Chương II: CÁC BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ TRONG CÁC ĐỀ THI OLYMPIC 30-4

(Từ lần V đến lần IX)

1. CÁC BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ TRONG CÁC ĐỀ THI OLYMPIC 30-4 LẦN V, NĂM 1999

1. Cho dãy số $\{x_k\}$ được xác định bởi:

$$x_k = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{k}{(k+1)!}$$

Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{1999}^n}$

Giải

Vì $x_{k+1} - x_k = \dfrac{k+1}{(k+2)!} > 0, \overset{\forall k\in N}{\Rightarrow} x_{k+1} > x_k > 0,\ \forall k \in N$

$$\Rightarrow x_{1999}^n < x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{1999}^n < 1999.x_{1999}^n$$

$$\Rightarrow x_{1999} < \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{1999}^n} < \sqrt[n]{1999}.x_{1999} \quad (*)$$

Mặt khác, ta có:

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

$$\Rightarrow x_k = \left(1 - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{(k+1)!}$$

$$\Rightarrow x_{1999} = 1 - \frac{1}{2000!}$$

Đến đây, thay x_{1999} vào (*) ta được:

$$1 - \frac{1}{2000!} < \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{1999}^n} < \sqrt[n]{1999\left(1 - \frac{1}{2000!}\right)}$$

Nhưng vì:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2000}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left[\sqrt[n]{1999}\left(1-\frac{1}{2000!}\right)\right]$$

Nên ta suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_1^n+x_2^n+\ldots+x_{1999}^n}=1-\dfrac{1}{2000!}$

(2) Cho dãy số $\{a_n\}$ thỏa BĐT:

$$a_n^{\frac{2000}{1999}}\ge a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_1,\ \forall n\ge 2$$

Chứng minh rằng tồn tại số c sao cho $a_n > n.c,\ \forall n\in\mathbb{N}$

Giải

Ta có $\quad a_n > a_1^{\frac{1999}{2000}},\ \forall n\ge 2$

$$\Rightarrow a_n^{\frac{2000}{1999}}\ge (n-2)q_1^{\frac{1999}{2000}}+q_1,\ \forall n\ge 2$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$$

$$\Rightarrow \exists n_o\in N: a_n\ge 1,\ \forall n\ge n_o$$

Đặt $\quad C=\text{Min}\left\{\dfrac{1}{4},a_n,\dfrac{a_2}{2},\ldots,\dfrac{a_{n_o}}{n_o}\right\}$

$$\Rightarrow a_n\ge n.c,\ \forall n\in\{1,2,\ldots,n_o\}$$

Giả sử $\quad a_n\ge n.c,\ \forall n\le n_1$ (với $n_1\in N,\ n_1>n_o$)

Ta có $\quad a_{n+1}^2\ge a_{n+1}^{\frac{1999}{2000}}\ge a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1$

$$\ge [n+(n-1)+\ldots+1]c$$

$$\ge \frac{n(n+1)}{2}c$$

$$\ge (n+1)^2c^2$$

$$\left(\text{vì } \frac{n}{2(n+1)}\ge\frac{1}{4}\ge c\right)$$

$$\Rightarrow a_{n+1}\ge (n+1)c$$

Vậy bài toán được chứng minh

(3.) Cho dãy số $\{a_n\}$ định bởi:

$$\begin{cases} a_o = 1999 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{1+a_n}, \ \forall n \geq 0 \end{cases}$$

Tìm phần nguyên của a_n (với $0 \leq n \leq 999$)

Giải

Rõ ràng $a_n > 0, \forall n \geq 0$, nên :

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2}{1+a_n} = \frac{a_n}{1+a_n} > 0, \forall n \geq 0$$

$$\Rightarrow \{a_n\} \text{ là dãy giảm} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n^2}{1+a_n} = a_n - \frac{a_n}{1+a_n} > a_n - 1, \forall n \geq 0$$

$$\Rightarrow a_{n+1} > a_o - (n+1), \forall n \geq 0$$

$$\Rightarrow a_{n-1} > a_o - (n-1), \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow a_{n-1} > 2000 - n, \forall n \geq 2 \qquad (2)$$

Mặt khác ta lại có :

$$a_n = a_o t(a_1 - a_o) + (a_2 - a_1) + ... + (a_n - a_{n-1})$$

$$= 1999 - \left(\frac{a_o}{1+a_o} + \frac{a_1}{1+a_1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{1+a_n - 1}\right)$$

$$= 1999 - n + \left(\frac{1}{1+a_o} + \frac{1}{1+a_1} + \cdots + \frac{1}{1+a_{n-1}}\right) \qquad (3)$$

Từ (1) và (2) ta có :

$$0 < \frac{1}{1+a_o} + \frac{1}{1+a_1} + \cdots + \frac{1}{1+a_{n-1}} < \frac{n}{1+a_{n-1}}$$

$$< \frac{n}{2001-n} < \frac{n}{1998-n} \leq 1 \quad (\text{với } 2 \leq n \leq 1999) \ (4)$$

Từ (3) và (4), ta có :

$$1999 - n < a_n < 1999 - n \pm 1 \quad (\text{với } 2 \le n < 999)$$

$$\Rightarrow [a_n] = 1999 - n \quad (\text{với } 2 \le n \le 999)$$

Kiểm tra trực tiếp :

+ $a_o = 1999 \Rightarrow [a_o] = 1999$

+ $a_1 = \dfrac{a_o^2}{1 + a_o} = a_o - \dfrac{a_o}{1 + a_o}$

$$= 1999 - \frac{1999}{2000}$$

$$\Rightarrow a_1 = 1998 + \frac{1}{2000}$$

$$\Rightarrow [a_1] = 1998$$

Vậy $[a_n] = 1999 - n \quad (\text{với } 0 \le n \le 999)$

4. Cho các dãy số $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ thỏa:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ b_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^2 + 2b_n^2 \\ b_{n+1} = 2a_nb_n \end{cases} \quad (\forall n \in N)$$

a) Chứng minh rằng a_n, b_n là hai số nguyên tố sánh đôi

b) Tìm các công thức cho a_n, b_n

Giải

a)

* Với n = 1, ta có : $a_1^2 - 2b_1^2 = 3^2 - 2.2^2 = 1$

* Với n = k, giả sử : $a_k^2 - 2b_k^2 = 1$

* Với n = k + 1, ta có : $a_{k+1}^2 - 2b_{k+1}^2$

$$= \left(a_k^2 + 2b_k^2\right)^2 - 2\left(2a_kb_k\right)^2$$

$$= \left(a_k^2 - 2b_k^2\right)^2 = 1$$

(Do giả thiết quy nạp)

Quả vậy :

Giả sử $|a_1| \geq 1$, ta có :

$$|a_2| = |2a_1^2 - a_o|$$
$$= 2a_1^2 - 1 \geq |a_1|$$

Bằng quy nạp, ta có :

$$|a_{n+1}| = |2a_1a_n - a_{n-1}|$$
$$= 2\cos\varphi.\cos n\varphi - \cos(n-1)\varphi$$
$$= \cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi - \cos(n-1)\varphi$$
$$= \cos(n+1)\varphi$$

Do đó $a_{1000} = \cos 1000\varphi = 0$

$$\Leftrightarrow 1000\varphi = \frac{\pi}{2} + k.\pi, k \in Z$$
$$\Rightarrow a_{1999} = \cos 1999\varphi$$
$$= \cos(2000\varphi - \varphi)$$
$$= \cos(\pi + 2k\pi - \varphi)$$
$$= -\cos\varphi = -a_1$$

Vậy : $a_{1999} + a_1 = 0$

6. Có bao nhiêu dãy số nguyên dương $\{a_n\}$ thỏa:

$$a_o = 1, a_1 = 2, |a_{n+2}.a_n - a_{n+2}^2| = 1$$

Giải

Ta có sơ đồ xác định dãy:

$$a_o = 1, a_1 = 2, a_2 = \left[\begin{array}{l} 3 \Rightarrow a_3 = \left[\begin{array}{l} 5 \\ 4 \end{array}\right. \\ 5 \Rightarrow a_3 = \left[\begin{array}{l} 13 \\ 12 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ta sẽ chứng minh tồn tại số dãy số nguyên dương thỏa đề bài. Trước hết, ta chứng minh tồn tại duy nhất dãy nguyên dương thỏa:

$$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, \left|a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2}\right| = 1, \forall n \ge 2$$

đó chính là dãy các số nguyên dương

$$\{a_n\} \text{ thỏa } a_0 = 1, a_1 = 2, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \forall n \ge 2 \qquad (1)$$

Quả vậy:

$$\left|a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2}\right| = \left|(a_{n+1} + a_n)a_n - a_{n+2}^2\right|$$
$$= \left|a_n^2 + a_{n+1}(a_n - a_{n+1})\right|$$
$$= \left|a_n^2 - a_{n+1}.a_{n-1}\right|$$
$$= 1 \qquad \forall n \in N$$

• Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được (1) là dãy tăng

Quả vậy: $\left|a_{n+1}^2 - a_n.a_{n+2}\right| = 1 \Rightarrow a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}^2 \pm 1}{a_n}$

Từ giả thiết quy nạp: $a_{n+1} > a_n \Rightarrow a_1 \le a_{n+1} - 1$

$$\Rightarrow a_{n+2} \ge \frac{a_{n+1}^2 \pm 1}{a_{n+1} - 1} \ge \frac{a_{n+2}^2 - 1}{a_{n+1} - 2} = a_{n+1} + 1$$

$$\Rightarrow a_{n+2} > a_{n+1}$$

* Dãy (1) được xác định duy nhất.

Quả vậy, giả sử tồn tại $n \ge 2$, sao cho a_n, a_{n+1} duy mà có 2 giá trị a_{n+2}, a'_{n+2} với $a_{n+2} > a'_{n+2}$ thỏa mãn cách xác định dãy, tức là:

$$\begin{cases} a_n.a_{n+2} = a_{n+1}^2 + 1 \\ a_n.a'_{n+2} = a_{n+1}^2 - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n\left(a_{n+2} - a'_{n+2}\right) = 2$$

$$\Rightarrow 2 \vdots a_n$$

$$\Rightarrow \text{Vô lý } \left(\text{vì } a_n \ge a_2 = 3 > 2\right)$$

Tóm lại ta đã chứng minh được tồnt ại duy nhất dãy nguyên dương:

$$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, \left|a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2}\right| = 1, \ \forall n \ge 3$$

Đó ấy chính là dãy $a_0 = 1, a_1 = 2$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \forall n \geq 2$$

Tương tự ta cũng chứng minh được tồn tại duy nhất các dãy nguyên dương:

$$a_o = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4, \left|a_{n+1}^2 - a_n a_{n+1}\right| = 1 \ \forall n \geq 2$$

$$a_o = 1, a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 12, \left|a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2}\right| = 1 \ \forall n \geq 2$$

$$a_o = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 5,\ a_3 = 13,$$

$$\left|a_{n+1}^2 - a_n . a_{n+2}\right| = 1,\ \forall n \geq 2$$

Đó cũng chính là các dãy (tương ứng):

$$a_o = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \ \ \forall n \in N \qquad (2)$$

$$a_o = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n, \ \ \forall n \in N \qquad (3)$$

$$a_o = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n \ \ \forall n \in N \qquad (4)$$

Kết luận: Tồn tại bốn dãy số nguyên dương (1), (2), (3), (4) thỏa đề bài.

