tính giá trị bé nhất của độ dài đoạn thẳng MN .
12. Cho tứ diện ABPM thoả mãn các điều kiện : $AM\perp BP;\ \widehat{MAB}=\widehat{ABP}=90^0;\ 2AM.BP=AB^2$. Chứng minh rằng mặt cầu đường kính AB tiếp xúc với PM.
13. **(Đề thi HSG Tỉnh Quảng Ninh năm 2010)** Cho điểm O cố định và một số thực a không đổi . Một hình chóp S.ABC thay đổi thỏa mãn : $OA=OB=OC=a;\ SA\perp OA;SB\perp OB;SC\perp OC$; $\widehat{ASB}=90^0;\widehat{BSC}=60^0;\widehat{CSA}=120^0$. Chứng minh rằng :
    a. ΔABC vuông .
    b. Khoảng cách SO không thay đổi .

Giải :

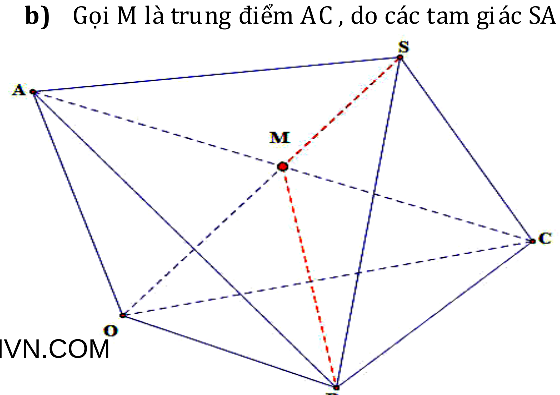
a) Đặt : SO = x .

Ta có : Các tam giác OAS, OBS, OCS vuông nên : $SA=SB=SC=\sqrt{x^2-a^2}$.

Do đó : $AB^2=SA^2+SB^2=2(x^2-a^2)$; $AC^2=SA^2+SC^2-2SA.SC.\cos120^0=3(x^2-a^2)$;

$BC^2=SB^2+SC^2-2SB.SC.\cos60^0=(x^2-a^2)\Rightarrow AC^2=AB^2+BC^2$ hay tam giác ABC vuông tại B.

b) Gọi M là trung điểm AC , do các tam giác SAC, OAC là các tam giác cân nên :



$$\begin{cases}SM\perp AC\\ OM\perp AC\end{cases}\Rightarrow AC\perp(SOM)\Rightarrow AC\perp OS$$

Tương tự, gọi N là trung điểm AB, ta CM được : $AB\perp SO$

Suy ra : $SO\perp(ABC)$.

Do đó mọi điểm nằm trên đường thẳng SO đều cách đều A, B, C . Suy ra SO đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp M của tam giác ABC .

Trong các tam giác vuông ABC và SBO ta có hệ thức : $\begin{cases} \dfrac{1}{BM^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{BC^2} \\ \dfrac{1}{BM^2}=\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{BS^2} \end{cases} \Rightarrow$

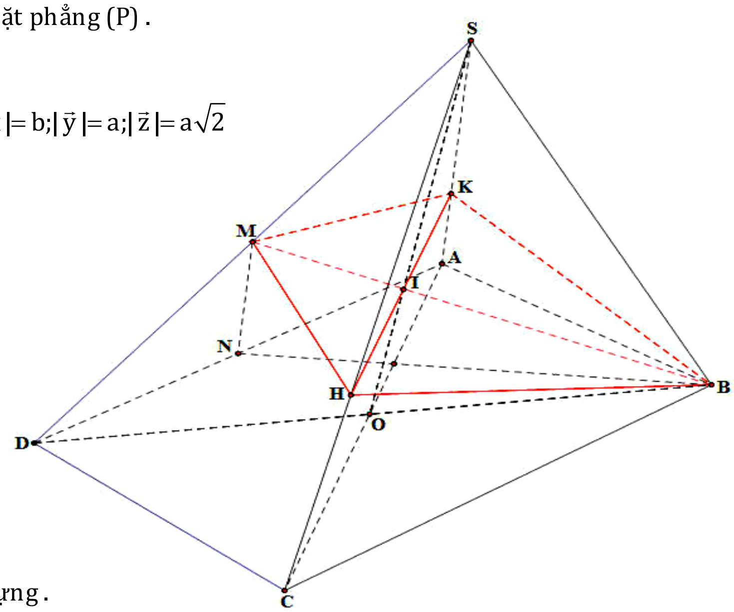
$$\Rightarrow \frac{1}{AB^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{BS^2} \Rightarrow \frac{1}{2(x^2-a^2)}+\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{x^2-a^2} \Rightarrow 3a^2=2x^2 \Rightarrow x=\sqrt{\frac{3}{2}}a$$

14. (Đề thi HSG Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2010) . Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật , AB = a ; $BC=a\sqrt{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA=b . Gọi M là trung điểm SD, N là trung điểm AD .

a) Chứng minh AC vuông góc với mặt phẳng (BMN)

b) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua B, M và cắt mặt phẳng (SAC) theo một đường thẳng vuông góc với BM . Tính theo a, b khoảng cách từ S đến mặt phẳng (P) .

Lời giải :



✪ Đặt $\overrightarrow{AS}=\vec{x};\overrightarrow{AB}=\vec{y};\overrightarrow{AD}=\vec{z} \Rightarrow \vec{x}.\vec{y}=\vec{y}.\vec{z}=\vec{z}.\vec{x}=0;|\vec{x}|=b;|\vec{y}|=a;|\vec{z}|=a\sqrt{2}$

Ta có : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\vec{y}+\vec{z}$ và $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\vec{z}-\vec{y}$

Do đó : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}z^2-y^2=\frac{(a\sqrt{2})^2}{2}-a^2=0 \Rightarrow AC \perp BN$

Lại do : $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SA} \Rightarrow MN \perp AC$

Hay : $AC \perp (BMN) \Rightarrow AC \perp BM$

✪ Giả sử (P) cắt (SAC) theo giao tuyến $(d) \perp BM$
Mà do (d) và AC đồng phẳng $\Rightarrow (d)//(AC)$

Gọi $O=(AC)\cap(BD)$

Trong mặt phẳng (SDB) : SO cắt BM tại I.
Qua I kẻ đường thẳng (d) // (AC) cắt SA, SC lần lượt tại H, K . Mặt phẳng (MHBK) là mặt phẳng (P) cần dựng .
Lại vì : I là trọng tâm tam giác SDC và HK//AC nên :

$\frac{SH}{SC}=\frac{SK}{SA}=\frac{SI}{SO}=\frac{2}{3}$ (1)

Theo công thức tính tỷ số thể tích ta có :

$\frac{V_{SMBK}}{V_{SDBA}}=\frac{SM}{SD}.\frac{SB}{SB}.\frac{SK}{SA}=\frac{1}{3};\frac{V_{SMHB}}{V_{SDCB}}=\frac{SM}{SD}.\frac{SH}{SC}.\frac{SB}{SB}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow V_{SKMHB}=V_{SKMB}+V_{SMHB}=\frac{2}{3}V_{SDBA}=\frac{V_{SABCD}}{3}=\frac{a^2b\sqrt{2}}{9}$ (2)

Ta lại có : $S_{KMHB}=S_{MKH}+S_{BKH}=\frac{1}{2}MI.HK+\frac{1}{2}BI.HK=\frac{1}{2}BM.HK$ (3)

Mà : $HK=\frac{2}{3}AC=\frac{2}{3}\sqrt{a^2+(a\sqrt{2})^2}=\frac{2\sqrt{3}.a}{3}$; $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AD}\right)-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{z})-\vec{y}$

$\Rightarrow (\overrightarrow{BM})^2=\frac{1}{4}\left(x^2+z^2\right)+y^2=\frac{1}{4}b^2+\frac{3}{2}a^2 \Rightarrow BM=\frac{\sqrt{b^2+6a^2}}{2}$ (4)

Từ (3), (4) suy ra : $S_{KMHB}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{b^2+6a^2}}{2}.\frac{2\sqrt{3}a}{3}=\frac{a\sqrt{3(b^2+6a^2)}}{6}$ (5)

Từ (2), (5) suy ra : $d(S,(P))=\frac{3V_{SKMHB}}{S_{KMHB}}=\frac{18a^2b\sqrt{2}}{9a.\sqrt{3(b^2+6a^2)}}=\frac{2\sqrt{2}ab}{\sqrt{3(b^2+6a^2)}}$

15. (Đề thi HSG Tỉnh Bình Phước năm 2010) . Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’ có cạnh bằng a . Trên AB lấy điểm M, trên CC’ lấy điểm N , trên D’A’ lấy điểm P sao cho : $AM=CN=D'P=x(0\le x\le a)$.

a) CMR tam giác MNP là tam giác đều, tìm x để diện tích tam giác này nhỏ nhất .

b) Khi $x=\frac{a}{2}$ hãy tính thể tích khối tứ diện B’MNP và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện .

16. (Đề thi HSG Tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2008). Cho tứ diện ABCD có các cạnh AB=BC=CD=DA=a , $AC = x; BD = y$. Giả sử a không đổi, xác định tứ diện có thể tích lớn nhất.

17. (Đề thi HSG Tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2009) Cho khối tứ diện ABCD có thể tích V . Điểm M thuộc miền trong tam giác ABC . Các đường thẳng qua M son g song với DA, DB, DC theo thứ tự cắt các mặt phẳng (DBC), (DCA), (DAB) tương ứng tại A_1 ; B_1 ; C_1 .

a) Chứng minh rằng : $\dfrac{MA_1}{DA} + \dfrac{MB_1}{DB} + \dfrac{MC_1}{DC} = 1$

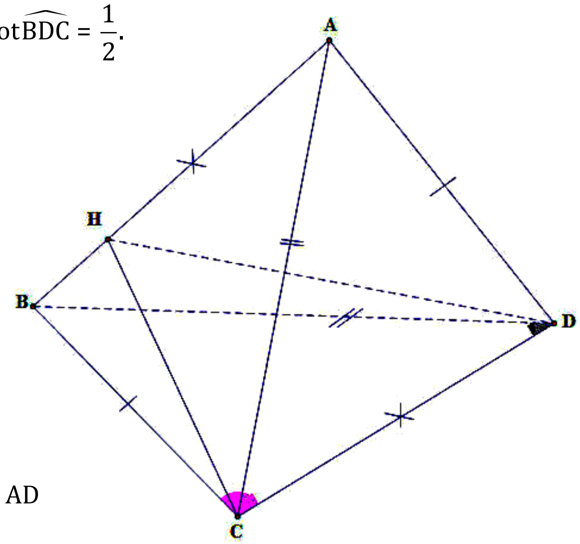
b) Tính giá trị lớn nhất của khối tứ diện $MA_1B_1C_1$ khi M thay đổi .

18. (Đề thi HSG Tỉnh Hải Phòng năm 2010). Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc . Gọi $\alpha;\beta;\gamma$ lần lượt là góc tạo bởi các mặt phẳng OBC, OAC, OAB với mặt phẳng (ABC).

a) Chứng minh rằng : $\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\gamma + 2 = \tan^2\alpha.\tan^2\beta.\tan^2\gamma$

b) Giả sử OC=OA+OB . Chứng minh rằng : $\widehat{OCA} + \widehat{OCB} + \widehat{ACB} = 90^0$

19. (Đề thi HSG Tỉnh Nghệ An năm 2008). Cho tứ diện ABCD có AB = CD, AC = BD, AD = BC và mặt phẳng (CAB) vuông góc với mặt phẳng (DAB). Chứng minh rằng: $\text{Cot}\widehat{BCD}.\text{Cot}\widehat{BDC} = \dfrac{1}{2}$.



