
# HỆ PHƯƠNG TRÌNH có chứa tham số

CAO QUỐC CƯỜNG
(GV THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc)

Khi gặp những bài toán tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình (HPT) có nghiệm duy nhất, vô nghiệm, vô số nghiệm, học sinh thường mắc nhiều sai sót. Trong bài viết này sẽ hệ thống lại một số cách làm cơ bản và những sai lầm thường gặp, giúp các em tránh sai lầm khi gặp các bài tập dạng này.

✪**Bài toán 1.** *Cho hệ phương trình (m là tham số):* $\begin{cases} mx+4y=20 & (1) \\ x+my=10 & (2) \end{cases}$

*Với giá trị nào của m thì hệ phương trình đã cho:*

*a) Vô nghiệm;*

*b) Có nghiệm duy nhất;*

*c) Vô số nghiệm.*

***Lời giải.*** *Cách* 1. Từ PT(2) $\Rightarrow x = 10 - my$, thế vào PT(1) ta có $y(4 - m^2) = 20 - 10m$ (3)

Dễ thấy số nghiệm của HPT đã cho chính là số nghiệm của PT(3).

a) HPT đã cho vô nghiệm $\Leftrightarrow$ PT(3) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 4-m^2=0 \\ 20-10m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-2.$

b) HPT đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ PT(3) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow 4 - m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$.

c) HPT có vô số nghiệm thì PT(3) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 4-m^2=0 \\ 20-10m=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=2.$ □

__Sai lầm thường gặp.__ Khi xét trường hợp PT(3) vô nghiệm nhiều bạn quên điều kiện $20 - 10m \neq 0$. Vì vậy dẫn tới kết luận sai: HPT vô nghiệm $\Leftrightarrow m = \pm 2$.

*Cách 2*

• Nếu $m = 0$, HPT đã cho trở thành $\begin{cases} x=10 \\ y=5. \end{cases}$

Hệ PT có nghiệm duy nhất.

• Nếu $m \neq 0$, HPT đã cho tương đương với

$$\begin{cases} y=\dfrac{-m}{4}x+5 & (a) \\ y=\dfrac{-1}{m}x+\dfrac{10}{m} & (b) \end{cases}$$

Dễ thấy số nghiệm của HPT đã cho chính là số giao điểm của hai đường thẳng (*a*) và (*b*).

a) HPT đã cho vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (*a*) // (*b*)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-m}{4}=\dfrac{-1}{m} \\ 5\neq\dfrac{10}{m} \end{cases} \Leftrightarrow m=-2.$$

b) HPT đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (*a*) cắt (*b*)

$$\Leftrightarrow \frac{-m}{4}\neq\frac{-1}{m} \Leftrightarrow m\neq\pm 2.$$

c) HPT đã cho có vô số nghiệm $\Leftrightarrow (a) \equiv (b)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-m}{4}=\dfrac{-1}{m} \\ 5=\dfrac{10}{m} \end{cases} \Leftrightarrow m=2.$$ □

__Sai lầm thường gặp.__ Khi xét trường hợp (*a*) // (*b*) nhiều bạn chỉ xét điều kiện $\dfrac{-m}{4}=\dfrac{-1}{m}$ mà quên điều kiện $5\neq\dfrac{10}{m}$ nên dẫn tới kết luận sai: HPT vô nghiệm $\Leftrightarrow m \pm 2$.

**✪Bài toán 2.** *Cho hệ phương trình*

$$\begin{cases} mx - y - n = 0 \\ (x+y-2)(x-2y+1) = 0 \end{cases}$$

*(m, n là tham số). Tìm các giá trị của m, n để hệ phương trình vô nghiệm.*

***Lời giải.*** HPT đã cho tương đương với

$$\begin{cases} mx - y - n = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} mx - y - n = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = mx - n \ (a) \\ y = -x + 2 \ (b) \end{cases} \text{(I) hoặc } \begin{cases} y = mx - n \ (c) \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \ (d) \end{cases} \text{(II)}$$

Ta có HPT đã cho vô nghiệm $\Leftrightarrow$ cả HPT (I) và HPT (II) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a // b \\ c // d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1; n \neq -2 \\ m = \frac{1}{2}; n \neq -\frac{1}{2}. \end{cases}$

Vậy không tồn tại $m$, $n$ để HPT đã cho vô nghiệm. ❒

**✪Bài toán 3.** *Cho hệ phương trình* $\begin{cases} mx + y = -1 \\ x + y = -m. \end{cases}$

*Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) thoả mãn $y^2 = x$.*

***Lời giải.*** Rút $y$ từ PT thứ nhất của hệ rồi thế vào PT thứ hai của hệ ta có $(1 - m)x = 1 - m$ (1)

Ta có HPT đã cho có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ PT(1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m \neq 1$ (*)

Khi đó HPT có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = -m - 1. \end{cases}$

Mặt khác, $y^2 = x \Leftrightarrow (-m-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -2 \end{array}\right.$

(thoả mãn ĐK (*)).

Vậy có hai giá trị của $m$ là $m = 0$ hoặc $m = -2$. ❒

**✪Bài toán 4.** *Cho hệ phương trình*

$$\begin{cases} x + my = 3m & (1) \\ mx - y = m^2 - 2 & (2) \end{cases}$$

*Tìm m để hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất thoả mãn $x^2 - 2x - y > 0$.*

***Lời giải.*** Từ PT(1) ta có $x = 3m - my$ (*), thế vào PT(2) ta có

$m(3m - my) - y = m^2 - 2 \Leftrightarrow y(m^2 + 1) = 2m^2 + 2$

$\Leftrightarrow y = 2$, thay vào PT(*) ta có $x = m$.

Vậy HPT luôn có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = m \\ y = 2. \end{cases}$

Để $x^2 - 2x - y > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 2 > 0$

$\Leftrightarrow (m - 1)^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 + \sqrt{3} \\ m < 1 - \sqrt{3}. \end{array}\right.$ ❒

**✪Bài toán 5.** *Cho hệ phương trình*

$$\begin{cases} (m-1)x + y = 3m - 4 & (1) \\ x + (m-1)y = m & (2) \end{cases}$$

*Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thoả mãn $x + y = 2$.*

***Lời giải.*** Từ PT(2) $\Rightarrow x = m - (m - 1)y$, thế vào PT(1) ta có $y(m^2 - 2m) = m^2 - 4m + 4$ (3)

Vậy, HPT đã cho có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ PT(3) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m^2 - 2m \neq 0$

$\Leftrightarrow m \neq 0$ và $m \neq 2$ (*).

Khi đó nghiệm của HPT đã cho là $\begin{cases} x = \dfrac{3m-2}{m} \\ y = \dfrac{m-2}{m}. \end{cases}$

Để $x + y = 2$ ta có $\dfrac{3m-2}{m} + \dfrac{m-2}{m} = 2 \Leftrightarrow m = 2$

(không thoả mãn ĐK (*)). Vậy không tìm được giá trị của $m$ để HPT đã cho có nghiệm duy nhất thoả mãn $x + y = 2$. ❒

**✪Bài toán 6.** *Cho hệ phương trình*

$$\begin{cases} ax + y = b & (1) \\ x^2 - 4y^2 = 1 & (2) \end{cases} \quad (a, b \text{ là tham số})$$

*Tìm các giá trị của a để hệ phương trình trên có nghiệm với mọi b.*

***Lời giải.*** Từ PT(1) $\Rightarrow y = b - ax$, thế vào PT(2) ta có $x^2 - 4(b - ax)^2 = 1$

$\Leftrightarrow (1 - 4a^2)x^2 + 8abx - 4b^2 - 1 = 0$ (3)

*(Xem tiếp trang 15)*


# Giải hệ phương trình

NGUYỄN THANH HÀI
*(GV. THCS Nam Cường, Nam Trực, Nam Định)*

*Trong chương trình Toán 9, phần hệ phương trình (HPT) chiếm một vị trí quan trọng. Sau đây chúng tôi hệ thống lại một số dạng thường gặp cùng phương pháp giải.*

**A. Giải hệ phương trình bằng áp dụng định lí Viét đảo**

**Bài toán 1.** Giải HPT $\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+y^2=13. \end{cases}$ (1)

**Lời giải.** Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ (x+y)^2-2xy=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6. \end{cases}$$

Theo định lí Viét đảo thì x, y là hai nghiệm của PT $t^2-5t+6=0 \Leftrightarrow t=2; t=3$.

Vậy $(x ; y) = (2 ; 3), (3 ; 2)$.

**Bài toán 2.** Cho HPT (m là tham số):

$$\begin{cases} x+y=m+1 \\ x^2y+y^2x=2m^2-m-3. \end{cases} \quad (2)$$

a) Giải (2) khi $m = 3$.

b) Chứng minh rằng (2) luôn có nghiệm, $\forall m$.

**Lời giải.** a) Khi $m = 3$ thì

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ xy(x+y)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ xy=3. \end{cases}$$

Theo định lí Viét đảo thì x, y là hai nghiệm của PT $t^2-4t+3=0 \Leftrightarrow t=1; t=3$.

Vậy $(x ; y) = (1 ; 3), (3 ; 1)$.

b) Ta có $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=m+1 \\ xy(x+y)=(m+1)(2m-3). \end{cases}$

+ Nếu $m = -1$ thì $(2) \Leftrightarrow x + y = 0$. Hệ có vô số nghiệm: $y = -x, x \in \mathbb{R}$.

+ Nếu $m \neq -1$ thì $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=m+1 \\ xy=2m-3. \end{cases}$

Theo định lí Viét đảo thì x, y là hai nghiệm của PT $t^2-(m+1)t+2m-3=0$.

Ta có $\Delta = (m+1)^2 - 4(2m-3)$
$= m^2 - 6m + 13 = (m-3)^2 + 4 > 0, \forall m$.

Vậy (2) luôn có nghiệm $\forall m$.

**B. Giải hệ phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ**

**Bài toán 3.** Giải HPT $\begin{cases} \dfrac{2}{3x-y}-\dfrac{5}{x-3y}=3 \\ \dfrac{1}{3x-y}+\dfrac{2}{x-3y}=\dfrac{3}{5}. \end{cases}$ (3)

**Lời giải.** Điều kiện $3x - y \neq 0$, $x - 3y \neq 0$.

Đặt $u = \dfrac{1}{3x-y}$, $v = \dfrac{1}{x-3y}$.

Ta được $(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2u-5v=3 \\ u+2v=\dfrac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=-\dfrac{1}{5}. \end{cases}$

Từ đó $\begin{cases} 3x-y=1 \\ x-3y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ (thỏa mãn).

**Bài toán 4.** Giải HPT $\begin{cases} \sqrt{x+1}-3\sqrt{y-1}=-1 \\ 2\sqrt{x+1}+5\sqrt{y-1}=9. \end{cases}$ (4)

**Lời giải.** Điều kiện $x \geq -1$, $y \geq 1$.

Đặt $u = \sqrt{x+1}$, $v = \sqrt{y-1}$ $(u, v \geq 0)$.

Ta được $(4) \Leftrightarrow \begin{cases} u-3v=-1 \\ 2u+5v=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=1. \end{cases}$

Từ đó $\begin{cases} \sqrt{x+1}=2 \\ \sqrt{y-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=4 \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ (TM).

**C. Hệ phương trình chứa tham số**

**Bài toán 5.** Giải và biện luận HPT (m là tham số): $\begin{cases} mx+2y=m+1 & (1) \\ 2x+my=3. & (2) \end{cases}$ (I)

**Lời giải.** Từ (1) suy ra $y = \dfrac{-mx+m+1}{2}$.

Thay vào (2) ta được $2x + \dfrac{m(-mx+m+1)}{2} = 3$

$\Leftrightarrow x(2-m)(2+m) = (2-m)(3+m)$.

+ Nếu $m = 2$ thì (I) $\Leftrightarrow x + y = \dfrac{3}{2}$. Hệ có vô số nghiệm: $y=\frac{3}{2}-x,\ x\in\mathbb{R}$.