7. Cho dãy số $\{S_n\}$ với $S_n = \dfrac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{2^k}{k}$

Chứng minh rằng : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ tồn tại và tính giới hạn đó.

Giải

Ta có :

$$S_{n+1} = \frac{n+2}{2^{n+2}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} = \frac{n+2}{2^{n+2}} \left(\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \cdots + \frac{2^{n+1}}{n+1} \right)$$

$$= \frac{n+2}{2(n+1)} \cdot \frac{n+1}{2^{n+1}} \left(\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \cdots + \frac{2^n}{n} \right) + \frac{n+2}{2(n+1)}$$

$$= \frac{n+2}{2(n+1)} (S_n + 1)$$

Tương tự :

$$S_{n+2} = \frac{n+3}{2(n+2)} (S_{n+1} + 1)$$

Từ đó :

$$S_{n+2} - S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+3)(S_{n+1}+1) - (n+2)^2(S_n+1)}{2(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{(n^2+4n+3)(S_{n+1} - S_n) - S_n - 1}{2(n+1)(n+2)}$$

Rõ ràng $\{S_n\}$ là dãy lượng giác

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ tồn tại. Ký hiệu giới hạn đó là S.

Từ
$$S_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)}(S_n + 1)$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}(S+1)$$

$$\Leftrightarrow S = 1$$

Vậy :
$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

8. Biết rằng bất đẳng thức:

$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \geq (x_1 + x_2 + ... + x_{n-1})x_n$

thỏa mãn với mọi số thực $x_1, x_2 ..., x_n (n \geq 1)$ thì n bằng bao nhiêu.

Giải

Giả sử bất đẳng thức

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \geq \left(x_1 + x_2 + ... + x_{n-1}\right)x_n \qquad (1)$$

thỏa mãn với mọi số thực $x_1, x_2 ..., x_n (n \geq 1)$

Khi đó nó cũng xảy ra với $\begin{cases} x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} = 1 \\ x_n = 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow (n-1) + 4 \geq (n-1)2$$

$$\Rightarrow 1 \leq n \leq 5$$

Đảo lại, giả sử $1 \leq n \leq 5$, ta sẽ sẽ chứng minh rằng (1) được thỏa mãn với mọi bội số thực $x_1, x_2, ..., x_n$

Quả vậy, xét tam thức :

$$f(x_n) = x_n^2 - (x_1 + x_2 + ... + x_{n-1})x_2 + x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2$$

Đây là tam thức bậc 2 đối với x_n, và ta có :

$$\Delta = (x_1 + ... + x_{n-1})^2 - 4(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2)$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski :

$$4\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2\right) \geq (n-1)\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2\right)$$

$$\Delta = (x_1 + ... + x_{n-1})^2 - 4(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2)$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski:

$$4\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2\right) \geq (n-1)\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2\right)$$

$$\geq \left(x_1 + x_2 + ... + x_{n-1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \Delta \leq 0$$

$$\Rightarrow f(x_n) \geq 0, \quad \forall x_n \in R$$

Vậy kết quả cần tìm là $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

9. Xác định số hạng tổng quát của dãy số $\{u_n\}$, biết rằng

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 9u_n^3 + 3u_n (n = 1, 2, 3, ...) \end{cases}$$

Giải

Đặt : $V_n = 3u_n (n = 1, 2, ...)$. Ta có :

$$\begin{cases} V_1 = 6 \\ V_{n+1} = V_n^3 + 3V_n \end{cases}$$

Chọn x_1, x_2 sao cho : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$

- Với n = 1, ta có :

$$V_1 = 6 = x_1 + x_2$$
$$= x_1^{3^{1-1}} + x_2^{3^{1-1}}$$

- Với $n = k$ $(k \in \mathbb{N})$, ta giả sử

$$V_k = x_1^{3^{k-1}} + x_2^{3^{k-1}}$$

• Với n = k + 1, ta có :

$$V_{h+1} = V_k^3 + 3V_k$$

$$= \left(x_1^{3^{k-1}} + x_2^{3^{k-1}}\right)^3 + 3\left(x_1^{3^{k-1}} + x_2^{3^{k-1}}\right)$$

$$= x_1^{3^k} + x_2^{3^k} + 3(x_1x_2)^{3^{k-1}}\left(x_1^{3^{k-1}} + x_2^{3^{k-1}}\right) + 3\left(x_1^{3^{k-1}} + x_2^{3^{k-1}}\right)$$

$$= x_1^{3^k} + x_2^{3^k}$$

$$\left(\text{vì } (x_1x_2)^{3^{k-1}} = (-1)^{3^{k-1}} = -1\right)$$

$\Rightarrow$ Theo nguyên lý quy nạp thì:

$$V_n = x_1^{3^{n-1}} + x_2^{3^{n-1}}, \forall n \in N$$

Vậy : $$U_n = \frac{1}{3}\left[\left(3 - \sqrt{10}\right)^{3^{n-1}} + \left(3 + \sqrt{10}\right)^{3^{n-1}}\right]$$

(vì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - 6x - 1 = 0$)

10. Cho dãy $\{x_n\}$ xác định như sau : $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \left[\dfrac{3}{2}x_n\right] \end{cases} \forall n \geq 1$ Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ có vô hạn các số chẵn, có vô hạn các số lẻ (ký hiệu [x] là phần nguyên của x)

Giải

• Giả sử dãy $\{x_n\}^{\alpha}$ chỉ có hữu hạn các số chẵn, suy ra có ít nhất một số $n \in N$ sao cho x_k lẻ, $\forall k \geq n$

Đặt : $$x_k = 2^{\alpha}.\beta + 1 \quad \left(\text{với } \begin{cases} \alpha, \beta \in N \\ \beta \text{ lẻ} \end{cases}\right)$$

Ta suy ra :

$$x_{k+1} = 2^{\alpha-1}3\beta + 1$$
$$x_{k+2} = 2^{\alpha-2}3^2\beta + 1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_{k+\alpha} = 3^\alpha\beta + 1$$
$$\Rightarrow x_{k+\alpha} \text{ là số chẵn } \Rightarrow \text{ Vô lý}$$

Từ đó suy ra rằng dãy đã cho phải có vô hạn các số chẵn

* Giả sử dãy $\{x_n\}^\alpha$ chỉ có hữu hạn các số lẻ, suy ra có ít nhất một số $n \in \mathbb{N}$ sao cho x_n chẵn, $\forall k \geq n$

Đặt $\quad x_k = 2^\alpha\beta \quad \left(\text{với } \begin{cases} \alpha, \beta \in N \\ \beta \text{ lẻ} \end{cases} \right)$

Ta suy ra :

$$x_{k+1} = 3.2^{\alpha-1}\beta$$
$$x_{k+2} = 3^2.2^{\alpha-2}\beta$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_{k+\alpha} = 3^\alpha.\beta$$
$$\Rightarrow x_{k+\alpha} \text{ là số lẻ } \Rightarrow \text{ Vô lý}$$

Từ đó suy ra dãy đã cho phải có vô hạn các số lẻ

11. Cho n số thực dương

$$a_1, a_2, \dots, a_n > 0 \quad (n \geq 2)$$

thỏa: $\quad a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$

Chứng minh rằng :

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{1-a_i}{a_i}} \geq (n-1)\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{a_i}{1-a_i}}$$

Giải

Ta có :

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{1-a_i}{a_i}} - (n-1)\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{a_i}{1-a_i}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1-a_i}{a_i}}\right) - \left(\sum_{j=1}^{n}(1-a_j)\right).\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{a_i}{1-a_i}}\right)$$

$$= \sum_{j=2}^{n}\left(a_j\sqrt{\frac{1-a_i}{a_i}} - (1-a_j)\sqrt{\frac{a_i}{1-a_i}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j(1-a_i)-(1-a_j)a_i}{\sqrt{a_i(1-a_i)}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j - a_i}{\sqrt{a_i(1-a_i)}}$$

$$= \sum_{1\le i\le j\le n}\left(\frac{a_j-a_i}{\sqrt{a_i(1-a_i)}} + \frac{a_i-a_j}{\sqrt{a_j(1-a_j)}}\right) \ge 0$$

(vì : $\dfrac{a_j-a_i}{\sqrt{a_i(1-a_i)}} + \dfrac{a_i-a_j}{\sqrt{a_j(1-a_j)}}$

$$= \frac{(a_j-a_i)\left[\sqrt{a_j(1-a_j)} - \sqrt{a_i(1-a_i)}\right]}{\sqrt{a_ia_j(1-a_i)(1-a_j)}}$$

$$= \frac{(a_i-a_j)^2(1-a_i-a_j)}{\sqrt{a_ia_j(1-a_i)(1-a_j)}\left[\sqrt{a_j(1-a_j)}+\sqrt{a_i(1-a_i)}\right]} \ge 0)$$

12. Cho dãy $\{x_n\}$ với $x_1 = a \ne -2$ và

$$x_{n+1} = \frac{3\sqrt{2x_n^2+2}-2}{2x_n+\sqrt{2x_n^2+2}}, \forall n \in N$$

Xét tính hội tụ của dãy và tìm giới hạn của dãy (nếu có) tùy theo trường hợp của a.

Giải

1. Đặt $$f(x) = \frac{3\sqrt{2x^2+2}-2}{2x+\sqrt{2x^2+2}}$$

Và $$g(x) = f(x) - x = \frac{-2x^2+(3-x)\sqrt{2x^2+2}-2}{2x+\sqrt{2x^2+2}} \quad (x \neq -1)$$

Giải phương trình g(x) = 0 ta được hai nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -7 \end{array}\right.$$

Để ý rằng, trên mỗi khoảng $(-\infty,-7),(1,+\infty)$ thì g đều liên tục và không có nghiệm nên dấu củay trên mỗi khoảng này không đổi.
Hơn nữa:

- $$g(-8) = \frac{-128+11\sqrt{130}-2}{-16+\sqrt{130}}$$

$$= \frac{\sqrt{130}\left(\sqrt{130}-11\right)}{10-\sqrt{130}} > 0$$

$$\Rightarrow g(x) > 0, \forall x < -7$$

$$\Leftrightarrow f(x) > x, \forall x < -7$$

$$g(2) = \frac{-10+\sqrt{10}}{\sqrt{10}+4} < 0$$

$$\Rightarrow g(x) < 0, \forall x > 1$$

$$\Rightarrow f(x) < x, \forall x > 1$$

2. Đặt : $h(x) = f(x) - 1, x \neq -1$

$$= \frac{2\sqrt{2x^2+2}-2(x+1)}{2x+\sqrt{2x^2+2}}$$

Phương trình h(x) = 0 có nghiệm duy nhất x = 1. Lý luận tương tự như trên, ta suy ra h không đổi dấu trên mỗi khoảng (–1, 1), $(1,+\infty)$

Hơn nữa:

$$\begin{cases} h(0) = \dfrac{2\sqrt{2}-2}{} = 2\sqrt{2} > 0 \\ h(2) = \dfrac{2\sqrt{10}-6}{4+\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}-3}{2+\sqrt{10}} > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(x) \geq 0, \forall x > -1$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow x = 1$

$$\Rightarrow f(x) \geq 1, \forall x > -2$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow x = 1$

3. Đặt : $k(x) = f(x) - (-7)$

$$= \frac{14x - 2 + 10\sqrt{2x^2+2}}{2x + \sqrt{2x^2+2}} \quad x \neq -1$$

Phương trình $k(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = -7$

Lý luận tương tự như ở 1), ta giao k(x) không đổi dấu trên mỗi khoảng $(-\infty, -7), (-7, -1)$

Hơn nữa

$$\begin{cases} k(-8) = \dfrac{10\sqrt{130}-114}{\sqrt{130}-16} < 0 \\ k(-6) = \dfrac{10\sqrt{74}-86}{\sqrt{74}-12} < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k(x) \leq 0, \forall x < -1$$

Dấu "2" $\Leftrightarrow x = -7$

$$\Rightarrow f(x) \leq -7, \forall x < -1$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow x = -7$

Từ các kết quả trên ta thu được:

a. Nếu $x_1 = a > -1$ thì theo (2) ta có $x_2 = f(x_1) \geq 1$

Từ đó suy ra $x_n \geq 1, \forall n \geq 2$

(Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $a = 1$)

Kết hợp với (1) ta được $x_{n+1} = f(x_n) \leq x_n, \forall n \geq 2$

(Dấu "=" $\Leftrightarrow a = 1$)

Vậy dãy $\{x_n\}$ là dãy giảm (nếu a = 1 thì $\{x_n\}$ là dãy hằng và bị chặn dưới. Do đó dãy $\{x_n\}$ hội tụ.