Lời giải : Đặt : $\widehat{BCD} = \alpha; \widehat{BDC} = \beta$

Ta có :

$$\Delta ABC = \Delta DCB \Rightarrow \begin{cases} \widehat{BAC} = \widehat{BDC} = \beta \\ \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \alpha \end{cases}$$

$$\Delta CBD = \Delta ADB \Rightarrow \begin{cases} \widehat{BAD} = \widehat{BCD} = \alpha \\ \widehat{ABD} = \widehat{CDB} = \beta \end{cases}$$

Gọi H là hình chiếu của C lên AB . Đặt $HC = x$.

$$\text{Do } \begin{cases} \Delta CBA = \Delta DAB \\ (CBA) \perp (BDA) \end{cases} \Rightarrow CH \perp DH$$

Trong tam giác vuông BHC : $\sin\alpha = \dfrac{HC}{BC} \Rightarrow BC = \dfrac{HC}{\sin\alpha} = \dfrac{x}{\sin\alpha} = AD$

$\tan\alpha = \dfrac{HC}{BH} = \dfrac{x}{BH} \Rightarrow BH = \dfrac{x}{\tan\alpha}$.

Trong tam giác vuông AHC : $\sin\beta = \dfrac{HC}{AC} \Rightarrow AC = \dfrac{HC}{\sin\beta} = \dfrac{x}{\sin\beta} = BD$.

$\tan\beta = \dfrac{HC}{AH} = \dfrac{x}{AH} \Rightarrow AH = \dfrac{x}{\tan\beta}$

Trong tam giác BCD : $CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2BC.BD.\cos(\pi - \alpha - \beta) = \dfrac{x^2}{\sin^2\alpha} + \dfrac{x^2}{\sin^2\beta} + 2\dfrac{x}{\sin\alpha}.\dfrac{x}{\sin\beta}\cos(\alpha + \beta)$ **(1)**

Lại có :

$HD^2 = AH^2 + AD^2 - 2AH.AD.\cos\alpha$

$\Rightarrow HD^2 = \dfrac{x^2}{\tan^2\beta} + \dfrac{x^2}{\sin^2\alpha} - 2\dfrac{x}{\tan\beta}.\dfrac{x}{\sin\alpha}.\cos\alpha$ **(2)**

Mà tam giác CHD vuông nên :

$$CD^2 = CH^2 + HD^2 \overset{(1)+(2)}{\Rightarrow} \frac{x^2}{\sin^2\alpha} + \frac{x^2}{\sin^2\beta} + 2\frac{x}{\sin\alpha}.\frac{x}{\sin\beta}\cos(\alpha+\beta) = x^2 + \frac{x^2}{\tan^2\beta} + \frac{x^2}{\sin^2\alpha} - 2\frac{x}{\tan\beta}.\frac{x}{\sin\alpha}.\cos\alpha$$

$$\Rightarrow (1 + \cot^2\alpha) + (1 + \cot^2\beta) + 2(\cot\alpha.\cot\beta - 1) = 1 + \cot^2\beta + (1 + \cot^2\alpha) - 2\cot\alpha.\cot\beta \Rightarrow \cot\alpha.\cot\beta = \frac{1}{2}$$

ĐÁP ÁN CỦA SỞ GD&ĐT :

Đặt $AD = BC = a, AC = BD = b, AB = CD = c, \widehat{BAC} = A, \widehat{ABC} = B, \widehat{ACB} = C.$

Ta có ΔABC nhọn và $\Delta ABC = \Delta DCB = \Delta CDA = \Delta BAD$.

Suy ra $\widehat{BCD} = \widehat{ABC} = B; \widehat{ABD} = \widehat{BDC} = \widehat{CAB} = A, (1)$

Hạ $CM \perp AB$, vì $(CAB) \perp (DAB)$ nên $CM \perp (DAB) \Rightarrow CM \perp MD \Rightarrow CM^2 + DM^2 = CD^2, (2)$.

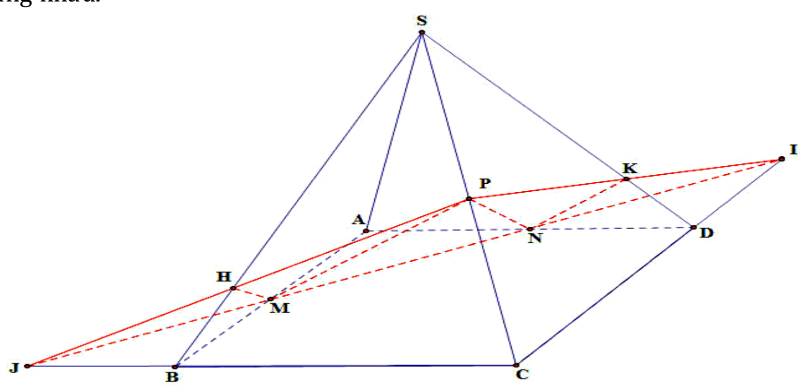
áp dụng định lí cosin cho tam giác BMD ta được $MD^2 = BM^2 + BD^2 - 2BM.BD.\cos\widehat{MBD}, (3)$

Từ (1), (2), (3) ta được $CM^2 + BM^2 + BD^2 - 2BM.BD.\cos A = CD^2$

$BC^2 + BD^2 - 2BM.BD.\cos A = CD^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab\cos A.\cos B = c^2$

$\Leftrightarrow \cos C = \cos A.\cos B \Leftrightarrow \sin A.\sin B = 2\cos A.\cos B \Leftrightarrow \cot A.\cot B = \frac{1}{2}.$

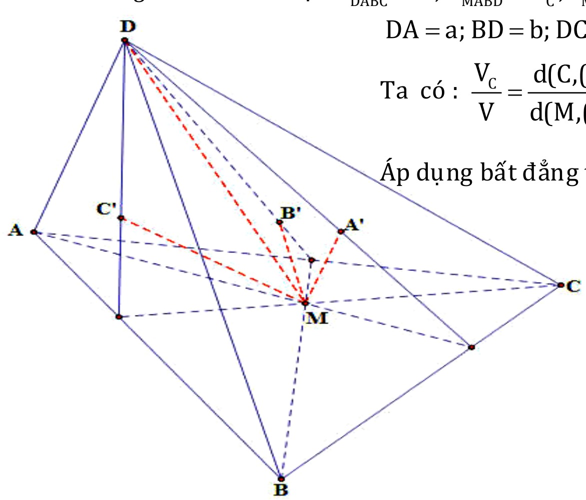
20. (Đề thi HSG Tỉnh Nghệ An năm 2008) .Cho khối chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, SC. Chứng minh rằng mặt phẳng (MNP) chia khối chóp S.ABCD thành hai phần có thể tích bằng nhau.



21. (Đề thi HSG Tỉnh Nghệ An năm 2009) . Cho tam giác ABC , M là một điểm trong tam giác ABC. Các đường thẳng qua M song song với AD, BD, CD tương ứng cắt các mặt phẳng (BCD), (ACD) , (ABD) lần lượt tại A', B', C' . Tìm M sao cho $MA'.MB'.MC'$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải 1 : Đặt $V_{DABC} = V; V_{MABD} = V_C; V_{MADC} = V_B; V_{MBC} = V_A \Rightarrow V_A + V_B + V_C = V$ và :

$DA = a; BD = b; DC = c; MA' = x; MB' = y; MC' = z$



Ta có : $\frac{V_C}{V} = \frac{d(C,(ADB))}{d(M,(ADB))} = \frac{MC'}{CD} = \frac{z}{c}$; tương tự : $\frac{V_A}{V} = \frac{x}{a}; \frac{V_B}{V} = \frac{y}{b} \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM : $1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{xyz}{abc}} \Rightarrow xyz \leq \frac{abc}{27}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{1}{3}$

Do đó : $MA'.MB'.MC'$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi M là trọng Tâm tam giác ABC .

Lời giải 2 : Đặt : $DA = a; BD = b; DC = c; MA' = x; MB' = y; MC' = z$

Ta có : $\overrightarrow{A'M} = \frac{A'M}{DA}.\overrightarrow{DA} = \frac{x}{a}\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{B'M} = \frac{B'M}{DB}.\overrightarrow{DB} = \frac{y}{b}.\overrightarrow{DB}$;

ĐÁP ÁN SỞ GD&ĐT :

Trong mặt phẳng (ABC) :
$AM \cap BC = \{A_1\}$; $BM \cap AC = \{B_1\}$, $CM \cap AB = \{C_1\}$
Trong (DAA_1) :
Kẻ đường thẳng qua M song song với AD cắt DA_1 tại A'

Xét tam giác DAA_1 có MA' // AD nên $\frac{MA'}{DA} = \frac{MA_1}{AA_1} = \frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}}$

Tương tự ta có $\frac{MB'}{DB} = \frac{MB_1}{BB_1} = \frac{S_{\Delta MAC}}{S_{\Delta ABC}}$, $\frac{MC'}{DC} = \frac{MC_1}{CC_1} = \frac{S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta ABC}}$

Suy ra $\frac{MA'}{DA} + \frac{MB'}{DB} + \frac{MC'}{DC} = 1 \left(\text{do} S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB} = S_{ABC}\right)$

Ta có $\frac{MA'}{DA} + \frac{MB'}{DB} + \frac{MC'}{DC} \geq 3\sqrt[3]{\frac{MA'}{DA}.\frac{MB'}{DB}.\frac{MC'}{DC}}$

Suy ra MA'.MB'.MC' ≤ $\frac{1}{27}$ DA.DB.DC (không đổi)

Vậy giá trị lớn nhất MA'.MB'.MC' là $\frac{1}{27}$ DA.DB.DC, đạt được khi

$\frac{MA'}{DA} = \frac{MB'}{DB} = \frac{MC'}{DC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{MA_1}{AA_1} = \frac{MB_1}{BB_1} = \frac{MC_1}{CC_1} = \frac{1}{3}$

Hay M là trọng tâm tam giác ABC

22. (Tạp chí THTT : T10/278 ; T10/288) . Cho tứ diện S.ABC với SA=a; SB =b ; SC = c . Một mặt phẳng (α) thay đổi đi qua trọng tâm của tứ diện cắt các cạnh SA, SB, SC tại các điểm SA, SB, SC tại các điểm D, E, F tương ứng .

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức : $\frac{1}{SD^2} + \frac{1}{SE^2} + \frac{1}{SF^2}$

b) Với đk : a=b=c=1, tìm giá trị lớn nhất của : $\frac{1}{SD.SE} + \frac{1}{SE.SF} + \frac{1}{SF.SD}$

Lời giải : Đặt : $SD = x; SE = y ; SF = z$

G là trọng tâm tứ diện nên : $\overrightarrow{SG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right) = \frac{1}{4}\left[\sum \frac{SA}{SD}\overrightarrow{SD}\right] = \frac{1}{4}\left[\sum \frac{a}{x}\overrightarrow{SD}\right]$

Do D,E,F, G đồng phẳng nên : $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 4$. Từ đó ta có :

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) \geq \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right)^2 = 16 \Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{16}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (1)$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4a} \\ y = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4b} \\ z = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4c} \end{cases}$

23. (Đề thi HSG Tỉnh Nghệ An năm 2009) . Cho tứ diện ABCD có độ dài các cạnh bằng 1 . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD, AC . Trên đường thẳng AB lấy điểm P , trên DN lấy điểm Q sao cho PQ song song với CM . Tính độ dài PQ và thể tích khối AMNP .