+ Nếu m = –2 thì 0x = –4, hệ vô nghiệm.

+ Nếu m ≠ ±2 thì (I) có nghiệm duy nhất

$$x=\frac{m+3}{m+2},\ y=\frac{1}{m+2}.$$

**Bài toán 6.** Cho HPT (m là tham số)

$$\begin{cases} x+my=1 & (1)\\ mx-3my=2m+3. & (2)\end{cases} \quad (II)$$

a) Giải (2) khi m = –3.

b) Giải và biện luận HPT theo m.

**Lời giải.** a) Khi m = –3 thì

$$(II)\Leftrightarrow\begin{cases} x-3y=1\\ -3x+9y=-3\end{cases}\Leftrightarrow x-3y=1.$$

Hệ có vô số nghiệm: x = 3y + 1, $y\in\mathbb{R}$.

b) Từ (1) suy ra x = 1 – my.

Thay vào (2) ta được

m(1 – my) – 3my = 2m + 3

⇔ m(m + 3)y = – (m + 3).

+ Nếu m = –3 thì hệ có vô số nghiệm: x = 3y + 1, $x\in\mathbb{R}$.

+ Nếu m = 0 thì 0x = –3, hệ vô nghiệm.

+ Nếu m ≠ –3, m ≠ 0 thì hệ có nghiệm duy nhất $x=2,\ y=-\frac{1}{m}$.

**Bài toán 7.** Tìm tất cả các số nguyên m để HPT sau có nghiệm x, y nguyên dương (m là tham số) $\begin{cases} mx+4y=10-m & (1)\\ x+my=4. & (2)\end{cases}$ (III)

**Lời giải.** Từ (2) suy ra x = 4 – my.

Thay vào (1) ta được

m(4 – my) + 4y = 10 – m

⇔ (2 – m)(2 + m)y = 5(2 – m).

+ Nếu m = 2 thì x + 2y = 4. Hệ có vô số nghiệm: x = 4 – 2y, $y\in\mathbb{R}$.

Để x > 0 thì y < 2.

Khi đó nghiệm nguyên dương của (III) là

x = 2, y = 1.

+ Nếu m = –2 thì 0y = 20, hệ vô nghiệm.

+ Nếu m ≠ ±2 thì hệ có nghiệm duy nhất

$$x=\frac{8-m}{m+2},\ y=\frac{5}{m+2}.$$

Để $y\in\mathbb{Z}^+$ thì m + 2 ∈ {1 ; 5} ⇔ m ∈ {–1 ; 3}: thử lại thỏa mãn.

Vậy m ∈ {–1 ; 2 ; 3}.

**Bài toán 8.** Tìm tất cả các số thực m để HPT sau có nghiệm duy nhất (x ; y) mà $A=x^2+y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất (m là tham số)

$$\begin{cases} (m-1)x-my=3m-1 & (1)\\ 2x-y=m+5. & (2)\end{cases} \quad (IV)$$

**Lời giải.** Từ (2) suy ra y = 2x – m – 5.

Thay vào (1) ta được

(m – 1)x – m(2x – m – 5) = 3m – 1

⇔ (m + 1)x = $(m+1)^2$.

Hệ có nghiệm duy nhất ⇔ m ≠ –1.

Khi đó x = m + 1, y = m – 3.

Ta có $A=x^2+y^2=(m+1)^2+(m-3)^2$ $=2m^2-4m+10=2(m-1)^2+8\geq 8$.

Từ đó $A_{min}=8$ tại m = 1 (thỏa mãn).

Vậy m = 1.

**Bài tập tự luyện.**

**Bài 1.** Cho HPT (m là tham số)

$$\begin{cases} x+y+xy=2m+1\\ xy(x+y)=m^2+m.\end{cases}$$

a) Chứng minh rằng hệ luôn có nghiệm, m.

b) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

**Bài 2.** Giải HPT $\begin{cases} \frac{2x}{x+1}+\frac{y}{y+1}=3\\ \frac{x}{x+1}+\frac{3y}{y+1}=-1.\end{cases}$

**Bài 3.** Cho HPT (m là tham số) $\begin{cases} x+my=2\\ mx-2y=1.\end{cases}$

a) Giải hệ khi m = 2.

b) Tìm $m\in\mathbb{Z}^+$ để hệ có nghiệm duy nhất (x ; y) mà x, y > 0.

c) Tìm $m\in\mathbb{Z}$ để hệ có nghiệm duy nhất (x ; y) mà $x, y\in\mathbb{Z}$.

**Bài 4.** Tìm tất cả các số thực m để HPT sau có nghiệm (x ; y) mà P = xy đạt giá trị lớn nhất (m là tham số) $\begin{cases} (m+1)x+my=2m-1\\ mx-y=m^2-2.\end{cases}$


# Hệ hoán vị vòng quanh

ThS. KIỀU ĐÌNH MINH *(GV. THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)*

***Trên các số báo 66 và 74, TTT2 đã giới thiệu hai bài viết của nhà giáo Nguyễn Anh Dũng về* Hệ phương trình đối xứng loại I và II. *Để giúp các bạn có một chuyên đề về các hệ phương trình, trong số báo này, chúng tôi giới thiệu thêm một hệ đặc biệt nữa, đó là hệ hoán vị vòng quanh.***

***Bài viết này chỉ xét đến hệ phương trình ba ẩn hoán vị vòng quanh cùng cách giải. Qua đó, các bạn tự rút ra hướng giải cho những hệ hoán vị vòng quanh có số ẩn khác.***

Xét hệ phương trình ba ẩn dạng

$$\begin{cases} x = f(y) \\ y = f(z) \\ z = f(x) \end{cases}$$

ở đây f là một hàm số.

Thông thường, khi giải hệ trên, ta thường dựa vào một số tính chất của hàm f (như tính đồng biến, nghịch biến... ) để chứng minh $x = y = z$ rồi giải phương trình $x = f(x)$. Từ đó tìm ra nghiệm của hệ đã cho.

Sau đây là một số ví dụ.

**Bài toán 1.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - \sqrt{y} = 1 \\ y - \sqrt{z} = 1 \\ z - \sqrt{x} = 1. \end{cases} \qquad (1)$$

**Lời giải.** Điều kiện $x, y, z \ge 0$.

Viết lại (1) dưới dạng

$$\begin{cases} x = \sqrt{y} + 1 \\ y = \sqrt{z} + 1 \\ z = \sqrt{x} + 1. \end{cases}$$

Do vai trò bình đẳng trong hoán vị vòng quanh của x, y, z trong hệ trên, ta có thể giả sử

$$x = \min\{x ; y ; z\}.$$

Vì $x \le y$, $x \le z$ nên

$\sqrt{y} + 1 \le \sqrt{z} + 1$, $\sqrt{y} + 1 \le \sqrt{x} + 1$ hay $y \le z$, $y \le x$.

Tức là $y = \min\{x ; y ; z\} = x$.

Suy ra $x = y = z$.

Từ đó ta được phương trình

$$x = \sqrt{x} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = x - 1$$

$\Rightarrow x = (x - 1)^2$ (điều kiện $x \ge 1$)

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$ (do $x \ge 1$).

Vậy nghiệm của hệ đã cho là

$$(x ; y ; z) = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} ; \frac{3 + \sqrt{5}}{2} ; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

**Bài toán 2.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x - 5 = y \\ y^3 + 3y^2 + 2y - 5 = z \\ z^3 + 3z^2 + 2z - 5 = x. \end{cases} \qquad (2)$$

**Lời giải.** Do vai trò bình đẳng trong hoán vị vòng quanh của x, y, z trong hệ trên, ta có thể giả sử

$$x = \max\{x ; y ; z\}.$$

Vì $y \le x$ nên $x^3 + 3x^2 + 2x - 5 \le x$

$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + x - 5 \le 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 4x + 5) \le 0.$

Vì $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1 > 0$ nên $x \le 1$.

Mà $z \le x$ nên $z \le 1$.

Lập luận ngược lại quá trình trên ta được

$(z - 1)(z^2 + 4z + 5) \le 0$

$\Leftrightarrow z^3 + 3z^2 + 2z - 5 \le z \Leftrightarrow x \le z.$

Do đó $x = z$.

Suy ra $x = y = z$.

Từ đó ta được phương trình

$x^3 + 3x^2 + 2x - 5 = x$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 4x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là

$(x\,;y\,;z) = (1\,;1\,;1)$.

**Bài toán 3.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + x^2 + x - 2 = y \\ y^3 + y^2 + y - 2 = z \\ z^3 + z^2 + z - 2 = x. \end{cases} \qquad (3)$$

**Nhận xét.** Ta có thể giải bài toán này tương tự như lời giải *bài toán 2*. Tuy nhiên, ta có thể giải theo một hướng khác bằng cách xét hàm số như sau.

**Lời giải.** Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + t - 2$, $t \in \mathbb{R}$.

Ta sẽ chứng minh f là hàm số đồng biến.

Thật vậy, với $t_1$, $t_2$ là hai số thực phân biệt bất kì, ta có $\dfrac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} = t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2 + t_1 + t_2 + 1$

$= \dfrac{1}{2}\left((t_1 + t_2)^2 + (t_1 + 1)^2 + (t_2 + 1)^2\right) > 0.$

Hệ đã cho được viết lại dưới dạng

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = f(y) \\ x = f(z). \end{cases}$$

Ta xét hai trường hợp sau.

**TH1.** $x \geq y$.

Vì f là hàm đồng biến nên $f(x) \geq f(y)$ hay $y \geq z$.

Suy ra $f(y) \geq f(z)$ hay $z \geq x$.

Từ đó $x \geq y \geq z \geq x$.

Suy ra $x = y = z$.

Từ đó ta được phương trình

$x^3 + x^2 + x - 2 = x \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

(vì $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0$).

**TH2.** $x < y$.

Chứng minh tương tự ta được $x < y < z < x$: loại.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $x = y = z = 1$.

**Bài toán 4.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

**Lời giải.** Viết lại (4) dưới dạng

$$\begin{cases} y^3 = 6x^2 - 12x + 8 \\ z^3 = 6y^2 - 12y + 8 \\ x^3 = 6z^2 - 12z + 8. \end{cases}$$

Vì $y^3 = 6(x - 1)^2 + 2 \geq 2$ nên $y \geq \sqrt[3]{2}$.

Tương tự: $z, x \geq \sqrt[3]{2}$.

Xét hàm số $f(t) = 6t^2 - 12t + 8$, với $t \geq \sqrt[3]{2}$.

Tương tự như *bài toán 3*, ta chứng minh được f là hàm đồng biến.

Hệ đã cho được viết lại dưới dạng

$$\begin{cases} y^3 = f(x) \\ z^3 = f(y) \\ x^3 = f(z). \end{cases}$$

Ta xét hai trường hợp sau.

**TH1.** $x \geq y$.

Vì f là hàm đồng biến nên $f(x) \geq f(y)$ hay $y^3 \geq z^3$.

Do đó $y \geq z$.

Suy ra $f(y) \geq f(z)$ hay $z^3 \geq x^3$. Do đó $z \geq x$.

Từ đó $x \geq y \geq z \geq x$.

Suy ra $x = y = z$.

Từ đó ta được phương trình

$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

**TH2.** $x < y$.

Chứng minh tương tự ta được $x < y < z < x$: loại.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là

$(x\,;y\,;z) = (2\,;2\,;2)$.