Dễ dàng chứng minh được $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$

b. Nếu $x_1 = a < -1$, tương tự trường hợp trên, theo (3) ta được

$x_2 = f(x_1) \le -7$. Từ đó suy ra $x_n \le -7 \quad \forall n \in N$

(Dấu "=" $\Leftrightarrow$ a = −7)

Kết hợp với (1) ta được $x_{n+1} = f(x_n) \ge x_n, \forall n \ge 2$

$$\left(\text{Dấu} " = " \Leftrightarrow a = -7\right)$$

Vậy dãy $\{x_n\}$ là dãy tăng (nếu a = −7 thì {xn} là dãy hằng) và bị chặn trên.

Do đó dãy $\{x^n\}$ hội tụ và $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = -7$

(13.) Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau :

$$u_1 = 1$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{u_n^2}{1999}$$

Tìm $$\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \cdots + \frac{u_2}{u_{n+1}}\right)$$

Giải

Ta có :

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_n^2}{u_{n+1}u_n} = \frac{1999(u_{n+1} - u_n)}{u_{n+1}.u_1}$$

$$= 1999\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \cdots + \frac{u_k}{u_{k+1}} = 1999\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{k+1}}\right)$$

$$= 1999\left(1 - \frac{1}{u_{k+n}}\right)$$

Hơn nữa :

$$u_{n+1} > u_n \geq 1, \quad \forall n \in N$$

$$\Rightarrow \{u_n\} \text{ là dãy đơn điệu tăng}$$

Do đó, nếu dãy $\{u_n\}$ bị chặn trên thì nó hội tụ về a hữu hạn. Suy ra:

$$a = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(u_n + \frac{u_n^2}{1999}\right) = a + \frac{a^2}{1999}$$

$$\Rightarrow a = 0$$

$$\Rightarrow \text{ Vô lý (vì } u_n \geq 1, \forall n \in N \Rightarrow a \geq 1)$$

Vậy dãy $\{u_n\}$ không bị chặn trên, do đó:

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \cdots + \frac{u_1}{u_{n+1}}\right) = 1999$$

14. Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng

$$\frac{C_{2p}^p - 2}{p^2} \text{ là số nguyên}$$

Giải

* Nếu p = 2 thì $\frac{C_4^2 - 2}{4} = 1$

* Nếu p > 2 thì :

$$C_{2p}^p = \frac{(2p)!}{(p!)^2} = \frac{(2p).(2p-1)!}{p.(p-1)!p!}$$

$$= 2.C_{2p-1}^{p-1}$$

Hơn nữa :

$$(2p-k)(p+k) \equiv k(p-k) \quad \left(\text{mod} p^2\right)$$

$$\left(\forall k = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow [(2p-1)(p+1)].[(2p-2)(p+2)]\left[\left(2p-\frac{p-1}{2}\right)\left(p+\frac{p-1}{2}\right)\right]$$

$$\equiv\left[1(p-1)\right][2(p-2)...]\left[\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}\right]\left(\bmod p^2\right)$$

$$\Rightarrow (p+1)(p+2)...(2p-1)\equiv(p-1)!\quad\left(\bmod p^2\right)$$

$$\Rightarrow C_{2p-1}^{p-1}=\frac{(p+1)(p+2)...(2p-2)(2p-1)}{(p-1)!}$$

$$=\frac{m.p^2+(p-1)!}{(p-1)!}\quad\left(\text{với } m\in Z\right)$$

$$=\frac{mp^2}{(p-1)!}+1$$

$\Rightarrow \dfrac{mp^2}{(p-1)!}=C_{2p-1}^{p-1}-1$ là số nguyên

$\Rightarrow m\,\vdots\,(p-1)!$ (vì p^2 và $(p-1)!$ là hai số nguyên tố cùng nhau)

$\Rightarrow m=n.(p-1)!\quad\left(\text{với } n\in Z\right)$

$$\Rightarrow C_{2p-1}^{p-1}-1=np^2$$

$$\Rightarrow C_{2p}^{p}-2=2\left(C_{2p-1}^{p-1}-1\right)=2np^2$$

$$\Rightarrow \frac{C_{2p}^{p}-2}{p^2}=2n\in Z$$

(15) Cho dãy số dương $U_o, U_1,..., U_{1999}$ thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} u_o = u_{1999} = 1 & (1) \\ u_i = 2\sqrt[4]{u_{i-1} - u_{i+1}}\ ;\ i = 1,2,...,1998 & (2) \end{cases}$$

Chứng minh rằng :

a. $1 \le u_i < 4; \forall i = 1,2,...,1999$

b. $u_o = u_{1999}, u_1 = u_{1998},..., u_{999} = u_{1000}$

c. $u_o < u_1 < ... < u_{999}$

Giải

a) Đặt $\alpha = \underset{r=0,1999}{\underline{Max}}\, u_i, \beta = \underset{i=0,1999}{\underline{Min}}\, u_i \quad (\alpha,\beta > 0)$

Nếu $\alpha = \beta$ thì $u_o = u_1 = ... = u_{1999} = 1$, nhưng điều kiện (2) cho ta thấy điều này vô lý. Như vậy $\alpha > \beta$.

Mặt khác theo định nghĩa, ta có :

$$\alpha \ge u_i \ge \beta, i = \overline{1,1999}$$

$$\Rightarrow \alpha \ge 1 \ge \beta \qquad (3)$$

Nếu $\beta = u_k \left(k \in \{1,2,...19998\}\right)$, theo (2) thì

$$\beta = u_k = 2\sqrt[4]{u_{k-1}.u_{k+1}} \ge \sqrt[4]{\beta^2}$$

$$\Rightarrow \beta^4 \ge 16\beta^2$$

$$\Rightarrow \beta \ge 4$$

$\Rightarrow$ Vô lý (vì mâu thuẫn với (3))

Như vậy $\beta \ne u_k, \forall k = \overline{1,998}$

Suy ra $\beta = u_1 = u_{1999} = 1$

Vậy ta đã chứng minh được $u \ge 1, \forall i = \overline{0,1999}$,

Do $\alpha > \beta = 1$ nên ta có $\alpha = u_k$ nào đó

$\left(\text{với } k \in \{1,2,...,1998\}\right)$

$$\Rightarrow u_k = 2\sqrt[4]{u_{k-1}.u_{k+1}} \le 2\sqrt[4]{\alpha^2}$$

$$\Rightarrow \alpha \le 4$$

Nếu như $\alpha = 4$ thì $u_{k-1} = u_{k+1} = 4$. Tương tự dãy liên tiếp (2) ta suy ra:

$$u_o = u_1 = u_2 = ... = u_{1999} = 4$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết (1), suy ra $\alpha < 4$.

Điều đó có nghĩa là $u_i < 4, \forall i = \overline{0,1999}$

Tóm lại ta đi đến kết luận rằng:

$$1 \le u_i < 4, \forall i = \overline{0,1999}$$

b) Dễ dàng chứng minh được rằng dãy số thỏa (1), (2) là duy nhất

Xét dãy $u_{1999}, u_{1998}, ..., u_1, u_o$

Rõ ràng dãy này cũng thỏa mãn điều kiện (1) và (2). Do tính duy nhất suy ra:

$$u_o = 1999, u_1 = u_{1998}, ..., u_{999} = u_{1000}$$

c) Theo điều kiện (2), ta suy ra :

$$u_{999} = 2\sqrt[4]{u_{998}.u_{1000}}$$

Theo chứng minh trên ta có $0 < u_{999} = u_{1000} < 4$

$$\Rightarrow u_{999}^2 = 4\sqrt{u_{998}.u_{999}} < 4u_{999}$$

$$\Rightarrow u_{998}.u_{999} < u_{999}^2$$

$$\Rightarrow u_{998} < u_{999}$$

Lý luận tương tự ta có điều phải chứng minh.

16. Từ dãy $\{u_n\}$ được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1999u_n}{2000}, n \in N \end{cases}$$

ta thành lập dãy $\{S_n\}$ với $S_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{u_i}{u_{i+1} - 1}$

Tìm $\lim_{n\to+\infty} S_n$

Giải

Từ giả thiết ta suy ra :

$$u_{n+1} = \frac{u_n(u_n - 1)}{2000} + u_n, \forall n \in R$$

Vì $u_1 = 2$ nên ta có :

$$2 = u_1 < u_2 < \dots < u_n < \dots$$

có nghĩa rằng $\{u_n\}$ là một dãy tăng. Giả sử dãy này bị chặn trên, lúc đó tồn tại $L \in [2, +\infty)$ sao cho $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = L$

Từ đó : $$L = \frac{L^2 + 1999L}{2000}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} L = 0 \\ L = 1 \end{array}\right.$$

Điều này vô lý $(\text{vì } L \geq 2)$

Như vậy dãy $\{u_n\}$ cũng bị chặn trên

Do đó : $$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Mặt khác, cũng từ giả thiết :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1999u_n}{2000}$$

$$\Rightarrow u_n(u_n - 1) = 2000(u_{n+1} - u_n)$$

$$\Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1} - 1} = \frac{u_n(u_n - 1)}{(u_{n+1} - 1)(u_n - 1)} = \frac{2000(u_{n+1} - u_n)}{(u_{n+1} - 1)(u_n - 1)}$$

$$= 2000\left(\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}\right)$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{u_{i+1} - 1} = 2000\left(\frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}\right)$$

$$= 2000\left(1 - \frac{1}{u_{n+1} - 1}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = 2000$$

(17.) Cho dãy số $\{a_n\}$ với $\begin{cases} a_o = 1 \\ a_1 = 2 \\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n \end{cases}$ $\forall n \in N$

Tìm tất cả các giá trị của n để $a_n - 1$ là một số chính phương.