Lời giải :

Giả sử : $\overrightarrow{AB} = \vec{x}; \overrightarrow{AC} = \vec{y}; \overrightarrow{AD} = \vec{z}$ và : $\frac{AP}{AB} = m; \overrightarrow{AQ} = n.\overrightarrow{AC} + (1-n)\overrightarrow{AD}$

Ta có : $\vec{x}.\vec{y} = \vec{y}.\vec{z} = \vec{z}.\vec{x} = \frac{1}{2}$

Lúc đó :

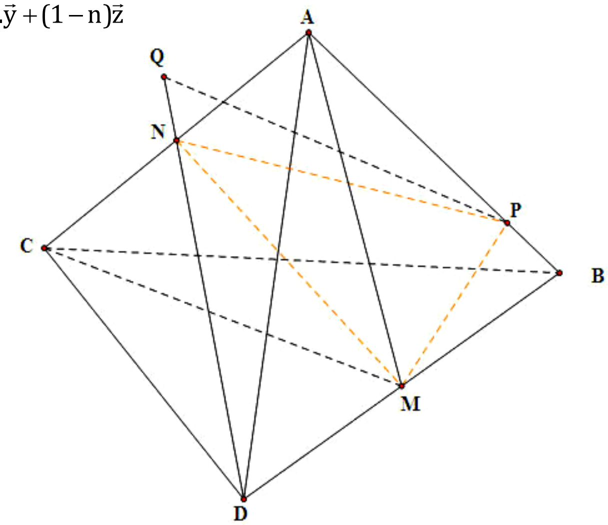
$\overrightarrow{AC}=\vec{y};\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\vec{x}+\vec{z});\overrightarrow{AP}=m.\vec{x};\overrightarrow{AQ}=n.\overrightarrow{AN}+(1-n)z\overrightarrow{AD}=\frac{n}{2}.\vec{y}+(1-n)\vec{z}$

Suy ra : $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\vec{x}-2\vec{y}+\vec{z})$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=-m\vec{x}+\frac{n}{2}\vec{y}+(1-n)\vec{z}$

Do CM // PQ nên : $\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{CM}\Rightarrow\begin{cases}-m=\frac{k}{2}\\ \frac{n}{2}=-k\\ 1-n=\frac{k}{2}\end{cases}\Rightarrow k=-\frac{2}{3}$

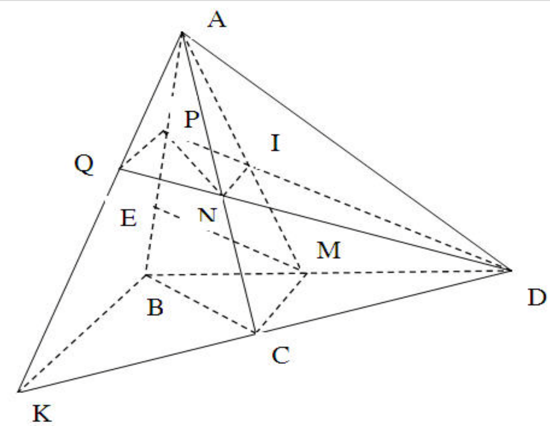
Vậy : $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{3}(2\vec{y}-\vec{x}-\vec{z})\Rightarrow|\overrightarrow{PQ}|^2=\frac{1}{9}(2\vec{y}-\vec{x}-\vec{z})^2=\frac{1}{3}\Rightarrow PQ=\frac{\sqrt{3}}{3}$



ĐÁP ÁN CỦA SỞ GD&ĐT :

Trong mặt phẳng (ACM) kẻ NI // CM ($I\in AM$)
Trong mặt phẳng (BCD) kẻ BK // CM ($K\in CD$)
Trong (ABD) DI cắt AB tại P
Trong (AKD) DN cắt AK tại Q

PQ là giao tuyến của (DNI) và (ABK) ,
do NI // CM, BK // CM nên PQ // CM



Gọi E là trung điểm PB, ME là đường trung bình tam giác BPD nên ME // PD hay ME // PI
Mặt khác từ cách dựng ta có I là trung điểm AM nên P là trung điểm AE.
Vậy AP = PE = EB

Suy ra $\frac{AP}{AB}=\frac{1}{3}$

MC là đường trung bình tam giác DBK nên BK = 2CM = $\sqrt{3}$

Suy ra $\frac{PQ}{BK}=\frac{AP}{AB}=\frac{1}{3}\Rightarrow PQ=\frac{1}{3}BK=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{V_{AMNP}}{V_{AMCB}}=\frac{AM}{AM}.\frac{AN}{AC}.\frac{AP}{AB}=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$V_{AMCB}=\frac{1}{2}V_{ABCD}$ (Do M là trung điểm BD)

ABCD là tứ diện đều có độ dài cạnh bằng 1 nên $V_{ABCD}=\frac{\sqrt{2}}{12}$ (đvtt)

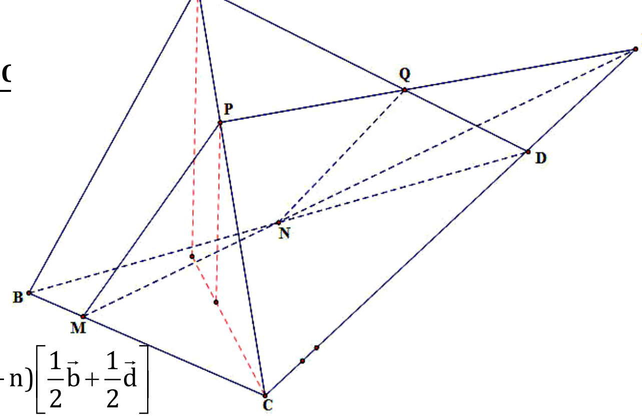
Suy ra $V_{AMCB}=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{12}=\frac{\sqrt{2}}{24}$. Vậy $V_{AMNP}=\frac{1}{6}V_{AMCB}=\frac{\sqrt{2}}{144}$ (đvtt)

24. (Đề dự bị khối D – 2008) . Cho tứ diện ABCD và các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, BD, AC sao cho $BC=4BM;\ AC=3AP;\ BD=2BN$. Mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q . Tính tỷ số $\frac{AQ}{AD}$ và tỷ số thể tích hai phần của khối tứ diện ABCD được phân chia bởi (MNP).

Lời giải :

Đặt : $\overrightarrow{AB}=\vec{b};\overrightarrow{AC}=\vec{c};\overrightarrow{AD}=\vec{d}$

Ta có :



$\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{BM}\Rightarrow\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=4\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}\right)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$ (1)

$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{d}\right)$ (2)

$\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AP}\Rightarrow\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\vec{c}$ (3)

Do C,D,I và M, N, I thẳng hàng nên :

$$\begin{cases}\overrightarrow{AI}=m\overrightarrow{AC}+(1-m)\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{AI}=n\overrightarrow{AM}+(1-n)\overrightarrow{AN}\end{cases}\Rightarrow m\vec{c}+(1-m)\vec{d}=n\left[\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\right]+(1-n)\left[\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{d}\right]$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m=\dfrac{n}{4}\\ 1-m=\dfrac{1-n}{2}\\ \dfrac{3n}{4}+\dfrac{1-n}{2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n=-2\\ m=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AI}=-2\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{AN}\\ \overrightarrow{AI}=-\dfrac{1}{2}\vec{c}+\dfrac{3}{2}\vec{d}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{CD}\\ \overrightarrow{NI}=2\overrightarrow{MN}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{ID}{IC}=\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{IN}{IM}=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

Giả sử : $\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AD}$. Do P, Q, I thẳng hàng nên :

$$\overrightarrow{AQ}=p\overrightarrow{AP}+(1-p)\overrightarrow{AI}\Rightarrow k\vec{d}=\frac{p}{3}\vec{c}+(1-p)\left(\frac{-1}{2}\vec{c}+\frac{3}{2}\vec{d}\right)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{p}{3}=\dfrac{1-p}{2}\\ k=\dfrac{3(1-p)}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=\dfrac{3}{5}\\ k=\dfrac{3}{5}\end{cases}\Rightarrow 5\overrightarrow{AQ}=3\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{AI}\Rightarrow 3\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{QI}$$

Suy ra : $\dfrac{QI}{PI}=\dfrac{3}{5}$

Ta lại có : $\dfrac{V_{IQND}}{V_{IPMC}}=\dfrac{IQ}{IP}.\dfrac{IN}{IM}.\dfrac{ID}{IC}=\dfrac{3}{5}.\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{15}\Rightarrow\dfrac{V_{QPMCDN}}{V_{IPMC}}=\dfrac{13}{15}$ **(4)**

Mà : $\dfrac{V_{ABCD}}{V_{PMCI}}=\dfrac{d\left(A,(BCD)\right).S_{BCD}}{d\left(P,(MIC)\right).S_{MIC}}=\dfrac{AC}{PC}.\dfrac{CB.CD.\sin C}{MC.CI.\sin C}=\dfrac{3}{2}.\dfrac{4}{3}.\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$ **(5)**

Từ (4) và (5) suy ra : $\dfrac{V_{PQDNMC}}{V_{ABCD}}=\dfrac{13}{15}\dfrac{3}{4}=\dfrac{13}{20}\Rightarrow\dfrac{V_{PQDNMC}}{V_{ABMPQN}}=\dfrac{13}{7}$

25. (Đề thi HSG Tỉnh Hà Tĩnh năm 2008) . Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có góc giữa mặt bên và đáy là α. Vẽ đường cao SH của hình chóp, gọi E là điểm thuộc SH và có khoảng cách tới hai mặt phẳng (ABCD) và (SCD) bằng nhau . Mặt phẳng (P) đi qua E, C, D cắt SA, SB tại M, N .

- **a)** Thiết diện là hình gì ?
- **b)** Gọi thể tích các khối tứ diện S.NMCD và ABCDNM lần lượt là V_1 , V_2 . Tìm α để $3V_2=5V_1$.

26. (Đề thi chọn ĐT HSG QG tỉnh Quảng Bình năm 2010) . Cho tứ diện ABCD . Gọi trung điểm của AB, CD lần lượt là K , L . Chứng minh rằng bất kỳ mặt phẳng nào đi qua KL đều chia khối tứ diện này thành 2 phần có thể tích bằng nhau.

27. (Đề thi HSG Thành Phố Cần Thơ năm 2008) . Trong không gian cho hình chóp S.ABC , trọng tâm ABC là G . Trung điểm của SG là I . Mặt phẳng (α) đi qua I cắt các tia SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P (Không trùng với S) . Xác định vị trí của mặt phẳng (α) để thể tích khối chóp S.PMN là nhỏ nhất .

28. (Đề thi HSG Tỉnh Hải Dương năm 2008) . Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng 1 . Lấy các điểm M, N, P, Q, R , S lần lượt thuộc các cạnh AD, AB, BB_1, B_1C_1, C_1D_1, DD_1 . Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đường gấp khúc khép kín MNPQRSM .

29. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD , có đáy ABCD là một hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAC. M là một điểm thay đổi trong miền hình bình hành ABCD .Tia MG cắt mặt bên của hình chóp S.ABCD tại điểm N .

Đặt: $Q=\dfrac{MG}{NG}+\dfrac{NG}{MG}$

- **a)** Tìm tất cả các vị trí của điểm M sao cho Q đạt giá trị nhỏ nhất .
- **b)** Tìm giá trị lớn nhất của Q.

30. Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC . Lấy điểm S không thuộc (P) . Nối SA, SB, SC . I là một điểm bất kỳ trong tam giác , gọi AI cắt BC tại A_1 , CI cắt AB tại C_1 , BI cắt AC tại B_1 . Kẻ IA_2//SA, IB_2//SB, IC_2//SC

$\left(A_2\in(SBC);B_2\in(SAC);C_2\in(SAB)\right)$. CMR : $\dfrac{SA_2}{A_1A_2}+\dfrac{SB_2}{B_1B_2}+\dfrac{SC_2}{C_1C_2}\ge 6$

31. (Đề thi HSG Tỉnh Đồng Tháp năm 2009) . Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính AD = 2a. SA vuông góc với mp' (ABCD) và SA = a $\sqrt{6}$.

a) Tính khoảng cách từ A và B đến mp' (SCD).

b) Tính diện tích của thiết diện của hình chóp S.ABCD với mp'(α) song song với mp'(SAD) và cách mp'(SAD) một khoảng bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

32. Cho tứ diện OABC với OA = a, OB = b, OC = c và OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Tính diện tích tam giác ABC theo a, b, c. Gọi α,β,γ là góc giữa OA, OB, OC với mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng:

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$.