**Bài tập tự luyện.**

Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x + 1 = y^3 + y^2 + y \\ 2y + 1 = z^3 + z^2 + z\,; \\ 2z + 1 = x^3 + x^2 + x \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0 \\ y^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0\,; \\ z^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 - 16y + 8 = 0 \\ y^4 - 16z + 8 = 0\,; \\ z^4 - 16x + 8 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = \sqrt{4z - 1} \\ y + z = \sqrt{4x - 1} \\ z + x = \sqrt{4y - 1}. \end{cases}$$


# Từ những đẳng thức đẹp

ĐINH NGỌC THUẦN *(GV. THPT Thái Phiên, Hải Phòng)*

*Trong quá trình giải toán, hẳn các bạn đã gặp những đẳng thức hay, là chìa khóa để giải các bài toán khác. Bài viết này tôi muốn chia sẻ với các bạn một số đẳng thức như vậy.*

**Đẳng thức 1.** Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$A = \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1. \qquad (1)$$

*(Đề thi vào lớp 10, PTNK, ĐHQG HCM; Năm học 1997-1998)*

**Chứng minh.** Vì $xyz = 1$ nên

$$\frac{1}{1+y+yz} = \frac{x}{x+xy+xyz} = \frac{x}{x+xy+1};$$

$$\frac{1}{1+z+zx} = \frac{xy}{xy+xyz+x^2yz} = \frac{xy}{xy+1+x}.$$

Từ đó $A = \dfrac{1+x+xy}{1+x+xy} = 1$, ta có đpcm.

**Nhận xét.** Từ (1) ta thu được đẳng thức sau:

$$\frac{1}{1+x^2+x^2y^2} + \frac{1}{1+y^2+y^2z^2} + \frac{1}{1+z^2+z^2x^2} = 1, \ (2)$$

với x, y, z là ba số thực thỏa mãn $xyz = 1$.

**Ví dụ 1.** Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng $2B \le 1$, với

$$B = \frac{1}{2x^2+y^2+3} + \frac{1}{2y^2+z^2+3} + \frac{1}{2z^2+x^2+3}.$$

**Lời giải.** Vì $(x-y)^2 + (x-1)^2 \ge 0$ nên

$$x^2 + y^2 - 2xy + x^2 + 1 - 2x \ge 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + y^2 + 3 \ge 2(xy + x + 1).$$

Do đó $\dfrac{1}{2x^2+y^2+3} \le \dfrac{1}{2(xy+x+1)}$.

Tương tự $\dfrac{1}{2y^2+z^2+3} \le \dfrac{1}{2(yz+y+1)}$;

$$\frac{1}{2z^2+x^2+3} \le \frac{1}{2(zx+z+1)}.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng trên ta được

$$B \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}\right) = \frac{1}{2}$$

(theo (1)). Từ đó suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

**Ví dụ 2.** Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$C = \frac{1}{(x+1)^2+y^2+1} + \frac{1}{(y+1)^2+z^2+1} + \frac{1}{(z+1)^2+x^2+1}.$$

**Lời giải.** Ta có $(x+1)^2 + y^2 + 1 = x^2 + y^2 + 2x + 2$ $= (x-y)^2 + 2(xy + x + 1) \ge 2(xy + x + 1)$.

Suy ra $\dfrac{1}{(x+1)^2+y^2+1} \le \dfrac{1}{2(xy+x+1)}$.

Tương tự $\dfrac{1}{(y+1)^2+z^2+1} \le \dfrac{1}{2(yz+y+1)}$;

$$\frac{1}{(z+1)^2+x^2+1} \le \frac{1}{2(zx+z+1)}.$$

Cộng theo vế ba đẳng thức trên ta được

$$C \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}\right) = \frac{1}{2}$$

(theo (1)), ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

**Ví dụ 3.** Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng $D \ge 1$, với

$$D = \frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a}.$$

**Lời giải.** Vì $abc = 1$ nên

$$\frac{a}{a+2b} = \frac{a}{a+2ab^2c} = \frac{1}{1+2b^2c} \ge \frac{1}{1+b^2+b^2c^2}$$

(do áp dụng bất đẳng thức Côsi với hai số dương $b^2$ và $b^2c^2$).

Tương tự

$$\frac{b}{b+2c} \geq \frac{1}{1+c^2+c^2a^2}; \frac{c}{c+2a} \geq \frac{1}{1+a^2+a^2b^2}.$$

Do đó

$$D \geq \frac{1}{1+b^2+b^2c^2} + \frac{1}{1+c^2+c^2a^2} + \frac{1}{1+a^2+a^2b^2} = 1$$

(do (2)), ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

**Nhận xét.** Qua các ví dụ trên, chúng ta nhận thấy điểm mấu chốt để giải được các bài toán ở trên là nhận ra các đẳng thức (1) và (2).

**Đẳng thức 2.** Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $xyz = 2$. Chứng minh rằng

$$M = \frac{x}{2+x+xy} + \frac{y}{1+y+yz} + \frac{2z}{2+2z+zx} = 1. \quad (3)$$

*(Đề thi vào lớp 10, PTNK, ĐHQG HCM; Năm học 2009-2010)*

**Lời giải.** Vì $xyz = 2$ nên

$$\frac{y}{1+y+yz} = \frac{xy}{x+xy+xyz} = \frac{xy}{x+xy+2};$$

$$\frac{2z}{2+2z+zx} = \frac{2z}{xyz+2z+zx} = \frac{2}{xy+2+x}.$$

Do đó $M = \dfrac{x+xy+2}{2+x+xy} = 1$, ta có đpcm.

**Ví dụ 4.** Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 2$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{2x^2+y^2+5} + \frac{2y}{6y^2+z^2+6} + \frac{4z}{3z^2+4x^2+16} \leq \frac{1}{2}$$

**Lời giải.** Tương tự *thí dụ 1*, ta có

$$\frac{x}{2x^2+y^2+5} \leq \frac{x}{2(xy+x+2)};$$

$$\frac{2y}{6y^2+z^2+6} \leq \frac{2y}{4(yz+y+1)} = \frac{y}{2(yz+y+1)};$$

$$\frac{4z}{3z^2+4x^2+16} \leq \frac{4z}{4(zx+2z+2)} = \frac{z}{zx+2z+2}.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên và kết hợp với (3), ta suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x = y = 1; z = 2.$$


*Toán Tuổi thơ 2 số 84 đã đăng bài viết **Các dạng toán về phương trình bậc hai chứa tham số**. Trong bài viết này tôi cùng trao đổi với các bạn một số bài toán khác.*


CAO QUỐC CƯỜNG *(GV. THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc)*


# *Tiếp tục về phương trình bậc hai chứa tham số*

**Bài toán 1.** Giải và biện luận phương trình

$$mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0 \qquad (1)$$

với m là tham số.

**Lời giải.** Ta xét hai trường hợp.

**TH1.** $m = 0$. Khi đó (1) có dạng

$$4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}.$$

**TH2.** $m \neq 0$. Ta có

$$\Delta' = (m-2)^2 - m(m-3) = 4 - m.$$

+ $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 4 - m < 0 \Leftrightarrow m > 4$.

Khi đó (1) vô nghiệm.

+ $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 4 - m = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

Khi đó (1) có nghiệm kép

$$x_{1,2} = \frac{m-2}{m} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

+ $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4$.

Khi đó (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_{1,2} = \frac{m-2 \pm \sqrt{4-m}}{m}.$$

**Bài toán 2.** Cho hai phương trình

$$x^2 + x + a = 0 \qquad (1)$$

và $\quad x^2 + ax + 1 = 0 \quad$ (2) (a là tham số).

Với giá trị nào của a thì hai phương trình trên tương đương?

**Lời giải.** Hai phương trình tương đương nếu xảy ra một trong hai trường hợp sau:

**TH1.** Mọi nghiệm của (1) đều là nghiệm của (2) và ngược lại.

Giả sử $x_0$ là một nghiệm chung của (1) và (2).

Khi đó $x_0^2 + x_0 + a = 0$; $x_0^2 + ax_0 + 1 = 0$.

Suy ra $x_0 + a = ax_0 + 1 \Leftrightarrow x_0(a-1) = a - 1$.

+ Nếu $a = 1$. Khi đó thay vào (1) ta tính được $\Delta_1 = 1 - 4a = -3 < 0$: vô lí vì (1) có nghiệm.

+ Nếu $a \neq 1$ thì $x = 1$.

Thay vào (1) ta được $a = -2$.

Khi đó (1) có hai nghiệm là 1 và $-2$, còn (2) có nghiệm kép là 1: loại.

**TH2.** Cả hai phương trình (1) và (2) đều vô nghiệm

$$\begin{cases}\Delta_1 < 0\\ \Delta_2 < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1 - 4a < 0\\ a^2 - 4 < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a > \dfrac{1}{4}\\ -2 < a < 2\end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < a < 2.$$

Vậy với $\frac{1}{4} < a < 2$ thì hai phương trình đã cho tương đương.

**Bài toán 3.** Cho phương trình

$x^2 - (m-2)x - m^2 + 3m - 4 = 0$ (m là tham số).

Tìm m để tỉ số giữa hai nghiệm của phương trình có giá trị tuyệt đối bằng 2.

**Lời giải.** Vì $ac = -\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{4} < 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu $x_1$, $x_2$.

Để tỉ số giữa hai nghiệm của phương trình có giá trị tuyệt đối bằng 2 thì

$x_1 = -2x_2$ hoặc $x_2 = -2x_1$

hay $(x_1 + 2x_2)(x_2 + 2x_1) = 0$. Tức là

$$2(x_1^2 + x_2^2) + 5x_1x_2 = 0 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 = 0.$$

Theo hệ thức Viét ta có

$$\begin{cases}x_1 + x_2 = m - 2\\ x_1x_2 = -m^2 + 3m - 4.\end{cases}$$

Do đó $2(m-2)^2 - m^2 + 3m - 4 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = -4$.

Vậy với $m = 1$ hoặc $m = -4$ thì tỉ số giữa hai nghiệm của phương trình đã cho có giá trị tuyệt đối bằng 2.

**Bài toán 4.** Cho phương trình
$$x^2 - px + p = 0$$
với p là một số nguyên dương.

Tìm p để phương trình có nghiệm nguyên.

**Lời giải.** Ta có $\Delta = p^2 - 4p$.

Để phương trình có nghiệm nguyên thì $\Delta$ phải là số chính phương.

Suy ra tồn tại số nguyên dương k để
$$p^2 - 4p = k^2 \Leftrightarrow k^2 - (p-2)^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow (k+p-2)(k-p+2) = 4.$$

Vì $k + p - 2 + k - p + 2 = 2k$, là một số chẵn nên cả hai số $k + p - 2$ và $k - p + 2$ đều chẵn.

Từ đó $k + p - 2 = k - p + 2 = 2$

hoặc $k + p - 2 = k - p + 2 = -2$.

Suy ra $p = 2$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành
$$x^2 - 2x + 2 = 0\text{: vô nghiệm.}$$

Vậy không tồn tại số nguyên p để phương trình đã cho có nghiệm nguyên.

**Bài toán 5.** Cho p là một số nguyên tố, a là một số nguyên dương thỏa mãn $1+2\sqrt{a}$ không là số nguyên tố. Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm hữu tỉ: $x^2 - 2\sqrt{a}x - p = 0$.

**Lời giải.** Giả sử phương trình đã cho có nghiệm hữu tỉ.

Tức là khi đó các nghiệm $x = \sqrt{a} \pm \sqrt{a+p}$ đều là những số hữu tỉ.

Do đó a, a + p đều là những số chính phương.

Đặt $a = m^2$, $a + p = n^2$, với $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$.

Suy ra $p = n^2 - m^2 = (n+m)(n-m)$.

Vì p là số nguyên tố và $n + m > n - m$ nên
$$n + m = p;\ n - m = 1.$$

Do đó $p - 1 = 2m \Rightarrow p = 1 + 2m = 1 + 2\sqrt{a}$ : vô lí theo giả thiết, ta có đpcm.

