SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI
VÀ HỘI TOÁN HỌC HÀ NỘI

===========================

NGUYỄN VĂN MẬU, NGUYỄN HỮU ĐỘ
(Chủ biên)

CÁC CHUYÊN ĐỀ TOÁN HỌC BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI

(Tóm tắt báo cáo Hội nghị khoa học)

Hà Nội, 26-27/04/2012

KẾ HOẠCH VÀ CÔNG TÁC CHUẨN BỊ HỘI THẢO KHOA HỌC CÁC CHUYÊN ĐỀ TOÁN HỌC BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI NĂM 2012

I. Thời gian, địa điểm, thành phần:

1. Thời gian: 3 ngày (25,26,27/04/2012)

2. Địa điểm: Phòng họp, Hội trường Trường THPT Chu Văn An Hà Nội

3. Thành phần:

- Bộ Giáo dục và Đào tạo: Lãnh đạo Bộ, Lãnh đạo vụ GD Trung học;
- Lãnh đạo LH CHKHKT HN
- Các tạp chí: Toán học tuổi trẻ, Toán tuổi thơ;
- Hội Toán học Hà Nội; Hội Toán học VN,
- Các tác giả có bài đăng ký tham dự Hội thảo;
- Các phòng Giáo dục và Đào tạo, huyện, thị, một số trường THCS (có danh sách kèm theo);
- Truyền hình, báo, đài.

4. Ban Tổ chức và Ban chương trình Hội thảo (kèm Quyết định):

II. Nội dung chính của hội thảo:

- Đổi mới công tác quản lý giáo dục giai đoạn 2012-2015 và những định hướng mới.

- Đánh giá thực trạng phương pháp dạy học Toán, những thuận lợi, khó khăn trong đổi mới phương pháp dạy học; đề xuất các giải pháp cụ thể, khả thi về đổi mới phương pháp dạy học bộ môn.

- Đặc biệt các chuyên đề đào tạo, bồi dưỡng học sinh, sinh viên giỏi, tham gia các kỳ thi học sinh giỏi các cấp hàng năm, ...nhằm nâng cao chất lượng đào tạo.

III. Công tác chuẩn bị

Trước 30/03/2012 - Thành lập Ban Tổ chức, Ban chương trình

Lãnh đạo Sở GD và ĐT

Trước 15/04/2012

- Chuẩn bị nội dung Hội thảo: Thông báo và tập hợp các bài viết, In ấn kỷ yếu

(Ban tổ chức, Hội TH, Sở GD)

- Chuẩn bị chương trình văn nghệ, luyện tập

(Trường THPT CVA)

- In và gửi giấy mời *(Ban tổ chức, Hội TH, Sở GD)*

- Liên hệ các đơn vị liên quan đảm bảo an ninh, an toàn giao thông, điện, nước, ...
Sở GD và ĐT HN, Trường THPT CVA (Anh Dũng)

-Trang trí, khánh tiết: Khẩu hiệu, Hội trường lớn, 2 Hội trường nhỏ, hoa, nước uống ...
Trường THPT CVA (Anh Dũng)

- Chuẩn bị hội trường, âm thanh, ánh sáng, máy chiếu,..
Trường THPT CVA

- Tổng vệ sinh toàn trường *Trường THPT CVA*

- Chuẩn bị nhà khách (4 phòng), phương tiện đi lại *Trường THPT CVA*

Sáng 26/04/2012

Đón tiếp đại biểu *Trường THPT CVA*

Ghi danh sách đại biểu và phát kỷ yếu
Trường THPT CVA

Bổ trí chỗ ngồi trong Hội trường (Dành 3 hàng ghế giữa cho đại biểu)
Trường THPT CVA

Phụ trách chương trình văn nghệ chào mừng (nếu có)
Trường THPT CVA

Phương tiện trình chiếu, loa đài
Trường THPT CVA

26/04/2012 Nội dung chương trình Hội THHN

Trưa 26/04 Chuẩn bị ăn trưa
Sở GD và Anh Dũng (HT THPT CVA)

Chiều 26/04/2011

Từ 13h30-16h00 Nội dụng và điều hành 2 Hội thảo chuyên đề
Hội THHN

16h15-17h30 Hội thảo tổng kết phiên toàn thể
BTC (Anh Mậu+Anh Độ)

Tối 26/04/2011

Ăn tối (cho các đại biểu ở xa (40 xuất))

Sở GD và ĐT (Anh Quang), Anh Dũng (THPT Chu Văn An)

Ngày 27/04/2012 Chương trình Tọa đàm bàn tròn

Chuẩn bị phương tiện đưa đón,

Sở GD (Anh Tuấn)

Nội dung hoạt động

Hội THHN (Anh Hổ), Sở GD (Anh Tuấn), Trường PT DTNT Hà Nội (Anh Phú)

Các ngày Hội thảo: Quay phim, chụp ảnh và tư liệu

Hội THHN (Thẩm Ngọc Khuê)

CHƯƠNG TRÌNH CHI TIẾT

Ngày 25/04/2012

14h30-16h30 Họp Ban Tổ chức và Ban chương trình, tổng duyệt báo cáo.
Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Hữu Độ

Ngày 26/04/2012

08h00-8h30 Đón tiếp đại biểu *Phòng GDPT và Trường THPT CVA*
08h30-9h00 Văn nghệ chào mừng *Trường THPT CVA*
09h00-9h05 Tuyên bố lý do, giới thiệu đại biểu *Đàm Xuân Quang, Phó Văn Phòng*
09h05-9h15 Phát biểu khai mạc *Nguyễn Hữu Độ*
Phát biểu đề dẫn *Nguyễn Văn Mậu*
09h15-09h25 Phát biểu của đại biểu
- GS TS Vũ Hoan *Chủ tịch Liên hiệp các Hội KHKTHN*
- TS Vũ Đình Chuẩn *Vụ trưởng Vụ GDTH Bộ GD và ĐT*

09h25-11h30 Các báo cáo phiên toàn thể

1. NGƯT Hàn Liên Hải:
Một số ý kiến về vấn đề bồi dưỡng học sinh giỏi hiện nay
2. PGS Trần Huy Hổ:
Vai trò của Hội THHN trong công tác hợp tác đào tạo với các sở GD về hoạt động chuyên môn và bồi dưỡng học sinh giỏi

- ThS Chử Xuân Dũng (HT THTH CVA):
Về hoạt động chuyên môn của CLB Toán học HN
- TS Phạm Thị Bạch Ngọc:
Vai trò của Tạp chí TH và TT trong bồi dưỡng HSG phổ thông
- ThS Vũ Kim Thuỷ:
Hoạt động của Tạp chí Toán Tuổi thơ
- ThS Trần Văn Khải (HN-Amsterdam);
Về các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi của HN
- ThS Lê Đại Hải:
Về tổ chức các kỳ thi HSC ở Thủ đô HN

11h30-13h00 Nghỉ ăn trưa

14h00-17h30 Các báo cáo chuyên đề Toán học bồi dưỡng GV và các vấn đề liên quan.

Điều hành THCS: *GS. Nguyễn Văn Mậu, ThS. Chử Xuân Dũng*

1. PGS Hà Tiến Ngoạn
Tổng số các cách phân chia một tập hợp thành các tập con rời nhau
2. TS Nguyễn Việt Hải
Những bài toán thi học sinh giỏi lớp 9 về số học

3. TS Nguyễn Văn Ngọc
Một số dạng toán về chia đa thức đối xứng
4. ThS Nguyễn Bá Đang
Đường thẳng Simson
5. ThS Lê Thị Thanh Bình
Một số phương pháp giải phương trình hàm bậc THCS
6. GV Nguyễn Thị Minh Châu
Một số dạng toán liên quan đến dãy số có quy luật ở cấp THCS
7. ThS Hồ Quang Vinh
Phép nghịch đảo và ứng dụng
8... Các báo cáo mới đăng ký tại hội thảo.

Điều hành THPT: *PGS. Trần Huy Hổ, PGD Sở Lê Ngọc Quang*

1. PGS Hoàng Chí Thành
Một vài kỹ thuật giải tích trong tổ hợp
2. PGS Nguyễn Thuỷ Thanh
Một cách tiếp cận định nghĩa hàm mũ
3. PGS Vũ Đình Hoà
Bài toán tô màu đồ thị
4. GS Phạm Huy Điển
Hàm số mũ - vấn đề "Biết rồi - khổ lắm - nói mãi" mà vẫn chưa hết
5. GS Đặng Huy Ruận
Phương pháp Graph
6. TS Trịnh Đào Chiến
Một số lớp phương trình hàm dạng Pexider và áp dụng
7. PGS Đàm Văn Nhỉ
Tham số hóa đồ thị phẳng và toán sơ cấp
8... Các báo cáo mới đăng ký tại hội thảo

Phiên tổng kết: *GS. Nguyễn Văn Mậu, ThS Nguyễn Hữu Độ*

18h00-19h30 Ăn tối (dành cho các đại biểu ở tỉnh xa)

Ngày 27/04/2012

-Các báo cáo khoa học hội nghị bàn tròn.

- 11h30: Ăn trưa
- 16h00: Xe xuất phát về Hà Nội.

Mục lục

Lời nói đầu

Nguyễn Văn Mậu, Chủ tịch hội Toán học Hà Nội
Nguyễn Hữu Độ, Giám đốc sở GD và ĐT Hà Nội

Hòa nhịp với cả nước chào mừng ngày giải phóng miền Nam, thống nhất đất nước và ngày Quốc tế lao động 01.05 và thực hiện các chương trình đổi mới giáo dục Thủ đô, Sở Giáo Dục và Đào tạo Hà Nội phối hợp với Hội Toán học Hà Nội đồng tổ chức Hội thảo khoa học Các chuyên đề Toán học bồi dưỡng học sinh giỏi tại trường THPT Chu Văn An, thành phố Hà Nội vào các ngày 26-27/04/ 2012

Đây là hội thảo đầu tiên theo tinh thần ký kết phối hợp hoạt động giữa Sở Giáo Dục và Đào tạo Hà Nội và Hội Toán học Hà Nội bàn về liên kết bồi dưỡng học sinh giỏi và bồi dưỡng học sinh giỏi môn toán Trung học phổ thông và Trung học cơ sở.

Hội thảo khoa học lần này được tiến hành từ 26-27/4/2012 tại thành phố Hà Nội hân hạnh được đón tiếp nhiều nhà khoa học, nhà giáo lão thành, các nhà quản lý, các chuyên gia giáo dục và các nhà toán học báo cáo tại các phiên toàn thể và các cán bộ chỉ đạo chuyên môn từ các sở Giáo dục và Đào tạo, các thầy giáo, cô giáo bộ môn Toán đang trực tiếp bồi dưỡng học sinh giỏi môn Toán báo cáo tại các phiên chuyên đề của hội thảo.

Ban tổ chức đã nhận được gần 30 báo cáo toàn văn gửi tới hội thảo. Song do khuôn khổ rất hạn hẹp về thời gian, khâu chế bản và thời lượng của cuốn kỷ yếu, chúng tôi chỉ có thể đưa vào kỷ yếu được 20 bài, những bài còn lại sẽ được chế bản để gửi quý đại biểu khi thực hiện chương trình báo cáo chuyên đề chính thức của hội thảo.

Nội dung của kỷ yếu lần này rất phong phú, bao gồm hầu hết các chuyên đề phục vụ việc bồi dưỡng học sinh giỏi toán từ lý thuyết đồ thị, tô màu, đại số, giải tích, hình học, số học đến các dạng toán liên quan khác. Bạn đọc có thể tìm thấy ở đây nhiều dạng toán từ các kỳ olympic trong nước và quốc tế...

Ban tổ chức xin chân thành cảm ơn sự hợp tác và giúp đỡ hết sức quý báu của quý thầy giáo, cô giáo và đặc biệt là toàn thể thành viên semina toán ĐHKHTN và các câu lạc bộ toán Hà Nội đã tích cực tham gia để có được cuốn kỷ yếu với nội dung thiết thực và rất phong phú này.

Vì thời gian chuẩn bị rất gấp gáp, nên các khâu hiệu đính và chế bản cuốn kỷ yếu chưa được đầy đủ, chi tiết, chắc chắn còn chứa nhiều khiếm khuyết. Rất mong được sự cảm thông chia sẻ của quý đại biểu. Những ý kiến đóng góp liên quan đến cuốn kỷ yếu này xin gửi về địa chỉ: Hiộ Toán học Hà Nội, phòng 303 nhà T1, 334 Nguyễn Trãi, Hà Nội.

Xin trân trọng cảm ơn.

TM Ban Tổ Chức

Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Hữu Độ

Một cách tiếp cận định nghĩa hàm mũ

Nguyễn Thủy Thanh, Trường ĐHKHTN Hà Nội

Mọi phân số thường mà mẫu số là lũy thừa không âm của 10 được gọi là phân số thập phân. Chẳng hạn: $\frac{3}{10}$, $\frac{32}{100}$, $\frac{123}{100}$ là những phân số thập phân. Thông thường người ta viết các phân số thập phân dưới dạng không có mẫu số, tức là $\frac{3}{10} = 0,3$; $\frac{32}{100} = 0,32$, $\frac{1234}{1000} = 1,234$.

Ta lưu ý đến tiêu chuẩn:

Để số hữu tỉ dương biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{p}{q}$ khai triển được thành phân số thập phân hữu hạn điều kiện cần và đủ là mẫu số p của nó không có các ước nguyên tố ngoài 2 và 5.

Ngược lại, phân số thập phân hữu hạn bất kì:

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n$$

là số hữu tỉ

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n = \frac{\alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n}{10^n},$$

trong đó từ số $\overline{\alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n}$ là số nguyên gồm α_n đơn vị, α_{n-1}, chục, α_{n-2} trăm...

Từ tiêu chuẩn trên suy rằng các phân số còn lại chỉ có thể có khai triển thập phân vô hạn $\overline{\alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n}$ tức là phân số thập phân mà đối với số tự nhiên k bất kì tìm được số tự nhiên $l > k$ sao cho $\alpha_l > 0$.

Nếu phân số thập phân vô hạn mà kể từ một chữ số thập phân nào đó của nó một nhóm các chữ số lặp lại vô hạn lần theo một thứ tự nhất định được gọi là phân số thập phân vô hạn tuần hoàn và nhóm các số đó được gọi là chu kì. Chẳng hạn ta có

$$1, 21, 353535... = 1, 21(35).$$

Quy tắc I. Một phân số thập phân vô hạn tuần hoàn thuần bằng một phân số thường mà tử số là chu kì và mẫu số gồm toàn chữ số 9 với số lượng bằng số chữ số của chu kì.

Quy tắc II. Một phân số thập phân vô hạn tuần hoàn tập bằng một phân số thường mà tử số của nó có được bằng cách lấy số được biểu diễn bởi các chữ số thập phân đứng trước chu kì thứ hai trừ đi số được biểu diễn bởi các chữ số thập phân đứng trước chu kì thứ nhất, còn mẫu số là số được viết bởi số chữ số 9 bằng số chữ số của chu kì và số chữ số 0 tiếp theo đó bằng số chữ số thập phân đứng sau dấu thập phân nhưng trước chu kì thứ nhất.

Bên cạnh các phân số thập phân tuần hoàn còn tồn tại các phân số thập phân vô hạn không tuần hoàn. Chẳng hạn số: 0, 101001000,..., tức là sau dấu thập phân ta viết liên tiếp các số 10, 100, 1000, ..., hay số 0,123456... được thành lập theo quy tắc là sau dấu thập phân ta viết liên tiếp mọi số tự nhiên. Các phân số thập phân vô hạn khác nhau được coi là những số khác nhau nhưng có một ngoại lệ: một phân số thập phân hữu hạn dương có thể viết duwosi bốn dạng hữu hạn dương có thể viết dưới bốn dạng sau:

$$\begin{aligned}&\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_k\\=&\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_k00...\\=&\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...(\alpha_k-1)99...\\=&\alpha_0,apha_1...(\alpha_k-1)9\end{aligned}$$

Bốn cách viết này xác định cùng một số. Chẳng hạn 2,5 = 2,5000... và 2,5 = 2,499... là xác định cùng một số.