33. Cho hai nửa đường thẳng Ax, By chéo nhau và nhận AB làm đoạn vuông góc chung . Các điểm M, N lần lượt chuyển động trên Ax, By sao cho AM+BN = MN . Gọi O là trung điểm AB, H là hình chiếu của O xuống MN .

a) Chứng minh rằng H nằm trên một đường tròn cố định.

35. Khi M khác A, N khác B

36. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có các cạnh bằng a. Với M là một điểm thuộc cạnh AB, chọn điểm N thuôc cạnh D'C' sao cho AM+D'N=a

a). Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua 1 điểm cố định khi M thay đổi.

b) . Tính thể tích của khối chóp B'.A'MCN theo a. Xác định vị trí của M để khoảng cách từ B tới (A'MCN) đạt giá trị lớn nhất. Tính khoảng cách lớn nhất đó theo a.

37. Cho hình tứ diện OABC

a) Gọi M là một điểm bất kỳ thuộc miền trong của hình tứ diện OABC và x_1; x_2; x_3; x_4; lần lượt là khoảng cách từ M đến bốn mặt (ABC), (OBC), (OAC) và (OAB). Gọi h_1; h_2; h_3; h_4 lần lượt là chiều cao của các hình chóp tam giác O.ABC; A.OBC; B.OAC và C.OAB.

Chứng minh tổng $\frac{x_1}{h_1}+\frac{x_2}{h_2}+\frac{x_3}{h_3}+\frac{x_4}{h_4}$ là một hằng số .

b) Các tia OA, OB, OC đôi một hợp với nhau m $\frac{V_1}{V}$ột góc 60^0. OA = a. Góc BAC bằng 90^0.

Đặt OB+OC = m. (m >0, a > 0). Chứng minh m > 2a. Tính thể tích khối tứ diện OABC theo m và a

45. Cho tứ diện ABCD có độ dài các cạnh AB, CD lớn hơn 1 và độ dài các cạnh còn lại nhỏ hơn hoặc bằng 1. Gọi H là hình chiếu của A trên mặt phẳng (BCD); F, K lần lượt là hình chiếu của A, B trên đường thẳng CD.

a) Chứng minh: $AF \le \sqrt{1-\frac{CD^2}{4}}$.

b) Tính độ dài các cạnh của tứ diện ABCD khi tích P = AH.BK.CD đạt giá trị lớn nhất.

46. a) Cho hình chóp S.ABC có đáy ΔABC vuông tại A , biết AB = a , AC = $a\sqrt{3}$; Đường cao hình chóp là $SA = a\sqrt{3}$; M là điểm trên đoạn BC sao cho BM = $\frac{1}{3}$BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và BS

b) Cho hai nửa đường thẳng Ax, By chéo nhau. Hai điểm C, D thay đổi lần lượt ở trên Ax và By sao cho:
$\frac{1}{AC}+\frac{2}{BD}=\frac{3}{AB}$.Chứng minh rằng: mặt phẳng (P) chứa CD và song song với AB luôn luôn đi qua một điểm cố định I trong mặt phẳng (Q) chứa Ax và (Q) song song By.

47. (Đề thi HSG Tỉnh Trà Vinh năm 2009) . Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy AB=a, cạnh bên SA=b. Gọi M,N lần lượt là trung điểm AB và SC. Một mặt phẳng (α) thay đổi quay xung quanh MN cắt các cạnh SA và BC theo thứ tự ở P và Q không trùng với S.

1) Chứng minh rằng $\frac{AP}{BQ}=\frac{b}{a}$

2) Xác định tỉ số $\frac{AP}{AS}$ sao cho diện tích MPNQ nhỏ nhất

48. Cho tứ diện ABCD có bán kính đường tròn ngoại tiếp các mặt đều bằng nhau . Chứng minh rằng các cạnh đối diện của tứ diện đều bằng nhau .

49. Cho tứ diện ABCD có các đường cao $AA';BB';CC';DD'$ đồng quy tại một điểm thuộc miền trong của tứ diện . Các đường thẳng $AA';BB';CC';DD'$ lại cắt mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD theo thứ tự là $A_1;B_1;C_1;D_1$.

$$\frac{AA'}{AA_1}+\frac{BB'}{BB_1}+\frac{CC'}{CC_1}+\frac{DD'}{DD_1}\ge\frac{8}{3}.$$

50. Cho tứ diện ABCD có AB vuông góc với AC và chân đường vuông góc hạ từ A đến mặt phẳng (BCD) là trực tâm tam giác BCD . Chứng minh rằng : $\left(BC+CD+DB\right)^2 \le 6\left(AB^2+AD^2+AC^2\right)$

51. (Đề thi HSG TP Hà Nội năm 2004) . Cho tứ diện ABCD DA=a, DB=b, DC=c đôi một vuông góc với nhau.Một điểm M tuỳ ý thuộc khối tứ diện.

a) .Gọi các góc tạo bởi tia DM với DA, DB, DC là α,β,γ .CMR : $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$

b) .Gọi S_A,S_B,S_C,S_D lần lượt là diện tích các mặt đối diện với đỉnh A, B, C, D của khối tư diện. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q=MA.S_A+MB.S_B+MC.S_C+MD.S_D$

52. (Đề thi HSG TP Hà Nội năm 2005) .Hình chóp S.ABC có các cạnh bên đôi một vuông góc và SA =a, SB=b, SC=c. Gọi A’, B’, C’ là các điểm di động lần lượt thuộc các cạnh SA, SB, SC nhưng luôn thỏa mãn SA.SA’ =SB.SB’=SC.SC’. Gọi H là trực tâm của tam giác A’B’C’ và I là giao điểm của SH với mặt phẳng (ABC).

a) Chứng minh mặt phẳng (A’B’C’) song song với một mặt phẳng cố định và H thuộc một đường thẳng cố định.

b) Tính $IA^2+IB^2+IC^2$ theo a, b, c.

53. (Đề thi HSG TP Hà Nội năm 2006) . Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng 1. Các điểm M, N lần lượt chuyển động trên các đoạn AB, AC sao cho mặt phẳng (DMN) luôn vuông góc với mặt phẳng (ABC). Đặt AM=x, AN=y.

a) . Cmr: mặt phẳng (DMN) luôn chứa một đường phẳng cố định và : x + y = 3xy.

b) . Xác định vị trí của M, N để diện tích toàn phần tứ diện ADMN đạt giá trị nhỏ nhất và lớn nhất.Tính các giá trị đó.

54. (Đề thi HSG TP Hà Nội năm 2008) . Cho hình chóp S.ABCD có SA làđường cao và đáy là hình chữ nhật ABCD, biết SA = a, AB = b, AD = c.

a) Trong mặt phẳng (SBD), vẽ qua trọng tâm G của tam giác SBD một đường thẳng cắt cạnh SB tại M và cắt cạnh SD tại N. Mặt phẳng (AMN) cắt cạnh SC của hình chóp S.ABCD tại K. Xác định vị trí của M trên cạnh SB sao cho thể tích của hình chóp S.AMKN đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất. Tính các giá trị đó theo a, b, c.

b) Trong mặt phẳng (ABD), trên tia At là phân giác trong của góc BAD ta chọn một điểm E sao cho góc BED bằng 45^0. Cmr: $AE=\dfrac{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+\sqrt{2}\left(b+c\right)}{2}$

55. Cho hình chóp S.ABCD,đáy là hình bình hành tâm O. Hai mặt bên SAB và SCD vuông góc tại A và C cùng hợp với đáy góc α . Biết $\widehat{ABC}=\varphi$. Chứng minh SBC và SAD cùng hợp với đáy ABCD một góc β thỏa mãn hệ thức : $\cot\beta=\cot\alpha.\cos\varphi$.

56. Cho hình chóp S.ABC,đáy ABC là tam giác vuông tại B với AB=a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) ; mặt (SAC) hợp với mặt phẳng (SAB) một góc α và hợp với mặt phẳng (SBC) một góc β. Chứng minh rằng :

$$SA=\frac{a\cos\beta}{\sqrt{\cos[\pi-(\alpha+\beta)].\cos(\alpha-\beta)}}$$

57. Cho hình chóp S.ABCD cóđáy ABCD là hình chữ nhật ; SA vuông góc với mặt phẳng

PHẦN VI : MỘT SỐ ĐỀ KIỂM TRA ĐỘI TUYỂN

SỞ GD&ĐT NGHỆ AN
TRƯỜNG THPT ĐẶNG THÚC HỨA
***Giáo viên ra đề* : Phạm Kim Chung**

BÀI KIỂM TRA CHẤT LƯỢNG ĐỘI TUYỂN THAM GIA KỲ THI HSG TỈNH NĂM HỌC 2010 – 2011 (Lần thứ 1)

Thời gian làm bài : 180 phút

Câu 1 . Giải phương trình : $\ln(x+1)^{2(x+1)} = x^2 + 2x$

Câu 2 . Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} 2x^2 = y + \dfrac{m^2}{y} \\ 2y^2 = x + \dfrac{m^2}{x} \end{cases}$$

Câu 3 . Cho $a,b,c>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{4a}{a+b+2c} + \frac{b+3c}{2a+b+c} - \frac{8c}{a+b+3c}$$

Câu 4 . Cho dãy số $(x_n), n \in N^*$, được xác định như sau : $x_1 = \frac{2}{3}$ và $x_{n+1} = \frac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1}, \forall n \in N^*$. Đặt $y_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

Câu 5 . Cho hình chóp S.ABCD có SA là đường cao và đáy là hình chữ nhật ABCD, biết SA = a, AB = b, AD = c. Trong mặt phẳng (SBD), vẽ qua trọng tâm G của tam giác SBD một đường thẳng cắt cạnh SB tại M và cắt cạnh SD tại N. Mặt phẳng (AMN) cắt cạnh SC của hình chóp S.ABCD tại K. Xác định vị trí của M trên cạnh SB sao cho thể tích của hình chóp S.AMKN đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất. Tính các giá trị đó theo a, b, c.

Câu 6 . Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có độ dài bằng 1 . Lấy điểm $E \in AA_1$ sao cho $AE = \frac{1}{3}$. Lấy điểm $F \in BC$ sao cho $BF = \frac{1}{4}$. Tìm khoảng cách từ B_1 đến mặt phẳng FEO (O là tâm của hình lập phương).

Câu 7 . Tìm hàm số $f:(0;+\infty) \to (0;+\infty)$ thoả mãn :

$$xf(xf(y)) = f(f(y)),\ \forall x,y \in (0;+\infty)$$

__________Hết__________

Thanh Chương ,ngày 03 tháng 12 năm 2010

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

Câu 1 . Giải phương trình : $\ln(x+1)^{2(x+1)} = x^2 + 2x$ (1)

Lời giải : Điều kiện : $x > -1$

Lúc đó : PT $\Leftrightarrow 2(x+1)\ln(x+1) = x^2 + 2x \Leftrightarrow 2(x+1)\ln(x+1) - x^2 - 2x = 0$

Xét hàm số : $f(x) = 2(x+1)\ln(x+1) - x^2 - 2x,\ x > -1$

Ta có : $f'(x) = 2\ln(x+1) - 2x$;

$$f''(x) = \frac{2}{x+1} - 2 = \frac{-2x}{x+1} ;$$

$$f'''(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0,\ \forall x > -1$$

Lại có : $f''(0) = 0,\ f'''(0) < 0$ nên hàm số $g(x) = f'(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$

Do đó : $f'(x) \le f'(0) = 0, \forall x > -1$

Vậy hàm số $f(x) = 2(x+1)\ln(x+1) - x^2 - 2x$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$. Nhận thấy $x = 0$ là một nghiệm của phương trình (1), suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 2 . Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} 2x^2 = y + \dfrac{m^2}{y} \\ 2y^2 = x + \dfrac{m^2}{x} \end{cases}$$ có nghiệm duy nhất .