**Bài toán 6.** Tìm tất cả các giá trị của a để phương trình sau có ít nhất một nghiệm nguyên:
$$2x^2 - \left(4a + \frac{11}{2}\right)x + 4a^2 + 7 = 0.$$

**Lời giải.** Giả sử phương trình có một nghiệm nguyên là $x_0$.

Ta viết lại phương trình dưới dạng
$$4a^2 - 4ax_0 + 2x_0^2 - \frac{11}{2}x_0 + 7 = 0.$$

Coi đây là phương trình bậc hai với ẩn a.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là
$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4x_0^2 - 22x_0 + 28 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x_0 \leq \frac{7}{2}.$$

Vì $x_0$ là số nguyên nên $x_0 \in \{2 ; 3\}$.

Với $x_0 = 2$, ta tìm được $a = 1$.

Với $x_0 = 3$ ta tìm được $a = \dfrac{6 \pm \sqrt{2}}{2}$.

Vậy với $a = 1$ hoặc $a = \dfrac{6 \pm \sqrt{2}}{2}$ thì phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm nguyên.

**Bài tập áp dụng**

**Bài 1.** Cho phương trình
$$(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m - 5 = 0.$$

a) Giải và biện luận phương trình.

b) Với giá trị nào của m thì phương trình trên có một nghiệm bằng bình phương của nghiệm còn lại.

c) Với giá trị nào của m thì phương trình đã cho tương đương với phương trình
$$x^2 + (2m-1)x + m^2 - 3 = 0.$$

**Bài 2.** Cho hai phương trình
$$x^2 + m_1x + n_1 = 0 \ (1)$$
và
$$x^2 + m_2x + n_2 = 0 \ (2).$$

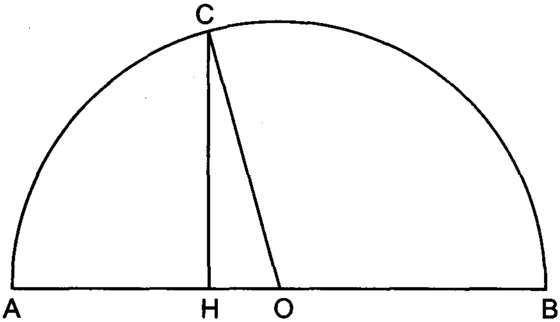
Biết $m_1m_2 \geq 2(n_1 + n_2)$.

Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm.

# PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC TRONG ĐẠI SỐ

PGS. LÊ QUỐC HÁN *(Khoa Toán, Đại học Vinh)*

**1.** Ngay từ thời Thượng cổ, loài người đã biết sử dụng công cụ hình học để giải các bài toán đại số. Trong các Kim tự tháp do người Ai Cập xây dựng cách đây trên ba nghìn năm, những hình vẽ được khắc trên vách đá đã chứng tỏ họ biết chứng minh bất đẳng thức Côsi với hai số dương từ rất sớm. Trên đường thẳng xy lấy ba điểm A, H, B sao cho AH = a, HB = b. Đường thẳng kẻ từ H, vuông góc với AB cắt nửa đường tròn tâm O đường kính AB tại C.




Vì $CH^2 = ab$ nên $CH = \sqrt{ab}$.

Mà $CO \geq CH$ nên $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi H trùng O, nghĩa là khi và chỉ khi a = b.

Ngày nay, sử dụng các tính chất đã biết của hình học có thể giải các bài toán đại số phức tạp hơn.

**Bài toán 1.** Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng:

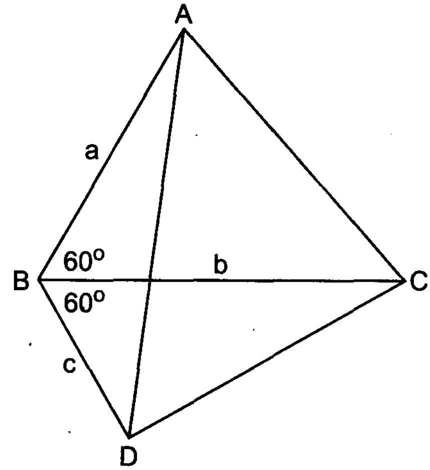
$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{c^2 + ca + a^2}.$$

**Lời giải.** Dựng hai tam giác ABC và BCD sao cho AB = a, BC = b, BD = c, $\widehat{ABC} = \widehat{CBD} = 60^o$.

Khi đó $AC^2 = a^2 - ab + b^2$; $CD^2 = b^2 - bc + c^2$; $AD^2 = a^2 + ac + c^2$.

Vì AC + CD ≥ AD nên suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi A, C, D thẳng hàng, nghĩa là khi và chỉ khi $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{b}$.




**Bài toán 2.** Cho số nguyên n > 1.

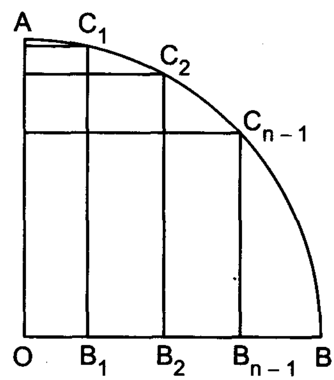
Chứng minh rằng

$$\sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \ldots + \sqrt{n^2 - (n-1)^2} < \frac{\pi n^2}{4}.$$

**Lời giải.** Dựng một phần tư đường tròn tâm O, bán kính bằng 1.

Chia đoạn OB thành n phần bằng nhau bởi các điểm chia $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$.

Từ $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ dựng các đường thẳng vuông góc với OB, cắt cung tròn tại $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$.




Dựng n – 1 hình chữ nhật có một cạnh bằng $\dfrac{1}{n}$, cạnh còn lại tương ứng là $B_1C_1, B_2C_2, \ldots, B_{n-1}C_{n-1}$.

Gọi S là tổng diện tích của n – 1 hình chữ nhật trên. Theo định lí Pytago, ta có

$$B_1C_1 = \sqrt{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2-1};\ B_2C_2 = \frac{1}{n}\sqrt{n^2-2^2};\ldots$$

$$B_nC_n = \frac{1}{n}\sqrt{n^2-(n-1)^2}.$$

Với chú ý $S < S_{\text{quạt } OAB} = \frac{\pi}{4}$ và

$$S = \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\ldots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right)$$

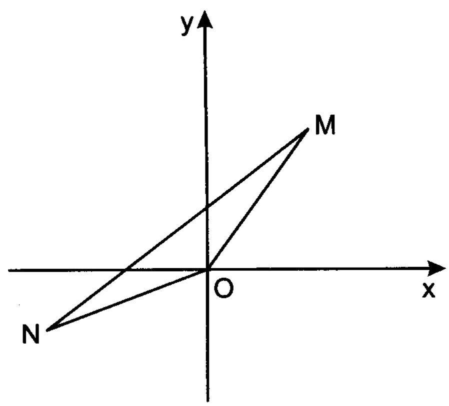
ta suy ra đpcm.

**2.** Vào đầu thế kỉ XVII, nhà toán học Pháp R.Descartes (1596 - 1650) đưa ra phương pháp tọa độ. Từ đó, việc sử dụng công cụ đại số để giải các bài toán hình học ngày càng được áp dụng rộng rãi. Tuy nhiên, rất ít người thực hiện theo chiều ngược lại: *dùng công cụ hình học để giải bài toán đại số.* Sau đây là một số ví dụ.

**Bài toán 3.** Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c, d thì

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \ge \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}.$$

**Lời giải.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc xOy, lấy hai điểm M(a ; b) và N(–c ; – d).




Khi đó $OM = \sqrt{a^2+b^2}; ON = \sqrt{c^2+d^2};$

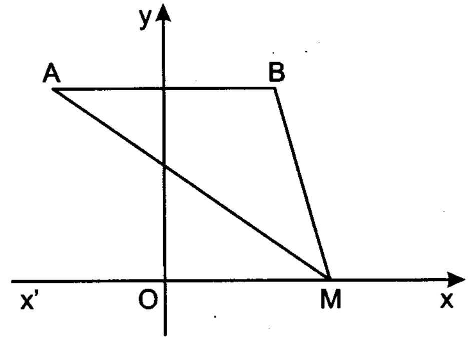
$MN = \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}.$

Vì OM + ON ≥ MN nên suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M, O, N thẳng hàng, nghĩa là khi và chỉ khi a : c = b : d.

**Bài toán 4.** Tìm m để phương trình sau có nghiệm $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1} = m.$

**Lời giải.** Lấy các điểm

$$A\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ và } M(x\ ;\ 0).$$




Ta thấy AB = 1 và

$MA = \sqrt{x^2+x+1};\ MB = \sqrt{x^2-x+1}.$

Vì |MA – MB| ≤ AB nên |m| ≤ 1.

Vì AB // Ox và M nằm trên xOx' nên dấu đẳng thức không xảy ra.

Hơn nữa, $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ biến thiên từ 0 đến 1 khi M chuyển động trên tia Ox, và từ –1 đến 0 khi M chuyển động trên tia Ox'.

Vậy –1 < m < 1.

**Bài tập tự luyện.**

**Bài 1.** Chứng minh bất đẳng thức

a) $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)} \le \sqrt{ab}$, với a, b ≥ c > 0.

b) $\sqrt{a^2-\sqrt{2}ab+b^2}+\sqrt{b^2-\sqrt{3}bc+c^2}$

$\ge \sqrt{a^2-\sqrt{2}-\sqrt{3}ac+c^2}$, với a, b, c > 0.

**Bài 2.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

a) $y = \sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}.$

b) $y = \sqrt{x^2-2px+2p^2}+\sqrt{x^2-2qx+2q^2},$

với p, q là hai số cho trước khác nhau.

**Bài 3.** Tìm m để phương trình sau có nghiệm

a) $\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-\sqrt{3}x+1} = m.$

b) $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1} = m.$

**Bài 4.** Xác định điều kiện của a, b, c để hệ sau có nghiệm dương và xác định nghiệm dương đó:

$$\begin{cases} a = \sqrt{x^2+xy+y^2} \\ b = \sqrt{y^2+yz+z^2} \\ c = \sqrt{z^2+zx+x^2}. \end{cases}$$

**Bài 5.** Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là n số thực bất kì. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{a_1^2+(1-a_2)^2}+\sqrt{a_2^2+(1-a_3)^2}+\ldots+$$

$$+\sqrt{a_{n-1}^2+(1-a_n)^2}+\sqrt{a_n^2+(1-a_1)^2} \ge \frac{n\sqrt{2}}{2}.$$

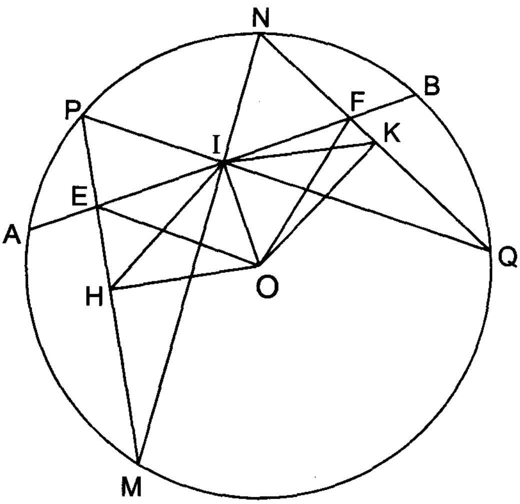

# Ứng dụng của BÀI TOÁN CON BƯỚM

HOÀNG ĐỨC NGUYÊN
*(GV. trường THPT chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội)*

**Bài toán con bướm.** Cho I là trung điểm của dây cung AB của đường tròn (O). Qua I vẽ 2 dây cung tùy ý MN và PQ sao cho M, Q nằm cùng phía so với AB. Các dây cung MP và NQ cắt AB lần lượt tại E và F.

Chứng minh rằng I là trung điểm của EF.

**Chứng minh.** Gọi H, K lần lượt là trung điểm của MP và NQ.




Ta có $\widehat{IOE} = \widehat{IHE}$ (vì tứ giác IOHE nội tiếp)

$= \widehat{IKF}$ (vì $\Delta IMP \backsim \Delta IQN$)

$= \widehat{IOF}$ (vì tứ giác IOKF nội tiếp).