Ngoài mọi tính chất mà tập hợp các số hữu tỉ có, tập hợp số thực $\mathbb{R}$ còn có một tính chất rất đặc biệt phân biệt nó với tập hợp $\mathbb{Q}$- đó là tính chất liên tục. Tính chất đó được diễn đạt dưới dạng hình học bởi tiên đề Cantor:

Giả sử cho dãy các đoạn thẳng

$$\sigma_n=\{x\in\mathbb{R}:a_n\le x\le b_n,\ n=1,2,...\}$$

lồng nhau và thắt lại, tức là

i) $\sigma_n\subset\sigma_{n+1},\ n=1,2,\ldots$

ii) Độ dài $d[a_n,b_n]=b_n-a_n\to 0\ (n\to\infty)$.

Khi đó tồn tại duy nhất một điểm γ (số) đồng thời thuộc mọi đoạn thẳng σ_n.

Từ tiên đề Cantor cũng trực tiếp rút ra rằng số γ thuộc mọi đoạn thẳng cũng là giới hạn chung cho dãy các đầu mút bên trái và dãy các đầu mút bên phải. Ta hãy hình dung rằng nếu đường thẳng có một chỗ khuyết thì ta có thể tìm được một dãy những đoạn lồng nhau thắt lại ở chỗ khuyết đó. Và như vậy không có điểm nào chung cho mọi đoạn đó cả (hình vẽ), trái với Tiên đề Cantor.

Xét xấp xỉ thập phân số thực bởi các số hữu tỉ. Cho số dương tùy ý

$$a=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2... \tag{1}$$

dưới dạng số thập phân. Số

$$a^(n)=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\ (n=0,1,2...) \tag{1*}$$

được gọi là xấp xỉ thập phân thiếu thứ n của số a. Đó là một số hữu tỉ

Tiếp theo xét lũy thừa với số mũ vô tỉ.

Trong báo cáo này ta xem xét lũy thừa với số mũ tự nhiên, âm, không và hữu tỉ cùng các tính chất của chúng là đã biết. Để định nghĩa hàm mũ ta chỉ còn xét lũy thừa với số mũ vô tỉ.

Xây dựng ý niệm đi đến định nghĩa lũy thừa số mũ vô tỉ và chứng minh căn cứ của định nghĩa.

NGUYÊN LÝ CỰC HẠN VÀ MỘT SỐ ÁP DỤNG

Trần Nam Dũng, Trường Đại học KHTN TP HCM

Bài viết này được phát triển từ bài viết "Các phương pháp và kỹ thuật chứng minh" mà chúng tôi đã trình bày tại Hội nghị "Các chuyên đề Olympic Toán chọn lọc" tại Ba Vì, Hà Nội, tháng 5-2010 và giảng dạy cho đội tuyển Olympic Việt Nam dự IMO 2010. Trong bài này, chúng tôi tập trung chi tiết hơn vào các ứng dụng của Nguyên lý cực hạn trong giải toán.
Một tập hợp hữu hạn các số thực luôn có phần tử lớn nhất và phần tử nhỏ nhất. Một tập con bất kỳ của N luôn có phần tử nhỏ nhất. Nguyên lý đơn giản này trong nhiều trường hợp rất có ích cho việc chứng minh. Hãy xét trường hợp biên! Đó là khẩu quyết của nguyên lý này.

Xét phương pháp phản ví dụ nhỏ nhất.

Trong việc chứng minh một số tính chất bằng phương pháp phản chứng, ta có thể có thêm một số thông tin bổ sung quan trọng nếu sử dụng *phản ví dụ nhỏ nhất*. Ý tưởng là để chứng minh một tính chất A cho một cấu hình P, ta xét một đặc trưng $f(P)$ của P là một hàm có giá trị nguyên dương. Bây giờ giả sử tồn tại một cấu hình P không có tính chất A, khi đó sẽ tồn tại một cấu hình P_0 không có tính chất A với $f(P_0)$ nhỏ nhất. Ta sẽ tìm cách suy ra điều mâu thuẫn. Lúc này, ngoài việc chúng ta có cấu hình P_0 không có tính chất A, ta còn có mọi cấu hình P với $f(P) < f(P_0)$ đều có tính chất A.

Nguyên lý cực hạn có thể được ứng dụng để chứng minh một quá trình là dừng (trong các bài toán liên quan đến biến đổi trạng thái) trong bài toán về đồ thị, hay trong các tình huống tổ hợp đa dạng khác. Các đối tượng thường được đem ra để xét cực hạn thường là: đoạn thẳng ngắn nhất, tam giác có diện tích lớn nhất, góc lớn nhất, đỉnh có bậc lớn nhất, chu trình có độ dài ngắn nhất ...

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu, *Các chuyên đề Olympic Toán chọn lọc*,Ba Vì , 5-2010 .

[2] Đoàn Quỳnh chủ biên, *Tài liệu giáo khoa chuyên toán - Đại số 10*, NXB GD, 2010.

[3] http://fermatslasttheorem.blogspot.com/2005/05/fermats-last-theorem-n-4.html

[4] vi.wikipedia.org/wiki/Định lý Sylvester-Gallai

[5] www.mathscope.org

[6] www.problems.ru

Một số lớp phương trình hàm dạng Pexider và áp dụng

Trịnh Đào Chiến, Trường Cao Đẳng Sư Phạm Gia Lai
Lê Tiến Dũng, Trường THPT Pleiku, Gia Lai

Phương trình hàm Pexider là phương trình hàm tổng quát trực tiếp của phương trình hàm Cauchy quen thuộc. Bài viết này đề cập đến một số dạng tổng quát của Phương trình hàm Pexider và vài áp dụng của nó trong chương trình Toán phổ thông.

Phương trình hàm Pexider cơ bản gồm bốn dạng dưới đây (lời giải có thể xem trong [1] hoặc [2])

Bài toán 1.1. *Tìm tất cả các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên R thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y) = g(x) + h(y), \quad \forall x, y \in R. \tag{1}$$

Bài toán 1.2. *Tìm tất cả các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên R thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y) = g(x)\, h(y), \quad \forall x, y \in R. \tag{2}$$

Bài toán 1.3. *Tìm tất cả các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên R^+ thỏa mãn điều kiện*

$$f(xy) = g(x) + h(y), \quad \forall x, y \in R^+. \tag{3}$$

Bài toán 1.4. *Tìm tất cả các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên R^+ thỏa mãn điều kiện*

$$f(xy) = g(x)\, h(y), \quad \forall x, y \in R^+. \tag{4}$$

Xét một số dạng tổng quát của phương trình hàm Pexider. Dưới đây là một số dạng tổng quát của phương trình (1) gần gũi với chương trình của hệ phổ thông chuyên Toán.

Bài toán 2.1. *Tìm tất cả các hàm số f, f_i $(i = 1, 2, ..., n)$ xác định và liên tục trên R thỏa mãn điều kiện*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i), \quad \forall x, x_i \in R. \tag{5}$$

Bài toán sau đây là một dạng tổng quát khá cơ bản, mà phương pháp quy nạp không thể áp dụng trong lời giải. Một số phần chứng minh có sử dụng một số kiến thức cơ bản, không quá khó, của Đại số tuyến tính và Phương trình vi phân, thuộc chương trình cơ sở của Toán cao cấp.

Bài toán 2.2. *Tìm tất cả các hàm số f, f_i, g_i $(i = 1, 2, ..., n)$ xác định và tồn tại đạo hàm (theo mỗi biến số độc lập x, y) trên R thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, g_k(y), \quad \forall x, y \in R, \quad n \geq 2. \tag{6}$$

Phương trình hàm Pexider tổng quát có nhiều áp dụng trong việc nghiên cứu một số vấn đề liên quan của Toán phổ thông. Đó là một số áp dụng liên quan đến các phép chuyển đổi bảo toàn yếu tố góc của một tam giác.

Bài toán 3.1. *Tìm tất cả các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên R thỏa mãn điều kiện sau: "Nếu $A, B, C \in R$, $A + B + C = \pi$, thì $A_1 + B_1 + C_1 = \pi$", trong đó $A_1 = f(A)$, $B_1 = f(B)$, $C_1 = f(C)$.*

Ta thấy rằng, với ba góc của một tam giác cho trước, có thể tạo ra được ba góc của một tam giác mới và do đó có thể suy ra được nhiều hệ thức lượng giác liên quan đến các góc của tam giác đó. Hơn nữa, bằng cách phối hợp những phương pháp khác nhau, ta còn có thể tạo ra được nhiều đẳng thức và bất đẳng thức lượng giác khác, vô cùng phong phú. Sau đây là một vài ví dụ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] J. Aczél (1966), *Lectures on Functional equations and their applications*, Chapter 3, pp. 141-145, Chapter 4, pp. 197-199.

[2] Nguyễn Văn Mậu, *Một số lớp phương trình hàm đa ẩn hàm dạng cơ bản*, Kỷ yếu Hội thảo khoa học "Các chuyên đề chuyên Toán bồi dưỡng học sinh giỏi Trung học phổ thông", Hà Nội, 2011.

[3] D.S. Mitrinovic, J.E. Pecaric and V. Volenec (1989), *Recent advances in geometric inequalities*, Mathematics and its applications (East European series), Published by Kluwer Academic Publishers, the Netherlands, Chapter V, pp. 64-69.

Phương pháp Graph

Đặng Huy Ruận, Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên Hà Nội

Rất nhiều bài toán không mẫu mực có thể giải bằng cách thông qua đồ thị mà suy ra đáp án. Phương pháp này được gọi là phương pháp graph (hay phương pháp đồ thị)

Để giải bài toán bằng phương pháp graph cần thực hiện lần lượt hai bước sau:

1. *Xây dựng đồ thị mô tả quan hệ*
   Lấy các điểm trên mặt phẳng hoặc trong không gian tương ứng với các đối tượng đã cho trong bài toán. Dùng ngay ký hiệu hoặc tên các đối tượng để ghi trên các điểm tương ứng.

   Cặp điểm x, y tùy ý được nối với nhau bằng một cạnh với "đặc điểm t" khi và chỉ khi các đối tượng x, y có quan hệ (t) với nhau. Khi đó bài toán đã cho được chuyển về bài toán D trên đồ thị.

2. Dựa vào các kết quả của lý thuyết đồ thị hoặc lý luận trực tiếp mà suy ra đáp án của bài toán D bằng ngôn ngữ đồ thị.

3. Căn cứ vào việc đặt tương ứng khi xây dựng đỉnh và cạnh của đồ thị, mà "dịch" đáp án từ ngôn ngữ đồ thị sang ngôn ngữ thông thường, tức là đáp án của bài toán T.

Để quá trình giải toán được đơn giản người ta thường thực hiện gộp bước 2 và bước 3.

Vận dụng tính chất của chu trình Hamilton

1. Cuộc họp có ít nhất ba người. Mỗi đại biểu đến dự họp đều bắt tay ít nhất một nửa số đại biểu có mặt. Chứng minh rằng luôn luôn có thể xếp tất cả các đại biểu ngồi xung quanh một bàn tròn, để mỗi người đều ngồi giữa hai người, mà đại biểu này đã bắt tay.

2. Tập M gồm ít nhất 3 số nguyên không âm. Mỗi số đều có ước chung với ít nhất một nửa số số thuộc tập M. Khi đó có thể ghi tất cả các số thuộc tập M lên một đường tròn, để mỗi số đều đứng giữa hai số, mà nó có ước chung.

Tài liệu tham khảo

[1] **Claude Berge** Théorie des Graphes et ses applicatious. Dunod, Paris 1967.

[2] **Vũ Đình Hòa** Định lý và vấn đề về đồ thị hữu hạn. Nhà xuất bản Giáo dục Hà Nội 2001.

[3] **Đặng Huy Ruận**, Lý thuyết đồ thị và ứng dụng. Nhà xuất bản Khoa học kỹ thuật 2000

[4] **Đặng Huy Ruận**, Bẩy phương pháp gởai các bài toán lôgich. Nhà xuất bản khoa học kỹ thuật 2002.

Một số tính chất của hàm lồi, lõm bậc cao và áp dụng

Hà Thị Mai Dung, THPT Amsterdam - Hà Nội

0.1 Mở đầu

Trong nghiên cứu các bài toán hay và khó, các bài toán thi học sinh giỏi, ta thấy việc khảo sát các hàm số khả vi có một vai trò rất lớn. Đặc biệt, việc nghiên cứu tính lồi (lõm) của các hàm số khả vi bậc 2 cho ta rất nhiều kết quả thú vị, đưa ra được những tính chất của hàm số, mà từ đó, dẫn đến những phát hiện mới trong cách giải các bài toán ứng dụng, nhất là trong các bài toán cực trị. Không những thế, đối với hàm số khả vi vô hạn, việc nghiên cứu hàm số lồi (lõm) có bậc tùy ý còn góp phần xây dựng đầy đủ hơn nữa hệ thống các hàm lồi (lõm) bậc cao.

Định nghĩa 1. [xem [1]] Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm lồi (lồi dưới) trên tập $[a;b)\subset\mathbb{R}$ nếu với mọi $x_1,x_2\in[a,b)$ và với mọi cặp số dương α,β có tổng $\alpha+\beta=1$, ta đều có

$$f(\alpha x_1+\beta x_2)\le \alpha f(x_1)+\beta f(x_2) \tag{1}$$

Nếu dấu đẳng thức trong (1.1) xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2$ thì ta nói hàm số $f(x)$ là hàm lồi thực sự (chặt) trên $[a,b)$.

Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm lõm (lồi trên) trên tập $[a,b)\subset\mathbb{R}$ nếu với mọi $x_1,x_2\in[a,b)$ và với mọi cặp số dương α,β có tổng $\alpha+\beta=1$, ta đều có

$$f(\alpha x_1+\beta x_2)\ge \alpha f(x_1)+\beta f(x_2) \tag{2}$$

Nếu dấu đẳng thức trong (1.2) xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2$ thì ta nói hàm số $f(x)$ là hàm lõm thực sự (chặt) trên $[a,b)$.

Tương tự ta cũng có định nghĩa về hàm lồi (lõm) trên các tập $(a,b),(a,b]$ và $[a,b]$. Ta sử dụng kí hiệu $I(a,b)$ để nhằm chỉ một trong bốn tập hợp $(a,b),(a,b],[a,b)$ và $[a,b]$.

Xét biểu diễn hàm lồi.

Định lý 1 (xem [1])**.** *Hàm $f(x)$ lồi trên $I(a,b)$ khi và chỉ khi tồn tại hàm $g(x)$ đơn điệu tăng trong $I(a,b)$ và số $c\in(a,b)$ sao cho*

$$f(x)=f(c)+\int\limits_c^x g(t)dt.$$

Tương tự, ta cũng có biểu diễn đối với lớp hàm lồi nhiều biến.

Xét hàm số thực nhiều biến $F(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Giả sử, ứng với mọi bộ số $(z_1,z_2,\dots,z_n)$ mà

$$z_1\geqslant z_2\geqslant\dots\geqslant z_n$$

ta đều có

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n)\geqslant F(z_1,z_2,\dots,z_n)+\sum_{i=1}^n(x_i-z_i)\frac{\partial F}{\partial z_i}.$$

Hàm số thực nhiều biến thỏa mãn điều kiện trên được gọi là hàm lồi nhiều biến. Khi đó, hiển nhiên

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max_{R(z)} \left[F(z_1, z_2, \ldots, z_n) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i) \frac{\partial F}{\partial z_i} \right].$$

Tiếp theo, ta xét lớp các hàm lồi bậc cao và một số tính chất cơ bản của chúng. Trước hết, ta nhắc đến các tính chất đặc trưng và cũng là định nghĩa của hàm đồng biến và hàm lồi quen biết.