Lời giải : Điều kiện : $x \ne 0; y \ne 0$

Hệ đã cho tương đương với : $\begin{cases} 2x^2y = y^2 + m^2 \\ 2y^2x = x^2 + m^2 \end{cases}$ (*)

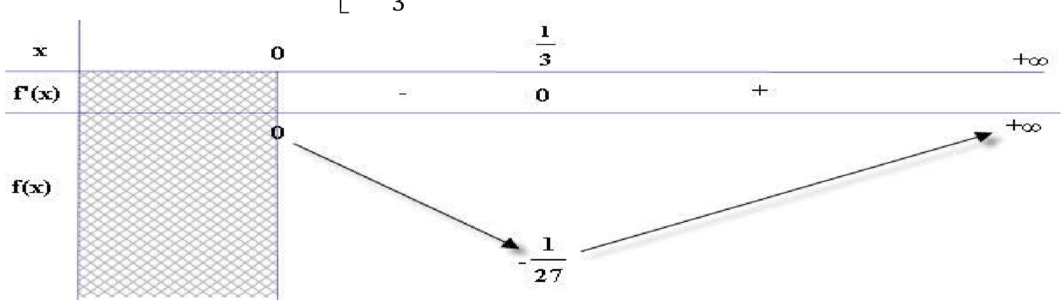
Từ hệ (*) nhận thấy vế trái của các phương trình không âm, nên nếu hệ có nghiệm (x,y) thì : $x > 0; y > 0$

Do đó : $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, y > 0 \\ 2x^2y - y^2 = m^2 \\ (x-y)(2xy + x + y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x > 0 \\ 2x^3 - x^2 = m^2 \ (1) \end{cases}$

Do đó bài toán trở thành tìm tham số m để phương trình (1) có nghiệm dương duy nhất.

Xét hàm số : $f(x) = 2x^3 - x^2, \forall x > 0$

Ta có : $f'(x) = 6x^2 - 2x;\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$



Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy, phương trình (1) có nghiệm dương duy nhất khi và chỉ khi : $m^2 \geq 0$. Vậy với mọi $m \in R$ hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Câu 3 . Cho $a,b,c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{4a}{a+b+2c} + \frac{b+3c}{2a+b+c} - \frac{8c}{a+b+3c}$$

Lời giải :

Đặt : $\begin{cases} x = a+b+2c \\ y = 2a+b+c \\ z = a+b+3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = y+z-2x \\ b = 5x-y-3z (x,y,z>0) \\ c = z-x \end{cases}$

Lúc đó :

$$P = \frac{4(y+z-2x)}{x} + \frac{2x-y}{y} - \frac{8(z-x)}{z} = \left(\frac{4y}{x} + \frac{2x}{y}\right) + \left(\frac{4z}{x} + \frac{8x}{z}\right) - 17 \geq 2\sqrt{8} + 2\sqrt{32} - 17 = 12\sqrt{2} - 17$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi : $\begin{cases} 2y = \sqrt{2}x \\ 2z = 2\sqrt{2}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{-4+3\sqrt{2}}{2}t \\ b = \dfrac{10-7\sqrt{2}}{2}t\left(t \in R, t > 0\right) \\ c = \left(\sqrt{2}-1\right)t \end{cases}$

Câu 4 . Cho dãy số $(x_n), n \in N^*$ được xác định như sau : $x_1 = \dfrac{2}{3}$ và $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1}, \forall n \in N^*$. Đặt $y_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$

Lời giải :

Từ : $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2(2n+1)x_n+1} \Rightarrow \dfrac{1}{x_{n+1}} = 2(2n+1) + \dfrac{1}{x_n}$. Đặt : $v_n = \dfrac{1}{u_n}$, ta có : $\begin{cases} v_1 = \dfrac{3}{2} \\ v_{n+1} = 2(2n+1) + v_n \end{cases}$

Dễ dàng tìm được công thức tổng quát của dãy : $v_{n+1} = \dfrac{(2n+1)(2n+3)}{2}$

Do đó : $x_{n+1} = \dfrac{1}{v_{n+1}} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+3} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2(n+1)+1}$ suy ra :

$$y_n = x_1 + x_2 + ... + x_n = x_1 + \left(\frac{1}{2+1} - \frac{1}{2.2+1}\right) + \left(\frac{1}{2.2+1} - \frac{1}{2.3+1}\right) + ... + \left(\frac{1}{2(n-1)+1} - \frac{1}{2n+1}\right) = 1 + \frac{1}{2n+1}$$

Do đó : $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{2n+1}\right) = 1$

Câu 5 . Cho hình chóp S.ABCD có SA làđường cao và đáy là hình chữ nhật ABCD biết SA = a, AB = b, AD = c. Trong mặt phẳng (SBD) vẽ qua trọng tâm G của tam giác SBD một đường thẳng cắt cạnh SB tại M và cắt cạnh SD tại N. Mặt phẳng (AMN) cắt cạnh SC của hình chóp S.ABCD tại K. Xác định vị trí của M trên cạnh SB sao cho thể tích của hình chóp S.AMKN đạt giá trị lớn nhất nhỏ nhất. Tính các giá trị đó theo a, b, c.

Lời giải :

Do G là trọng tâm tam giác SDB, suy ra G cũng là trọng tâm tam giác SAC. Do đó AG cắt SC tại trung điểm K của SC.

Đặt : $\frac{SM}{SB} = x,\ \frac{SN}{SD} = y\left(\frac{1}{2}\le x\le 1;\frac{1}{2}\le y\le 1\right)$

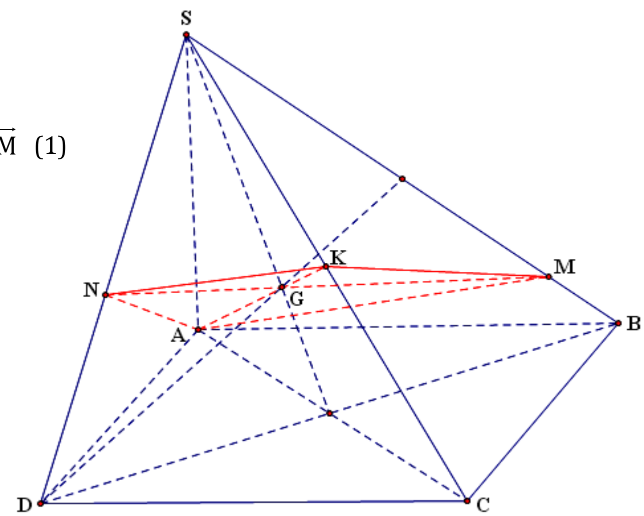
Theo công thức tính tỷ số thể tích ta có : $\frac{V_{SANK}}{V_{SADC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SN}{SD}.\frac{SK}{SC} = \frac{y}{2};\ \frac{V_{SAKM}}{V_{SACB}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SK}{SC}.\frac{SM}{SB} = \frac{x}{2}$ Lại có

$V_{SADC} = V_{SACD} = \frac{1}{2}V_{SABC} = \frac{1}{6}abc$ và : $V_{SANK} + V_{SAKM} = V_{SANKM}$. Nên ta có :

$$\frac{V_{SANK}}{V_{SADC}} + \frac{V_{SAKM}}{V_{SACB}} = \frac{2V_{SANKM}}{V_{SABCD}} = \frac{x+y}{2} \Rightarrow V_{SANKM} = \frac{abc(x+y)}{12}\quad (*)$$

Ta lại có :

$$\overrightarrow{SN} = \frac{SN}{SD}\overrightarrow{SD} = y\overrightarrow{SD};\ \overrightarrow{SM} = \frac{SM}{SB}\overrightarrow{SB} = x\overrightarrow{SB};\ \overrightarrow{SG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SO}$$



Vì O là trung điểm của BD nên : $2\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SB} \Rightarrow \overrightarrow{SG} = \frac{1}{3y}\overrightarrow{SN} + \frac{1}{3x}\overrightarrow{SM}\quad (1)$

Mà : M, N, G thẳng hàng nên từ (1) ta có :

$$\frac{1}{3y} + \frac{1}{3x} = 1 \Rightarrow x = \frac{y}{3y-1}\left(\frac{1}{2}\le y\le 1\right)$$

Thay vào (*) suy ra : $V_{SANKM} = \frac{abc\left(\frac{y}{3y-1}+y\right)}{24} = \frac{abc}{8}\frac{y^2}{3y-1}$

Xét hàm số : $f(y) = \frac{y^2}{3y-1}\quad\left(\frac{1}{2}\le y\le 1\right)$

Ta có : $f'(y) = \frac{3y^2-2y}{(3y-1)^2};\ f'(y) = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$.

Bảng biến thiên :

x		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1	
f'(x)			-	0	+		
f(x)		$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{4}{9}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy : $\text{Min}f(y) = \frac{4}{9} \Leftrightarrow y = \frac{2}{3};\ \text{Max}f(y) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{array}\right.$

Từ đó ta có :

$\text{Max}\left(V_{SANKM}\right) = \frac{abc}{9} \Leftrightarrow MN//BD$

$\text{Min}\left(V_{SANKM}\right) = \frac{abc}{8} \Leftrightarrow$ M là trung điểm SB, hoặc N là trung điểm SD.

Câu 6 . Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có độ dài bằng 1 . Lấy điểm $E \in AA_1$ sao cho $AE = \frac{1}{3}$. Lấy điểm $F \in BC$ sao cho $BF = \frac{1}{4}$. Tìm khoảng cách từ B_1 đến mặt phẳng FEO (O là tâm của hình lập phương).

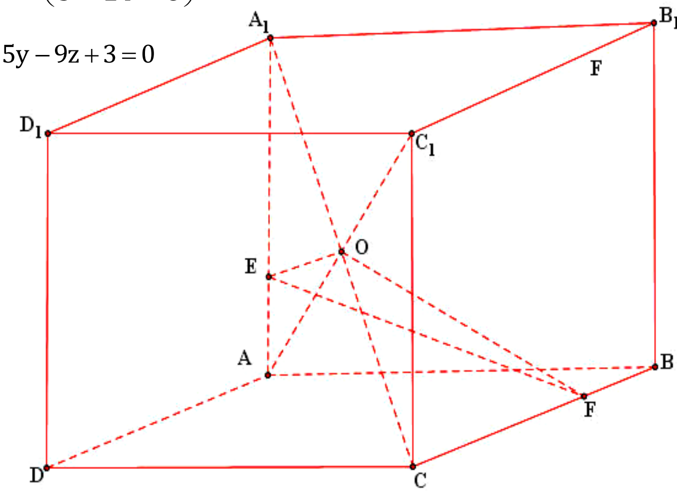
Lời giải : Chọn hệ trục tọa độ Ixyz sao cho $I \equiv A(0;0;0); A_1(0;0;1); D(1;0;0); B(0;1;0)$

Lúc đó : O là trung điểm AC nên $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$; $E\left(0;0;\frac{1}{3}\right)$;$F\left(\frac{1}{4};1;0\right)$; $B_1(0;1;1)$

Mặt phẳng (OEF) đi qua O và nhận véctơ $\left[\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF}\right]=\left(\frac{1}{3};-\frac{5}{24};-\frac{3}{8}\right)$ làm véctơ pháp tuyến nên có phương trình :

$\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{24}\left(y-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{8}\left(z-\frac{1}{2}\right)=0$ hay : $8x-5y-9z+3=0$

Vậy : $d\left(B_1;(OEF)\right)=\frac{|-5-9+3|}{\sqrt{8^2+5^2+9^2}}=\frac{11}{\sqrt{170}}$



Câu 7 . Tìm hàm số $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thoả mãn : $xf\left(xf(y)\right)=f\left(f(y)\right),\ \forall x,y\in(0;+\infty)$

Lời giải :

Cho y = 1, suy ra : $xf\left(xf(1)\right)=f\left(f(1)\right)$. Đặt $f(1)=a$, ta có : $xf(ax)=f(a)$ (1)

Từ (1) cho $x=\frac{1}{a}$, suy ra : $\frac{1}{a}f(1)=f(a)\Rightarrow f(a)=1$

Cũng từ (1) cho ta : $f(ax)=\frac{1}{x}$ (2)

Từ (2) cho $ax=y\Rightarrow f(y)=\frac{a}{y}$

Thử lại ta thấy $f(y)=\frac{a}{y}(a>0)$ là hàm số cần tìm .