Giải

Xét phương trình đặc trưng : $t^2 = 4t - 1$

$$\Leftrightarrow t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a_n = \alpha\left(2 + \sqrt{3}\right)^n + \beta\left(2 - \sqrt{3}\right)^n$$

$$(\alpha, \beta \in R)$$

Hơn nữa : $\begin{cases} a_o = 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2(\alpha + \beta) + \sqrt{3}(\alpha - \beta) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2}\left(t_1^n + t_2^n\right)$$

Do : $2 \pm \sqrt{3} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} \pm 1\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3} \pm 1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$$\Rightarrow a_n = 1 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^m + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}\right] - 1$$

$$= \left[\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^n . \left(\sqrt{3}-1\right)^n}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}\right]^2$$

Vì $a_n - 2$ là số chính phương nên :

$$A = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^n - \left(\sqrt{3}-1\right)^n}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}} \in Z$$

Ta lần lượt xét các trường hợp

- Nếu $n = 0 \Rightarrow A = 0 \in Z$
- Nếu $n = 1 \Rightarrow A = 1 \in Z$
- Nếu $n = 2k,\ k \in N^*$

Xét dãy $\{b_h\}$, với

$$b_n = \frac{(2+\sqrt{3})^k - (2-\sqrt{3})^k}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+1)^n - (\sqrt{3}-1)^n}{(\sqrt{2})^{n+1}} = A$$

Ta lại có $2 \pm \sqrt{3}$ là các nghiệm của phương trình đặc trưng

$x^2 = 4x - 1$ nên $\{b_k\}$ thỏa :

$b_{k+2} = 4b_{k+1} - b_k$

mà $\begin{cases} b_o = 0 \\ b_1 = \sqrt{6} \end{cases}$

$\Rightarrow b_k \notin Q, \forall k \in N^*$

$\Rightarrow a_n - 1$, không phải là số chính phương

nên $n = 2k + 1,\ k \in \mathbb{N}$:

Ta có :

$$\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^n - \left(\sqrt{3}-1\right)^n}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^{2k} - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^{2k}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^k - \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right]$$

Đặt : $C_k = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^k - \left(2-\sqrt{3}\right)^k\right], k \in N$

thì dãy $\{C_n\}$ thỏa mãn

$C_{k+1} = 4C_{k+1} - C_k$

Mà $\begin{cases} C_o = 0 \\ C_1 = 5 \end{cases}$

$\Rightarrow C_k \in Z, \quad \forall k \in N$

Vậy : $a_n - 1$ là số chính phương $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 0 \\ n \text{ nguyên dương lẻ} \end{array}\right.$

(18.) Cho $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Tìm

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\cos_\alpha^2 \sqrt[n]{\cos\alpha} + \sin^2\alpha\sqrt[n]{\sin\alpha}\right)^n$$

Giải

Đặt : $x_n = \cos_2^2 \sqrt[n]{\cos\alpha} + \sin^2\alpha\sqrt[n]{\sin\alpha}, n \in N$

$\Rightarrow x_n \to 1$, khi $n \to +\infty$

$\Rightarrow \dfrac{\ln x_n}{x_n - 1} \to 1$, khi $n \to +\infty$

$$\left(\text{Để ý}: \begin{cases} 0 < x_n < 1, \forall n \in N \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} \to 1, \text{khi } x \to 0 \end{cases}\right)$$

$\Rightarrow \dfrac{n\ln x_2}{n(x_n - 1)} \to 1$, khi $n \to +\infty$

Mà $\quad n(x_n - 1) = \cos^2\alpha\dfrac{\sqrt[n]{\cos\alpha} - 1}{\frac{1}{n}} + \sin^2\alpha\dfrac{\sqrt[n]{\sin\alpha} - 1}{\frac{1}{n}}$

$\to \cos^2\alpha\ln\cos\alpha + \sin^2\alpha\ln\sin\alpha$

$\left(\text{vì } \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) = \ln x \text{ (với } x > 0)\right)$

$\Rightarrow (x_n)^n \to (\cos\alpha)^{\cos^2\alpha}(\sin\alpha)^{\sin^2\alpha}$

(19) Cho dãy số {un} với:

$$\begin{cases} u_1 \in N \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\ln\left(1+u_n^2\right) - 1999, \ n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ hội tụ

Giải

Ta có $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) - 1999$ là hàm số khả vi trên R và f'(x)

$$= \frac{x}{1+x^2} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \ (\forall x \in R)$$

Mặt khác, đặt:

$$g(x) = x + 1999 - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$$

$$= x - f(x)$$

thì g cũng khả thi trên R và

$$g'(x) = 1 - \frac{x}{1+x^2} > 0 \quad (\forall x \in R)$$

Hơn nữa: $g(0).g(-1999) = -\dfrac{1999}{2}\ln\left(1+199^2\right) < 0$

Từ đó suy ra tồn tại $L \in (-1999, 0)$ sao cho:

$$g(L) = 0 \Leftrightarrow f(L) = L$$

Ap dụng định lý Lagrange, ta có $c \in R$ sao cho:

$$|U_{n+1} - L| = |f(u_n) - f(L)| = |f'(c)|.|u_n - L| \leq \frac{1}{2}|u_n - L|$$

Từ đó ta được:

$$|u_n - L| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - L|, \quad \forall n \in N$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = L$$

(20) Cho $\begin{cases} n \in N \\ n \geq 3 \end{cases}$

Hãy xác định giá trị lớn nhất của G và giá trị nhỏ nhất của k sao cho n số dương trên có $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thì bất đẳng thức sau đây luôn luôn đúng:

$$k < \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_n}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_n + a_1} < G$$

Giải

Đặt: $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$

$$T = T(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i + a_{i+1}}$$

(Trong đó: $a_{n+1} = a_1$)

Ta có: $T > \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S} = 1$

$\Rightarrow k \geq 1.$

Mặt khác:

$$n - T = \frac{a_2}{a_1 + a_2} + \frac{a_3}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_1}{a_n + a_i}$$

$$= T(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1) > 1$$

$\Rightarrow T < n - 1$

$G \leq n - 1$

Với x > 0, ta có:

$$T(1, x, \ldots, x^{n-1}) = \frac{1}{1 + x} + \frac{x}{x + x^2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{x^{n-1} + 1}$$

$$= \frac{n - 1}{1 + x} + \frac{x^{n-1}}{1 + x^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} T(1, x, \ldots, x^{n-1}) = n - 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} T(1, x, \ldots, x^{n-1}) = 1 \end{cases}$$

Như vậy: Max G = n – 1, Min K = 1

2. CÁC BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ TRONG CÁC ĐỀ THI OLYMPIC 30–4 LẦN VI, NĂM 2000

> **1** Cho dãy $\{u_n\}$ được xác định như sau:
>
> $$\begin{cases} n_o = 2000 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2} \end{cases} ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
>
> Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n^3}{n}$

Giải

Ta có: $$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}, \ \forall n \geq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1}^3 = u_n^3 + \frac{1}{u_n^6} + 3 + \frac{3}{u_n^3} \qquad (1)$$

$$> u_n^3 + 3, \forall n \geq 0 \ (\text{Do } u_n > 0, \ \forall n \geq 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1^3 > u_o^3 + 3 \\ u_2^3 > u_1^3 + 3, \qquad \forall n \geq 1 \\ u_n^{-3} > u_{n-1}^3 + 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_n^3 > 3n + u_o^3, \quad \forall n \geq 1 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$u_{n+1}^3 < u_n^3 + 3 + \frac{1}{u_o^3 + 3n} + \frac{1}{\left(u_o^3 + 3n\right)^2} < u_n^3 + 3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{9n^2}, \ \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow u_n^3 < u_1^3 + 3(n-1) + \sum_{k=1}^{n=1} \frac{1}{k} + \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n=1} \frac{1}{k^2}, \quad \forall n \geq 2 \qquad (3)$$

Mặt khác, ta có:

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\leq 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) < 2, \ \forall n \geq 1 \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)^2 \le n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2n, \ \forall n \ge 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \sqrt{2n}, \quad \forall n \ge 1 \qquad (5)$$

Từ (2), (3), (4) và (5) suy ra:

$$3 + \frac{u_o^3}{n} < \frac{u_n^3}{n} < \frac{u_1^3}{n} + 3 + \sqrt{\frac{2}{n} + \frac{2}{gn}}, \quad \forall n \ge 2$$

Vì $$\lim_{n\to+\infty}\left(3 + \frac{u_o^3}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_1^3}{n} + 3 + \sqrt{\frac{3}{n} + \frac{2}{gn}}\right) = 3$$

Vậy $$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^3}{n} = 3.$$

2 Cho dãy số $\{u_n\}$ được định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 2 \\ u_{n+2} = u_n + 2u_{n+1}, \quad n \in N^* \end{cases}$$

Đặt $a = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Tính a

Giải

- Với n = 1, ta có:

$$u_2^2 - u_1u_3 = 4 - 1.5 = (-1)^1$$

- Với $n = k + N$, giả sử:

$$u_{k+1}^2 - u_k.u_{k+2} = (-1)^k$$

- Với n = k + 1, ta có

$$u_{k+2}^2 - u_{k+1}.u_{k+3} = u_{k+2}\left(u_k + 2u_{k+1}\right) - u_{k+1}\left(u_{k+1} + 2u_{k+2}\right)$$

$$= u_{h+2}.u_k - u_{h+1}^2 = -(-1)^h = (-1)^{k+1}$$

Như vậy: $u_{n+1}^2 - u_n.u_{n+2} = (-1)^n, \ \forall n \in N$

Để ý rằng: $u_n \geq 1, \ \forall n \in N$, nên:

$$\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 - \frac{u_{n+2}}{u_n} = \frac{(-1)^n}{u_n^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 - \frac{u_n + 2u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-1)^n}{u_n^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 - 2\frac{u_{n-1}}{u_n} - 1 = \frac{(-1)^n}{u_n^2} \quad (*)$$

Hơn nữa, cũng từ: $u_{n+2} = u_n + 2u_{n+1}, \ \forall n \in N$

$$\Rightarrow u_{n+2} - u_{n+1} = u_n + u_{n+1} > 0, \ \forall n \in N$$

$$\Rightarrow u_{n+2} > u_{n+1}, \quad \forall n \in N$$

$$\Rightarrow \{u_n\} \text{ là dãy tăng}$$

Do đó, nên $\{u_n\}$ bị chặn thì $\{u_n\}$ hội tụ về $b \in R$

Lúc đó, từ: $u_{n+2} = u_n + 2u_{n+1}, \ \forall n \in N$

$$\Rightarrow b = b + 2b$$

$$\Rightarrow b = 0$$

$$\Rightarrow \text{vô lý (vì } u_n \geq 1, \ \forall n \in N \Rightarrow b \geq 1)$$

$$\Rightarrow \{u_n\} \text{ không bị chặn trên}$$

Như vậy $\{u_n\}$ tăng và không bị chặn trên, nên: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Cùng với (*), suy ra : $a^2 - 2a - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow a = 1 + \sqrt{2} \ (\text{vì } a \geq 1))$$

Vậy $\qquad a = 1 + \sqrt{2}$

③ Cho f: $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}$

$n \mapsto f(n)$ thỏa

$$\begin{cases} f(m+n) - f(m) - f(n) \in \{0,1\}, \forall m,n \in N \\ f(n) \geq 0, \ \forall n \in N \\ f(2) = 0 < f(3), \ f(9999) = 3333 \end{cases}$$

Tính f(2000)?