Tính chất 1. [[**2**] Dạng nội suy] Hàm số $f(x)$ đồng biến trên tập $I(a, b)$ khi và chỉ khi với mọi cặp số $x_1, x_2 \in I(a, b)$, ta đều có

$$\frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1} \geqslant 0. \tag{3}$$

Tính chất 2. [[**2**] Dạng nội suy] Hàm số $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ khi và chỉ khi với mọi bộ ba số phân biệt $x_0, x_1, x_2 \in I(a, b)$, ta đều có

$$\frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_0)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \geqslant 0. \tag{4}$$

Định nghĩa 2. [[**2**]] Hàm số $f(x)$ được gọi là $n-$lồi trên $I(a, b)$ khi ứng với mọi bộ $n + 1$ số phân biệt trong $I(a, b)$, ta đều có

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] := \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\omega'(x_j)} \geqslant 0,$$

trong đó

$$\omega(x) := \prod_{k=0}^{n} (x - x_k).$$

Tương tự ta có cũng có định nghĩa hàm lõm bậc cao.

Định nghĩa 3. [[**2**]] Hàm số $f(x)$ được gọi là $n-$lõm trên $I(a, b)$ khi ứng với mọi bộ $n + 1$ số phân biệt trong $I(a, b)$, ta đều có

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] := \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\omega'(x_j)} \leqslant 0,$$

trong đó

$$\omega(x) := \prod_{k=0}^{n} (x - x_k).$$

Sử dụng khai triển Taylor, ta dễ dàng chứng minh bất đẳng thức sau đối với lớp hàm lồi bậc bốn. Các kết luận này cũng đúng đối với lớp hàm lồi bậc chẵn tùy ý.

Định lý 2 ([**2**]). *Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm bậc bốn không âm trong (a,b), tức là*

$$f^{(4)}(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in (a,b).$$

Khi đó ta luôn có bất đẳng thức sau:

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!},$$

$$\forall x, x_0 \in (a,b).$$

Tương tự, nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm bậc bốn luôn không dương trong (a,b), tức là

$$f^{(4)}(x) \leqslant 0, \quad \forall x \in (a,b).$$

thì ta luôn có bất đẳng thức sau:

$$f(x) \leqslant f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!},$$

$$\forall x, x_0 \in (a,b).$$

Hệ quả 1 ([**2**]). *Với mọi đa thức bậc bốn*

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

ta đều có

$$P(x) \geqslant P(x_0) + (4x_0^3 + 3ax_0^2 + 2bx_0 + c)(x - x_0)$$
$$+ \frac{(12x_0^2 + 6ax_0 + 2b)(x - x_0^2)}{2!} + \frac{(24x_0 + 6a)(x - x_0)^3}{3!}, \quad \forall x, x_0 \in \mathbb{R}.$$

Cũng tương tự như phép biểu diễn hàm lồi (lõm) thông thường.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu, 2005 *Bất đẳng thức, Định lý và áp dụng,* NXB Giáo Dục.

[2] Nguyễn Văn Mậu, 2007, *Nội suy và áp dụng*, NXB Giáo Dục.

[3] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), Trần Nam Dũng, Nguyễn Vũ Lương, Nguyễn Minh Tuấn, 2008, ***Chuyên đề chọn lọc - Lượng giác và áp dụng***, NXB Giáo dục.

[4] Nguyễn Thị Thu Hằng, *Một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức lượng giác dạng không đối xứng*, Kỷ yếu HNKH "Giải tích hiện đại trong nghiên cứu và ứng dụng", Hải Dương 14-15/6/2008, 138 - 141.

Một số dạng toán liên quan đến dãy số có quy luật ở cấp THCS

Nguyễn Thị Minh Châu, Trường THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy, Hà Nội

Tóm tắt nội dung

Trong chương trình số học lớp 6, ngoài các bài tập tính toán đơn giản dựa trên các quy tắc, tính chất cơ bản của các phép tính mà các học sinh được rèn luyện thông qua các bài tập trong SGK và SBT, còn có một dạng bài tập tính toán trên các dãy số, dãy phân số có quy luật mà dựa vào những quy luật tính toán đó, học sinh có thể giải toán một cách sáng tạo, lôgic, đem lại nhiều hứng thú say mê trong học học tập, phát triển tư duy, trí tuệ, phát huy năng lực sáng tạo, năng khiếu toán học của học sinh.

Trong chuyên đề này, đề cập một số dạng toán tính toán trên các dãy số, dãy phân số có quy luật và một vài trải nghiệm định hướng tư duy hoặc phát triển tư duy học sinh nhằm bồi dưỡng năng lực học toán cho các em học sinh có khả năng học giỏi toán.

Nội dung kiến thức:
Với dạng bài tập về dãy các số, dãy các phân số có quy luật, ta thường dùng các phương pháp sau:

- Phương pháp phân tích số hạng tổng quát rồi khử liên tiếp để tính tổng các dãy số, dãy phân số có quy luật, giải toán tìm x, và các bài toán có liên quan.

- Phương pháp làm trội để chứng minh bất đẳng thức và các bài toán liên quan. Với phương pháp này ta thường dùng tính chất của bất đẳng thức để đưa một vế của bất đẳng thức về dạng tính được tổng hữu hạn hoặc tích hữu hạn.

Để tính tổng

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Ta biểu diễn $a_i\left(i = \overline{i,n}\right)$, , qua hiệu hai số hạng liên tiếp của một dãy số khác. Chẳng hạn

$$a_1 = b_1 - b_2; a_2 = b_2 - b_3; \ldots; a_n = b_{n-1} - b_n$$

$$\Rightarrow S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = b_1 - b_n$$

Để tính tích hữu hạn $P_n = a_1.a_2.a_3 \ldots a_n$ ta biến đổi các a_k về thương của hai số hạng liên tiếp nhau :

$$a_1 = \frac{b_1}{b_2};\ \ a_2 = \frac{b_2}{b_3}; \ldots; a_n = \frac{b_{n-1}}{b_n}$$

$$\Rightarrow P_n = a_1.a_2, a_3. \ldots a_n = \frac{b_1}{b_2}.\frac{b_2}{b_3} \ldots \frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{b_1}{b_n}$$

Tiếp theo, xét bài toán tìm số các số hạng của một dãy số có quy luật

Bài toán 1. Tìm n sao cho tổng của $2n$ số hạng

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1).(2n+1)} + \frac{1}{2n(2n+2)} = \frac{14651}{19800}.$$

Bài toán 2. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn

$$2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + 5.2^5 + \cdots + n.2^n = 2^{n+10}$$

Bài toán 3. Chứng tỏ rằng tổng của 100 số hạng đầu tiên của dãy sau nhỏ hơn $\frac{1}{4}$.

$$\frac{1}{5}; \frac{1}{45}; \frac{1}{117}; \frac{1}{221}; \frac{1}{357}; \ldots$$

Bài toán 4. Chứng minh rằng

$$A = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \cdots + \frac{2499}{2500} > 48.$$

Bài toán 5. Chứng minh rằng

a) $n! > 2^{n-1}\ \ (n \geq 3)$

b) $1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n-1}}{1 - b}\ \ (b \neq 1)$

c) $1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!} < 3.$

Bài toán 6. Cho các số dương $a_1; a_2; \ldots; a_n$. Chứng minh rằng

$$C_n^2\Big(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_1a_3} + \frac{1}{a_1a_4} + \cdots + \frac{1}{a_1a_n} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_2a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}a_n}\Big) \geq$$

$$4\Big(\frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_1 + a_3} + \frac{1}{a_1 + a_4} + \cdots + \frac{1}{a_1 + a_n} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \frac{1}{a_2 + a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} + a_n}\Big)$$

Tìm điều kiện của $a_k (k = 1; 2; 3; 4; \ldots; n)$ để có đẳng thức.

Bài toán 7. Cho các số tự nhiên $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Chứng minh rằng tổng A:

$$A = \frac{\sqrt{a_2 - a_1}}{a_2} + \frac{\sqrt{a_3 - a_2}}{a_3} + \cdots + \frac{\sqrt{a_n - a_{n-1}}}{a_n} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

Có rất nhiều bài tập khác về dãy số và dãy các phân số có quy luật. Các bạn có thể tham khảo thêm trong báo Toán học tuổi trẻ, báo Toán tuổi thơ, các sách Chuyên đề toán tham khảo.

Bài học rút ra

Từ những dạng toán đã nêu trên giúp được cho học sinh các kiến thức và kỹ năng :

- Rèn kỹ năng tính toán
- Rèn kỹ năng phân tích và tổng hợp kiến thức toán học
- Rèn khả năng tư duy logic, sáng tạo, phát huy trí lực cho học sinh
- Rèn khả năng suy luận từ đơn giản đến phức tạp, từ cụ thể đến việc tổng quát hóa các bài toán giúp học sinh nhìn nhận các vấn đề một cách thấu đáo, toàn diện.

Định lý Lagrange và các phương trình hàm liên quan

Hoàng Đạt Hạ, Trường THPT Trần Đại Nghĩa, Đăk Lăk

Phương trình hàm là đề tài đang ngày càng được nhiều người quan tâm nghiên cứu. Bài toán phương trình hàm thường xuyên xuất hiện trong các kỳ thi học sinh giỏi, thi Olympic quốc gia, khu vực và quốc tế. Các dạng bài toán về phương trình hàm rất đa dạng và phong phú. Tính chất đặc trưng của một số hàm sẽ sinh ra lớp phương trình hàm tương ứng. Báo cáo về định lý Lagrange và các phương trình hàm liên quan nhằm trình bày tổng quan một số dạng phương trình hàm sinh ra từ biểu thức của định lý về giá trị trung bình Lagrange cùng một số ứng dụng trong việc chứng minh bất đẳng thức và tạo ra các bài toán bất đẳng thức.

0.1 Các phương trình hàm liên quan đến định lý Lagrange

Chúng ta đều quen biết định lý giá trị trung bình của phép tính vi phân.

Mệnh đề 1. Nếu hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ đạt giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất tại một điểm c trong khoảng (a, b) thì $f'(c) = 0$.

Mệnh đề 2. Hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ luôn đạt được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên bất kì một đoạn đóng và bị chặn $[a, b]$.

Định lý 1 (Định lý Rolle)**.** *Nếu f liên tục trên $[x_1, x_2]$, khả vi trên (x_1, x_2) và $f(x_1) = f(x_2)$, thế thì tồn tại một điểm $\eta \in (x_1, x_2)$ sao cho $f'(\eta) = 0$.*

Định lý 2 (Định lý Lagrange)**.** Với mọi giá trị thực, hàm f khả vi trên một khoảng I và với tất cả các cặp x_1, x_2 trong I, tồn tại một điểm η phụ thuộc x_1, x_2 sao cho

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\eta(x_1, x_2)). \tag{1}$$

Định lý Lagrange cho phép chúng ta ước lượng tỉ số

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

do đó nó còn được gọi là Định lý về giá trị trung bình (Mean Value Theorem).

Định nghĩa 1. Cho các số thực phân biệt $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tỷ sai phân của hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được định nghĩa

$$f[x_1] = f(x_1)$$

và

$$f[x_1, x_2, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}] - f[x_2, x_3, \ldots, x_n]}{x_1 - x_n}, \ \forall n \geq 2.$$

Từ định nghĩa trên, chúng ta có

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

và

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{(x_3 - x_2)f(x_1) + (x_1 - x_3)f(x_2) + (x_2 - x_1)f(x_3)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)}.$$

Theo Định nghĩa 1, phương trình (1) trở thành

$$f[x_1, x_2] = f'(\eta(x_1, x_2)). \tag{2}$$

Đặt $f'(\eta(x_1, x_2)) = h(x_1, x_2)$, chúng ta có phương trình hàm

$$f[x_1, x_2] = h(x_1, x_2).$$

Định lý 3. *Các hàm $f, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm*

$$f\,[x, y] = h(x + y), \;\; x \neq y \tag{3}$$

nếu và chỉ nếu

$$f(x) = ax^2 + bx + c \;\text{ và }\; h(x) = ax + b,$$

trong đó a, b, c là các hằng số thực tùy ý.

Hệ quả dưới đây được suy trực tiếp từ Định lý 3

Hệ quả 1. Hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm

$$f(x) - f(y) = (x - y)f'\left(\frac{x + y}{2}\right), \;\; x \neq y$$

nếu và chỉ nếu

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

với a, b, c là các hằng số tùy ý.

Định lý 4. *Nếu đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ là nghiệm của phương trình hàm*

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h) \tag{4}$$

với mọi số thực x $\theta \in (0, 1)$ và $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ thì $\theta = \frac{1}{2}$.
Đảo lại, nếu một hàm f thỏa mãn phương trình

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \frac{1}{2}h)$$

thì nghiệm là một đa thức bậc hai.

Định lý 5. Giả sử s, t là hai tham số thực khác không. Hàm $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình

$$\frac{f(x) - g(y)}{x - y} = h(sx + ty), \tag{5}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$ nếu và chỉ nếu

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{nếu} \quad s = 0 = t \\ ax + b & \text{nếu} \quad s = 0, t \neq 0 \\ ax + b & \text{nếu} \quad s \neq 0, t = 0 \\ \alpha t x^2 + ax + b & \text{nếu} \quad s = t \neq 0 \\ \frac{A(tx)}{t} + b & \text{nếu} \quad s = -t \neq 0 \\ \beta x + b & \text{nếu} \quad s^2 \neq t^2 \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} ay + b & \text{nếu} \quad s = 0 = t \\ ay + b & \text{nếu} \quad s = 0, t \neq 0 \\ ay + b & \text{nếu} \quad s \neq 0, t = 0 \\ \alpha t y^2 + ay + b & \text{nếu} \quad s = t \neq 0 \\ \frac{A(ty)}{t} + b & \text{nếu} \quad s = -t \neq 0 \\ \beta y + b & \text{nếu} \quad s^2 \neq t^2 \end{cases}$$

$$h(y) = \begin{cases} \text{tùy ý với } h(0) = a & \text{nếu} \quad s = 0 = t \\ a & \text{nếu} \quad s = 0, t \neq 0 \\ a & \text{nếu} \quad s \neq 0, t = 0 \\ \alpha y + a & \text{nếu} \quad s = t \neq 0 \\ \frac{A(y)}{y} + \frac{(c-b)t}{y} & \text{nếu} \quad s = -t \neq 0, y \neq 0 \\ \beta & \text{nếu} \quad s^2 \neq t^2 \end{cases}$$

với $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm cộng tính và a, b, c, α, β là các hằng số thực tùy ý.

Hệ quả 2. Các hàm $f, \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \phi(sx + ty)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ và $x \neq y$ nếu và chỉ nếu

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{nếu} \quad s = 0 = t \\ ax + b & \text{nếu} \quad s = 0, t \neq 0 \\ ax + b & \text{nếu} \quad s \neq 0, t = 0 \\ \alpha t x^2 + ax + b & \text{nếu} \quad s = t \neq 0 \\ \frac{A(tx)}{t} + b, & \text{nếu} \quad s = -t \neq 0 \\ \beta x + b & \text{nếu} \quad s^2 \neq t^2 \end{cases}$$

$$\phi(y) = \begin{cases} \text{tùy ý} & \text{nếu} \quad s = 0 = t \\ a & \text{nếu} \quad s = 0, t \neq 0 \\ a & \text{nếu} \quad s \neq 0, t = 0 \\ \alpha y + a & \text{nếu} \quad s = t \neq 0 \\ \frac{A(y)}{y} + \frac{(c-b)t}{y}, & \text{nếu} \quad s = -t \neq 0, y \neq 0 \\ \beta & \text{nếu} \quad s^2 \neq t^2 \end{cases}$$

ở đây $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm cộng tính và a, b, c, α, β là các hằng số thực tùy ý.

Định lý 6. Nếu f là hàm khả vi thỏa mãn phương trình hàm

$$f[x, y, z] = h(x + y + z) \tag{6}$$

thì $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, trong đó h là hàm số liên tục và a, b, c, d là các hằng số thực tùy ý.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu, 1997, *Phương trình hàm,* NXB Giáo Dục.

[2] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), 2010,*Các chuyên đề chuyên toán bồi dưỡng học sinh giỏi trung học phổ thông,* Kỉ yếu hội nghị khoa học.