SỞ GD&ĐT NGHỆ AN

TRƯỜNG THPT ĐẶNG THÚC HỨA

Giáo viên ra đề **: Phạm Kim Chung (ĐS&GT) - Nguyễn Thị Thỏa (HH)**

BÀI KIỂM TRA CHẤT LƯỢNG ĐỘI TUYỂN THAM GIA KỲ THI HSG TỈNH NĂM HỌC 2010 – 2011 (Lần thứ 2)

Thời gian làm bài : 180 phút

Câu 1. Giải phương trình: $\sqrt{3x+3}-\sqrt{5-2x}-x^3+3x^2+10x-26=0$

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases}\log_3^2 x-\sqrt{\log_3^2 y+1}=2m-3\\ \log_3^2 y-\sqrt{\log_3^2 x+1}=2m-3\end{cases}$$

Câu 3. Cho $a,\ b,c$ dương thoả mãn $ab+bc+ca=abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b}{a^2}+\frac{c}{b^2}+\frac{a}{c^2}\ge 3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$. Ta kí hiệu đạo hàm bậc n (n nguyên dương) của f(x) là $f^{(n)}(x)$. Chứng minh rằng nếu f(x) > 0, $\forall x\in R$ thì :

$F(x)=f(x)+f^{(1)}(x)+f^{(2)}+f^{(3)}(x)+f^{(4)}(x)>0,\forall x\in R$

Câu 5. Cho tứ diện ABCD có DA vuông góc với mặt phẳng(ABC), tam giác DAB cân và đáy ABC là tam giác vuông tại B có $\widehat{BAC}=\alpha$. Gọi β là góc tạo bởi hai mặt phẳng (DAC) và (DBC). Chứng minh rằng: $\tan\alpha.\tan\beta=\dfrac{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$.

Câu 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Với M là một điểm thuộc cạnh AB, chọn điểm N thuộc cạnh $D'C'$ sao cho $AM+D'N=a$. Tính thể tích khối chóp $B'.A'MCN$ theo a và xác định vị trí của điểm M để khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng $(A'MCN)$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 7 . Cho hàm số $f:R\to R$ thỏa mãn hệ điều kiện : $\begin{cases}f(1)=1\\ f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy,\forall x,y\in R\\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{f(x)}{x^4}, \quad \forall x\ne 0\end{cases}$.

Tính giới hạn : $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{e^{2f(x)}}-\sqrt[3]{1+f(x)}}{\ln\left(1+f(x)\right)}$

--------------------------------Hết----------------------------

Thanh Chương, ngày 10 tháng 12 năm 2010

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

Câu 1. Giải phương trình : $\sqrt{3x+3}-\sqrt{5-2x}-x^3+3x^2+10x-26=0$

Lời giải : ĐK: $-1\le x\le \frac{5}{2}$

PT $\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x+3}-3\right)-\left(\sqrt{5-2x}-1\right)-(x-2)(x^2-x-12)=0$

$\Leftrightarrow \frac{3(x-2)}{\sqrt{3x+3}+3}+\frac{2(x-2)}{\sqrt{5-2x}+1}-(x-2)(x^2-x-12)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{3}{\sqrt{3x+3}+3}+\frac{2}{\sqrt{5-2x}+1}-(x^2-x-12)\right]=0$

Xét hàm số : $f(x)=-x^2+x+12,\ x\in\left[-1;\frac{5}{2}\right]$

Ta có : $f'(x)=-2x+1,\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$. Suy ra : $\underset{\left[-1;\frac{5}{2}\right]}{\text{Min}}f(x)=\text{Min}\left\{f(-1);f\left(\frac{5}{2}\right);f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}=f\left(\frac{5}{2}\right)>0$

Do đó : $\frac{3}{\sqrt{3x+3}+3}+\frac{2}{\sqrt{5-2x}+1}-(x^2-x-12)>0,\ \forall x\in\left[-1;\frac{5}{2}\right]$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất : x = 2 .

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm : $\begin{cases}\log_3^2 x-\sqrt{\log_3^2 y+1}=2m-3\\ \log_3^2 y-\sqrt{\log_3^2 x+1}=2m-3\end{cases}$

Lời giải : ĐK: $x,y>0$

Đặt : $\begin{cases}u=\sqrt{\log_3^2 x+1}\\ v=\sqrt{\log_3^2 y+1}\end{cases}\left(u\ge 1,v\ge 1\right)$. Lúc đó hệ PT trở thành : $\begin{cases}u^2-v=2m-2\ \ (1)\\ v^2-u=2m-2\ \ (2)\end{cases}$.

Lấy (1)-(2), ta có : $\left(u-v\right)\left(u+v+1\right)=0\Rightarrow u=v$ (Do u+v+1 > 0 $\forall u,v\ge 1$)

Lúc đó bài toán trở thành tìm m để phương trình : $u^2-u=2m-2$ có nghiệm $u\ge 1$.

Xét hàm số : $f(u)=u^2-u+2$, ta có : $f'(u)=2u-1>0,\ \forall u\ge 1$. Và $\lim\limits_{u\to+\infty}f(u)=+\infty$.

Do đó, PT trên có nghiệm $u\ge 1$ khi và chỉ khi $2m=f(u)\ge f(1)=2\Rightarrow m\ge 1$

Câu 3. Cho a, b, c dương thoả mãn $ab+bc+ca=abc$. Chứng minh rằng : $\frac{b}{a^2}+\frac{c}{b^2}+\frac{a}{c^2}\ge 3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$

Lời giải : Ta có : $ab+bc+ca=abc\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Đặt : $\frac{1}{a}=x,\frac{1}{b}=y,\frac{1}{c}=z\Rightarrow x+y+z=1\ \left(x,y,z>0\right)$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành : $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\ge 3\left(x^2+y^2+z^2\right)$.

Áp dụng BĐT Svac-xơ ta có : $VT=\frac{x^4}{x^2y}+\frac{y^4}{y^2z}+\frac{z^4}{z^2x}\ge\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2y+y^2z+z^2x}$.

Ta sẽ chứng minh : $\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2y+y^2z+z^2x}\ge 3\Leftrightarrow\frac{(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right)}{x^2y+y^2z+z^2x}\ge 3$ (do $x+y+z=1$)

$\Leftrightarrow x^3+xy^2+y^3+yz^2+zx^2+z^3\ge 2(x^2y+y^2z+z^2x)$ (*)

Theo bất đẳng thức AM -GM ta có : $x^3+xy^2\ge 2\sqrt{x^4y^2}=2x^2y;\ \ y^3+yz^2\ge 2\sqrt{y^4z^2};\ z^3+zx^2\ge 2\sqrt{z^4x^2}$. Cộng các BĐT trên ta chứng minh được (*). Vậy : $VT\ge 3(x^2+y^2+z^2)$. đpcm

Câu 4. Cho hàm số $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$. Ta kí hiệu đạo hàm bậc n (n nguyên dương) của f(x) là $f^{(n)}(x)$. Chứng minh rằng nếu f(x) > 0, $\forall x\in R$ thì : $F(x)=f(x)+f^{(1)}(x)+f^{(2)}+f^{(3)}(x)+f^{(4)}(x)>0,\forall x\in R$

Lời giải : Ta có : F(x) là hàm bậc 4 và : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} F(x)=+\infty$, hơn nữa phương trình bậc 3 : F'(x)=0 luôn có nghiệm. Do đó hàm số y = F(x) luôn có GTNN là giá trị cực tiểu của hàm số .

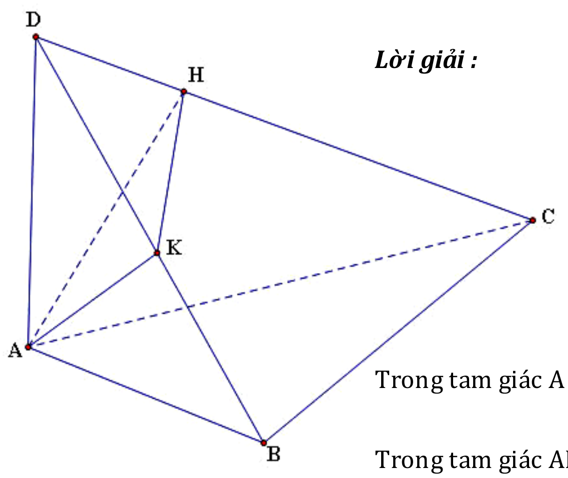
Giả sử hàm số đạt cực tiểu tại $x=x_0$.

Lúc đó : $F'(x_0)=0$ suy ra : $0=F'(x_0)=f^1(x_0)+f^2(x_0)+f^3(x_0)+f^4(x_0)=F(x_0)-f(x_0)$

$\Rightarrow F(x_0)=f(x_0)>0$ (Do f(x) > 0 , $\forall x\in R$)

Từ đó ta có : $F(x)\ge F(x_0)>0,\forall x\in R$

Câu 5. Cho tứ diện ABCD có DA vuông góc với mặt phẳng (ABC),tam giác DAB cân và đáy ABC là tam giác vuông tại B có $\widehat{BAC}=\alpha$. Gọi β là góc tạo bởi hai mặt phẳng (DAC) và (DBC). Chứng minh rằng : $\tan\alpha.\tan\beta=\dfrac{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$.



Lời giải : Đặt DA = x. Gọi K là hình chiếu của A lên DB, từ K kẻ KH vuông góc với DC tại H . Ta có :

$$\begin{cases}DA\perp BC\\AB\perp BC\end{cases}\Rightarrow BC\perp(DAB)\Rightarrow\begin{cases}BC\perp DB\\BC\perp AK\end{cases}$$. Suy ra :

$$AK\perp(DBC)\Rightarrow\begin{cases}AK\perp KH\\DC\perp AK\end{cases}\Rightarrow DC\perp(AHK)\Rightarrow AH\perp DC$$

Do đó : $\widehat{AHK}=\beta\ \Rightarrow\tan\beta=\dfrac{AK}{HK}$ (1)

Trong tam giác ABC : $\tan\alpha=\dfrac{BC}{AB}\Rightarrow BC=AB.\tan\alpha=x.\tan\alpha$; $\cos\alpha=\dfrac{AB}{AC}\Rightarrow AC=\dfrac{x}{\cos\alpha}$;

Trong tam giác ADB : $\dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{1}{AD^2}+\dfrac{1}{AB^2}\Rightarrow AK=\dfrac{x\sqrt2}{2}$ (2) : $BD=\sqrt{AD^2+AB^2}=\sqrt2x$

Trong tam giác ADC :

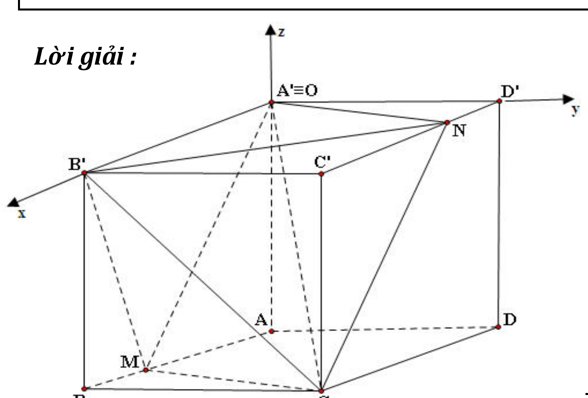
$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{\cos^2\alpha}{x^2}\Rightarrow AH^2=\frac{x^2}{1+\cos^2\alpha}\ \Rightarrow DH^2=AD^2-AH^2=x^2-\frac{x^2}{1+\cos^2\alpha}\Rightarrow DH=\frac{x\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$$

Xét hai tam giác vuông : $DHK\sim DBC\Rightarrow\dfrac{DH}{HK}=\dfrac{DB}{BC}\Rightarrow HK=\dfrac{BC.DH}{BD}=\dfrac{(x\tan\alpha).x\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}.\sqrt2x}$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có : $\Rightarrow\tan\beta=\dfrac{AK}{HK}=\dfrac{x\sqrt2}{2}.\dfrac{\sqrt2x.\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{x^2.\tan\alpha.\cos\alpha}\Rightarrow\tan\alpha.\tan\beta=\dfrac{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$ (đpcm)

Câu 6. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a . Với M là một điểm thuộc cạnh AB chọn điểm N thuộc cạnh D'C' sao cho $AM+D'N=a$. Tính thể tích khối chóp B'.A'MCN theo a và xác định vị trí của điểm M để khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng $(A'MCN)$ đạt giá trị lớn nhất .