Giải

Do $f(m+n) - f(m) - f(n) \in \{0,1\}, \quad \forall m,n \in N$

$$\Rightarrow f(m+n) = f(m) + f(n) \ \ \forall m,n \in N$$

- Lấy m = n = 1, ta có: $0 = f(2) \geq 2f(1)$

$$\Rightarrow f(1) \leq 0$$

Mà $f(1) \geq 0$ (do giả thiết)

$$\Rightarrow f(1) = 0$$

- Lấy m = 2, n = 1, ta có:

$$f(3) - \underbrace{f(2)}_{0} - \underbrace{f(1)}_{1} \in \{0,1\}$$

Mà $f(3) > 0$

$$\Rightarrow f(3) = 1$$

$$\Rightarrow f(2.3) = f(3+3) \geq f(3) + f(3) = 2$$

$$\Rightarrow f(2.3) \geq 2.$$

Giả sử $f(k.3) \geq k \quad (k \in N)$

khi đó $f((k+1)3) = f(k_3 + 3) \geq f(k_3) + f(3) \geq k + 1$

Như thế ta có: $f(3.n) \geq n, \ \forall n \in N$

Hơn nữa, nếu $\begin{cases} n \in N \\ f(3n) < n \end{cases}$ thì

$$f(3(n+1)) = f(3n+3) \geq f(3n) + f(3) > n + 1$$

Như thế ta có $f(3m) > m, \quad \forall m \ge n$

Nhưng vì f(9999) = f(3.3333) = 3333

$$\Rightarrow f(3.n) = n, \forall n \in \{1,2,\dots,3333\}$$

$$\Rightarrow f(3.2000) = 2000$$

$$= f(3.2000)$$

$$\ge f(2.2000) + f(2000)$$

$$\ge 3.f(2000)$$

$$\Rightarrow f(2000) \le \frac{2000}{3} < 667$$

Mặt khác:

$$f(2000) \ge f(1998) + f(2)$$

$$\ge f(3.666) = 666$$

$$\Rightarrow f(2000) \ge 666$$

Nhưng $666 \le f(2000) < 667$

$$\Rightarrow f(2000) = 666 \text{ (vì } f(2000) \in Z)$$

4 Cho dãy số $\{u_n\}$ được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_o > 0, u_1 > 0 \\ u_{n+2} = \left(u_{n+1} - u_n^2\right)^{\frac{1}{3}}, \ \forall n \in N \end{cases}$$

Tìm số hạng tổng quát của u_n

Giải

+ Bằng quy nạp, ta có: $u_n > 0, \ \forall n \in N$

+ $u_{n+2} = \left(u_{n+1}.u_n^2\right)^{\frac{1}{3}}$

$$\Rightarrow \ln u_{n+2} = \frac{1}{3}\ln u_{n+u} + \frac{2}{3}\ln u_n$$

Đặt: $V_n = \ln u_n, \ \forall n \ge 0$

$$\Rightarrow V_{n+2} = \frac{1}{3}V_{n+1} + \frac{2}{3}V_n$$

....

$$x - x_n = (-1)^n \frac{x - x_o}{(1+x)^n(1+x_o)(1+x_1)\ldots(1+x_n)}, \ \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow |x - x_n| \leq \frac{|x - x_o|}{(1+x)^n} = \frac{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n} \to 0$$

(khi $n \to +\infty$)

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(25) Cho dãy $\{y_n\}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{2} \\ y_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{y_{n-1}^2}{2}, \ n \geq 2 \end{cases}$$

a. Chứng minh rằng: $-\frac{1}{8} < y_n \leq \frac{1}{2}, \ \forall n \geq 2$

b. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$

Giải

- $n = 1$: $\quad y_n = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{8} < y_1 \leq \frac{1}{8}$

a.

- $n = 2$: $\quad y_2 = \frac{1}{2} - \frac{y_1^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$

  $\Rightarrow -\frac{1}{8} < y_2 \leq \frac{1}{2}$

- $n = k \geq 2$: Giả sử $-\frac{1}{8} < y_k \leq \frac{1}{2}$

- $n = k + 1$: Ta có: $y_{k+1} = \frac{1}{2} - \frac{y_k^2}{2}$

  $\Rightarrow -\frac{1}{8} < y_{k+1} \leq \frac{1}{2}$

$$\left(\text{vì } -\frac{1}{8} < y_k \le \frac{1}{2}\right)$$

Vậy: $-\frac{1}{8} < y_n \le \frac{1}{2}, \ \forall n \ge 1$

b. Gọi y là nghiệm phương trình: $y = \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}, \ -\frac{1}{8} \le y \le \frac{1}{2}$

Ta có:

$$y - y_1 = \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{y^2}{2}$$

$$y - y_2 = -\frac{1}{2}\left(y^2 - y_1^2\right) = -\frac{1}{2}(y - y_1)(y - y_1) = \frac{(-1)^2}{2^2}y^2$$

....

$$y - y_n = \frac{(-1)^n}{2^n}y^2(y + y_1)(y + 2)\ldots(y + y_{n-1}), \ \forall n \ge 2$$

Cụ thể, ta có $y = \sqrt{2} - 1$. Khi đó

$$|y + y_n| \le |y| + |y_n|$$

$$\le \sqrt{2} - 1 + \frac{1}{2} < 1, \ \forall n \ge 1$$

$$\Rightarrow |y - y_n| \le \frac{1}{2^n}, \ \forall n \ge 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} y_n = y = \sqrt{2} - 1.$$

26 Cho dãy số dương $\{u_n\}$ thỏa: $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = q > 0$

Chứng minh rằng: $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n} = q$

Giải

Do $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = q > 0$

Nên $\forall\varepsilon \in (0, q)$, tồn tại $N \in N$ sao cho

$$\forall n \ge N \text{ thì } q - \varepsilon \frac{u_{n+p'}}{u_{np'-1}} < q + \varepsilon,\ \forall p' \ge 0$$

Cho p' = 1, 2,... $p(p \in N)$, ta có:

$$q - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < q + \varepsilon$$

$$q - \varepsilon < \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < q + \varepsilon$$

....

$$q - \varepsilon < \frac{u_{n+p}}{u_{n+p-1}} < q + \varepsilon$$

Nhân các bất đẳng thức này vế với vế với nhau, ta có:

$$(q - \varepsilon)^p < \frac{u_{n+p}}{u_n} < (q + \varepsilon)^n$$

$$\Rightarrow u_n^{\frac{1}{n+p}} (q - \varepsilon)^{\frac{p}{n+p}} < \sqrt[n+p]{u_{n+p}} < u_n^{\frac{1}{n+p}} (q + \varepsilon)^{\frac{p}{n+p}}$$

$n \ge N$, cho $p \to +\infty$, ta được:

$$q - \varepsilon \le \lim_{p \to +\infty} \sqrt[n+p]{u_{n+p}} \le q + \varepsilon$$

$$\Rightarrow q - \varepsilon \le \lim_{p \to +\infty} \sqrt[N+p]{u_{N+p}} \le q + \varepsilon$$

27 a. Chứng minh rằng: $\cos x \ge 1 - \frac{x^2}{2},\ \forall x \ge 0$

b. Đặt $S_n = \sum_{k=2}^{n} k.\cos\frac{\pi}{2}$

Tính giới hạn của $\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n^2}$

Giải

a. Xét

$$f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2},\ x \ge 0$$

$$f'(x) = -\sin x + x$$

$$f''(x) = -\cos x + 1 \geq 0,\ \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow\ f' \text{ tăng trên } [0, +\infty)$$

$$\Rightarrow f'(x) \geq f'(0) = 0,\ \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow\ f \text{ tăng trên } [0, +\infty)$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0,\ \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow \cos \geq 1 - \frac{x^2}{2},\ \forall x \geq 0$$

b. Theo câu a), ta có:

$$\sum_{k=2}^{n} k \geq S_n \geq \sum_{k=2}^{n} k\left(1 - \frac{\pi^2}{2k^2}\right)$$

$$\geq \sum_{k=2}^{n} k - \frac{\pi^2}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\geq \frac{(n+2)(n-1)}{2} - \frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{n-1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(n+2)(n-1)}{2} \geq S_n \geq \frac{(n+2)(n-1)}{2} - \frac{\pi^2(n-1)}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right) \geq \frac{S_n}{n^2} \geq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$$

Vậy: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^2} = \frac{1}{2}$

Nhận xét: Qua phép chứng minh trên, ta dễ thấy rằng:

- $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2},\quad \forall x \in R$
- $|\sin x| \leq |x|,\ \forall x \in R$

(28) Cho dãy số $\{u_n\}$ được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_o = 2006 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2}, \ n \geq 0 \end{cases}$$

Tìm giới hạn dãy số $\left\{\dfrac{u_n^3}{n}\right\}$

Giải

Ta có $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2}, \ \forall x \geq 0$

$$\Rightarrow u_{n+1}^3 = u_n^3 + \frac{1}{u_n^6} + 3 + \frac{3}{u_n^3}$$

$$> u_n^3 + 3, \ \forall x \geq 0 \quad \left(\text{Do } u_n > 0, \ \forall x \geq 0\right)$$

$$\Rightarrow u_n^3 > u_{n-1}^3 + 3, \ \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow u_n^3 > u_o^3 + 3n, \ \forall n \geq 0 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow u_{n+1}^3 < u_n^3 + 3 + \frac{1}{u_o^3 + 3n} + \frac{1}{\left(u_o^3 + 3n\right)^2}$$

$$< u_n^3 + 3 + \frac{1}{3n} + \frac{1}{9n^2}, \ \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow u_n^3 < u_1^3 + 3(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{3k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{9k^2}, \ \forall n \geq 2 \qquad (2)$$

Mặt khác, ta có:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^n}.$$

$$\leq 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) < 2, \ \forall n \geq 1 \quad (3)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sqrt{n}.\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}} < \sqrt{2n}, \ \forall n \geq 1 \ (\text{Do BĐT B.C.S}) \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3) và (4 suy ra:

$$3n + u_o^3 < u_n^3 < u_1^3 + 3n + \sqrt{2n} + 2,\ \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow 3 + \frac{u_o^3}{n} < \frac{u_n^3}{n} > \frac{u_1^3}{n} + 3 + \sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{2}{n},\ \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n^3}{n} = 3$$

29 Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$$

Tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} (\ln x_n)$

Giải

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức:

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x,\ \forall x > 0$$

Xét
$$\begin{cases} f(x) = \ln(1 + x) - x + \dfrac{x^2}{2} \\ g(x) = x - \ln(1 + x) \end{cases} \quad (x > 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{1 + x} - 1 + x = \dfrac{x^2}{1 + x} > 0 \\ g'(x) = 1 - \dfrac{1}{1 + x} = \dfrac{x}{1 + x} > 0 \end{cases} \quad (\forall x > 0)$$