[3] Nguyễn Văn Mậu, Đặng Huy Ruận, Nguyễn Thủy Thanh, 2002, *Phép tính vi phân và tích phân hàm một biến,* NXB ĐHQGHN.

[4] Nguyễn Văn Mậu, 2006, *Bất đẳng thức định lý và áp dụng,* NXB Giáo Dục.

[5] P.K.Sahoo, T.Riedel, *Mean Value theorems and Functional Equations,* World Scientific, River Edge, World Scientific 1998.

Về một số bài toán về phương trình hàm giải bằng phương pháp sai phân

Lê Hồ Quý, Trường THPT Duy Tân, Kon Tum
Phạm Xuân Thành, Trường THPT Lê Lợi, Kon Tum

Phương pháp giải các bài toán về dãy số (hàm số xác định trên $\mathbb{N}$), phương trình hàm rất đa dạng như chính yêu cầu của chúng. Trong bài viết này, chúng ta sẽ dùng phương pháp sai phân để giải một số bài toán về dãy số, phương trình hàm.

Công thức truy hồi là một biểu thức tuyến tính

Ta xét trường hợp hệ thức truy hồi đã cho là hệ thức tuyến tính

$$a_0x_{n+k} + a_1x_{n+k-1} + \cdots + a_kx_n = f(n)$$

với $a_0, a_1, \ldots, a_k(a_0 \neq 0, a_k \neq 0)$ là các hằng số thì bài toán có thể được xem như một phương trình sai phân tuyến tính.

Ví dụ 1 (Anh 1980)**.** Tìm tất cả các dãy số (a_n) thỏa mãn $a_{n+1} = 2^n - 3a_n$ và (a_n) là một dãy số tăng.

Lời giải. Xét phương trình sai phân

$$a_{n+1} = 2^n - 3a_n \tag{1}$$

Đặt $a_n = u_n.2^n$. Thay vào (1), ta được

$$u_{n+1}.2^{n+1} = -3.u_n.2^n + 2^n \Leftrightarrow u_{n+1} = -\frac{3}{2}u_n + \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Phương trình này có nghiệm tổng quát là

$$u_n = C.\Big(-\frac{3}{2}\Big)^n + \frac{1}{5} \Leftrightarrow a_n = C.(-3)^n + \frac{1}{5}.2^n.$$

Vì dãy (a_n) tăng nên $a_{n+1} > a_n$. Do đó

$$-3C.(-3)^n + \frac{2}{5}.2^n > C.(-3)^n + \frac{1}{5}.2^n,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow 4C.(-3)^n < \frac{1}{5}.2^n,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Với $C > 0$ thì (3) tương đương $\dfrac{1}{20C} > \Big(-\dfrac{3}{2}\Big)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ta không chọn được C, vì khi n chẵn thì $\Big(-\dfrac{3}{2}\Big)^n \to +\infty$.

Với $C < 0$ thì (3) tương đương $\dfrac{1}{20C} < \Big(-\dfrac{3}{2}\Big)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ta cũng không chọn được C, vì khi n lẻ thì $\Big(-\dfrac{3}{2}\Big)^n \to -\infty$.

Với $C = 0$ thì $a_n = \dfrac{1}{5}.2^n$ là dãy số tăng.
Vậy dãy số cần tìm là $a_n = \dfrac{1}{5}.2^n$.

Tiếp theo, xét công thức truy hồi là biểu thức tuyến tính với hệ số biến thiên chủ yếu bằng phương pháp đặt dãy số phụ, đưa về phương trình sai phân tuyến tính và xét bài toán tính tổng các số hạng của dãy số.
Xét một số bài toán nâng cao.

Tài liệu tham khảo

1 Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Thủy Thanh, *Giới hạn dãy số và hàm số,* NXB Giáo Dục, 2002.

2 Nguyễn Văn Mậu, *Một số bài toán chọn lọc về dãy số,* NXB Giáo Dục, 2003.

3 Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), *Chuyên đề chọn lọc Dãy số và áp dụng,* NXB Giáo Dục, 2008.

4 Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), *Một số chuyên đề Giải tích bồi dưỡng học sinh giỏi Trung học phổ thông* NXB Giáo Dục, 2010.

5 Phan Huy Khải, *10.000 Bài toán sơ cấp Dãy số và giới hạn* NXB Hà Nội, 1997.

6 Vũ Dương Thụy (Chủ biên), *40 năm Olympic Toán học Quốc tế,* NXB Giáo Dục, 2002.

7 Lê Đình Thịnh (Chủ biên), *Phương trình sai phân và một số ứng dụng,* NXB Giáo Dục, 2001.

8 B J Venkatachala, *Functional Equations,* Prism Books PVT LTD, 2002.

Một vài kỹ thuật giải tích trong tổ hợp

Hoàng Chí Thành, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Hà Nội

Khi giải quyết một vấn đề hóc búa nào đó chúng ta thường hay nghĩ đến việc áp dụng các công cụ khoa học hiện đại, phức tạp mà ít chú ý tới các công cụ khoa học cổ điển, đơn giản. Nếu biết vận dụng các công cụ khoa học đơn giản đúng chỗ thì nhiều bái toán hóc búa vẫn có thể được giải quyết một cách nhanh chóng. Trong bài này chúng tôi trình bày hai kỹ thuật giải tích đơn giản hay được dùng khi giải các bài toán tổ hợp. Đó là kỹ thuật hàm sinh và nguyên lý thêm - bớt.

1. Kỹ thuật hàm sinh

Giả sử có một dãy số thực vô hạn: $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots$ Ta lập chuỗi luỹ thừa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{1}$$

Định nghĩa 1. Nếu chuỗi luỹ thừa (1) hội tụ đến một hàm $A(x)$ nào đó thì ta gọi hàm $A(x)$ là hàm sinh của dãy số $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots$

Trong nhiều trường hợp ta chưa biết dãy số nhưng bằng những lý luận hợp lý ta lại biết hàm sinh của nó. Từ hàm sinh liệu ta có tìm được dãy số sinh ra nó hay không? Nhìn vào đẳng thức:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Ta dễ dàng thấy rằng đây là khai triển Maclaurine của hàm $A(x)$. Thế thì:

$$a_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}A(x)_{|x=0}, \;\; n = 0, 1, 2, 3 \ldots \tag{2}$$

Như vậy, công thức (2) đã cho ta một cách tìm dãy số từ hàm sinh của nó. Khi giải các bài toán tổ hợp, việc tìm số các nghiệm của bài toán thường là công việc đầu tiên phải làm. Với nhiều bài toán phần việc này tương đối khó khăn. Kỹ thuật hàm sinh giúp ta giải quyết khá nhiều bài toán hóc búa trong thực tế.

2. Nguyên lý thêm - bớt

Giả sử ta có hai tập hợp A và B. Hiển nhiên:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Bây giờ thêm một tập C nữa. Thế thì:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Vậy với n tập hợp thì kết quả sẽ như thế nào?

Nguyên lý thêm - bớt: Với mỗi bộ n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ thì:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

Tính đúng đắn của nguyên lý trên dễ dàng chứng minh bằng quy nạp theo số các tập hợp.

Tài liệu tham khảo

[1] J. Ginsburg, *Determining a permutation from its set of reductions,* Ars Combinatoria, No. 82, 2007, pp. 55-57.

[2] T. Kuo, *A new method for generating permutations in lexicographic order,* Journal of Science and Engineering Technology, Vol. 5, No. 4, 2009, pp. 21-20.

[3] W. Lipski, *Kombinatoryka dla programistów,* WNT, Warszawa, 1982.

[4] D. Singh, A.M. Ibrahim, T. Yohanna and J.N. Singh, *An Overview of the applications of Multisets,* Novi Sad J. Math., Vol. 37, No. 2, 2007, pp. 73-92.

[5] Hoàng Chí Thành, *Giáo trình Tổ hợp,* NXB ĐHQG Hà Nội, 1999.

THAM SỐ HÓA ĐỒ THỊ PHẲNG VÀ TOÁN SƠ CẤP

Đàm Văn Nhỉ, Trường Đại Học Sư Phạm Hà Nội

0.1 Tham số hóa

Xét một đồ thị quen biết trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ cho bởi phương trình dưới đây:

$$(\ell): y^2 = x^2 + x^3.$$

Đây là một đồ thị đi qua gốc tọa độ $O(0,0)$. Để mô tả các điểm khác nữa trên đồ thị, ta thực hiện phép biến đổi bằng cách đặt $y = tx$ và thay nó vào phương trình đồ thị. Ta có $t^2x^2 = x^2 + x^3$. Khi $x = 0$ ta có điểm $O(0,0)$. Khi $x \neq 0$ ta có điểm $(x = t^2-1, y = t(t^2-1)$. Điểm này sẽ trở thành điểm gốc tọa độ khi $t = 1$ hoặc $t = -1$. Vậy mọi điểm trên đồ thị (ℓ) có tọa độ $(t^2-1, t(t^2-1)), t \in \mathbb{R}$. Một điều làm ta phải chú ý đó là điểm $O(0,0)$ sẽ tương ứng với hai giá trị khác nhau của t, còn những điểm khác chỉ tương ứng với một giá trị của t.

Định nghĩa 1. Cho đa thức $f \in \mathbb{R}[x,y] \setminus \mathbb{R}$. Tập $V(f)$ tất cả những điểm $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ thỏa mãn phương trình $f(x,y) = 0$ được gọi là một *đồ thị phẳng*.
Vì tất cả những đa thức $f, g \in \mathbb{R}[x,y]$ với $f = \lambda g, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ hoặc $f^r, r \in \mathbb{N}^*$, xác định cùng một đồ thị phẳng nên ta chỉ xét đa thức $f = f_1 \dots f_s$ với các đa thức bất khả quy phân biệt f_i thuộc $\mathbb{R}[x,y]$. Nếu đa thức f là khả qui, chẳng hạn $f(x,y) = g(x,y)h(x,y)$ và cả hai đa thức này đều có bậc lớn hơn 0, thì $V(f) = V(g) \cup V(h)$ với $V(g)$ được xác định bởi phương trình $g(x,y) = 0$, còn $V(h)$ bởi $h(x,y) = 0$ và $V(g) \neq V(h)$.

Bổ đề 1. Cho hai đa thức $f, g \in \mathbb{R}[x,y]$ không có nhân tử chung. Khi đó $V(f,g) = V(f) \cap V(g)$ là một tập hữu hạn điểm.

Mệnh đề 3. Hệ phương trình (A) $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \\ f, g \in \mathbb{R}[x,y] \end{cases}$ được giải qua phương trình đa thức một ẩn.

Định nghĩa 2. Đồ thị phẳng $V(f)$ được gọi là *đồ thị phẳng hữu tỷ* nếu có hai hàm hữu tỷ $\varphi(t), \psi(t) \in \mathbb{R}(t)$ của biến t và cả hai không đồng thời thuộc $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(\varphi(t), \psi(t)) = 0$.
Đồ thị phẳng hữu tỷ có quan hệ tới việc tìm các nghiệm $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ của phương trình $f(x,y) = 0$ hoặc tìm các điểm thuộc đồ thị phẳng với tọa độ là những số hữu tỷ hay xác định những điểm không tầm thường với tọa độ nguyên thuộc đa tạp Fermat $V: x^n + y^n - z^n = 0, n \geqslant 3$.

Khi biểu diễn đồ thị phẳng $V(f)$ qua $x = \varphi(t), y = \psi(t) \in \mathbb{R}(t)$, ta nói rằng đã tham số hóa được $V(f)$. Việc tham số hóa đồ thị phẳng qua các hàm hữu tỷ như sau: Chọn điểm $P \in V$ và viết phương trình tham số của đường thẳng (d) qua P sao cho (d) cắt V tại đúng một điểm thứ hai khác P.

Một vài áp dụng

Ví dụ 1. Với $a \in \mathbb{Q}^+$, chứng minh rằng hệ phương trình sau đây có không quá 12 nghiệm hữu tỷ:

$$\begin{cases} (x^2+y^2)^2 = a(x^2-y^2) \\ 29x^2y - y^3 - 1 = 0. \end{cases}$$

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình sau trong $\mathbb{Z}$: $\begin{cases} x^3 + x^2z - y^2z = 0 \\ 5x + y = 21z. \end{cases}$

Bổ đề 2. Giải hệ phương trình trong $\mathbb{Z}$: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = z^2 \\ 3x + 7y = 9z. \end{cases}$

Ví dụ 3. Xét bộ ba Pythagor $(u, v, w) \in \mathbb{Z}^3$ với $uvw \neq 0$ và $u^2 + v^2 = w^2$. Vấn đề đặt ra: Tìm các bộ ba Pythagor nguyên thủy, có nghĩa: $(u, v, w) = 1$.

Bổ đề 3. Giải phương trình $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = z^2$ trong $\mathbb{N}$.

Ví dụ 4. Tìm các số nguyên x, y, z thỏa mãn $(x^2+y^2)^2 = 2z^2(x^2-y^2)$.

Ví dụ 5. Tìm tất cả các bộ ba $(u, v, w) \in \mathbb{Z}^3$ với $uvw \neq 0$ thỏa mãn

$$wu^2 - u^3 - u^2w - 5uw^2 - 3w^3 = 0.$$

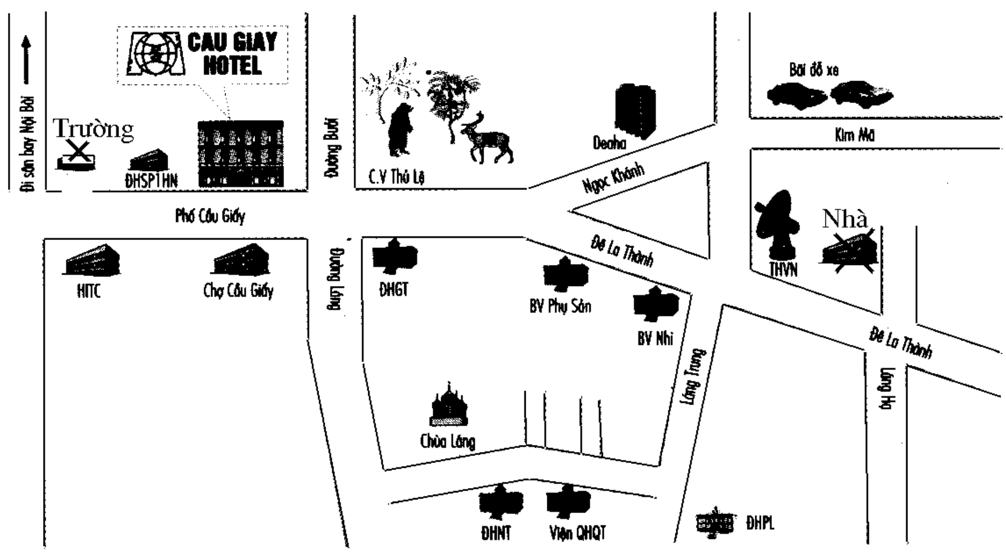
Bài toán tô màu đồ thị

Vũ Đình Hòa, Trường Đại Học Sư Phạm Hà Nội

0.1 Định nghĩa đồ thị và ví dụ

Định nghĩa đồ thị

Khái niệm đồ thị trong cuốn sách này là một mô hình toán học có thể dùng để giải quyết khá nhiều bài toán và vấn đề toán học. Một đồ thị có thể hiểu đơn giản là một hệ thống các đỉnh và các cạnh nối các đỉnh này với nhau.

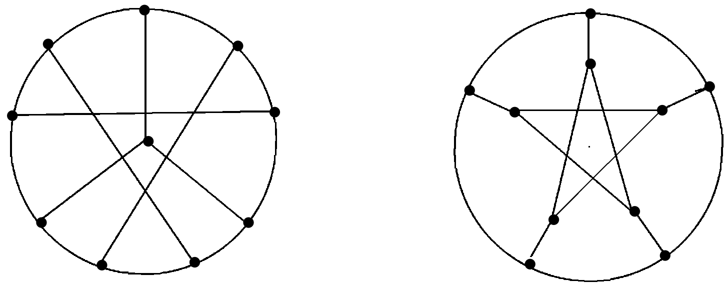


Hình 1: Bản đồ khu vực Cầu giấy.