Lời giải :



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ, với :

$A'\equiv O(0;0;0)$; $B'(a,0,0)$; $D'(0;a;0)$; $A(0;0;-a)$

Đặt $AM=x(0\le x\le a)\Rightarrow D'N=a-x$. Lúc đó ta có :

$\overrightarrow{A'M}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AM}\Rightarrow M(x;0;-a)$;

$\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'D}+\overrightarrow{A'A}\Rightarrow C(a;a;-a)$

$\overrightarrow{A'N}=\overrightarrow{A'D}+\overrightarrow{D'N}\Rightarrow N(a-x;a;0)$

Ta lại có :

$$V_{A'B'MCN} = V_{A'B'MC} + V_{A'B'CN} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{A'M}.\left[\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C}\right]\right| + \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{A'N}.\left[\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C}\right]\right|$$

Mà : $\left[\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C}\right] = \left(\begin{vmatrix}0 & 0\\ a & -a\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0 & a\\ -a & a\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a & 0\\ a & a\end{vmatrix}\right) = \left(0;a^2;a^2\right)$. Do đó : $V_{A'B'MCN} = \frac{1}{6}\left|-a^3\right| + \frac{1}{6}\left|a^3\right| = \frac{a^3}{3}$ (đv.tt)

Lại có : $\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{NC}$, suy ra tứ giác A'MCN là hình bình hành . Do đó :

$S_{A'MCN} = \left|\left[\overrightarrow{A'M},\overrightarrow{A'N}\right]\right| = \sqrt{a^4 + a^2(a-x)^2 + x^2a^2} = a\sqrt{2\left(a^2 - ax + x^2\right)}$. Nên :

$$d\left(B',(A'MCN)\right) = \frac{3V_{B'.A,MCN}}{S_{A'MCN}} = \frac{a^2}{\sqrt{2(a^2 - ax + x^2)}} = \frac{a^2}{\sqrt{2\left[\frac{3a^2}{4} + \left(\frac{a^2}{4} - ax + x^2\right)\right]}} \le \frac{a\sqrt{6}}{3} .$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi : $x = \frac{a}{2}$ hay M là trung điểm của AB .

Câu 7 . Cho hàm số $f : R \to R$ thỏa mãn hệ điều kiện : $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy, \forall x,y \in R \\ f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^4}, \quad \forall x \ne 0 \end{cases}$.

Tính giới hạn : $L = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{e^{2f(x)}} - \sqrt[3]{1+f(x)}}{\ln\left(1+f(x)\right)}$

Lời giải :

Từ : $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy, \forall x,y \in R$ (1) .

Cho $x = 0 \Rightarrow f(y) = f(0) + f(y) \Rightarrow f(0) = 0$

Cho $x = y \Rightarrow f(2x) = 2f(x) + 2x^2$ (2)

Với $t \in R, t \ne 0$:

Từ (2) cho $x = t \Rightarrow f\left(2t\right) = 2f\left(t\right) + 2t^2$ (a) ; Cho $x = \frac{1}{2t} \Rightarrow f\left(\frac{1}{t}\right) = 2f\left(\frac{1}{2t}\right) + \frac{1}{2t^2}$ (b)

Từ $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^4}, \forall x \ne 0$. Cho $x = t \Rightarrow f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{f(t)}{t^4}; x = 2t \Rightarrow f\left(\frac{1}{2t}\right) = \frac{f(2t)}{(2t)^4}$ thay vào (b) ta có : $\frac{f(t)}{t^4} = \frac{f(2t)}{8t^4} + \frac{1}{2t^2}$ (c)

Từ (a), (c) ta có : $\frac{f(t)}{t^4} = \frac{2f(t) + 2t^2}{8t^4} + \frac{1}{2t^2} \Rightarrow 8f(t) = 2f(t) + 2t^2 + 4t^2 \Rightarrow f(t) = t^2$. Hay $f(x) = x^2$.

Thử lại ta thấy $f(x) = x^2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán .

Lúc đó : $L = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{e^{2x^2}} - \sqrt[3]{1+x^2}}{\ln\left(1+x^2\right)}$. Đặt $t = \ln(1+x^2)$, khi $x \to 0$ thì $t \to 0$ và : $1 + x^2 = e^t$. Nên :

$$L = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\frac{1}{e^{2(e^t-1)}} - \sqrt[3]{e^t}}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{e^{2-2e^t} - e^{\frac{t}{3}}}{t} .$$

Xét hàm số : $f(t) = e^{2-2e^t} - e^{\frac{t}{3}}$, ta có : $f(0) = 0; f'(t) = -2e^t.e^{2-2e^t} - \frac{1}{3}e^{\frac{t}{3}} \Rightarrow f'(0) = -\frac{7}{3}$.

Theo định nghĩa đạo hàm : $f'(0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{e^{2-2e^t} - e^{\frac{t}{3}}}{t} \Rightarrow L = -\frac{7}{3}$

SỞ GD&ĐT NGHỆ AN
TRƯỜNG THPT ĐẶNG THÚC HỨA
Giáo viên ra đề : Phạm Kim Chung

BÀI KIỂM TRA CHẤT LƯỢNG ĐỘI TUYỂN THAM GIA KỲ THI HSG TỈNH NĂM HỌC 2010 – 2011 (Lần thứ 3)

Thời gian làm bài : 180 phút

Câu 1 . Tìm m để phương trình : $2+2\sin 2x=m(1+\cos x)^2$ có nghiệm trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Câu 2 . Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=m\end{cases}$$

Câu 3 . Cho các số thực dương x,y,z . Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$P=\frac{x^2y}{z^3}+\frac{y^2z}{x^3}+\frac{z^2x}{y^3}+\frac{13xyz}{3(xy^2+yz^2+zx^2)}$$

Câu 4 . Cho dãy số (x_n): $\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}\\ x_n=\frac{\sqrt{x_{n-1}^2+4x_{n-1}}+x_{n-1}}{2},\ \forall n\ge 2\end{cases}$. Chứng minh rằng dãy (y_n) với $y_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}$ có giới hạn hữu hạn khi $n\to\infty$ và tìm giới hạn đó .

Câu 5 . Cho n số không âm $a_0,a_1,a_2,...,a_{n-1}$ và có tổng $a_1+a_2+...+a_{n-1}>0$. Chứng minh rằng phương trình : $x^n-a_{n-1}x^{n-1}-a_{n-2}x^{n-2}-...-a_1x-a_0=0$ có một nghiệm dương duy nhất .

Câu 6 . Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta luôn có đẳng thức :

$2C_n^0+3C_n^1+4C_n^2...+(n+1)C_n^{n-1}+(n+2)C_n^n=(n+4)2^{n-1}$ (Trong đó C_n^k là tổ hợp chập k của n) .

Câu 7 . Cho tứ diện S.ABC , M là một điểm bất kì nằm trong tứ diện . Một mặt phẳng (P) tùy ý qua M và cắt các cạnh SA,SB,SC lần lượt tại $A_1;B_1;C_1$. Đặt V,V_A,V_B,V_C lần lượt là thể tích các tứ diện SABC,SMBC,SMCA,SMAB . Chứng minh rằng : $V=\frac{V_A}{SA_1}+\frac{V_B}{SB_1}+\frac{V_C}{SC_1}$.

Câu 8 . Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D', đường chéo $AC'=a$ (a không đổi) hợp với đáy ABCD một góc α và hợp với mặt bên BCC'B' một góc β. Tính thể tích V của hình hộp ABCD.A'B'C'D' theo a,α,β . Khi tứ giác A'D'CB là hình vuông, hãy xác định α,β để V đạt giá trị lớn nhất.

Hết

Thanh Chương ,ngày 16 tháng 12 năm 2010

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

Câu 1 . Tìm m để phương trình : $2+2\sin 2x = m(1+\cos x)^2$ có nghiệm trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Lời giải :

Rõ ràng với $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ thì $1+\cos x \neq 0$. Do đó

phương tình đã cho tương đương với : $\frac{2+2\sin 2x}{(1+\cos x)^2} = m$. Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$, $\frac{x}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow t \in [-1;1]$

Ta có : $\frac{2+2\sin 2x}{(1+\cos x)^2} = \frac{2+4.\frac{2t}{1+t^2}.\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} = \frac{2(1+t^2)^2+8t(1-t^2)}{4} = \frac{t^4-4t^3+2t^2+4t+1}{2}$. Suy ra phương tình đã cho trở thành : $t^4-4t^3+2t^2+4t+1 = 2m$ (*) . Do đó bài toán trở thành tìm m để phương trình (*) có nghiệm $t \in [-1;1]$.

Xét hàm số : $f(t) = t^4-4t^3+2t^2+4t+1,\ t \in [-1;1]$. Ta có :

$f'(t) = 4t^3-12t^2+4t+4 = 4(t-1)(t^2-2t-1) \Rightarrow f'(t) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1-\sqrt{2} \\ t = 1 \end{array}\right.$ (Với $t \in [-1;1]$) . Từ đó ta có bảng biến thiên :

x	-1		$1-\sqrt{2}$		1
f'(x)		-	0	+	0
f(x)	4	↘	0	↗	4

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy, phương trình (*) có nghiệm $t \in (-1;1)$ khi và chỉ khi : $0 \le 2m \le 4$ hay $0 \le m \le 2$.

Câu 2 . Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm : $\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y} = 0 \\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x} = m\end{cases}$

Hướng dẫn giải : ĐK : $\begin{cases} x \le \frac{3}{4} \\ y \le \frac{5}{2}\end{cases}$

Từ pt (1) cho ta : $[(2x)^2+1].2x = \left[\left(\sqrt{5-2y}\right)^2+1\right]\sqrt{5-2y} \Rightarrow f(2x) = f(\sqrt{5-2y})$

Xét Hàm số : $f(t) = (t^2+1).t \Rightarrow f'(t) = 3t^2+1 > 0 \Rightarrow$ Hàm số f(t) đồng biến trên R, do đó từ :

$f(2x) = f\left(\sqrt{5-2y}\right) \Rightarrow 2x = \sqrt{5-2y} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 4x^2 = 5-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ y = \frac{5-4x^2}{2} \end{cases}$

Thế vào pt (2) ta có : $4x^2+\left(\dfrac{5-4x^2}{2}\right)^2+2\sqrt{3-4x}=m \Leftrightarrow 4x^4-6x^2+\dfrac{25}{4}+2\sqrt{3-4x}=m$ (*) , với $0\le x\le\dfrac{3}{4}$. Bài toán trở thành, tìm m để phương trình (*) có nghiệm $x\in\left[0;\dfrac{3}{4}\right]$.