$\Rightarrow$ f, g đều tăng trên $(0, +\infty)$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) > f(0) = 0 \\ g(x) > g(0) = 0 \end{cases} \quad (\forall x > 0)$$

Vậy $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x,\ \forall x > 0$

Tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} (\ln x_n)$

Ta có: $\ln x_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+...,\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức trên, ta có:

$$\frac{i}{n^2}-\frac{i^2}{2n^4}<\ln\left(1+\frac{i}{n^2}\right)<\frac{i}{n^2},\ \forall i=\overline{1,n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2}(1+2+...+n)-\frac{1}{2n^4}\left(1^2+2^2+...+n^2\right)$$

$$<\ln x_n<\frac{1}{2n^2}(1+2+...+n)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{2n^4}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{v_n}<\underbrace{\ln x_n}_{u_n}<\underbrace{\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}}_{w_n}$$

Vì $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=\frac{1}{2}$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\frac{1}{2}$

30 Cho hai dãy số $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ thỏa

$$\begin{cases} a_1=\frac{2005}{2006}\\ b_1=\frac{2007}{2006}\\ a_{n+1}=a_n+\frac{1}{b_n}\\ b_{n+1}=b_n+\frac{1}{a_n}\end{cases}$$

$(n = 1, 2, 3,...)$

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1001}{a_n+b_n}$

Giải

Ta có: $a_2b_2=\left(a_1+\frac{1}{b_1}\right)\left(b_1+\frac{1}{a_1}\right)$

$$= a_1b_1 + \frac{1}{a_1b_1} + 2 > 4$$

$$\Rightarrow a_2 + b_2 \geq 2\sqrt{a_2b_2} > 2\sqrt{2.2}$$

Giả sử $a_k + b_k > 2\sqrt{2.k} \quad (k \in N)$

Khi đó:

$$a_{k+1}^2 = a_k^2 + \frac{1}{b_k^2} + \frac{2a_k}{b_k}$$

+

$$b_{k+1}^2 = b_k^2 + \frac{1}{a_k^2} + 2\frac{b_k}{a_k}$$

$$2a_{k+1}b_{k+1} = 2a_kb_k + \frac{2}{a_kb_k} + 4$$

$$\Rightarrow (a_{k+1} + b_{k+1})^2 = (a_k + b_k)^2 + \left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k}\right)^2 + 2\left(\frac{a_k}{b_k} + \frac{b_k}{a_k}\right) + 4$$

$$> 8k + 8$$

$$\geq 8(k+1)$$

$$\Rightarrow a_{k+1} + b_{k+1} > 2\sqrt{2(k+1)}$$

$\Rightarrow$ Theo nguyên lý quy nạp, ta co: $a_n + b_n > 2\sqrt{2n}, \ \forall n \geq 2$

Vậy: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1001}{a_n + b_n} = 0$

31 Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}}$

Giải

Theo kết quả bài 3, ta có:

$$\ln(1+x) < x, \ \forall x > 0$$

$$\Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \ \forall x \in N$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} > \ln(1+n) - \ln n, \ \forall x \in N$$

$$\Rightarrow a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$> (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \dots + (\ln(n+1) - \ln n)$$

$$\geq \ln(n+1)$$

$$\Rightarrow a_n > \ln(n+1), \ \forall x \in N$$

Vậy: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}} = 0$

32 Cho $1 < a \leq e^{\frac{1}{e}}$ và dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = a^{x_n}, \ n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng: Dãy $\{x_n\}$ hội tụ

Giải

- $n = 1$: $x_2 = a^{x_1} = a^a > a = x_1$
- $n = k$: Giả sử $x_{k+1} > x_k$
- $n = k + 1$: $x_{k+2} = a^{x_{k+1}} > a^{x_k} = x_{k+1}$

Vậy : $x_{n+1} > x_n, \ \forall x \in N$

Xét $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} - \ln a, \ x > 1$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow x = c$$

Bảng biến thiên:

x	1		e		$+\infty$
f'		+	0	−	
f	$-\ln a$	↗	f(e)	↘	$-\ln a$

Do: $1 < a \le e^{\frac{1}{e}}$

$$\Rightarrow 0 < \ln a \le \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\ln a < 0 \\ f(e) = \frac{1}{e} - \ln a \ge 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tồn tại $x_o > 1$ sao cho: $f(x_o) = \dfrac{\ln x_o}{x_o} - \ln a = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x_o}{x_o} = \ln a$$

$$\Leftrightarrow x_o = a^{x_o}$$

Bây giờ, ta chứng minh $x_n < x_o, \forall n \in N$

Quả vậy:

- $n = 1$: $x_1 = a < a^{x_o} = x_o$
- $n = k$: Giả sử $x_k < x_o$
- $n = k + 1$: Ta có: $x_{k+1} = a^{x_k} < a^{x_o} = x_o$

$\Rightarrow x_n < x_o, \forall n \in N$

$\Rightarrow$ Dãy $\{x_n\}$ hội tụ.

---

33 Cho dãy số $\{x_n\}$ thỏa: $\begin{cases} 0 < x_n < 1 \\ x_{n+1}(1 - x_n) \ge \frac{1}{4}, \ \forall n \in N \end{cases}$

Chứng minh rằng:

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$

b. $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2n} < x_n \le \dfrac{1}{2}, \ \forall n \in N$

Giải

a. Ta có:

$$x_{n+1}(1-x_n) \ge \frac{1}{4} \ge x_n(1-x_n)$$

$$\Rightarrow x_{n1}(1-x_n) \ge x_n(1-x_n)$$

$$\Rightarrow x_{n+1} \ge x_n \quad (\text{vì } 0 < x_n < 1)$$

$\Rightarrow \{x_n\}$ là dãy tăng và bị chặn nên hội tụ

Đặt $x = \lim\limits_{x \to +\infty}$

$$\Rightarrow x(1-x) \ge \frac{1}{4} \quad \left(\text{vì } x_{n+1}(1-x_n)\frac{1}{4}, \forall\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Vậy: $\lim\limits_{n \to +\infty} = \frac{1}{2}$

b. • Ta có: $x_n \le x_{n+m}, \ \forall n, m \in N$

Cố dịch n, cho $n \to +\infty$, ta có ngay:

$$x_n \le \frac{1}{2}$$

• Hơn nữa:

+ n = 1 : $a_1 > 0 = \frac{1}{2} - \frac{2}{2}$

+ n = k : Giả sử: $x_k > \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}$

+ n = k + 1 : Theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$x_k > \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}$$

$$\Rightarrow 1 - x_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq x_{k+1}(1 - x_k) < x_{k+1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k}\right)$$

$$\Rightarrow x_{k+1} > \frac{k}{2(k+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(k+1)}$$

$\Rightarrow$ (Đpcm)

34 Cho f: $[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ giảm và liên tục

Giải sử hệ $\begin{cases} f(\alpha) = \beta \\ f(\beta) = \alpha \\ \alpha, \beta \geq 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $\alpha = \beta = a$

Chứng minh rằng: Dãy $\{x_{n+1} = f(x_i)\}$ (với $x_o > 0$) hội tụ về a.

Giải

Ta chia ra hai trường hợp

* Nếu $x_2 > x_o$:

Khi đó: $f(x_2) \leq f(x_o)$

$\Leftrightarrow x_3 \leq x_1$

$\Rightarrow f(x_3) \geq f(x_1)$

$\Leftrightarrow x_4 \geq x_2$

....

Bằng quy nạp, ta có được $x_{2n} \leq x_{2n+2}$, $\forall n \in N$

(Để ý: $x_{2n} = f(x_{2n-1}) \leq f(0)$, $\forall n \in N$)

Quả vậy, giả sử $x_{2k} \leq x_{2k+2}$

Khi đó: $f(x_{2k}) \geq f(x_{2k+2})$

$\Leftrightarrow x_{2k+1} \geq x_{2k+3}$

$\Leftrightarrow f(x_{2k+1}) \leq f(x_{2k+3})$

$\Leftrightarrow x_{2k+2} \leq x_{2k+4}$

$\Rightarrow (1)$ đúng

Chứng minh tương tự: $x_{2n-1} > x_{2n+1}$, $\forall n \in N$

$\left(\text{Để ý}: x_n > 0,\ \forall n \in N\right)$

Như vậy: • $\{x_{2n}\}$ tăng k bị chặn trên nên $\{x_{2n}\}$ hội tụ. Giả sử

$$\lim_{n\to+\infty} x_{2n} = \alpha \ge 0$$

• $\{x_{2n+1}\}$ giảm và bị chặn dưới nên $\{x_{2n+1}\}$ hội tụ. Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n+1} = \beta \ge 0$

Do f liên tục trên $[0,+\infty)$, nên:

$$\begin{cases} \beta = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_{2n+1}\right) = f(\alpha) \\ \alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_{2n+1}\right) = f(\beta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = f(\alpha) \\ \alpha = f(\beta) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = a$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_{2n} = \lim_{n\to+\infty} x_{2n+1} = a$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = a$$

* Nếu: $x_2 \le x_o$: chứng minh tương tự: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$

(Bạn đọc tự làm)

35 Cho phương trình: $x^n + x^{n-1} + ... + x - 1 = 0$
Chứng tỏ rằng với mỗi n nguyên dương thì phương trình có duy nhất một nghiệm dương x_n và tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Giải

Xét $f(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x - 1 \ (n \in N\backslash\{1\})$

$f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + ... + 1 > 0,\ \forall x > 0$

Hơn nữa: $f(0).f(1) = 1 - n < 0$

$\Rightarrow f(x) = 0$ có nghiệm dương duy nhất x_n

Khi đó $\begin{cases} 1 = x_n = x_n^2 + ... + x_n^n \\ 1 = x_{n+1} + x_{n+1}^2 + ... + x_{n+1}^n + x_{n+1}^{n+1} \end{cases}$

$\Rightarrow x_n > x_{n+1} > 0$

(vì ngược lại: $0 < x_n \le x_{n+1}$)

$\Rightarrow 1 = x_n + x_n^2 + ... + x_n^n < x_{n+1} + x_{n+1}^2 + ... + x_{n+1}^n < 1$

$\Rightarrow 1 < 1$ (vô lý)

$\Rightarrow$ Tồn tại $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_o,\ 0 \le x_o \le x_1$

Mặt khác, từ $\begin{cases} 1 = x_n \dfrac{1 - x_n^n}{1 - x_n} \\ 0 < x_n < x_1 < 1 \end{cases}$ $(\forall n \ge 2)$

Cho $n \to +\infty$, ta được $1 = \dfrac{x_o}{1 - x_o}$

$\Leftrightarrow x_o = \dfrac{1}{2}$

Vậy $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$

36 Cho dãy số $\{u_n\}$ được xác định bởi:

$$u_2 = C_{2n}^n \sqrt{n}.4^{-n},\ n \in N$$

Chứng minh rằng: $\{u_n\}$ là dãy hội tụ

Giải

Ta có:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{C_{2n+2}^{n+1}.\sqrt{n+1}.4^{-n-1}}{C_{2n}^2\sqrt{n}.4^{-n}}$$

$$= \frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot 4^{-1}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{(2n+1)(2n+2}{(n+1)^2} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{n + \frac{1}{2}}{\sqrt{n(n+1)}} > 1$$

$\Rightarrow \{u_n\}$ là dãy dương tăng (1)

Hơn nữa:

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 = \ln\frac{n^2 + n + \frac{1}{4}}{n^2 + n}$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{4(n^2+n)}\right)$$

$$< \frac{1}{4(n^2+n)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

(Do $\ln(1 + x) < x, \forall x > 0$)

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow \ln u_{n+1} - \ln u_n < \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow \ln u_{n+1} - \ln u_1 < \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \ln\frac{u_{n+1}}{u_1} < \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < u_1.e^{\frac{1}{8}} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \{u_n\}$ là dãy hội.