Ví dụ 1. Một bản đồ giao thông là một đồ thị. Các đỉnh của đồ thị là các nút giao thông (ngã ba, ngã tư đường...), còn các cạnh của nó là các con đường giao thông nối các nút giao thông với nhau. Trên bản đồ giao thông các cạnh (các đường đi của nó) có thể có hướng (nếu là đường một chiều) hoặc không có hướng (nếu nó không phải là đường một chiều, xem hình 1).

Bản đồ trong hình 1 có thể biểu diễn thành một sơ đồ các đường đi và nút giao thông . Bản đồ giao thông trên có thể biểu diễn thành đồ thị với các đầu ngã tư và ngã ba là các đỉnh của đồ thị, còn các phố nối chúng là cạnh.

Định nghĩa 1. Một đồ thị được hiểu là một bộ hai tập hợp hữu hạn: Tập hợp đỉnh và tập hợp cạnh nối các đỉnh này với nhau.



Hình 2: Đồ thị Petersen và hai cách biểu diễn trên mặt phẳng.

Ví dụ 2. Người ta hay biểu diễn các công thức hóa học dưới dạng đồ thị.

Thông thường người ta hay biểu diễn đồ thị lên mặt phẳng với đỉnh của đồ thị là các điểm được tô đậm hoặc khuyên tròn ... , còn cạnh là các đường cong hoặc đoạn thẳng nối các đỉnh này với nhau. Với hai đỉnh a và b của đồ thị, ta kí hiệu cạnh không có hướng nối a với b bởi (a, b) và cạnh có hướng nối chúng bởi $[a, b]$. Trong trường hợp có nhiều cạnh nối a với b thì ta gọi các cạnh này là cạnh kép và kí hiệu cạnh thứ n nối chúng bởi (a, b, n) (nếu đó là cạnh vô hướng) hoặc $[a, b, n]$ (nếu đó là cạnh có hướng).

Những cạnh dạng (e, e) với e là đỉnh của đồ thị vô hướng được gọi là *khuyên* của đồ thị.

Đồ thị được phân loại theo tính chất cạnh của chúng. Một đồ thị được gọi là *đồ thị vô hướng* nếu tất cả các cạnh của chúng đều là cạnh vô hướng. Hai đỉnh khác nhau của đồ thị vô hướng được gọi là *kề nhau* hoặc *láng giềng* của nhau, nếu như chúng được nối với nhau bởi một cạnh. Nếu hai đỉnh a và b của một đồ thị $G = (V, E)$ là kề nhau, ta có thể viết $(a, b) \in E$.

Đồ thị được gọi là *đồ thị có hướng* nếu tất cả các cạnh của nó là đều là cạnh có hướng. Đỉnh xuất phát của một cạnh có hướng còn được gọi là đỉnh đầu, và đỉnh kết thúc của cạnh được gọi là đỉnh cuối của nó.

Trong trường hợp một đồ thị có cả cạnh vô hướng cũng như cạnh có hướng thì đồ thị được gọi là *đồ thị hỗn hợp*. Một đồ thị được gọi là *đồ thị đơn* nếu nó không có khuyên và không có cạnh kép. Ngoài ra, ta gọi *đồ thị điểm* là đồ thị có đúng một đỉnh và không có cạnh nào. *Đồ thị rỗng* dùng để gọi một đồ thị không có đỉnh và cạnh nào cả.

Khi biểu diễn một đồ thị trên mặt phẳng, chúng ta thấy có nhiều khi hình biểu diễn của chúng là những cụm tách rời nhau không được nối với nhau. Tương ứng với mỗi hình rời nhau như vậy là một đồ thị thành phần của đồ thị đã cho mà ta sẽ gọi là một thành phần liên thông của đồ thị cho trước.

Để chính xác hoá khái niệm liên thông, trước hết chúng ta nói hai đỉnh của một đồ thị cho trước là *liên thông* với nhau nếu có một dãy cạnh kế tiếp nối chúng với nhau trong đồ thị đã cho. Tất nhiên là một đỉnh cho trước luôn được coi là liên thông với chính nó (được nối với chính nó bởi một dãy cạnh kế tiếp có độ dài 0).

Định nghĩa 2. Cho trước một đồ thị G và một số tự nhiên $k \geq 2$, ta nói G là một đồ thị *k-liên thông (đỉnh)*, nếu như G là một đồ thị liên thông và nếu như bỏ đi một số $t < k$ đỉnh tùy ý, đồ thị thu được vẫn là một đồ thị liên thông.

Ví dụ 3. Đồ thị Petersen trong hình 2 là một đồ thị 3-liên thông, vì nó là một đồ thị liên thông,và chỉ khi bỏ đi tới 3 đỉnh, ta mới có thể thu được một đồ thị không liên thông và khi bỏ đi 2 đỉnh tùy ý, đồ thị Petersen vẫn còn liên thông.

Tương tự khái niệm liên thông đỉnh, ta gọi một đồ thị liên thông là đồ thị *k-liên thông cạnh* nếu như bỏ đi ít hơn k cạnh, từ đồ thị ban đầu ta vẫn thu được một đồ thị liên thông. Khái niệm liên thông cạnh ít được nghiên cứu tới hơn khái niệm liên thông đỉnh.

Thông thường ta kí hiệu số thành phần liên thông của một đồ thị G cho trước bởi $\omega(G)$. Nếu G là một đồ thị có n đỉnh rời nhau, thì $\omega(G) = n$.

Định nghĩa 3. Cho trước một đồ thị G. Số tự nhiên bé nhất thỏa mãn điều kiện: G là đồ thị k-liên thông (đỉnh) nhưng không $k+1$- liên thông (đỉnh), được gọi là chỉ số liên thông (đỉnh) của đồ thị G.

Ví dụ 4. Đồ thị Petersen trong hình 2 có chỉ số liên thông là 3.

Tương tự như vậy, ta có thể định nghĩa *chỉ số liên thông cạnh* của một đồ thị G cho trước, là số nhỏ nhất sao cho G là một đồ thị k-liên thông cạnh mà không $k+1$- liên thông cạnh. Đồ thị Petersen trong hình 2 là một đồ thị có chỉ số liên thông cạnh là 3.

Khi định nghĩa đường đi nối hai đỉnh a và b của một đồ thị, ta luôn giả thiết rằng các đỉnh a và b này phải khác nhau. Trong trường hợp a và b được nối với nhau bởi một cạnh, thì khi thêm cạnh (a, b) vào, ta thu được từ con đường đã cho một chu trình. Như vậy chu trình là một dãy cạnh kế tiếp khép kín sao cho mỗi đỉnh của đồ thị được đi qua không quá một lần.

Chu trình được kí hiệu bởi việc đưa ra các cạnh và các đỉnh liên tiếp nhau trên chu trình. Chẳng hạn, nếu chu trình C đi qua các đỉnh $p_1, p_2, ..., p_k$ và các cạnh $e_1, e_2, ..., e_k$ thì ta viết

$$C = (p_1, e_1, p_2, e_2, ..., p_k, e_k, p_1).$$

Trong trường hợp đồ thị là một đồ thị đơn, thì thay vì viết rõ các cạnh và các đỉnh, chu trình được xác định duy nhất qua việc gọi tên các đỉnh nó đi qua. Chẳng hạn, chu trình C đề cập ở trên có thể viết thành:

$$C = (p_1, p_2, \dots, p_k, p_1).$$

Số cạnh của chu trình được gọi là độ dài của chu trình và thông thường hay được kí hiệu bởi $\ell(C)$. Một khuyên lập thành một chu trình có độ dài. Dễ thấy rằng một đồ thị cho trước chỉ có chu trình có độ dài 2 nếu như nó có cạnh kép. Trong một đồ thị đơn mỗi chu trình có độ dài ít nhất là 3. Một đồ thị không đơn hiển nhiên luôn có ít nhất một chu trình (có độ dài 1 hoặc 2). Trong đồ thị đơn không phải lúc nào ta cũng có thể tìm thấy một chu trình. Chẳng hạn trong các cây là các đồ thị ta sẽ nói tới ở chương sau ta không tìm được một chu trình nào cả.

Các bài toán tô màu có 3 loại chủ yếu:

1. Tô màu các đỉnh (sắc số)

2. Tô màu cạnh (chỉ số Ramsey)

3. Tô màu miền (bài toán 4 màu, giả thiết Hardwiger)

Rất nhiều bài toán tô màu chứng tỏ rằng chúng là những bài toán rất khó và thú vị, chẳng hạn như bài toán 4 màu. Từ lâu cuối thế kỉ 18, những người thợ tô bản đồ ở Anh đã nhận thấy rằng để tô màu bản đồ chỉ cần 4 màu là đủ sao cho hai quốc gia có biên giới chung sẽ được tô màu bởi những màu khác nhau. Định lí gần như là hiển nhiên sau đây cho ta một phương pháp để xác định được cận dưới của sắc số.

Định lý 1. Cho mỗi đồ thị G với bậc lớn nhất Δ, ta có

$$\chi(G) \leq \Delta + 1.$$

Định lý 2. Một đồ thị cho trước G với ít nhất một cạnh có sắc số bằng 2 khi và chỉ khi G không có chu trình lẻ cạnh.

Vấn đề tô 4 màu lần đầu tiên được đề cập vào năm 1852 bởi Francis Guthrie khi ông thử tô màu bản đồ nước Anh và ông nhận ra rằng chỉ cần bốn màu khác nhau là đủ. Ông đã đem vấn đề này hỏi người anh trai là Fredrick, lúc đó đang là sinh viên của trường Đại học Học viện London (UCL). Fredrick đã đưa vấn đề này hỏi thầy của mình là nhà toán học Augustus De Morgan nhưng người thầy cũng chưa biết rõ vấn đề này.

Người đầu tiên giới thiệu vấn đề ra trước công chúng là nhà toán học Arthur Cayley vào năm 1878 tại Hội Toán học London, ông đã chỉ ra người đề cập vấn đề là De Morgan.

Người đầu tiên chứng minh định lý này là Alfred Kempe vào năm 1879. Năm 1880, có thêm một cách chứng minh khác của Peter Guthrie Tait. Nhưng đến năm 1890 Percy Heawood đã chỉ ra sai lầm trong cách chứng minh của Kempe, và đến năm 1891 Julius Petersen chỉ ra sai lầm trong cách chứng minh của Tait.

Trong việc chỉ ra sai lầm của Kempe, Heawood còn chứng minh rằng tất cả các Đồ thị phẳng có thể tô được bởi năm màu khác nhau.

Trong những năm 1960 và 1970, nhà toán học người Đức là Heinrich Heesch đã phát triển phương pháp sử dụng máy vi tính cho việc chứng minh vấn đề.

Năm 1976, cuối cùng thì định lý cũng được chứng minh bởi Kenneth Appel và Wolfgang Haken tại trường Đại học Illinois với sự trợ giúp của máy vi tính.

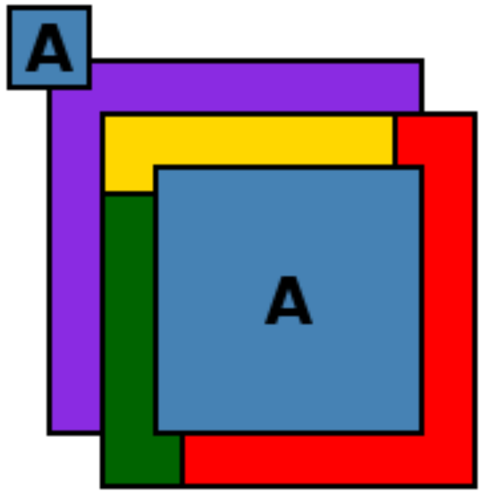
Bài toán 4 màu. Người ta có thể dùng 4 màu để tô các miền của một đồ thị phẳng sao cho không có 2 miền nào cùng màu có cạnh chung?

Lưu ý. Bài toán 4 màu là trường hợp đặc biệt của giả thuyết Hardwiger.

Định lý bốn màu là định lý lớn đầu tiên được chứng minh bằng máy vi tính. Tuy nhiên một số nhà toán học không đồng tình với cách chứng minh này, bởi vì con người không thể kiểm chứng trực tiếp được cách chứng minh. Do vậy, muốn tin vào chứng minh này thì người ta phải công nhận sự chính xác của Trình biên dịch và phần cứng máy tính được sử dụng để chạy chương trình chứng minh.

Tuy vậy cũng phải nói rõ là định lý chỉ đúng với những quốc gia là vùng miền liên tục, không đúng trong trường hợp các quốc gia có thể cấu tạo từ các vùng đất xé lẻ như trong hình 3.

Bài toán 1. 1. Trên mặt phẳng ô vuông có đánh dấu một số ô vuông. Chứng minh rằng có thể dùng 4 màu để tô màu các ô vuông này sao cho không có 2 ô vuông nào cùng màu có đỉnh chung.



Hình 3: Bản đồ không tô được bởi 4 màu.

2. Trên mặt phẳng có một đồ thị phẳng các mặt là các tam giác được tô màu bởi 2 màu đen trắng sao cho các mặt cùng màu không có cạnh chung. Chứng minh rằng có thể đánh số các đỉnh của nó bởi 1, 2 và 3 sao cho mỗi tam giác không có 2 đỉnh nào được đánh bởi cùng một số.

3. Trên mặt phẳng có một đồ thị phẳng các mặt là các tam giác mà các đỉnh của nó được đánh số bởi 1, 2 và 3 sao cho mỗi tam giác không có 2 đỉnh nào được đánh bởi cùng một số. Chứng minh rằng có thể tô màu các mặt bởi 2 màu đen trắng sao cho các mặt cùng màu không có cạnh chung.

4. Chứng minh rằng các mặt của đồ thị phẳng tô được 4 màu sao cho không có 2 miền nào cùng màu có cạnh chung nếu như nó có chu trình Hamilton (chu trình đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị).

Tài liệu tham khảo

[1] Sach, H, *Graphentheorie* Leipzig 1970.

[2] Flachsmeyer, J., *Kombinatorik* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1972.

[3] Vũ Đình Hòa, *Toán rời rạc*, NXB ĐHSPHN 2010.

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA TỨ ĐIỂM TRONG MẶT PHẲNG

Nguyễn Đăng Phất, Trường Đại Học Sư Phạm Hà Nội

0.1 Giới thiệu

Định nghĩa 1. Hình tạo bởi bốn điểm phân biệt A_1, A_2, A_3, A_4 trong mặt phẳng, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, gọi là một "tứ điểm phẳng" (hay hình "tứ đỉnh"), kí hiệu tứ điểm $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ như tập hợp của bốn điểm A_i,, $i = 1, 2, 3, 4$.

Tam giác $\mathcal{T}_i$ có các đỉnh là các hình chiếu vuông góc của đỉnh A_i của tứ điểm $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ trên các cạnh của tam giác $\triangle_i$ $(A_jA_kA_l)$ xác định bởi ba đỉnh còn lại A_j, A_k, A_l gọi là tam giác chiếu hay tam giác bàn đạp (pedal triangle, orthic triangle) của A_i trên tam giác $\triangle_i$, kí hiệu $\mathcal{T}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, $\{i, j, k, l\}$ là một hoán vị nào đó của tập hợp bốn số $\{1, 2, 3, 4\}$.

Tứ điểm có các đỉnh là hình chiếu vuông góc của các đầu mút của một cặp cạnh đối diện A_iA_j, A_kA_l trong các phép chiếu vuông góc cạnh này lên cạnh kia, gọi là "tứ điểm chiếu" của tứ điểm $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ trên cặp cạnh đối diện A_iA_j, A_kA_l của nó, kí hiệu $Q_{ij,kl}$.