Do đó $\Delta OEF$ cân tại O $\Rightarrow$ IE = IF (đpcm).

**Một vài ứng dụng.**

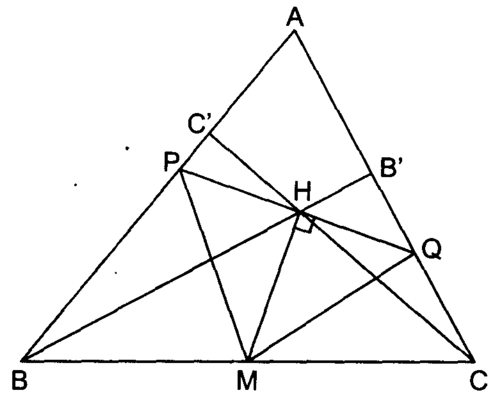
**Bài toán 1.** Cho $\Delta ABC$ nhọn có trực tâm H. Gọi M là trung điểm của BC. Đường thẳng qua H và vuông góc với MH cắt AB, AC lần lượt tại P và Q.

Chứng minh rằng $\Delta MPQ$ cân.

**Lời giải.** Gọi giao điểm của BH với AC là B', của CH với AB là C'.

Vì tứ giác BCB'C' nội tiếp đường tròn tâm M nên theo bài toán con bướm ta có HP = HQ.

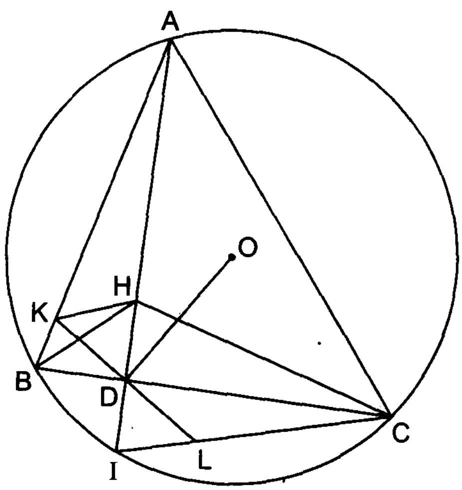
Do đó $\Delta MPQ$ cân tại M (đpcm).




**Bài toán 2.** Cho $\Delta ABC$ nhọn có đường cao AD; O và H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm. Đường thẳng qua D và vuông góc với OD cắt AB tại K.

Chứng minh rằng $\widehat{DHK} + \widehat{AHC} = 180^\circ$.

**Lời giải.** Gọi giao điểm thứ hai của đường thẳng AD với đường tròn (O) là I, của KD với IC là L.




Ta thấy DI = DH và DL = DK (theo bài toán con bướm).

Do đó $\Delta IDL = \Delta HDK$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{DHK} = \widehat{DIL}$.

Vậy $\widehat{DHK} + \widehat{AHC} = \widehat{AIC} + \widehat{AHC} =$
$= \widehat{IHC} + \widehat{AHC} = 180^o$ (đpcm).

**Bài toán 3.** Cho $\Delta ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O) có H là trực tâm và tgBtgC = 3. BH và CH theo thứ tự cắt (O) tại B', C'; B'C' cắt AH tại P.

Chứng minh rằng P là trung điểm của AH.

**Lời giải.** Gọi Q và A' lần lượt là giao điểm của AH với BC và đường tròn (O).

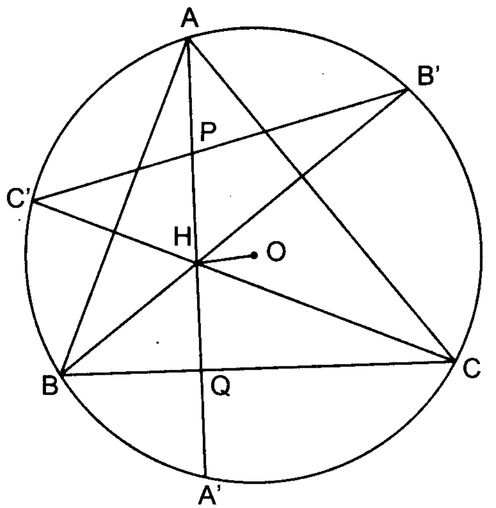
Ta có tgBtgC = 3 $\Leftrightarrow$ tgBtg$\widehat{BHQ}$ = 3

$\Leftrightarrow \frac{QA}{QB} \cdot \frac{QB}{QH} = 3 \Leftrightarrow QA = 3QH \Leftrightarrow AH = 2QH.$ (1)

Do đó AH = HA' (vì QA' = QH).

Theo bài toán con bướm ta có HP = HQ. (2)

Từ (1) và (2) suy ra PA = PH hay P là trung điểm của AH (đpcm).




**Bài toán 4.** Cho $\Delta ABC$ nội tiếp đường tròn (O) có I là tâm đường tròn nội tiếp. Các đường thẳng BI, CI cắt (O) tương ứng tại B', C'. Gọi K, D thứ tự là giao điểm của AI với B'C' và BC.

Giả sử AB + AC = 2BC.

Chứng minh rằng I là trung điểm của KD.

**Lời giải.** Giả sử AI cắt (O) tại M (khác A).

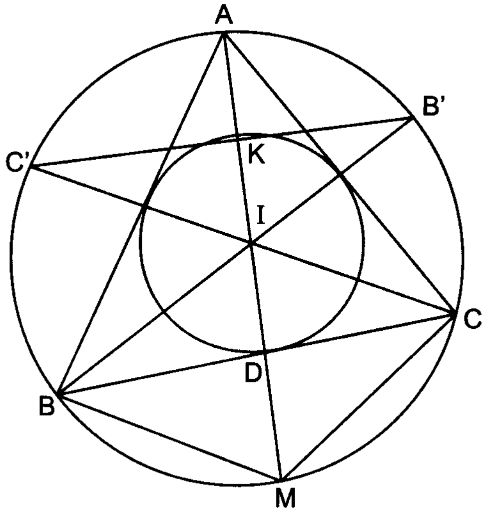
Ta thấy $\Delta MAC \backsim \Delta BAD$ (g.g).

Suy ra $\frac{MC}{MA} = \frac{BD}{BA}$.

Mà $\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC} = \frac{BC}{AB + AC}$ nên

$BD = \frac{AB \cdot BC}{AB + AC} = \frac{AB}{2} \Rightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{1}{2}.$ (1)

Xét $\Delta MIC$ có $\widehat{MIC} = \frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} = \widehat{ICM}$.




Vậy $\Delta MIC$ cân tại M $\Rightarrow$ MC = MI. (2)

Từ (1) và (2) suy ra IA = IM.

Theo bài toán con bướm ta có IK = ID (đpcm).

**Bài tập tự luyện.**

**Bài 1.** Cho hai tam giác nhọn $A_1BC$ và $A_1BC$ cùng nội tiếp trong đường tròn (O), có trực tâm tương ứng là $H_1$, $H_2$. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của $H_1H_2$ với $A_2B$, $A_2C$.

Biết rằng $\widehat{A_1H_2H_1} = 90^o$.

Chứng minh rằng $A_1P = A_1Q$.

**Bài 2.** Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I khác O. Một đường thẳng qua I vuông góc với OI cắt cạnh AB và CD tại M và N.

Chứng minh rằng AB = CD $\Leftrightarrow$ BM = CN.


# TỪ MỘT TÍNH CHẤT VỀ TRỰC TÂM TAM GIÁC

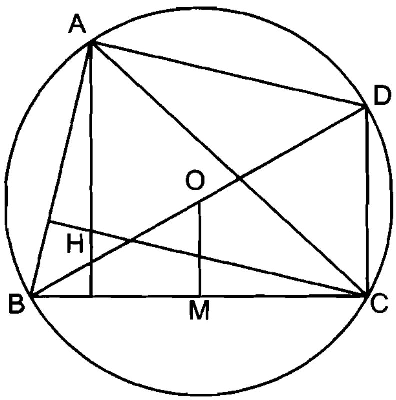
ĐẶNG HẢI GIANG
*(GV. THCS Thị trấn Cẩm Xuyên, Hà Tĩnh)*

Tính chất sau đây của trực tâm tam giác có nhiều ứng dụng trong việc giải các bài tập hình học.

**Tính chất.** Cho $\Delta ABC$ có H là trực tâm, O là tâm đường tròn ngoại tiếp và M là trung điểm BC. Thế thì $AH = 2OM$.

**Chứng minh.** Xét trường hợp $\Delta ABC$ nhọn (các trường hợp khác chứng minh tương tự).

Vẽ đường kính BD của (O).




Vì $\widehat{DAB} = 90^{\circ}$ nên $DA \perp AB$.

Mà $CH \perp AB$ nên DA // CH.

Tương tự DC // AH.

Suy ra tứ giác DAHC là hình bình hành.

Do đó DC = AH.

Mà DC = 2OM (vì OM là đường trung bình của $\Delta DBC$) nên AH = 2OM (đpcm).

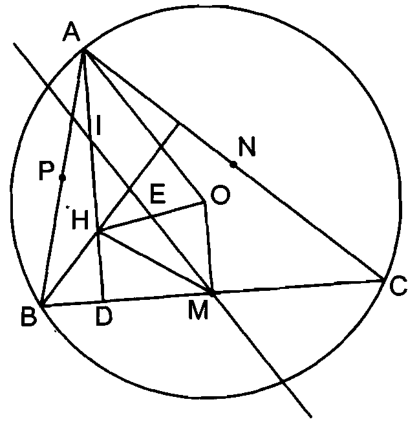
**Bài tập áp dụng**

**Bài toán 1.** Cho $\Delta ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA và AB. Chứng minh rằng các đường thẳng qua M song song với OA, qua N song song với OB và qua P song song với OC đồng quy.

**Lời giải.** Gọi H là trực tâm $\Delta ABC$; I và E lần lượt là trung điểm của HA và HO.

Vì AH = 2OM nên AI = IH = OM.

Mà AH // OM (do cùng vuông góc với BC) nên các tứ giác AIMO và IHMO là hình bình hành.




Suy ra MI // AO và E là trung điểm của MI.

Tức là E thuộc đường thẳng qua M song song với OA.

Tương tự E cũng thuộc các đường thẳng qua N song song với OB và qua P song song với OC. Từ đó suy ra đpcm.

**Bài toán 2.** Cho $\Delta ABC$ nhọn có H là trực tâm. Chứng minh rằng 9 điểm gồm chân ba đường cao, trung điểm ba cạnh và trung điểm các đoạn HA, HB, HC đồng viên.

**Lời giải.** Sử dụng hình vẽ và chứng minh của *bài toán 1* ta có:

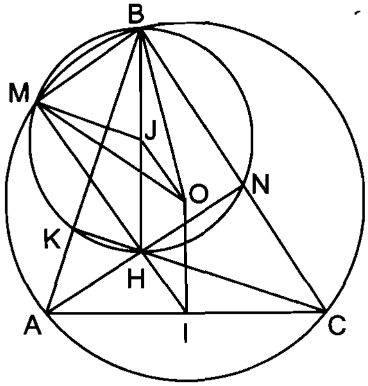
$$ED = EM = EI = \frac{1}{2}MI = \frac{1}{2}OA.$$

Sử dụng các kết quả tương tự và kết hợp với OA = OB = OC ta suy ra 9 điểm đã cho cùng thuộc đường tròn tâm E.

**Bài toán 3.** Cho $\Delta ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn tâm O có các đường cao AN và CK. Đường tròn ngoại tiếp $\Delta BKN$ cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M. Gọi I là trung điểm của AC. Chứng minh $IM \perp MB$.

**Lời giải.** Gọi H là trực tâm của $\Delta ABC$, J là trung điểm BH.

Ta thấy J là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta BKN$ và BH là đường kính của (J).




Vì IHJO là hình bình hành nên IH // OJ.