37 Cho dãy $\{a_n\}$ xác định như sau:

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\alpha}\left(a_{n-1} + \dfrac{2005}{a_{n-1}}\right), \ n \geq 2 \\ a_1 = 2006 \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{2005}$

Giải

Ta có $a_n > 0, \ \forall x \geq 1$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2005}{a_{n-1}}\right)$$

$$\geq \frac{1}{2}2\sqrt{a_{n-1}.\frac{2005}{a_{n-1}}}$$

$$\geq \sqrt{2005}, \ \forall n \geq 2 \ (1)$$

Mặt khác:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{2} + \frac{2005}{2a_{n-1}^2}$$

$$\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \ \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow a_n \leq a_{n-1}, \ \forall n \geq 2$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \{a_n\}$ là dãy giảm và bị chặn dưới bởi $\sqrt{2005}$ nên hội tụ.

Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \geq \sqrt{2005}$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2 + 2005}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2a = a + \frac{2005}{a}$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt{2005}$$

Vậy: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{2005}$

37 Cho dãy số $\{x_n\}$ bị chặn và thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} x_n + x_n \geq 2x_{n+2}, & \forall n \geq 1 \\ x_1 = 2007 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Giải

Gọi A là một chặn dưới của $\{x_n\}$ khi đó:

$$A_n = \mathrm{Max}\{x_n, x_{n-1}\} \geq A, \ \forall n \in N$$

Do:

$$A_n = \mathrm{Max}\{x_n, x_{n+1}\} = \mathrm{Max}\left\{x_n, x_{n+1}, \frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right\}$$

$$\geq \mathrm{Max}\left\{x_{n+1}, \frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right\} \geq \mathrm{Max}\{x_{n+1}, x_{n+2}\} = A_{n+1}$$

$\Rightarrow \{A_n\}$ là dãy giảm và bị chặn dưới nên có giới hạn hữu hạn B.

Ta chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = B$

Từ chứng minh trên: $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = B$ nên:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in N: \ n \geq N \Rightarrow B - \frac{\varepsilon}{3} < A_n < B + \frac{\varepsilon}{3}$$

Do đó: $\forall m > N$ thì $x_{2n-1} \leq A_{m-1} < B + \frac{\varepsilon}{3}$

- Nếu $x_m > B - \frac{\varepsilon}{3}$ thì

$$B - \frac{\varepsilon}{3} < x_m \leq A_m < B + \frac{\varepsilon}{3} \qquad (1)$$

- Nếu $x_m \leq B - \frac{\varepsilon}{3}$ thì do định nghĩa của A_n ta có ngay:

$$x_{m+1} > B - \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow x_m \geq 2x_{m+1} - x_{m-1} > 2\left(B - \frac{\varepsilon}{3}\right) - \left(B + \frac{\varepsilon}{3}\right) = B - \varepsilon$$

$$\Rightarrow B - \varepsilon < x_m \leq B - \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$B - \varepsilon < x_m < B + \varepsilon, \ \forall m > N$$

Vậy: $\lim\limits_{m \to +\infty} x_m = B.$

---

39. Cho $\{C_{n,k} / 1 \leq k \leq n; k, n \in \mathbb{Z}^+\} \subset \mathbb{R}$ thỏa mãn:

a. $C_{n,k} \to 0$, khi $n \to +\infty$ $(\forall k \in \mathbb{N})$

b. $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k} \to 1$, khi $n \to +\infty$

c. $\sum\limits_{k=1}^{n} |C_{n,k}| \leq C = \text{const}, \forall n \in \mathbb{R}$

Khi đó : Nếu $\{a_n\}$ hội tụ thì $\left\{b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k} a_k\right\}$ cũng hội tụ và $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$ (Định lý Taeplitz)

Giải:

Giải sử $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$

Khi đó :

- Tồn tại hằng số $D > 0$: $|a_n - a| \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$
- Với $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2c}, \forall n > n_\varepsilon$

$$\leq \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \varepsilon |C_{n_1 k}| |a_k - a| + \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} |C_{n,k}| |a_k - a|$$

$$\leq D \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} |C_{n,k}| + \frac{\varepsilon}{2C} \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} |C_{n,k}|$$

$$< D \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} |C_{n,k}| + \frac{\varepsilon}{2C} \cdot C$$

$$\leq D \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} |C_{n,k}| + \frac{\varepsilon}{2}$$

Do $\lim\limits_{n\to+\infty} C_{n,k} = 0, \forall k \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n_\varepsilon} |C_{n,k}| = 0$

Nên tồn tại $m_\varepsilon \in \mathbb{N} : \sum\limits_{k=1}^{n_\varepsilon} |C_{n,k}| < \dfrac{\varepsilon}{2D}, \forall n > m_2$ (2)

(với ε được xét ở trên)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k}(a_k - a) < D\sum\limits_{k=1}^{n_\varepsilon} |C_{n,k}| + \dfrac{\varepsilon}{2}$

$$< D\frac{\varepsilon}{2D} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall n > n_\varepsilon + n_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} C_{n,k}(a_k - a) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} C_{n,k}(a_k - a) + a\sum_{k=1}^{n} C_{n,k}\right]$$

$$= 0 + a.1 = a$$

40. Cho $\{C_{n,k} / 1 \le k \le n; k, n \in \mathbb{Z}\} \subset [0, +\infty)$ thỏa mãn :

a. $C_{n,k} \to 0$, khi $n \to +\infty$ $(\forall k \in \mathbb{N})$

b. $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k} \to 1$, khi $n \to +\infty$

Khi đó : Nếu $\{a_n\}$ hội tụ thì $\left\{b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k} a_k\right\}$ cũng hội tụ và $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$

(Hệ quả định lý Toeplitz)

Giải

Do $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k} \to 1 \Rightarrow$ Dãy $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k}\right\}$ bị chặn

$\Rightarrow$ Dãy $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} |C_{n,k}|\right\}$ bị chặn (c)

$\left(\text{Do } C_{n,k} \geq 0, \forall n, k \in \mathbb{N}\right)$

Từ (a), (b), (c) $\Rightarrow$ (ĐPCM)

(Do định lý Toeplitz)

41. Chứng minh rằng : Nếu

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \text{ thì } \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a$$

Giải

Sử dụng định lý Toeplitz với $C_{n,k} = \frac{1}{n}; k = 1, 2, \ldots, n.$

Khi đó : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k} a_k = a$

42. Chứng minh rằng : Nếu

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \text{ thì } \lim_{n\to+\infty} \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 1.a_n}{n^2} = \frac{a}{2}$$

Giải

Đặt : $C_{n,k} = \frac{2(n-k+1)}{n^2}; k = 1, 2, \ldots, n$

Khi đó :

- $0 < C_{n,k} \to 0, \forall k \in \mathbb{N}$
- $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k} = 2\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{n^2}$

$$= 2\frac{n(n-1+1+n-n+1)}{2n^2} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$$

$(\text{khi } n \to +\infty)$

Theo đó theo định lý Taeplitz:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} C_{n,k}.a_k = a$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 1a_n}{n^2} = \frac{a}{2}$

(43.) Chứng minh rằng : Nếu dãy dương {an} hội tụ về a dương thì

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} = a$$

Giải

Cách 1 :

Ta có : $\ln a_n \to \ln a$. Nên theo bài 41, ta có :

$$\frac{\ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_n}{n} \to \ln a$$

$$\Rightarrow \ln \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \to \ln a$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \to a$$

Cách 2 : Ta có : $\begin{cases} a_n \to a \\ \dfrac{1}{a_n} \to \dfrac{1}{a} \end{cases}$

Do đó, theo bài 41, ta có :

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \to a$$

$$\frac{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}{n} \to \frac{1}{a}$$

Hơn nữa:

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + ... + \dfrac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

Vì vậy, theo tính chất kẹp:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} = a$$

44. Cho dãy số $\{a_n\}$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = a > 0 \text{ thì } \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = a$$

Giải

Đặt $\quad b_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}},\ n \ge 2\ (\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a)$

Theo bài 43, ta có:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} = a$$

Vậy: $\quad \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = a$

45. Cho $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ là dãy số thỏa mãn:

a. $b_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = +\infty$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$

Chứng minh rằng: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = a$

Giải

Đặt: $\quad C_{n,k} = \dfrac{b_k}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n},\ 1 \le k \le n;\ k, m \in \mathbb{Z}$

Ta có:

$$C_{n,k} > 0,\ \forall\ 1 \le k \le n;\ k, n \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{n\to+\infty} C_{n,k} = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{k=1}^{n} C_{n,k} = 1$$

Do đó theo định lý Toeplitz: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k}a_k = a$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = a$$

46. Cho $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ là hai dãy thỏa mãn:

a. $b_n > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$

b. $\lim_{n\to+\infty}(b_1 + b_2 + \dots + b_n) = +\infty$

c. $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$

Chứng minh rằng: $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = c$

Giải

Đặt $C_{n,k} = \frac{b_k}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}, \ 1 \le k \le n; \ k, n \in \mathbb{Z}$

Ta có:

$C_{n,k} > 0, \ \forall \ 1 \le k \le n; \ k, n \in \mathbb{Z}$

$\lim_{n\to+\infty} = 0, \ \forall k \in \mathbb{N}$

$\sum_{k=1}^{n} C_{n,k} = 1$

Do đó theo định lý Toeplitz: $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} C_{n,k} \frac{a_k}{b_k} = c$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = c$$

47. Cho 2 dãy số $\{a_n\}$ và $[b_n\}$ thỏa mãn:

a. $\{b_n\}$ tăng thực sự tới $+\infty$

b. $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = c$

Khi đó: $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ *(Định lý Stobz)*

Giải

Đặt:
$$\begin{cases} x_n = \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}, & n \geq 2 \\ y_n = b_n - b_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$$

Như vậy:

$$y_n > 0, \ \forall n \geq 1$$

$$\lim_{n\to+\infty}(y_2 + y_3 + \ldots + y_n) = \lim_{n\to+\infty}(b - b_1) = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = c$$

Do đó theo định lý bài 45, ta có:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_2y_2 + x_3y_3 + \ldots + x_ny_n}{y_2 + y_3 + \ldots + y_n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_1}{b_n - b_1} = c$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a_1}{b_n}}{1 - \dfrac{b_1}{b_n}} = c \ \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

Vậy: $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c$

48. Tính $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Giải

Đặt:
$$\begin{cases} x_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} & (n \geq 1) \\ y_n = \sqrt{n} \end{cases}$$

Khi đó:

$\{y_n\}$ tăng thật sự tới $+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} = 2$$

Do đó, theo định lý Stobz: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n} = 2$