Nếu bốn điểm A_1, A_2, A_3, A_4 không đồng phẳng thì ta có tứ điểm $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ không đồng phẳng và khi đó tứ điểm cũng là tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Để đơn giản, ta kí hiệu tứ điểm (phẳng hay không đồng phẳng) là $\{A_1A_2A_3A_4\}$ thay cho kí hiệu $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

Sau đây là một số tính chất của tứ điểm phẳng ngoài tính chất chung được nêu dưới đây mà chúng ta quen thuộc (chúng tôi không trình bày chứng minh) của mọi tứ điểm bất kỳ (đồng phẳng hay không đồng phẳng). Ký hiệu $\mathcal{P}$ hay $\mathcal{K}$ là mặt phẳng hay không gian Euclid 2 hoặc 3 chiều.

Định lý 1 (chung cho mọi tứ điểm trong $\mathcal{P}$ hay $\mathcal{K}$)**.** Trong một tứ điểm bất kỳ $\{A_1A_2A_3A_4\}$, tích độ dài các cặp cạnh đối diện $A_2A_3.A_4A_1.A_3A_1.A_4A_2$ và $A_1A_2.A_4A_3$ biểu thị độ dài các cạnh của một tam giác $(\mathcal{T})$ nào đó. Tam giác $\mathcal{T}$ này được gọi là tam giác sinh bởi tứ điểm $\{A_1A_2A_3A_4\}$, kí hiệu là $\mathcal{T}(A_1A_2A_3A_4)$ hoặc $\mathcal{T}(A_2A_3.A_1A_4, A_3A_1.A_2A_4, A_1A_2.A_3A_4)$.

Tam giác $\mathcal{T}$ này suy biến thành đoạn thẳng khi và chỉ khi tứ điểm $\{A_1A_2A_3A_4\}$ đồng viên hoặc thẳng hàng (tức là cùng thuộc đường tròn hay một đường thẳng).

Gọi A_{ij} và A_{ji} tứ tự i, j khác nhau, tương ứng là hình chiếu vuông góc của A_i và A_j trên đường thẳng A_kA_l $(\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\})$.

Sau đây là một số tính chất đã biết và nhiều tính chất mới của các tứ điểm phẳng được tác giả bài viết này mới phát hiện thêm.

Tính chất 3. Ba tứ điểm chiếu $A_{ij,kl}$ của tứ điểm $\{A_1A_2A_3A_4\}$ đồng dạng thuận với nhau và cùng đồng dạng nghịch với tứ điểm $\{A_1A_2A_3A_4\}$. Cụ thể là,

$$A_{12}A_{21}A_{34}A_{43} \sim A_{13}A_{24}A_{31}A_{42} \sim A_{14}A_{23}A_{32}A_{41} \backsim A_1A_2A_3A_4.$$

Tính chất 4. a) Bốn tam giác chiếu $\mathcal{T}_i(A_jA_kA_l)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ đồng dạng thuận với nhau.

b) Bốn tam giác chiếu $\mathcal{T}_i$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ bằng nhau khi và chỉ khi chúng suy biến thành đoạn thẳng, ứng với trường hợp tứ điểm đồng viên, hoặc không suy biến thì trùng nhau, ứng với trường hợp $\{A_1A_2A_3A_4\}$ là một tứ điểm trực tâm.

Tính chất 5. Bốn tam giác chiếu $\mathcal{T}_i$, $i = \overline{1,4}$ đôi một thấu xạ với nhau. Tâm thấu xạ B_{ij} của hai tam giác chiếu $\mathcal{T}_i$ và $\mathcal{T}_j$ nằm trên đường thẳng chứa cạnh A_kA_l, đối diện với cạnh nối hai đỉnh tương ứng A_i, A_j, đồng thời cũng là một trong hai giao điểm của các đường tròn (v_i), (v_j) ngoại tiếp các tam giác chiếu $\mathcal{T}_i$, $\mathcal{T}_j$. Cụ thể là, $\mathcal{T}_i$ và $\mathcal{T}_j$ là hai tam giác thấu xạ, thì (theo định nghĩa), các đường thẳng $A_{ij}A_{ji}, A_{ik}A_{jl}$ và $A_{il}A_{jk}$ nối các cặp đỉnh tương ứng đồng quy ở một điểm (điểm thông thường) B_{ij} thuộc đường thẳng A_kA_l và cũng là một điểm chung của (v_i) và (v_j), hay đặc biệt song song với nhau. Nói cách khác, trong trường hợp này thì B_{ij} được xem là điểm xa vô tận chung của ba đường thẳng song song $A_{ij}A_{ji}, A_{ik}A_{jl}$ và $A_{il}A_{jk}$.

Tính chất 6. Bốn đường tròn (v_i) ngoại tiếp bốn tam giác chiếu $\mathcal{T}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, đồng quy ở một điểm; ký hiệu điểm đồng quy này là ω. [1]

Tính chất 7. Bốn đường tròn Euler C_i của bốn tam giác $\triangle_i(A_jA_kA_l)$ có các đỉnh là ba trong bốn đỉnh của tứ điểm $\{A_1A_2A_3A_4\}$ cũng đồng quy ở một điểm, trùng với điểm đồng quy ω của bốn đường tròn (v_i) nói trên.

Tính chất 8. Điểm đồng quy ω của tám đường tròn (hoặc đường thẳng) (v_i) và (C_i), $i = 1, 2, 3, 4$ là tâm đồng dạng chung của sáu phép đồng dạng thuận (phép vị tự quay) $\mathbb{Z}_{ij}$ biến $\mathcal{T}_i$ thành $\mathcal{T}_j$. Nó cũng là tâm đồng dạng chung của ba phép đồng dạng thuận (vị tự quay) $\mathbb{Z}_{12,34}$, $\mathbb{Z}_{12,34}$, và $\mathbb{Z}_{14,23}$ biến tứ điểm chiếu này của $\{A_1A_2A_3A_4\}$ thành tứ điểm chiếu kia của $\{A_1A_2A_3A_4\}$.

$$Q_{12,34} \mapsto Q_{13,24};\ Q_{12,34} \mapsto Q_{14,23},\ \text{và}\ Q_{13,24} \mapsto Q_{14,23}.$$

Tính chất 9. Gọi O_i là tâm đường tròn (v_i) ngoại tiếp tam giác chiếu $\mathcal{T}_i$. Thế thì tứ điểm $\{O_1O_2O_3O_4\}$ đồng dạng nghịch với tứ điểm $\{A_1A_2A_3A_4\}$ và do đó, $\{O_1O_2O_3O_4\}$ đồng dạng thuận với ba tứ điểm chiếu $Q_{ij,kl}$ của tứ điểm $\{A_1A_2A_3A_4\}$. Điểm đồng quy ω của tám đường tròn (v_i) và (C_i), $i = 1, 2, 3, 4$, nói ở trên (Tính chất 5) cũng là tâm đồng dạng chung của ba phép đồng dạng thuận biến tứ điểm $\{O_1O_2O_3O_4\}$ thành một trong ba tứ điểm chiếu $O_{12,34}, Q_{13,24}$, và $Q_{14,23}$ của tứ điểm $\{A_1A_2A_3A_4\}$.

[1]Chú thích: Các đường tròn (v_i) này trở thành đường thẳng (đường thẳng Simson ứng với đỉnh A_i đối với tam giác $\mathcal{T}_i$) khi và chỉ khi tứ điểm $\{A_1A_2A_3A_4\}$ đồng viên.

Một số dạng toán về chia đa thức đối xứng

Nguyễn Văn Ngọc, Viện Toán học

Trong tài liệu này giới thiệu một số bài toán về tính chia hết của các đa thức đối xứng và phản đối xứng. Một đa thức được gọi là đối xứng, nếu giá trị của nó không thay đổi khi ta đổi chỗ hai biến bất kỳ và được gọi là phản đối xứng, nếu nó đổi dấu khi ta đổi chỗ hai biến bất kỳ. Để giải các bài toán về tính chia hết giữa các đa thức ta thường sử dụng Định lý Bézout, hệ quả dưới đây và các kỹ năng phân tích thành nhân tử.

Định lý Bézout. *Số dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho $x - a$ bằng $f(a)$.*

Hệ quả. *Đa thức $f(x)$ chia hết cho $x - a$ khi và chỉ khi $f(a) = 0$, tức là, $x = a$ là nghiệm của $f(x)$.*

Xét một số bài toán sau đây.

Bài tập

1. Chứng minh rằng $(x + y)^n - x^n - y^n$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$ khi và chỉ khi $n = 6k \pm 1$.

2. Chứng minh rằng $(x + y)^{2n+1} + x^{n+2}y^{n+2}$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

3. Chứng minh rằng, nếu đa thức đối xứng $f(x, y)$ chia hết cho $x^2 - y^2$, thì nó chia hết cho $x^3 + y^3 - (x + y)xy$.

4. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên p, q thì đa thức

$$x^p y^q + y^p z^q + z^p x^q - x^q y^p - y^q z^p - z^q x^p$$

chia hết cho $(x - y)(x - z)(y - z)$.

5. Chứng minh rằng, với mọi các số tự nhiên k, m, n, thì đa thức

$$x^k y^m z^n + y^k z^m x^n + z^k x^m y^n - x^n y^m z^k - y^n z^m x^k - z^k x^m y^k$$

chia hết cho $(x - y)(x - z)(y - z)$.

6. Cho đa thức

$$f(x, y, z) = x^m y^n + y^m z^n + z^m x^n - x^n y^m - y^n z^m - z^n x^m.$$

Chứng minh rằng, nếu $f(x, y, z)$ chia hết cho $(x + y)(x + z)(y + x)$, thì nó chia hết cho $(x^2 - y^2)(x^2 - z^2)(y^2 - z^2)$.

7. Chứng minh rằng, đa thức

$$a^4(b^2 + c^2 - a^2)^3 + b^4(c^2 + a^2 - b^2)^3 + c^4(a^2 + b^2 - c^2)^3$$

chia hết cho $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2$.

Sử dụng số phức để giải toán tổ hợp

Trần Việt Anh, trường THPT Nguyễn Tất Thành, Hà Nội

Số phức có rất nhiều ứng dụng trong nhiều ngành toán học khác nhau như hình học, đại số,... Trong báo cáo này chúng tôi sẽ trình bày những ứng dụng của số phức trong việc giải các bài toán tổ hợp. Điều thú vị và lạ lùng ở đây là: Số phức, một sản phẩm tưởng tượng của trí tuệ con người, một sự "bịa đặt toán học", một vật "ảo", lại bất ngờ giúp ta giải được nhiều bài toán tổ hợp khó, rất thật, mang bản chất tổ hợp + số học: đếm các đối tượng mang một tính chất nào đó. Qua đó, các bạn có thể thấy được những vẻ kiều diễm và sự tinh tế của Toán học. Chúng tôi trình bày lại một số kết quả cơ bản về số phức. Một số kết quả chúng tôi không chứng minh mà xem như là những bài tập, bạn đọc có thể tự chứng minh chúng không khó khăn lắm.

Bài toán 1. Cho p là một số nguyên tố lẻ. Tìm số các bộ $(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ gồm $p-1$ số nguyên dương thoả mãn điều kiện tổng $x_1 + 2x_2 + \cdots + (p-1)x_{p-1}$ có số dư bằng 1 khi chia cho p, trong đó mỗi số $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$ đều không lớn hơn $p-1$.
Đáp số: $\dfrac{(p-1)^{p-1}-1}{p}$.

Bài toán 2. Cho p là một số nguyên tố lẻ. Tìm số các bộ $(x_1, x_2, \dots, x_{(p-1)!+1})$ gồm $(p-1)!+1$ số tự nhiên thoả mãn điều kiện tổng $x_1 + x_2 + \cdots + x_{(p-1)!+1}$ chia hết cho p, trong đó mỗi số $x_1, x_2, \dots, x_{(p-1)!+1}$ đều không lớn hơn $2^{p-1}-3$.
Đáp số: $\dfrac{(2^{p-1}-2)^{(p-1)!+1}+1}{p} - 1$.

Bài toán 3. Cho p là một số nguyên tố lẻ. Tìm số tập con X của tập $\{1, 2, \dots, 2p+1\}$ biết rằng X chứa đúng p phần tử và tổng tất cả các phần tử của X khi chia cho p có số dư bằng 1.
Đáp số: $\dfrac{\dbinom{2p+1}{p} - 2}{p}$.

Bài toán 4. Cho p là một số nguyên tố lẻ và số nguyên dương n. Tìm số các bộ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gồm n số tự nhiên sao cho tổng $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ chia hết cho p, trong đó mỗi số $x_1, x_2, \dots, x_n$ đều không lớn hơn $(p-1)!$.
Đáp số: $\dfrac{((p-1)!)^n - (-1)^n}{p} + (-1)^n$.

Bài toán 5. Cho ba số nguyên dương m, n, p trong đó $n+2$ chia hết cho m. Tìm số các bộ $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ gồm p số tự nhiên sao cho tổng $x_1 + x_2 + \cdots + x_p$ chia hết cho m, trong đó mỗi số $x_1, x_2, \dots, x_p$ đều không lớn hơn n.
Đáp số: $\dfrac{(n+1)^p + (-1)^p \delta(p)}{m}$, trong đó $\delta(p) = \begin{cases} m-1 & \text{nếu } p \text{ chia hết cho } m \\ -1 & \text{nếu } p \text{ không chia hết cho } m \end{cases}$

Bài toán 6. Cho p là một số nguyên tố lẻ. Tìm số tập con X của tập $\{1, 2, \ldots, 10p+2\}$ biết rằng X chứa đúng $2p$ phần tử và tổng tất cả các phần tử của X khi chia cho p có số dư bằng 1.

Đáp số: $\dfrac{\dbinom{10p+2}{2p} - 45}{p}$.

Bài toán 7. Cho p là một số nguyên tố lẻ. Tìm số các bộ $(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})$ gồm $p-1$ số nguyên dương thoả mãn điều kiện tổng $x_1 + 2x_2 + \cdots + (p-1)x_{p-1}$ có số dư bằng 1 khi chia cho p, trong đó mỗi số $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ đều không lớn hơn $2^p - 1$.

Đáp số: $\dfrac{2^{p(p-1)} - 1}{p}$.

Chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp tham số hoá

Quách Văn Giang, THPT Amsterdam - Hà Nội

Các bất đẳng thức đại số bậc hai dạng không đối xứng đối với các biến khi dấu đẳng thức trong các bất đẳng thức xảy ra ứng với các giá trị không bằng nhau (bộ số không đều). Trong chương trình phổ thông thì các bất đẳng thức cổ điển như Cauchy, Bunhiacopski lại được phát biểu dưới dạng đối xứng, Dấu đẳng thức xảy ra khi các biến bằng nhau hoặc tỉ lệ. Việc áp dụng các bất đẳng thức cổ điển trên để giải các bài toán cực trị không đối xứng cần được quan tâm một cách thích đáng. Qua bài viết này tôi muốn nêu một phương pháp giải bài toán cực trị không đối xứng bằng cách sử dụng các bất đẳng thức cổ điển thông dụng gọi là phương pháp tham số hoá.

Nội dung chủ yếu của phương pháp này như sau từ việc phân tích tính không đối xứng của các biến có trong bài toán cực trị, thường được cho dưới các dạng

Dạng 1. Hệ số các biến trong biểu thức cần tìm cực trị là kh"ng bằng nhau.

Dạng 2. Các biến thuộc các miền khác nhau của tập số thực.

Dang 3. Điều kiện ràng buộc của các biến trong giả thiết bài toán là không đối xứng với các biến.

Ta thêm vào các tham số phụ cần thiết thường là các hệ số hoặc luỹ thừa của các biến có trong các đánh giá trung gian, sau đó chọn các tham số phụ để tất c các Dấu đẳng thức xảy ra, từ đó nhận được 1 hệ phương trình mà ẩn là các biến và các tham số phụ. Tham số phụ được chọn hợp lí chỉ khi hệ phương trình tương ứng có nghiệm. Trong bài viết này tôi nêu một số lớp bài toán cực trị không đối xứng thường gặp , tác giả nghĩ rằng những mô hình cụ thể này thật sự có ý nghĩa vì với kết quả của các bài toán này sẽ cho ta một lớp bài toán cực trị không đối xứng cụ thể miễn là xây dựng được bộ biến thoả mãn điều kiện ràng buộc tương ứng

Bài toán 1. *Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi thoả mãn điều kiện*

$$xy + yz + zx = 1,$$

và cho a là số thực dương không đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a(x^2 + y^2) + z^2.$$

Lời giải.