Xét hàm số : $f(x)=4x^4-6x^2+\dfrac{25}{4}+2\sqrt{3-4x}$, $x\in\left[0;\dfrac{3}{4}\right]$. Ta có :

$$f'(x)=16x^3-12x-\frac{4}{\sqrt{3-4x}}=4x(4x^2-3)-\frac{4}{\sqrt{3-4x}}<0,\ \forall x\in\left[0;\frac{3}{4}\right].$$

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với : $\dfrac{265}{64}=f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\underset{\left[0;\frac{3}{4}\right]}{\mathrm{Min}}f(x)\le m\le \underset{\left[0;\frac{3}{4}\right]}{\mathrm{Max}}f(x)=f(0)=\dfrac{25}{4}+2\sqrt{3}$

(Chú ý :** Tham khảo thêm ở Câu 41. Phần I **)

Câu 3 . Cho các số thực dương x,y,z . Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$P=\frac{x^2y}{z^3}+\frac{y^2z}{x^3}+\frac{z^2x}{y^3}+\frac{13xyz}{3(xy^2+yz^2+zx^2)}$$

HD : Xem lời giải ở : **Câu 34 . Phần III**

Câu 4 . Cho dãy số (x_n): $\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{2} \\ x_n=\dfrac{\sqrt{x_{n-1}^2+4x_{n-1}}+x_{n-1}}{2},\ \forall n\ge 2\end{cases}$. Chứng minh rằng dãy (y_n) với $y_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i^2}$ có giới hạn hữu hạn khi $n\to\infty$ và tìm giới hạn đó .

HD : Xem lời giải ở : **Câu 20.Phần IV**

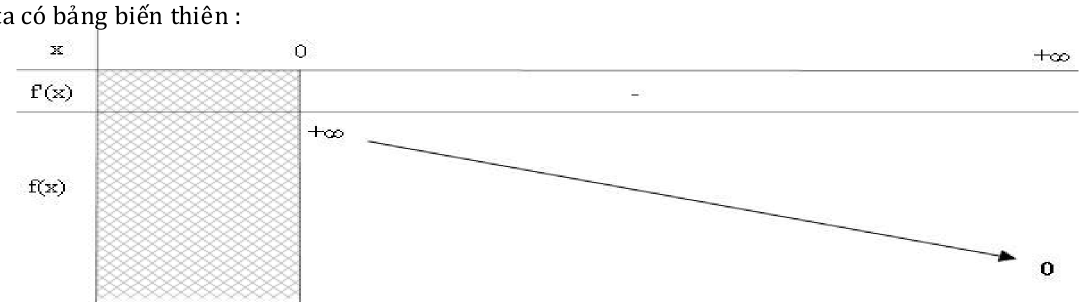
Câu 5 . Cho n số không âm $a_0,a_1,a_2,...,a_{n-1}$ và có tổng $a_1+a_2+...+a_{n-1}>0$. Chứng minh rằng phương trình : $x^n-a_{n-1}x^{n-1}-a_{n-2}x^{n-2}-...-a_1x-a_0=0$ có một nghiệm dương duy nhất .

Lời giải : Khi x>0, ta có : PT : $x^n-a_{n-1}x^{n-1}-a_{n-2}x^{n-2}-...-a_1x-a_0=0 \Leftrightarrow a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_1x+a_0=x^n$

$\Leftrightarrow \dfrac{a_{n-1}}{x}+\dfrac{a_{n-2}}{x^2}+...+\dfrac{a_1}{x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{x^n}=1$. Xét hàm số : $f(x)=\dfrac{a_{n-1}}{x}+\dfrac{a_{n-2}}{x^2}+...+\dfrac{a_1}{x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{x^n}$, trên khoảng $(0;+\infty)$, ta có :

$f'(x)=-\dfrac{a_{n-1}}{x^2}-\dfrac{2a_{n-2}}{x^3}-...-\dfrac{na_0}{x^{n+1}}<0, \forall x>0$ (Do $a_0,a_1,a_2,...,a_{n-1}$ không đồng thời bằng 0)

Từ đó ta có bảng biến thiên :



Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy, phương trình : f(x)=m luôn có 1 nghiệm dương duy nhất khi m >0 . Do đó phương tình f(x) = 1 có một nghiệm dương duy nhất.

Câu 6 . Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta luôn có đẳng thức :

$$2C_n^0+3C_n^1+4C_n^2...+(n+1)C_n^{n-1}+(n+2)C_n^n=(n+4)2^{n-1}$$ (Trong đó C_n^k là tổ hợp chập k của n)

Lời giải :

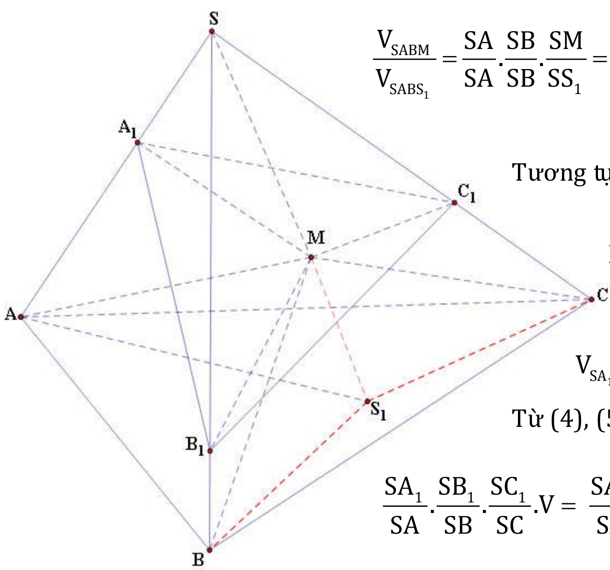
Khai triển : $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n \Rightarrow x^2(1+x)^n=C_n^0x^2+C_n^1x^3+C_n^2x^4+...+C_n^nx^{n+2}$ (1)

Lấy đạo hàm 2 vế của (1) ta được : $2x(1+x)^n+nx^2(1+x)^{n-1}=2xC_n^0+3x^2C_n^1+...+(n+2)x^{n+1}C_n^n$ (2)

Từ đẳng thức (2), cho x = 1 , ta có : $(n+4)2^{n-1}=2C_n^0+3C_n^1+4C_n^2...+(n+1)C_n^{n-1}+(n+2)C_n^n$ (đpcm)

Câu 7 . Cho tứ diện S.ABC M là một điểm bất kì nằm trong tứ diện . Một mặt phẳng (P) tùy ý qua M và cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại $A_1;B_1;C_1$. Đặt V,V_A,V_B,V_C lần lượt là thể tích các tứ diện SABC,SMBC,SMCA,SMAB . Chứng minh rằng : $V=\frac{SA}{SA_1}V_A+\frac{SB}{SB_1}V_B+\frac{SC}{SC_1}V_C$.

Lời giải :



Gọi $S_1=SM\cap(ABC)$. Theo công thức tính tỷ số thể tích ta có

$$\frac{V_{SABM}}{V_{SABS_1}}=\frac{SA}{SA}.\frac{SB}{SB}.\frac{SM}{SS_1}=\frac{SM}{SS_1};\quad \frac{V_{SA_1B_1M}}{V_{SABS_1}}=\frac{SA_1}{SA}.\frac{SB_1}{SB}.\frac{SM}{SS_1}\Rightarrow\frac{V_{SA_1B_1M}}{V_{SABM}}=\frac{SA_1}{SA}.\frac{SB_1}{SB}\Rightarrow V_{SA_1B_1M}=\frac{SA_1}{SA}.\frac{SB_1}{SB}.V_C \quad (1)$$

Tương tự ta có : $V_{SB_1C_1M}=\frac{SB_1}{SB}.\frac{SC_1}{SC}.V_A$ (2) ; $V_{SA_1C_1M}=\frac{SA_1}{SA}.\frac{SC_1}{SC}.V_B$ (3)

Lại có : $\frac{V_{SA_1B_1C_1}}{V_{SABC}}=\frac{SA_1}{SA}.\frac{SB_1}{SB}.\frac{SC_1}{SC}$ (4)

Từ (1), (2), (3) ta có :

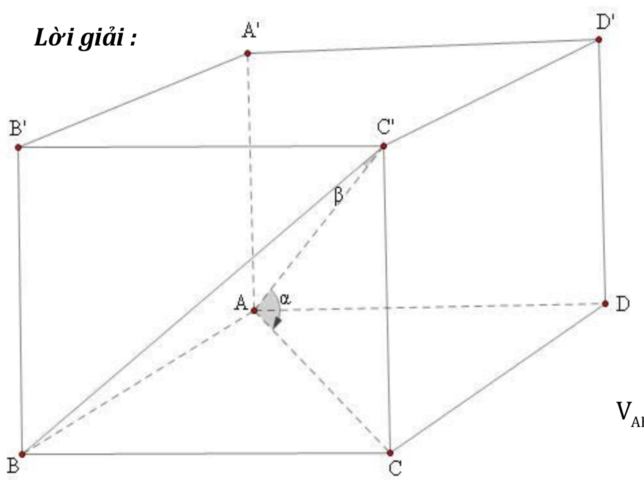
$$V_{SA_1B_1C_1}=V_{SA_1B_1M}+V_{SB_1C_1M}+V_{SA_1C_1M}=\frac{SA_1}{SA}.\frac{SB_1}{SB}.V_C+\frac{SA_1}{SA}.\frac{SC_1}{SC}.V_B+\frac{SB_1}{SB}.\frac{SC_1}{SC}.V_A \quad (5)$$

Từ (4), (5) suy ra :

$$\frac{SA_1}{SA}.\frac{SB_1}{SB}.\frac{SC_1}{SC}.V=\frac{SA_1}{SA}.\frac{SB_1}{SB}.V_C+\frac{SA_1}{SA}.\frac{SC_1}{SC}.V_B+\frac{SB_1}{SB}.\frac{SC_1}{SC}.V_A\Rightarrow V=\frac{SC}{SC_1}.V_C+\frac{SA}{SA_1}.V_A+\frac{SB}{SB_1}.V_B$$.đpcm

Câu 8 . Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' đường chéo $AC'=a$ (a không đổi) hợp với đáy ABCD một góc α và hợp với mặt bên BCC'B' một góc β. Tính thể tích V của hình hộp ABCD.A'B'C'D' theo a,α,β . Khi tứ giác A'D'CB là hình vuông hãy xác định α,β để V đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải :



Ta có : Hình chiếu của AC' lên mp(ABCD) là AC , lên mp(BCC'B') là BC' do đó : $\widehat{C'AC}=\alpha;\widehat{AC'B}=\beta$.

Xét các tam giác vuông : CAC' và BAC' ta có :

$CC'=AC'\sin\alpha=a.\sin\alpha$; $AB=AC'.\sin\beta=a\sin\beta$;

$BC'=AC'.\cos\beta=a.\cos\beta\Rightarrow BC=\sqrt{C'B^2-C'C^2}=a\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}$

Do vậy :

$V_{ABCD.A'B'C'D'}=C'C.CB.BA=a^3\sin\alpha.\sin\beta\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}$ (đvtt)

Tứ giác A'D'CB là hình vuông khi : A'B=A'D

$$\Leftrightarrow \sqrt{AB^2 + A'A^2} = A'D' \Rightarrow \sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta} = \sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha} \Leftrightarrow 2\sin^2\alpha = \cos^2\beta - \sin^2\beta \,(1)$$

Từ đó ta có :

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = a^3\sin\alpha.\sin\beta.\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha} = a^3.\sqrt{\frac{1-2\sin^2\beta}{2}}.\sqrt{\sin^2\beta}.\sqrt{\left(1-\sin^2\beta\right) - \frac{1-2\sin^2\beta}{2}} = \frac{a^3}{2}\sqrt{\sin^2\beta.(1-2\sin^2\beta)} \quad (*)$$

Áp dụng BĐT AM-GM ta có : $\sqrt{\sin^2\beta.(1-2\sin^2\beta)} = \dfrac{\sqrt{2\sin^2\beta.(1-2\sin^2\beta)}}{\sqrt{2}} \le \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[2\sin^2\beta + (1-2\sin^2\beta)\right] = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sin\beta = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \beta = 30^0$.

Vậy : $V_{Max} = \dfrac{a^3}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 30^0$.