49. Chứng minh rằng: Nếu dãy $\{a_n\}$ thỏa mãn

$$\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1} - a_n) = a \text{ thì } \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n} = a$$

Giải

Đặt: $\begin{cases} x_n = a_n \\ y_n = n \end{cases}$ $(n \geq 1)$

Khi đó:

$\{y_n\}$ là dãy tăng thực sự tới $+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty}(a_n - a_{n-1}) = a$$

Do đó, theo định lý Stolz: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n} = a$

Vậy: $$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n} = a$$

50. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{a^{n+1}}\left(a + \frac{a^2}{2} + \ldots + \frac{a^n}{n}\right), a > 1$

Giải

Đặt: $\begin{cases} x_n = a + \dfrac{a^2}{2} + \ldots + \dfrac{a^n}{n} \\ y_n = \dfrac{a^{n+1}}{n} \end{cases}$ $(n \geq 1)$

Khi đó

$\{y_n\}$ tăng thực sự tới $+\infty$

(vì: + $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \dfrac{na}{n+1} > 1, \ \forall n \geq \left[\dfrac{1}{a-1}\right] + 1$

(với $\left[\dfrac{1}{a-1}\right]$ là phần nguyên của $\dfrac{1}{a-1}$)

+ $y_n > \dfrac{a^n}{n} = \dfrac{[1+(a-1)]^n}{n}$

$$> \frac{C_n^2(a-1)^2}{n} = \frac{(n-1)(a-1)^2}{2} \to +\infty \text{ (khi } n \to +\infty))$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{a_n}{n}}{\dfrac{a^{n+1}}{n} - \dfrac{a^n}{n-1}} = \frac{1}{a-1}$$

Do đó, theo stobz:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{a^{n+1}}\left(a + \frac{a^2}{2} + \ldots + \frac{a^n}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{a-1}$$

51. Cho $\{C_{n,k} / 1 \leq k \leq n; \ k, n \in \mathbb{Z}\}$. Chứng minh rằng:

Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k} a_k = a$, $\forall$ dãy $\{a_n\}$ thỏa $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ $(a \in \mathbb{R})$

thì

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} C_{n,k} = 0, \ \forall k \in \mathbb{N}$

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k} = 1$

(iii) Tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho:

$$\sum_{k=1}^{w} |c_{n,k}| \leq c, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

(Điều ngược lại của định lý Toeplitz)

Giải

Lấy $a_n = 1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} C_{n,k}a_k = a = 1$

$\Rightarrow$ (ii) đúng

Lấy $a_n^{\ell} = \begin{cases}1, & n = \ell\\ 0, & n \neq \ell\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{(\ell)} = 0, \ \forall \ell \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} C_{n,k}a_k^{(\ell)} = 0, \ \forall \ell \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{n\to+\infty} C_{n,\ell}$$

$\Rightarrow$ (i) đúng

Giả sử (iii) sai, tức là:

$+ \ \exists n_1 \in \mathbb{N} : \sum\limits_{k=1}^{n_1}\left|c_{n_1,k}\right| > 10^2$

Ta xây dựng dãy $\{a_n\}$ có n_1 số hạng đầu tiên như sau:

$$\begin{cases}\operatorname{sign}C_{n_1,k} = \operatorname{sign}a_k\\ |a_k| = \dfrac{1}{10}\end{cases} \quad (k = \overline{1, n_1})$$

Khi đó: $$\sum_{k=1}^{n_1} C_{n_1,k}a_k = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{n_1}\left|C_{n_1,k}\right| > 10$$

Theo (i) $\exists n_1 < n_o \in \mathbb{N} : \sum\limits_{k=1}^{n_1}\left|C_{n,k}\right| < 1, \ \forall n > n_o \Rightarrow \left|\sum\limits_{k=1}^{n_1} C_{n,k}.q_k < \dfrac{1}{10}\right|$, $\forall n > n_o$

+ Cũng do (iii) giả sử sai, nên $\exists n_o < n_2 \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n_2}\left|C_{n_2,k}\right| > 10^1 + 10 + 1$$

Ta xây dựng n_2 số hạng tiếp theo của dãy $\{a_n\}$ như sau:

$$\begin{cases}\operatorname{sign}C_{n_2,k} = \operatorname{sign}a_k\\ |a_k| = \dfrac{1}{10^2}\end{cases} \quad (k = \overline{n_1 + 1, n_2})$$

Khi đó: $$\sum_{k=1}^{n_2} C_{n_2,k}a_k = \sum_{k=1}^{n_1} C_{n_2,k}a_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} C_{n_2,k}a_k$$

$$> -\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}\sum_{k=n_1+1}^{n_2}\left|C_{n_2,k}\right|$$

$$> -\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}(10^4 + 10 + 1 - 1) = 10^2$$

+ Giả sử ta xây dựng được n_ℓ $(n_1 < n_2 < ... < n_\ell)$ số hạng tiếp theo của dãy $\{a_n\}$ thỏa:

$$\begin{cases} \text{sign}C_{n_\ell,k} = \text{sign}a_k & (k = \overline{n_{\ell-1}+1,\ n_\ell}) \\ |a_k| = \dfrac{1}{10^\ell} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n_\ell} C_{n_\ell}a_k > 10^\ell \end{cases}$$

+ Theo (i) $\exists n_\ell < n_* \in \mathbb{N} : \displaystyle\sum_{k=1}^{n_\ell}\left|C_{n,k}\right| < 1,\ \forall n > n_*$

$$\Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{n_\ell} C_{n,k}a_k\right| < \frac{1}{10^\ell},\ \forall n > n_*$$

Cũng do (iii) giả sử sai, nên $\exists n_* < n_{\ell+1} \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n_{\ell+1}}\left|C_{n_{\ell+1},k}\right| > 10^{2\ell+2} + 10 + 1$$

Ta xây dựng $n_{\ell+1}$ số hạng tiếp theo của dãy $\{a_n\}$ như sau:

$$\begin{cases} \text{sign}C_{n_{\ell+1},k} = \text{sign}a_k \\ |a_k| = \dfrac{1}{10^{\ell+1}} \end{cases} \quad (k = \overline{n_\ell + 1,\ n_{\ell+1}})$$

Khi đó $$\sum_{k=1}^{n_{\ell+1}} C_{n_{\ell+1},k}.a_k = \sum_{k=1}^{n_\ell} C_{n_{\ell+1},k}.a_k + \sum_{k=n_\ell+1}^{n_{\ell+1}} C_{n_{\ell+1},k}.q_k$$

$$> -\frac{1}{10^\ell} + \frac{1}{10^{\ell+1}} \sum_{k=n+1}^{n_{\ell+1}} \left|C_{n_{\ell+1},k}\right|$$

$$> -\frac{1}{10^\ell} + \frac{1}{10^{\ell+1}} (10^{2\ell+2} + 10 + 1 - 1) = 10^{\ell+1}$$

Như vậy theo giả thiết quy nạp, ta xây dựng 2 dãy $\{a_n\}$ và

$$\left\{\sum_{a=1}^{n} C_{n,k} a_k\right\} \text{ thỏa:}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{l=1}^{n_k} C_{n_k,\ell} q_\ell = +\infty \end{cases}$$

(Trong đó: $\left\{\sum\limits_{\ell=1}^{n_k} C_{n_k,\ell} q_\ell\right\}$ là một dãy con của $\left\{\sum\limits_{\ell=1}^{n} C_{n,\ell} q_\ell\right\}$)

Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vì vậy (iii) đúng

(52) Cho dãy $\{a_n\}$ thỏa $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$. Chứng minh rằng:

a. Nếu $q < 1$ thì $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$

b. Nếu $q > 1$ thì $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| = +\infty$

Giải

a. $\forall \varepsilon \in (0, 1-q)$. Ta có: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < q + \varepsilon < 1$

Suy ra, tồn tại $n_o \in \mathbb{N}: \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q + \varepsilon, \ \forall n \geq n_o$

$$\Rightarrow |a_n| < (q+\varepsilon)^{n-n_o} \left|q_{n_o}\right|, \ \forall n > n_o$$

Do: $\lim\limits_{n \to +\infty} (q+\varepsilon)^{n-n_o} \left|a_{n_o}\right| = 0$

Nên $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$

b. $\forall\varepsilon \in (o, q-1)$. Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q > q-\varepsilon > 1$

Suy ra, tồn tại $n_o \in \mathbb{N}$: $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > q-\varepsilon, \ \forall n \geq n_o$

$$\Rightarrow |a_n| > (q-\varepsilon)^{n-n_o}|a_{n_o}|, \ \forall n > n_o$$

Do: $\lim\limits_{n\to+\infty}(q-\varepsilon)^{n-n_o}|a_{n_o}| = +\infty$

Nên $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n| = +\infty$

53. Cho dãy $\{a_n\}$ thỏa $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q$. Chứng minh rằng:

a. Nếu $q < 1$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

b. Nên $q > 1$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n| = +\infty$

Giải

a. $\forall\varepsilon \in (0, 1-q)$, ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q < q+\varepsilon < 1$

Suy ra, tồn tại $n_o \in \mathbb{N}$: $\sqrt[n]{|a_n|} < q+\varepsilon, \ \forall n \geq n_o$

$$\Rightarrow |a_n| < (q+\varepsilon)^n, \ \forall n \geq n_o$$

Mà: $\lim\limits_{n\to+\infty}(q+\varepsilon)^n = 0$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

b. $\forall\varepsilon \in (0, q-1)$. Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q > q-\varepsilon > 1$

Suy ra, tồn tại $n_o \in \mathbb{N}$: $\sqrt[n]{|a_n|} > q-\varepsilon, \ \forall n \geq n_o$

$$\Rightarrow |a_n > (q-\varepsilon)^n, \ \forall n \geq n_o|$$

Do $\lim\limits_{n\to+\infty}(q-\varepsilon)^n = +\infty$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n| = +\infty$

54. Chứng minh rằng không tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin n$

Giải

Giả sử giới hạn dãy số $\{a_n\}$ tồn tại. Khi đó:

$$0 = \lim_{n\to+\infty}\left[\sin(n+2) - \sin n\right] = 2\sin 1 \lim_{n\to+\infty}\cos(n+1)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\cos n = 0 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left[\cos(n+2) - \cos n\right] = -2\sin 1 . \lim_{n\to+\infty}\sin(n+1)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\sin n = 0 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 1 = \lim\limits_{n\to+\infty}(\sin^2 n + \cos^2 n)$

$$= \lim_{n\to+\infty}\sin^2 n + \lim_{n\to+\infty}\cos^2 n = 0 \text{ (vô lý)}$$

Vậy, giới hạn của {sinn} không tồn tại.

55. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{e} - 1)$

Giải

Ta có: $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{m+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

(Bạn đọc kiểm tra bất đẳng thức kép này)

$$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{n} < \sqrt[n]{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$$

$$\Leftrightarrow 1 < n(\sqrt[n]{e} - 1) < n\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} - 1\right]$$

Hơn nữa: $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \le 1 + \dfrac{1}{n^2}$ (Do BĐT Bernoulli)

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}$$

$$\Rightarrow n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}-1\right] \le 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow 1 < n(\sqrt[n]{e}-1) \le 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$$

Do đó: $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{e}-1\right) = 1$