Phân tích. Điều kiện ràng buộc đối xứng với x, y, z.

Biểu thức P đối xứng với x, y; vai trò của z trong biểu thức P là đối xứng với x, y.

Do vậy, ta có thể nghĩ rằng điểm cực trị sẽ đạt được khi $x = y$, và $\dfrac{z^2}{2} = \alpha x = \alpha y$.

Từ phân tích trên ta có thể trình bày lời giải của bài toán như sau.

Với $\alpha > 0$ (chọn sau), áp dụng bất đẳng thức AG cho 2 số dương, ta có

$$\alpha x^2 + \frac{z^2}{2} \geqslant 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}xz,\ \ \alpha y^2 + \frac{z^2}{2} \geqslant 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}yz,\ \ \sqrt{\frac{\alpha}{2}}(x^2 + y^2) \geqslant 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}xy.$$

Cộng vế các bất đẳng thức trên ta nhận được

$$\Big(\alpha+\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\Big)(x^2+y^2)+z^2\geqslant 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(xy+yz+zx)=\sqrt{\frac{\alpha}{2}}.$$

Chọn α sao cho

$$\Big(\alpha+\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\Big)=\alpha$$

hay

$$\sqrt{\frac{\alpha}{2}}=\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{4}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\frac{z^2}{2}=\alpha x^2=\alpha y^2\\ xy+yz+zx=1\end{cases}$$

hay

$$\begin{cases}x=y=\frac{1}{\sqrt[4]{1+8a}},\\ z=\frac{\sqrt[4]{1+8a}-1}{2\sqrt[4]{1+8a}}.\end{cases}$$

Kết luận:

$$\min P=\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{4}.$$

Bài toán 2. *Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn điều kiện*

$$ab+bc+ca=1;$$

và u,v là các số dương cố định. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=ua^2+vb^2+c^2.$$

Lời giải.

Một cách tự nhiên từ lời giải của bài toán 1 thì ta phân tích

$$u=x+y,\ \ v=z+t,\ \ 1=m+n,$$

trong đó x,y,z,t,m,n là các số dương sẽ được chọn sau.

áp dụng bất đẳng thức AG cho 2 số dương, ta có

$$xa^2+tb^2\geqslant 2\sqrt{xtab},\ \ ya^2+nc^2\geqslant 2\sqrt{ynac},\ \ zb^2+mc^2\geqslant 2\sqrt{znbc}.$$

Cộng vế các bất đẳng thức trên ta nhận được

$$P\geqslant 2\sqrt{xtab}+2\sqrt{ynac}+2\sqrt{znbc}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} xa^2 = tb^2 \\ ya^2 = nc^2 \\ zb^2 = mc^2 \end{cases}$$
hay
$$\begin{cases} \frac{x}{t} = \frac{b^2}{a^2} \\ \frac{n}{y} = \frac{a^2}{c^2} \\ \frac{z}{m} = \frac{c^2}{b^2} \end{cases}$$
Suy ra
$$xzn = ytm. \tag{1}$$
Chọkn x, y, x, t, m, n sao cho
$$xt = yn = xm = \alpha$$
thoả mãn (1)

Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (x + y)z + t)(m + n) = uv \\ &\Leftrightarrow (xz + xt + yz + yt)(m + n) = uv \\ &\Leftrightarrow xzm + xtm + yzm + ytm + xzn + xtn + yzn + ytn = uv \\ &\Leftrightarrow (x + y + m + n + t + z) + 2xzn = uv. \end{aligned}$$

Mà $(xzn)(ytm) = \alpha^3$ nên $xzn = \sqrt{\alpha^3}$.

Đặt $q = \sqrt{\alpha}$ thì
$$q^3 + (u + v - 1)q^2 - uv = 0. \tag{2}$$
+(u+v+1) -uv=0 (2)

Rõ ràng (2) có nghiệm dương duy nhất q_0

Vậy $\min P = 2q_0$ với q_0 là nghiệm dưng duy nhất của phương trình (2).

Tính là ổn định của một số dạng phương trình hàm dạng Cauchy

Lê Thị Anh Đoan, THPT Chuyên Lê Quý Đôn -Khánh Hòa

Trong nội dung bài viết này, ta quan tâm đến khái niệm ổn định của phương trình hàm. Chẳng hạn ta nói phương trình hàm (Cauchy) nhân tính là ổn định nếu nó thỏa mãn tính chất sau:

Giả sử G là một nhóm, $H(d)$ là một nhóm metric và $f : G \to H$, với mỗi $\varepsilon > 0$ thì tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$d\left(f(xy), f(x)f(y)\right) < \delta,\ \forall x, y \in G$$

và do đó, tồn tại một đồng cấu $M : G \to H$ sao cho

$$d\left(f(x), M(x)\right) < \varepsilon,\ \forall x \in G.$$

0.1 Tính ổn định của phương trình hàm (Cauchy) cộng tính

Trước hết ta nhắc lại phương trình hàm (Cauchy) cộng tính (A)

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{A}$$

Giả sử hàm $f : X \to Y$ thỏa mãn (A), với X và Y là hai không gian Banach. Khi đó f được gọi là hàm cộng tính.

Định lý 1. Giả sử , hàm $f : X \to Y$ thỏa mãn, với mọi $\varepsilon > 0$, ta có

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \le \varepsilon,\ \forall x, y \in X. \tag{1}$$

Khi đó tồn tại giới hạn sau

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} f(2^n x) \tag{2}$$

với mỗi $x \in X$ và tồn tại duy nhất hàm cộng tính $A : X \to Y$ thỏa mãn

$$\|f(x) - A(x)\| \le \varepsilon,\ \forall x \in X. \tag{3}$$

Ví dụ 1. Nghiệm của phương trình Cauchy hai ẩn hàm.

Bài toán 1. Tìm cặp hàm $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình sau

$$f(x+y) = g(x) + g(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Tiếp theo ta xét tính ổn định nghiệm của phương trình (4).

Mệnh đề 4. *Giả sử hàm $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$|f(x+y) - g(x) - g(y)| \leq \varepsilon \tag{5}$$

với ε là số dương tùy ý cho trước và với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó tồn tại duy nhất một hàm cộng tính $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{cases} |f(x) - A(x) - f(0)| \leq 4\varepsilon \\ |g(x) - A(x) - g(0)| \leq 3\varepsilon \end{cases}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Nghiệm của phương trình Pexider.

Bài toán 2. Tìm tất cả các hàm $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình sau

$$f(x+y) = g(x) + h(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{6}$$

Tiếp theo ta xét tính ổn định nghiệm của phương trình (6).

Mệnh đề 5. *Giả sử hàm $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$|f(x+y) - g(x) - h(y)| \leq \varepsilon \tag{7}$$

với ε là số dương tùy ý cho trước và với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó tồn tại duy nhất một hàm cộng tính $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{cases} |f(x) - A(x) - f(0)| \leq 6\varepsilon \\ |g(x) - A(x) - g(0)| \leq 4\varepsilon \\ |h(x) - A(x) - h(0)| \leq 6\varepsilon \end{cases}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Tiếp theo ta xét tính ổn định nghiệm của phương trình (**??**).

Mệnh đề 6. *Giả sử hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

$$|f(\frac{x+y}{2}) - \sqrt{f(x)f(y)}| \leq \varepsilon \tag{8}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ và

$$|f(x) - f(-x)| \leq \delta \tag{9}$$

với ε, δ là các số dương tùy ý cho trước. Giả sử tồn tại $f(a)^{-1}$, khi đó tồn tại một hàm $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ sao cho

$$|E(x+y) - E(x) - E(y)| \leq \alpha, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{10}$$

và

$$|f(x) - \frac{1}{2}(E(x) - E(-x))| \leq \beta, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{11}$$

với α, β là các hằng số nào đó.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu, Phương trình hàm, Nhà xuất bản Giáo dục, 1997.

[2] Pl. Kannappan, Functional Equations and Inequalities with Applications, Springer, 2009, 295-323.

Một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức lượng giác trong tam giác

Phạm Thị Nhàn, Sở Giáo Dục và Đào Tạo Quảng Ninh

Trong các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia, Olympic Toán quốc tế và khu vực thường xuất hiện các bài toán về chứng minh các bất đẳng thức lượng giác trong tam giác hay các bài toán tìm cực trị biểu thức lượng giác trong tam giác. Đó cũng là một trong các dạng bài toán khó đối với học sinh. Báo cáo này nhằm đề cập đến một vài cách chứng minh các bất đẳng thức lượng giác dạng không đối xứng trong tam giác với vế trái là các biểu thức dạng

$$xf(A) + yf(B) + zf(C)$$

và một số bài toán liên quan.

Tất cả những ai quan tâm đến các bất đẳng thức lượng giác trong tam giác đều biết đến những dạng bất đẳng thức quen thuộc sau và đã biết cách giải quyết chúng:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}, \tag{1}$$

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}, \tag{2}$$

$$\tan A \tan B \tan C \geqslant 3\sqrt{3}, \tag{3}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}, ... \tag{4}$$

được gọi là các bất đẳng thức dạng đối xứng trong tam giác phụ thuộc vào tổng và tích các hàm số lượng giác cơ bản.

Bài toán 1. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta đều có

$$\sin A + \sin B - \cos C \leqslant \frac{3}{2}.$$

Bài toán 2. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta đều có

$$\sin A + \sin B - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos C \leqslant \frac{5\sqrt{3}}{6}.$$

Tổng quát hơn ta có

Bài toán 3. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta đều có

$$\sin A + \sin B - \frac{1}{m} \cos C \leqslant \frac{m^2 + 2}{2m}.$$

Bài toán 4. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta đều có

$$\sin A + \sin B + \sqrt{3}\sin C \leqslant \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

Ta có bài toán tổng quát sau:

Bài toán 5. Cho các số dương x, y, z. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta đều có

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 2(-1)^{n+1}(yz\cos nA + zx\cos nB + xy\cos nC), \tag{1}$$

Bài toán 6. Cho các số dương x, y, z. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta đều có

$$x\cos A + y\cos B + z\cos C \leqslant \frac{1}{2}(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}), \tag{7}$$

Giải.

Bài toán 7. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta đều có

$$3\cos A + 4\cos B + 5\cos C \leqslant \frac{769}{120}.$$

Bài toán 8. Tam giác ABC, thoả mãn điều kiện gì nếu :

$$a)\frac{\cos A}{3} + \frac{\cos B}{4} + \frac{\cos C}{5} = \frac{5}{12}.$$

$$b)\frac{\cos A}{5} + \frac{\cos B}{12} + \frac{\cos C}{3} = \frac{119}{780}.$$

$$c)\cos A + \cos B + \frac{\cos C}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Bài toán 9. Cho a, b, c là ba cạnh tương ứng với 3 góc A, B, C của tam giácABC. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta đều có

$$bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Bài toán 10. Cho ABC là tam giác nhọn. Chứng minh rằng với mọi x thuộc$\mathbb{R}$ ta đều có :

$$\cos A + (\cos B + \cos C)x \leqslant 1 + \frac{x^2}{2}. \tag{12}$$

Bài toán 11. Cho x, y, z đều dương. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta đều có

$$x\sin\frac{A}{2} + y\sin\frac{B}{2} + z\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{2}(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}), \tag{13}$$

Bài toán 12. Cho các số dương x, y, z thoả mãn điều kiện

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}. \tag{5}$$

Chứng minh rằng với mọi tam giác nhọn ABC, ta đều có

$$x\cos A + y\cos B + z\cos C < \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Bài toán 13. Cho x là số thực không âm và a, b, c là ba cạnh tương ứng với 3 góc A, B, C của tam giácABC. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta đều có :

$$a^x\cos A + b^x\cos B + c^x\cos C \leqslant \frac{1}{2}(a^x + b^x + c^x).$$

Bài toán 14. Cho các số dương x, y, z thoả mãn điều kiện

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{z} \leqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :$P = x\cos 2A + y\cos 2B - z\cos 2C$.

Bài toán 15. Cho các số dương x, y, z thoả mãn điều kiện

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{z} \leqslant \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{z}.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :$P = x\cos A + y\cos B + z\cos C$

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu, Phạm Thị Bạch Ngọc "*Một số bài toán chọn lọc về lượng giác*", NXB Giáo dục 2002.

[2] Các tạp chí Kvant, Toán học và tuổi trẻ, T liệu Internet.

[3] Trần Phương "*Các chuyên đề bất đẳng thức và cực trị lượng giác*" , NXB Hà nội 2006

Một số lớp phương trình hàm đa ẩn sinh bởi phi đẳng thức

Trần Viết Tường, Trường THPT Trần Phú - Đà Nẵng

Trong toán học phổ thông các bài toán về phương trình hàm là các loại toán thường mới và rất khó, thường xuyên xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi quốc gia, Olympic Toán khu vực và Quốc tế, Olympic sinh viên giữa các trường Đại học và cao đẳng. Liên quan đến các dạng toán này là các bài toán về các đặc trưng khác nhau của hàm số và các tính chất liên quan với chúng. Để hệ thống các phương trình hàm, cần thiết phải hệ thống các kiến thức cơ bản và nâng cao về các dạng phương trình hàm cũng như các ứng dụng của chúng.
Đối với các bài toán về phương trình hàm với nhiều ẩn hàm trong các lớp hàm cụ thể: liên tục, khả vi, tuần hoàn, lồi lõm,... cần nắm được một số kĩ thuật về biến đổi hàm số, khảo sát các tính chất cơ bản của hàm thực và các phép biến hình trên trục thực.

0.1 Phương trình hàm sinh bởi phi đẳng thức $a^2 + b^2 \not\equiv g(a+b)h(a-b)$

Bài toán 1. Tìm các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện
$$f(x^2 + y^2) = g(x + y).h(x - y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Bài toán 2. Tìm tất cả các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện
$$f(x^2 - y^2) = g(x - y) + h(x + y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Bài toán 3. Tìm tất cả các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện
$$f(x^2 - y^2) = g^2(x) - h^2(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Bài toán 4. Tìm các hàm số f, g, h liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện
$$f(x) - g(y) = xh(y) - yh(x),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Bài toán 5. Tìm tất cả các hàm số f, g xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện
$$f(x) - f(y) = (x + y)g(x - y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Bài toán 6. Tìm tất cả các hàm số f, g xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện
$$f(x) + f(y) + 2xy = (x + y)g(x + y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Bài toán 7. Tìm tất cả các hàm số f, g xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện
$$f(x).g(y) = x^2 - y^2,\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Bài toán 8. Tìm tất cả các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện
$$f(x + y) + g(x - y) = h(xy),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Bài toán 9. Tìm tất cả các hàm số dương f, g, h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện
$$f(x + y).g(x - y) = h(xy),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu, 1997, *Phương trình hàm,* NXB Giáo Dục

[2] Nguyễn Văn Mậu, 2006, *Các bài toán nội suy và áp dụng,* NXB Giáo Dục.

[3] Nguyễn Văn Mậu, 2009, *Phương trình hàm với nhóm hữu hạn các biến đổi phân tuyến tính*, Kỷ yếu HNKH "Các phương pháp và chuyên đề toán sơ cấp" tại Bắc Giang, 27-29/11/2009.

[4] Christopher G. Small, 2000, *Functinal equations and how to solve them*, Springer.

Một số ứng dụng tích vô hướng của hai véctơ

Trương Ngọc Đắc, Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định

Báo cáo xét tính chất của tích vô hướng của hai vectơ, góc giữa hai vectơ và các mệnh đề cơ bản về ứng dụng tích vô hướng của hai vectơ.

Ta xét ba mệnh đề cơ bản vận dụng tích vô hướng của hai vectơ để làm nền tảng giải các bài toán hình học ở chương sau (đây là ba bài toán cơ bản trong SGK Hình học 10 Nâng cao, trang 47 - 49).