Mặt khác, vì M, B là giao điểm của hai đường tròn (O), (J) nên OJ $\perp$ MB.

Suy ra IH $\perp$ MB.

Mà BH là đường kính của (J) nên HM $\perp$ MB.

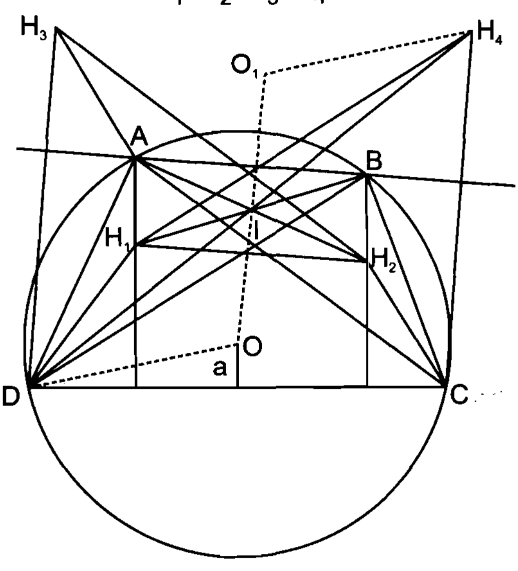
Từ đó suy ra I, H, M thẳng hàng và IM $\perp$ MB.

**Bài toán 4.** Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O ; R). Gọi $H_1$, $H_2$, $H_3$, $H_4$ thứ tự là trực tâm của các tam giác ACD, BCD, ABD và ABC.

Chứng minh rằng:

a) $BH_1$, $AH_2$, $CH_3$ và $DH_4$ đồng quy.

b) Bốn điểm $H_1$, $H_2$, $H_3$, $H_4$ đồng viên.




**Lời giải.** a) Vì $AH_1 = BH_2$ (= 2OM) và $AH_1 // BH_2$ (vì cùng vuông góc với CD) nên tứ giác $AH_1H_2B$ là hình bình hành.

Suy ra $AH_2$ và $BH_1$ cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường.

Chứng minh tương tự với các cặp điểm khác ta suy ra $BH_1$, $AH_2$, $CH_3$ và $DH_4$ đồng quy tại trung điểm I của mỗi đường (đpcm).

b) Lấy $O_1$ đối xứng với O qua I.

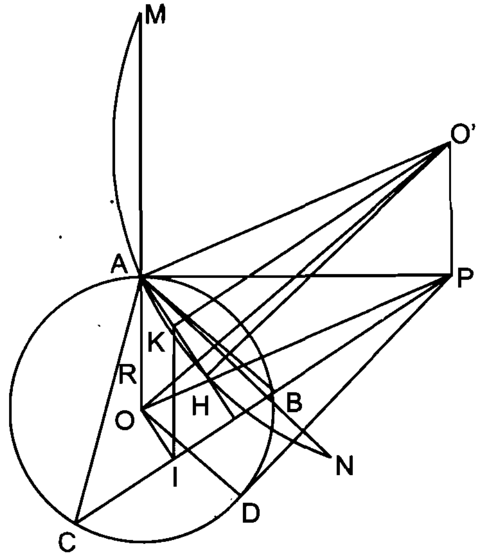
Vì tứ giác $DOH_4O_1$ là hình bình hành nên $O_1H_4 = OD = R$.

Chứng minh tương tự ta có

$$O_1H_1 = O_1H_2 = O_1H_3 = R.$$

Vậy bốn điểm $H_1$, $H_2$, $H_3$, $H_4$ cùng thuộc đường tròn tâm $O_1$ bán kính R (đpcm).

**Bài toán 5.** Cho đường tròn tâm O bán kính R và điểm P cố định nằm ngoài đường tròn. Vẽ tiếp tuyến PA và cát tuyến PBC (A, B, C nằm trên (O)). Chứng minh rằng khi cát tuyến PBC thay đổi thì trực tâm H của $\Delta$ABC chạy trên một đường cố định.




**Lời giải.** Gọi I là hình chiếu của O trên BC, K là trung điểm của AH. Lấy O' đối xứng với O qua trung điểm của PA.

Ta thấy O' là điểm cố định và tứ giác AOPO' là hình bình hành.

Suy ra O'P // AO và O'P = AO.

Cũng vì tứ giác AOIK là hình bình hành nên AO // KI và AO = KI.

Suy ra O'P // KI và O'P = KI. Từ đó tứ giác O'PIK là hình bình hành. Suy ra O'K // PI.

Mà PI $\perp$ AK nên O'K $\perp$ AK.

Suy ra $\Delta$O'AH cân tại O' $\Rightarrow$ O'H = O'A.

Từ đó H thuộc đường tròn cố định tâm O' bán kính O'A (đpcm).

**Bài tập tự luyện.**

**Bài 1.** Chứng minh rằng trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của một tam giác cùng nằm trên một đường thẳng (đường thẳng Ơle).

**Bài 2.** Cho đường tròn (O) và ba điểm A, B, C thay đổi trên (O) sao cho trực tâm H của $\Delta$ABC là một điểm cố định nằm trong (O). Tìm quỹ tích chân các đường cao của $\Delta$ABC.


# Tìm cực trị có điều kiện

THÁI HỮU HUỆ *(GV. THCS Quang Lộc, Can Lộc, Hà Tĩnh)*

*Có rất nhiều phương pháp giải một bài toán bất đẳng thức (BĐT), nhưng chúng ta cần tìm một phương pháp giải ngắn gọn nhất. Đặc biệt, chúng ta cần tạo kĩ năng chứng minh BĐT. Khi tìm hiểu về BĐT, chúng tôi nhận thấy một số BĐT có biến số xác định trong các đoạn thì ta cần xem xét kĩ giá trị các biến số đó để lập ra một BĐT đúng, rồi từ BĐT đúng này, ta biến đổi thành BĐT phải chứng minh.*

**Bài toán 1.** Cho các số thực $x, y, z \in [-1 ; 2]$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 0$.

Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 \le 6$.

**Lời giải.** Vì $x \in [-1 ; 2]$ nên $(x + 1)(x - 2) \le 0$ $\Leftrightarrow x^2 \le x + 2$.

Tương tự $y^2 \le y + 2$; $z^2 \le z + 2$.

Cộng vế theo vế của ba BĐT trên ta được

$$x^2 + y^2 + z^2 \le x + y + z + 6 = 6.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x, y, z \in \{-1 ; 2\}$ và $x + y + z = 0 \Leftrightarrow$ trong ba số x, y, z có hai số bằng $-1$, số còn lại bằng 2.

**Bài toán 2.** Cho các số thực $x, y, z \in [0 ; 2]$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$.

Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 \le 5$.

**Lời giải.** Vì $x, y, z \in [0 ; 2]$ nên

$$(x - 2)(y - 2)(z - 2) \le 0.$$

Sử dụng giả thiết $x + y + z = 3$ ta được

$$xyz - 2(xy + yz + zx) + 4(x + y + z) - 8 \le 0$$

$\Leftrightarrow xyz + (x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 + 4 \le 0$

$\Leftrightarrow xyz + (x^2 + y^2 + z^2) \le 5$.

Từ đó kết hợp với $xyz \ge 0$ ta suy ra

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 5.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$(x - 2)(y - 2)(z - 2) = 0$; $xyz = 0$ và $x + y + z = 3$ $\Leftrightarrow$ trong ba số x, y, z có một số bằng 2, một số bằng 0, số còn lại bằng 1.

**Bài toán 3.** Cho các số thực $a, b, c \in [-2 ; 5]$ thỏa mãn điều kiện $a + 2b + 3c \le 2$.

Chứng minh rằng $a^2 + 2b^2 + 3c^2 \le 66$.

*(Đề thi tuyển sinh lớp 10, năm học 2009-2010 Sở GD-ĐT Hà Tĩnh)*

**Lời giải.** Tương tự như *bài toán 1*, từ $(a + 2)(a - 5) \le 0$ ta suy ra $a^2 \le 3a + 10$ cùng các kết quả tương tự $b^2 \le 3b + 10$ và $c^2 \le 3c + 10$.

Suy ra

$a^2 + 2b^2 + 3c^2 \le 3(a + 2b + 3c) + 60 = 66$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a = -2;\ b = 5;\ c = -2.$$

**Bài toán 4.** Cho các số thực $a, b, c \in [0 ; 1]$.

Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \le 1 + a^2b + b^2c + c^2a.$$

**Lời giải.** Vì $a, b \in [0 ; 1]$ nên

$$a(1 - b) \ge a^2(1 - b).$$

Tương tự $b(1 - c) \ge b^2(1 - c)$; $c(1 - a) \ge c^2(1 - a)$.

Cộng theo vế ba BĐT trên ta suy ra

$a + b + c - (ab + bc + ca)$

$\ge (a^2 + b^2 + c^2) - (a^2b + b^2c + c^2a)$

$\Leftrightarrow 1 - (1 - a)(1 - b)(1 - c) - abc$

$\ge (a^2 + b^2 + c^2) - (a^2b + b^2c + c^2a)$

$\Leftrightarrow 1 + (a^2b + b^2c + c^2a) - abc$

$\ge (a^2 + b^2 + c^2) + (1 - a)(1 - b)(1 - c)$.

Mà $(1 - a)(1 - b)(1 - c) \ge 0$ và $abc \ge 0$ nên suy ra đpcm.

**Bài toán 5.** Cho 2010 số thực

$$a_1, a_2, \dots, a_{2010} \in [0 ; 1].$$

Chứng minh rằng

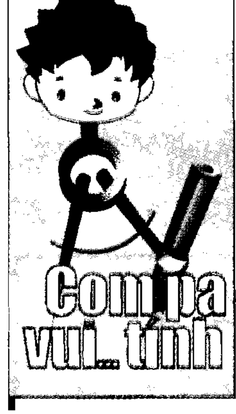
$$(1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2010})^2 \ge 4(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2010}^2).$$

**Lời giải.** Với các số thực x, y bất kì ta có

$$(x - y)^2 \ge 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 \ge 4xy.$$

Áp dụng với $x = 1$, $y = a_1 + a_2 + \dots + a_{2010}$ ta có

$(1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2010})^2 \ge 4(a_1 + a_2 + \dots + a_{2010})$. ☞



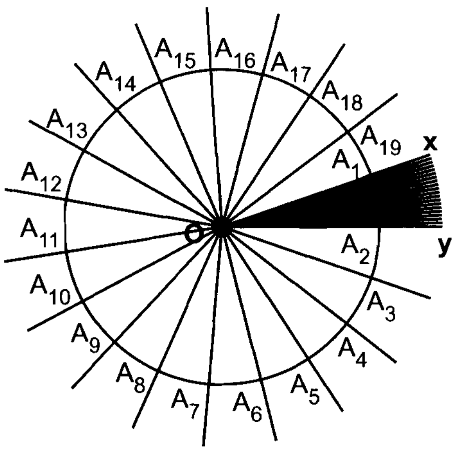

## ● Kì này Có chính phương không?

Cho số tự nhiên S có 2011 chữ số, trong đó có 2010 chữ số 5 và một chữ số a khác 5. Hỏi S có phải là số chính phương hay không?

CAO QUỐC CƯỜNG *(GV. THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc)*

## ● Kết quả CHIA THẾ NÀO? (TTT2 số 84)

*Cách dựng.* Dựng một đường tròn tâm O cắt Ox, Oy tương ứng tại các điểm $A_1$, $A_2$.




Trên (O) dựng liên tiếp các điểm các điểm $A_3$, $A_4$,.. , $A_{20}$ phân biệt, khác $A_1$, $A_2$ thỏa mãn $A_2A_3 = A_3A_4 = ... = A_{19}A_{20} = A_1A_2$.

Trên cung $A_1A_2$ của (O) dựng liên tiếp các điểm các điểm $B_1$, $B_2$,.. , $B_{17}$ phân biệt, khác $A_1$, $A_{20}$ thỏa mãn

$$A_{20}B_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = ... = B_{16}B_{17} = A_1A_{20}.$$

Ta được các tia $OA_2$, $OB_1$, $OB_2$,.. , $OB_{17}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

*Chứng minh.* Theo cách dựng ta có

$$\widehat{A_2OA_3} = \widehat{A_3OA_4} = ... = \widehat{A_{19}OA_{20}} = \widehat{A_1OA_2} = 19^\circ.$$

Mà $19^2 = 361$ nên $\widehat{A_1OA_{20}} = 361^\circ - 360^\circ = 1^\circ$.

Suy ra

$$\widehat{A_{20}OB_1} = \widehat{B_1OB_2} = \widehat{B_2OB_3} = ...$$
$$... = \widehat{B_{16}OB_{17}} = \widehat{B_{17}OA_2} = 1^\circ.$$

*Biện luận.* Bài toán luôn dựng được và có một nghiệm hình.

**Nhận xét.** Đây là một bài toán quen thuộc. Tòa soạn nhận được nhiều lời giải của các bạn. Ngoài cách dựng quen thuộc trên, các bạn còn có thêm một số cách dựng nữa, với ý tưởng là lần lượt tạo ra các góc $60^\circ$, $30^\circ$, $15^\circ$, $4^\circ$, $2^\circ$, $1^\circ$ hoặc $95^\circ$, $5^\circ$, $20^\circ$, $1^\circ$.

Các bạn sau được thưởng kì này: *Trần Phương Nga*, 9C, THCS Thanh Thủy, **Phú Thọ**; *Nguyễn Đức Thọ*, 9C, THCS Phan Bội Châu, Tứ Kỳ, **Hải Dương**; *Nguyễn Đăng Huy*, 6A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**; *Đậu Hồng Quân*, 8D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, **Nghệ An**; Nhóm bạn *Lê Chí Hiếu, Đào Anh Tuyết, Nguyễn Đình Hiển*, 57B Quang Trung, TP. Quảng Ngãi, **Quảng Ngãi**.

ANH COM PA

---

Mà với mỗi $i \in \{1 ; 2 ;... ; 2010\}$ ta có $a_i \geq a_i^2$ (vì theo giả thiết $a_i \in [0 ; 1]$).

Từ đó suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi trong 2010 số đã cho có 2009 số bằng 0, số còn lại bằng 1.

**Bài tập luyện tập.**

**Bài 1.** Cho các số thực a, b, $c \in [0 ; 1]$.

Chứng minh rằng $a^2 + 2b^2 + 3c^2 \leq 60$;

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \leq 3 + a^2b + b^2c + c^2a.$$

**Bài 2.** Cho các số thực a, b, $c \in [0 ; 1]$.

Chứng minh rằng $\dfrac{a}{bc+1} + \dfrac{b}{ca+1} + \dfrac{c}{ab+1} \leq 2.$

**Bài 3.** Cho $\dfrac{1}{2010} \leq \dfrac{a_i}{b_i} \leq \dfrac{1}{2009}$, với $a_1$, $a_2$,... , $a_{2000}$ và $b_1$, $b_2$,... , $b_{2010}$ là các số thực dương.

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2010} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2010}}{b_1 + b_2 + ... + b_{2010}} \leq \frac{1}{2009}.$$


# Từ một bài toán quen thuộc

TRỊNH THÚY HẰNG *(GV. THCS Trưng Vương, Hà Nội)*

*Một số bài toán hình học có một phần giả thiết giống nhau. Các bài toán như vậy thường có nhiều mối liên hệ với nhau. Chúng tôi thử tập hợp nhiều bài toán nhỏ để ra một bài toán với nhiều câu hỏi như sau.*

**Bài toán.** Cho đường tròn tâm O bán kính r và dây cung BC cố định khác đường kính. A là một điểm chuyển động trên cung lớn BC sao cho $\Delta ABC$ nhọn. Các đường cao AD, BE, CF của $\Delta ABC$ cắt nhau tại H và tương ứng cắt (O) tại P, Q, R. Gọi M, N, S tương ứng là trung điểm của BC, CA, EF.

Chứng minh rằng:

1) Các tứ giác AEHF, BCEF nội tiếp.

2) QR // EF.

3) $OA \perp EF$.

4) $2S_{ABC} = r(DE + EF + FD)$.

Từ đó xác định vị trí của A để chu vi $\Delta DEF$ lớn nhất.

5) Tổng $BH \cdot BE + CH \cdot CF$ không đổi khi A chuyển động trên cung lớn BC nhưng luôn thỏa mãn $\Delta ABC$ nhọn.

6) H là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta DEF$.

7) AH = 2OM.

8) $AS \cdot r = AM \cdot OM$.

9) Gọi $(O_1\,;R_1)$, $(O_2\,;R_2)$, $(O_3\,;R_3)$ lần lượt là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác HBC, HCA, HAB. Chứng minh rằng $R_1 = R_2 = R_3 = r$ và $\Delta O_1O_2O_3 = \Delta ABC$.

**Lời giải.** 1) Vì $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^o$ nên tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn đường kính AH.

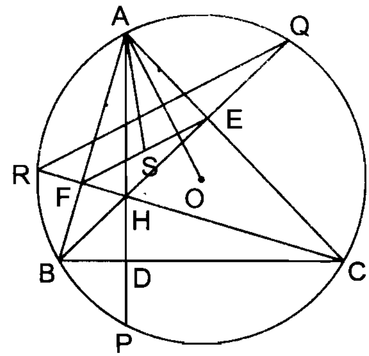
Vì $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^o$ nên tứ giác BCEF nội tiếp đường tròn đường kính BC.

2) Vì tứ giác BCEF nội tiếp nên $\widehat{BEF} = \widehat{BCF}$.

Mà $\widehat{BCF} = \widehat{BQR}$ $(= \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{BR})$ nên

$$\widehat{BEF} = \widehat{BQR}.$$

Do đó QR // EF.




3) Vì tứ giác BCEF nội tiếp nên $\widehat{EBF} = \widehat{ECF}$.

Mà $\widehat{EBF} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AQ}$; $\widehat{ECF} = \frac{1}{2}\text{sđ}\,\overset{\frown}{AR}$ nên

$$AQ = AR.$$

Do đó $OA \perp QR$.

Mà QR // EF (*theo câu 2)*) nên $OA \perp EF$.

4) Vì $OA \perp EF$ (*theo câu 3)*) nên

$$2S_{AEOF} = EF \cdot OA = EF \cdot r.$$

Tương tự $2S_{BFOD} = FD \cdot r$; $2S_{CDOE} = DE \cdot r$.

Mà $\Delta ABC$ nhọn nên O nằm trong $\Delta ABC$.

Suy ra $2S_{ABC} = 2S_{AEOF} + 2S_{BFOD} + 2S_{CDOE}$ $= r(DE + EF + FD)$.

Vì r không đổi nên từ đẳng thức trên suy ra chu vi $\Delta DEF$ lớn nhất khi và chỉ khi $S_{ABC}$ lớn nhất.

Mặt khác ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AD$, với BC không đổi.

Do đó chu vi $\Delta DEF$ lớn nhất khi và chỉ khi AD lớn nhất.

Khi đó A là trung điểm của cung lớn BC.

5) Vì $\Delta BDH \backsim \Delta BEC$ (g-g) nên

$$\frac{BD}{BE} = \frac{BH}{BC} \Leftrightarrow BH \cdot BE = BD \cdot BC.$$

Tương tự $CH \cdot CF = CD \cdot BC$.

Với chú ý D thuộc cạnh BC (do $\Delta ABC$ nhọn) ta suy ra

$$BH \cdot BE + CH \cdot CF = BD \cdot BC + CD \cdot BC$$
$$= (BD + CD)BC = BC^2\text{: không đổi.}$$

6) Vì các tứ giác BCEF, CDHE nội tiếp nên

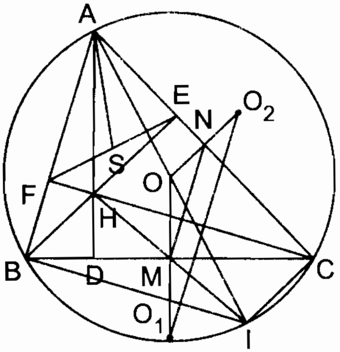
$$\widehat{BEF} = \widehat{BCF} = \widehat{DEH}.$$

Suy ra EH là tia phân giác của góc DEF.

Tương tự DH là tia phân giác của góc EDF.

Suy ra H là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta DEF$.

7) Vẽ đường kính AI của đường tròn (O).




Vì $\widehat{ACI} = 90^\circ$ nên $IC \perp AC$.

Mà $BH \perp AC$ nên $IC \parallel BH$.

Tương tự $IB \parallel CH$.

Suy ra BICH là hình bình hành.

Do đó M là trung điểm HI.

Mà O là trung điểm AI nên OM là đường trung bình của $\Delta IAH$.

Suy ra $AH = 2OM$.

8) Vì $AH = 2OM$ (*theo câu 7)*) nên bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta AEF$ (là bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEHF) bằng OM.

Vì $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$ (g-g) nên

$$\frac{AS}{AM} = \frac{OM}{r} \Leftrightarrow AS \cdot r = AM \cdot OM.$$

9) Vì BICH là hình bình hành nên

$$\Delta HBC = \Delta ICB \Rightarrow R_1 = r.$$

Tương tự $R_2 = r$, $R_3 = r$.

Suy ra $R_1 = R_2 = R_3 = r$.

Mặt khác, vì $\Delta HBC = \Delta ICB$ nên $O_1$ đối xứng với O qua BC.

Do đó M là trung điểm $OO_1$.

Tương tự N là trung điểm $OO_2$.

Suy ra MN là đường trung bình của $\Delta OO_1O_2$.

Do đó $O_1O_2 = 2MN = AB$.

Tương tự $O_2O_3 = BC$, $O_3O_1 = CA$.

Vậy $\Delta O_1O_2O_3 = \Delta ABC$ (c-c-c).

**Nhận xét.** Chắc chắn còn nhiều kết quả thú vị nữa liên quan đến bài toán này. Mong các bạn tự tìm hiểu thêm.

Cuối cùng, mời bạn đọc tự giải hai kết quả sau.

a) Giả sử d là một đường thẳng thay đổi qua H sao cho d không song song với các đường thẳng AB, BC, CA. Gọi $d_1$, $d_2$, $d_3$ tương ứng là các đường thẳng đối xứng với đường thẳng d qua BC, CA, AB.

CMR khi d thay đổi thì $d_1$, $d_2$, $d_3$ đồng quy tại một điểm trên (O).

b) Giả sử $BC = r\sqrt{2}$. CMR $QR = 2r$.

# SỐ HỮU TỈ - SỐ VÔ TỈ SỐ ĐẠI SỐ - SỐ SIÊU VIỆT

*PGS. TS. NGƯT.* LÊ QUỐC HÁN *(Khoa Toán, Đại học Vinh)*

*TTT2 số 75-76 đăng bài viết về đa thức bất khả quy và giới thiệu về tiêu chuẩn Aidenstainơ. Số này, chúng tôi tiếp tục giới thiệu một số kiến thức liên quan đến đa thức với hệ số nguyên. Đó là mối liên hệ giữa nghiệm của đa thức với hệ số nguyên với số vô tỉ, số hữu tỉ, số đại số và số siêu việt.*

Trong chương trình *Đại số 9*, các bạn đã biết cách chứng minh kết quả: *Không có số hữu tỉ nào bình phương bằng 2.* Nói cách khác, $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ.

Chúng ta có một số kết quả về số hữu tỉ và số vô tỉ như sau:

"Cho a là một số vô tỉ, b là một số hữu tỉ. Thế thì:

i) a + b, a − b là các số vô tỉ.

ii) Nếu $b \neq 0$ thì ab, $\frac{a}{b}$ và $\frac{b}{a}$ là các số vô tỉ."