Tiếp theo, trình bày một số ứng dụng tích vô hướng của hai vectơ như tính toán các yếu tố hình học, dựa vào các đẳng thức vectơ trong tam giác, ta cũng có các đẳng thức về độ dài các yếu tố trong tam giác, các bài toán cực trị hình học.

Bài toán (2007-England). Gọi H là trực tâm tam giác ABC, P là điểm nằm trong mặt phẳng tam giác ABC khác A, B, C. Các điểm L, M, N lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ H đến đường thẳng PA, PB, PC. Gọi X, Y, Z lần lượt là giao điểm của LH, MH, NH với BC, CA và AB. Chứng minh rằng ba điểm X, Y, Z thẳng hàng.

Bài toán. Cho đường tròn (O, R). Xét tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O, R). Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = AB^2 + BC^2 2 - CA^2$.

Hàm số mũ - vấn đề "Biết rồi - khổ lắm - nói mãi" mà vẫn chưa hết

Phạm Huy Điển, Trung tâm Tin học, Viện KH và CN VN

Chắc rằng hầu hết học sinh lớp 12 (thậm chí cả lớp 11 nữa) đều cho rằng hàm số mũ là thứ "đã biết rồi". Rành rành trong các sách giáo khoa đều đã đưa định nghĩa hẳn hoi! Vậy nó là gì?

Muốn biết hàm số mũ, trước hết phải biết thế nào là luỹ thừa bậc b của một số a (tức a^b). Nếu b là một số hữu tỷ thì định nghĩa chẳng khó khăn gì, mọi sách đều đưa ra định nghĩa giống nhau và đúng: khi b là số tự nhiên thì lũy thừa bậc b của một số được định nghĩa như phép nhân của số ấy với chính nó (b lần); khi b là số nguyên âm thì lũy thừa bậc b được định nghĩa như nghịch đảo của luỹ thừa bậc $-b$; phép khai căn bậc nguyên dương của một số được định nghĩa như phép tính ngược của phép nâng lên luỹ thừa; khi b là một số hữu tỷ (nghĩa là $b = p/q$, với p là số nguyên và q là số tự nhiên) thì lũy thừa bậc b một số được định nghĩa như là hợp của 2 phép toán: nâng lên luỹ thừa (với bậc p) và khai căn (với bậc q).

Vấn đề trở nên thực sự nan giải khi b là một số vô tỷ.

Để định nghĩa luỹ thừa với số mũ vô tỷ, sách giáo khoa toán phổ thông đã từng phải dựa vào một mệnh đề " không thể chứng minh được chặt chẽ trong khuôn khổ chương trình phổ thông". Đại ý của mệnh đề đó là: với mỗi số $a > 1$ có duy nhất một hàm liên tục nhận giá trị thực mà tại các điểm hữu tỷ q thì nó nhận giá trị là a^q. Ngay học sinh đại học cũng phải đầu hàng tính "thần bí" của mệnh đề này, vì nó đụng đến 2 vấn đề rất hóc búa: Khi nào thì một hàm số xác định trên tập số hữu tỷ có thể "thác triển được" thành một hàm liên tục trên toàn bộ trục số thực? Và nếu được thì khi nào sự thác triển là duy nhất? Tất nhiên, với một định nghĩa như vậy thì ta không thể làm gì hơn ngoài việc tiếp tục công nhận các tính chất được đưa ra sau định nghĩa (vì không thể chứng minh được).

Sách Giáo khoa Thực nghiệm "Đại số và Giải tích 11" (dành cho hệ chuyên ban A, NXB Giáo dục - 1995) cũng đã từng đưa định nghĩa "Luỹ thừa cơ số a với số mũ vô tỷ b (ký hiệu bởi a^x) là $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}$, trong đó $\{x_n\}$ là một dãy số hữu tỷ gần đúng thiếu của x". Tiếc rằng sách không cho biết nhiều về khái niệm dãy số hữu tỷ gần đúng thiếu của số vô tỷ nên ta không biết tổng của 2 dãy số hữu tỷ gần đúng thiếu (của 2 số vô tỷ) thì có là dãy số hữu tỷ gần đúng thiếu (của tổng của 2 số vô tỷ đó) hay không. Cho nên ta cũng không biết các tính chất của luỹ thừa bậc hữu tỷ được chuyển sang cho luỹ thừa bậc vô tỷ như thế nào. Tuy nhiên, điều áy náy này chẳng mấy chốc cũng bị "che phủ" bởi điều áy náy lớn hơn, khi ta thấy tính liên tục của hàm mũ cũng được đưa ra một cách "vô điều kiện".

Rõ ràng, những cách định nghĩa như vậy là chưa thể thỏa mãn được nguyện vọng của những người muốn hiểu các khái niệm toán học một cách "đến nơi đến chốn". Tóm lại: Muốn biết hàm số mũ là gì thì "hãy đợi đấy!!!".

Đợi đến bao giờ đây?

Chưa có ai trả lời câu hỏi này, nhưng người đã qua đại học rồi thì có thể cho bạn lời khuyên đích thực là: đừng hy vọng gì nhiều ở chương trình bậc đại học, vì ở đó người ta thường cho rằng "hàm mũ đã được dạy từ thời phổ thông!".

Nếu bạn không muốn chờ đợi thêm thì hãy cùng chúng tôi làm "một cuộc chen ngang", khám phá bản chất của hàm số mũ ngay trong lòng chương trình lớp 11. Chúng ta sẽ thiết lập khái niệm hàm số mũ một cách chặt chẽ về mặt toán học, mà không cần vay mượn bất cứ một kết quả nào từ chương trình đại học. Trước hết, ta cần thấy rằng đây là một hàm không đơn giản hơn (nếu không nói là khó hơn hẳn) các hàm lượng giác, cho nên việc xây dựng nó cần một sự đầu tư về thời gian và công sức không quá eo hẹp so với những gì ta đã dành cho các hàm lượng giác (gần như cả nửa quyển sách giáo khoa lớp 11). Bản thân số vô tỷ đã được coi như giới hạn của dãy số hữu tỷ, cho nên việc xây dựng luỹ thừa bậc vô tỷ không thể không dựa vào khái niệm này.

Đường thẳng Simson

Nguyễn Bá Đang, Sở GD và ĐT Hải Dương

Robert Simson là một nhà toán học người Scotland, giáo sư toán học của đại học Glasgow. Ông sinh 14 tháng 10 năm 1687tại West Kilbride và mất ngày 1 tháng 10 năm 1768 tại Glasgow.

Trong nhiều năm gần đây các kì thi trong nước, quốc tế cũng như khu vực thường sử dụng đường thẳng Simson vào giải toán hình học phẳng. Xin giới thiệu để bạn đọc tham khảo.

1. Đường thẳng Simson

Bài toán 1: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn ( ). M là điểm tùy ý trên ( ), gọi D, E, H là hình chiếu của trên BC, CA, AB. Chứng minh D, E, H thẳng hàng.

Bài toán 2: Cho tam giác ABC, M là điểm trong mặt phẳng chứa tam giác ABC. Gọi D, E, H là hình chiếu của M lần lượt trên các cạnh BC, CA, AB và D, E, H thẳng hàng. Chứng minh M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC, M là điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi K, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng của M qua BC, CA, AD. Chứng minh P, K, Q nằm trên một đường thẳng và luôn đi qua một điểm cố định, không phụ thuộc vào điểm M thay đổi trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. (Olimpia Japan 1996)

Phép nghịch đảo và ứng dụng

Hồ Quang Vinh, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ

Trong suốt bài viết chúng ta kí hiệu X * là ảnh của X qua phép nghịch đảo được xét.

Từ định nghĩa trên ta thấy rằng, qua phép nghịch đảo các điểm trên đường tròn (k) đứng nguyên tại chỗ, các điểm nằm trong (k) biến ra ngoài, còn các điểm nằm ngoài (k) thì biến vào trong. Nếu điểm A biến thành A*, thì điểm A* qua phép nghịch đảo đó biến thành điểm A, tức là (A*)* = A.

Các tính chất. Qua một phép nghịch đảo tâm O với bán kính r:

1) Một đường thẳng qua O biến thành chính nó.

2) Một đường thẳng l không đi qua O biến thành đường tròn đi qua O, tâm của đường tròn đó là điểm C* (C là điểm đối xứng với O qua đường thẳng l)

3) Một đường tròn với tâm là điểm C qua O biến thành một đường thẳng không đi qua O, vuông góc với OC.

4) Một đường tròn không đi qua O biến thành một đường tròn không đi qua O (Hai đường tròn này không nhất thiết bằng nhau).

5) Sự tiếp xúc của các đường tròn và các đường thẳng được bảo toàn, nếu như tiếp điểm không trùng với tâm nghịch đảo; còn nếu trùng thì nhận được một cặp đường song song.

6) Góc giữa hai đường tròn (góc giữa đường thẳng và đường tròn, giữa hai đường thẳng) bảo toàn qua phép nghịch đảo.

Theo truyền thống từ thời cổ Hy Lạp, trong hình học thường xét phép dựng hình bằng compa và thước kẻ. Nhưng cũng có thể tiến hành dựng hình bằng compa không có thước kẻ. Bằng compa, tất nhiên không thể dựng ngay được tất cả các điểm của đường thẳng, do đó ta sẽ coi rằng đường thẳng đã được dựng nếu như đã dựng được tất cả các phép dựng mà có thể thực hiện được nhờ compa và thước kẻ. Để dựng hình chỉ bằng compa chủ yếu là nhờ nó có thể dựng được ảnh của điểm qua phép nghịch đảo đối với một đường tròn cho trước với tâm cho trước.

Sử dụng phép nghịch đảo, chúng ta có thể giải được khá gọn những bài toán khó trong các Kì thi chọn học sinh giỏi Toán Quốc gia , các Kì thi Olympic Toán học Quốc tế.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] V.V Praxolov. Các bài toán về hình học phẳng, Tập 2, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh, năm 2003.

[2] Các bài dự tuyển Olympic Toán học Quốc tế, Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội 2003.

[3] 1999 National Contests Problems and Solution, Published and distributed by Mathematical Association of America.

[4] Mathematical Olympiad Problems and Solutions From Around the Wolrd, 1995 - 1996, 1996 - 1997, 1997 - 1998, 1998 - 1999, 1999 - 2000, 2000 - 2001, Edited by Titu Andreescu, Zuming Feng and George Lee, Jr Walter Mientka. Published and distributed by Mathematical Association of America.

[5] Một số Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ các năm từ 2003 - 2007.

Những bài toán thi học sinh giỏi lớp 9 về số học

Nguyễn Việt Hải, Tạp chí THTT

Trong bài này các chữ đều biểu thị số nguyên, nếu không là số nguyên sẽ ghi chú riêng.

Chuyên đề 1. Một số bài toán về sự chia hết và sự chia có dư
I. Kiến thức cơ bản
1. Các dấu hiệu chia hết cho 2, 4, 5, 3, 9, 11, 7.
2. Các tính chất của phép chia hết. Lưu ý :
a) Nếu a và b đều chia hết cho m ($m \neq 0$) thì a + b và a - b đều chia hết cho n.
b) Nếu a chia hết cho n và b không chia hết cho m ($m \neq 0$) thì a + b và a - b đều không chia hết cho m.
3. Các tính chất cơ bản của ước chung lớn nhất (UCLN) và bội chung nhỏ nhất (BCNN) của hai số trong SGK .
4. Các tính chất cơ bản của những số nguyên tố và hợp số trong SGK .
5. Các tính chất cơ bản của những số nguyên tố cùng nhau.
6. Các hằng đẳng thức đáng nhớ dạng $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, ...
7. Sự chia hết của đa thức
8. Điều kiện có nghiệm nguyên của tam thức bậc hai
9. Sự chia hết của tích các số nguyên liên tiếp

II. Các bài toán về sự chia hết và chia có dư
A. Các bài toán về sự chia hết
B. Các bài toán về sự chia có dư

Chuyên đề 2. Một số bài toán về số chính phương và số lũy thừa

I.Tính chất của số chính phương
II. Một số dạng toán về số chính phương và số lũy thừa
A. Bài toán chứng minh một số không là số chính phương
B. Bài toán chứng minh một số là số chính phương
C. Bài toán xác định giá trị của biến để một biểu thức số là số chính phương

Chuyên đề 3. Một số bài toán về dãy số
A. Tính chất của phép chia và của các số nguyên tố cùng nhau
B. Phương pháp phản chứng
C. Nguyên tắc Dirichlet trong Số học
D. Phương pháp cực hạn
E.Bài toán chọn số trong dãy số

Bài toán 3.7. a) Chứng minh rằng trong 100 số nguyên dương có thể chọn được một hay nhiều số mà tổng của chúng chia hết cho 100.

b) Chứng minh rằng trong 100 số nguyên dương có thể chọn được một hay nhiều số mà tổng các bình phương của chúng chia hết cho 100.

Bài toán 3.8. a) Trong 2n số nguyên từ 1 đến 2n chọn n + 1 số nào đó. Chứng minh rằng trong các số được chọn có ít nhất một số bằng tổng hai số cũng được chọn (hai số này có thể bằng nhau hoặc khác nhau).

b) Có thể lấy nhiều nhất bao nhiêu số trong 2n số nguyên dương đầu tiên để một số bất kì được chọn không bằng tổng của của hai số cũng được chọn (hai số này có thể bằng nhau hoặc khác nhau).

C.Bài toán tìm cực trị của một biểu thức chứa các số thuộc một dãy số

Một số bài toán được xây dựng từ công thức Taylor

Đào Xuân Luyện, THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định

Trong quá trình giảng dạy, ta thường gặp một số bài toán về phương trình, về bất đẳng thức mà một vế là hàm siêu việt như hàm lượng giác, hàm mũ, hay hàm lôgarit và vế còn lại là một đa thức. Câu hỏi đặt ra tại sao lại có được các mối quan hệ đó và "ở đâu" người ta lại có các bất đẳng thức đẹp đến vậy.

Trong bài viết " Một số bài toán xây dựng từ công thức Taylor" tác giả sẽ làm rõ được phần nào câu hỏi đó .

Một số phương pháp giải phương trình hàm bậc THCS

Lê Thị Thanh Bình, THCS Bình Minh, TP Hải Dương

Hàm số là một trong những khái niệm mới và khó đối với học sinh THCS nhưng thời lượng dành cho nội dung này ở trong chương trình rất hạn chế (28 tiết học chia ra ở lớp 7 và lớp 9). Vì vậy, dạy cho học trò nắm chắc các khái niệm và khảo sát được một số tính chất của các hàm đơn giản là công việc không dễ. Càng khó hơn mỗi khi phải giải bài toán ngược: xác định hàm số từ một vài tính chất cho trước của nó. Chuyên đề sau đây cung cấp một số phương pháp đơn giản để tìm hàm số trong khuôn khổ của chương trình Toán bậc trung học cơ sở.

Tìm một hàm số thoả mãn một số điều kiện nào đó gọi là giải phương trình hàm. Trong bài này trình bày chi tiết các phương pháp cơ bản giải phương trình hàm bậc THCS:

1. Phương pháp đặt ẩn phụ
2. Phương pháp đưa về giải hệ phương trình
3. Phương pháp sử dụng tính chất của đa thức
4. Phương pháp đồng nhất hệ số
5. Phương pháp xét các giá trị đặc biệt của biến số
6. Giải một số dạng bài tập khác thông qua giải phương trình hàm

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Văn Mậu. Đa thức và áp dụng, NXBGDVN 2008.
[2] Tạp chí Toán học và tuổi trẻ - NXBGDVN.
[3] Tuyển chọn các đề thi tuyển sinh.

Chuyên đề cho Đại số 9: Phần nguyên và ứng dụng

Phạm Thị Bạch Ngọc, Tạp chí TH và TT

Trong bài này xét các tính chất của phần nguyên và các bài toán liên quan. Tiếp theo xét một số ứng dụng về chứng minh một số bài toán số học, giải phương trình có chứa dấu phần nguyên và khảo sát bất phương trình chứa phần nguyên.