Bây giờ, nếu có ai hỏi bạn $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ là số hữu tỉ hay số vô tỉ thì bạn có thể trả lời được ngay đó là số vô tỉ. Nhưng để chứng minh khẳng định trên thì không phải đơn giản. Xin nêu hai kết quả sau để giải bài toán trên.

**Kết quả 1.** Nếu r là một nghiệm hữu tỉ của phương trình với hệ số nguyên

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0 \quad (1)$$

(với $n \in \mathbb{N}^*$) thì r phải là một số nguyên.

**Chứng minh.** Vì r là một số hữu tỉ nên $r = \frac{p}{q}$, với $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ và (p ; q) = 1.

Thay vào (1) ta được

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$$

$$\Leftrightarrow p^n = q(a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}).$$

Do đó $p^n \vdots q$. Mà (p ; q) = 1 nên q = 1. Vậy r = p hay r là một số nguyên (đpcm).

**Kết quả 2.** Nếu r là một nghiệm nguyên của phương trình (1) thì r là ước số của $a_0$.

**Chứng minh.** Vì r là nghiệm của (1) nên

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \ldots + a_1r + a_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_0 = -r(r^{n-1} + a_{n-1}r^{n-2} + \ldots + a_2r + a_1).$$

Suy ra $a_0 \vdots r$ (đpcm).

**Nhận xét.** Bây giờ, áp dụng các kết quả trên, ta có thể chứng minh $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{2}, \ldots$ là các số vô tỉ. Chẳng hạn, $\sqrt[3]{3}$ là nghiệm của phương trình $x^3 - 3 = 0$, nhưng vì phương trình này không có các nghiệm nguyên là ước số của 3 nên $\sqrt[3]{3}$ là một số vô tỉ.

Ta tiếp tục đi chứng minh $r = \sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ là một số vô tỉ. Thật vậy, ta có

$$r - \sqrt{2} = \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow (r-\sqrt{2})^3 = 3$$

$$\Leftrightarrow r^3 - 3\sqrt{2}r^2 + 6r - 2\sqrt{2} = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(3r^2+2) = r^3 + 6r - 3$$

$$\Rightarrow 2(3r^2+2)^2 = (r^3+6r-3)^2$$

$$\Leftrightarrow r^6 - 6r^4 - 6r^3 + 12r^2 - 36r + 1 = 0.$$

Tức là r là nghiệm của phương trình

$$x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1 = 0.$$

Giả sử r là một số hữu tỉ.

Theo *kết quả 1* thì r là một số nguyên.

Theo *kết quả 2* thì r là một ước số của 1.

Nhưng phương trình trên không có các nghiệm là $\pm 1$: vô lí.

Vậy r là một số vô tỉ (đpcm).

**Nhận xét.** Ta thấy rằng các số vô tỉ $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{2}, \ldots$ có chung một tính chất đặc trưng: là nghiệm của một phương trình có dạng $f(x) = 0$, với $f(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên. Người ta gọi những phương trình có dạng như trên là *phương trình đại số*.

Các nhà toán học Niels Henrik Abel (1802 - 1829), người Na Uy và Evariste Galois (1811 - 1832), người Pháp đã chứng minh được rằng không có phương pháp đại số tổng quát nào để giải phương trình đại số có bậc lớn hơn bốn.

Niels Henrik Abel (1802-1829)

Người ta gọi những số hữu tỉ và số vô tỉ là nghiệm của một phương trình đại số nào đó là *số đại số*, các số còn lại gọi là *số siêu việt*.

Số hữu tỉ luôn là số đại số. Nếu một số đại số là nghiệm của một phương trình đại số bậc n ($n \in \mathbb{N}^*$) mà không thỏa mãn bất cứ một phương trình đại số có bậc nhỏ hơn n thì ta gọi số đó là số đại số bậc n. Chẳng hạn, $\sqrt{2}$ là số đại số bậc 2, $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ là số đại số bậc 6. Số đại số bậc 1 là số hữu tỉ.

Người ta đã chứng minh được rằng tổng, hiệu, tích, thương (nếu tồn tại) của hai số đại số là một số đại số. Hơn nữa, mọi nghiệm của một đa thức với hệ số là các số đại số cũng là số đại số.

Tất cả các số có được bằng hữu hạn các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, khai căn bậc n ($n \in \mathbb{N}^*$) của các số nguyên dương đều là số đại số. Tuy nhiên, điều ngược lại không đúng: Có những số đại số không thể tính được theo cách này.

Nhân đây, chúng tôi xin được nói thêm về lí thuyết Galois. Từ lâu, loài người đã tìm cách giải và tìm công thức nghiệm của tất cả các đa thức với bậc bất kì. Bắt đầu từ Viete với công thức nghiệm của phương trình bậc hai (*Đại số 9*). Tiếp đó là Cardano với công thức nghiệm của phương trình bậc ba. Sau đó, người ta đã giải được các phương trình bậc bốn tổng quát bằng cách đặt ẩn phụ rồi giải một phương trình bậc ba trung gian (theo công thức Cardano). Tiếp sau đó là Abel và Galois đã chứng minh được rằng không có phương pháp đại số tổng quát nào để giải phương trình đại số có bậc lớn hơn bốn. Trước đó, các nhà toán học đã chứng minh được rằng nếu bằng phương pháp đại số có thể giải được một phương trình đại số nào đó có bậc lớn hơn bốn thì nghiệm của phương trình này (là một số đại số) có thể dựng được bằng thước kẻ và compa. Trải qua nhiều thế kỉ, họ đã bế tắc ở bài toán tổng quát nhất: Tiêu chuẩn nào để khẳng định một phương trình đại số có thể giải được hay không? Chỉ bằng một công trình dày chưa đến 100 trang mà sau này được gọi là lí thuyết Galois, bài toán trên đã được giải quyết trọn vẹn. Các nghiên cứu của Abel và Galois về nghiệm của nhiều đa thức có bậc khác nhau đã đặt nền móng cho các phát triển sâu hơn về lí thuyết nhóm và các lĩnh vực liên quan của đại số trừu tượng sau này. Lần đầu tiên, *các giới hạn của toán học đã được khám phá*. Kết quả này giúp các nhà toán học thế kỉ 19 áp dụng để chứng minh hai bài toán Hy Lạp cổ đại nổi tiếng mà các nhà toán học trước đó đã tốn công vô ích mà không giải được. Đó là bài toán chia ba một góc và bài toán cầu phương hình tròn (không thể chỉ dùng thước kẻ và compa chia ba một góc hoặc dựng chiều dài một hình lập phương có thể tích gấp đôi một hình lập phương cho trước, hay dựng một hình vuông có diện tích bằng diện tích một hình tròn cho trước).

Evariste Galois (1811 - 1832)

Ta tiếp tục nói về số siêu việt. Năm 1851, nhà toán học người Pháp Joseph Liouville (1809 - 1882) đã chứng minh sự tồn tại của số siêu việt.

Tuy nhiên, chúng ta mới chỉ biết một số rất ít các số siêu việt và việc chứng minh một số là số siêu việt là bài toán khó.

Năm 1874, nhà toán học người Nga Geogr Cantor (1845-1918) đã chứng minh được rằng hầu hết các số đều là số siêu việt. Nghĩa là, về mặt hình thức, số lượng các số siêu việt nhiều hơn các số đại số.

Năm 1882, nhà toán học người Đức Ferdinand von Lindenmann (1852 - 1939) đã chứng minh được rằng $\pi$ là một số siêu việt. Từ kết quả này, ta có thể chứng minh $\frac{\pi}{2}$, $\pi + 1$, $\sqrt{\pi}$ ... là các số siêu việt. Chẳng hạn, để chứng minh $\frac{\pi}{2}$ là một số siêu việt, ta giả sử đây là một số đại số. Suy ra tồn tại đa thức đại số

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

(với $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$) nhận $\frac{\pi}{2}$ là nghiệm.

Tức là

$$a_n\left(\frac{\pi}{2}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} + \dots + a_1\frac{\pi}{2} + a_0 = 0.$$

Khi đó $\pi$ là nghiệm của phương trình đại số $a_nx^n + 2a_{n-1}x^{n-1} + \dots + 2^{n-1}a_1x + 2^na_0 = 0$.

Tức là $\pi$ là một số đại số: vô lí.

Vậy $\frac{\pi}{2}$ là một số siêu việt (đpcm).

Ngày nay, người ta đã tìm được nhiều số siêu việt khác không liên quan đến số $\pi$. Chẳng hạn, năm 1934, hai nhà toán học đã độc lập chứng minh được định lí mà sau này được mang tên của hai ông là định lí Gelfond-Schneider: Các số có dạng $a^b$, trong đó a là một số đại số khác 0 và 1, b là một số vô tỉ, đều là số siêu việt. Định lí này cho ta một lớp các các số siêu việt.

Xin được nói thêm về một công thức đẹp liên hệ giữa các số siêu việt e, $\pi$ và số ảo *i* như sau: $e^{i\pi} = -1$ (công thức Euler). Ba hằng số đẹp này các bạn sẽ được học trong trương trình THPT.

Để kết thúc, mời các bạn giải các bài toán sau.

**Bài 1.** Chứng minh rằng $\sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$ là một số vô tỉ.

**Bài 2.** Chứng minh rằng $\sqrt{\pi}$ là một số siêu việt.

**Bài 3.** Giả sử f(x) là một đa thức đại số thỏa mãn f(0) và f(1) là những số lẻ.

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm nguyên.

# Một số bài toán thi đại học được giải bằng kiến thức trung học cơ sở

HOÀNG TRỌNG HẢO *(Hà Nội)*

*LTS. Thời gian gần đây, TTT đăng khá nhiều bài viết và các đề toán liên quan đến bất đẳng thức (BĐT), phần kiến thức tương đối khó đối với khá nhiều bạn học sinh. Tuy nhiên, rèn luyện các kĩ năng chứng minh BĐT không những giúp ích cho việc phát triển tư duy mà còn giúp chúng ta có lợi thế hơn trong các kì thi như thi vào lớp 10 THPT, thi vào các trường chuyên, lớp chọn, thi Đại học, Cao đẳng,... và cả thi Toán Quốc tế.*

*Dưới đây, nhằm động viên các bạn học sinh THCS, chúng tôi giới thiệu một số bài toán liên quan đến BĐT và cực trị trong kì thi Tuyển sinh Đại học năm học 2009 - 2010 vừa được Bộ Giáo dục và Đào tạo tổ chức đầu tháng 7 năm 2009.*

**Bài toán 1.** Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z thỏa mãn $x(x+y+z)=3yz$, ta có:

$(x+y)^3+(x+z)^3+3(x+y)(x+z)(y+z) \le 5(y+z)^3$.

*(Câu V (1,0 điểm) môn Toán khối A)*

**Lời giải.** Đặt $a = x + y$, $b = x + z$.

Suy ra $a, b > 0$ và $a - b = y - z$.

Khi đó $x(x + y + z) = 3yz$

$\Leftrightarrow (x + y)(x + z) = 4yz \Leftrightarrow ab = 4yz$.

Ta có $(x + y)^3 + (x + z)^3 = a^3 + b^3$

$= (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$= \sqrt{(a+b)^2}\,[(a-b)^2+ab]$

$= \sqrt{(a-b)^2+4ab}\,[(a-b)^2+ab]$

$= \sqrt{(y-z)^2+16yz}\,[(y-z)^2+4yz]$

$= \sqrt{(y+z)^2+12yz}\,(y+z)^2$

$\le \sqrt{(y+z)^2+3(y+z)^2}\,(y+z)^2$

$= 2(y+z)^3$. (a)

Mặt khác $(x+y)(x+z)=ab=4yz \le (y+z)^2$

$\Rightarrow 3(x+y)(x+z)(y+z) \le 3(y+z)^3$. (b)

Cộng theo vế của (a) và (b) suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

**Nhận xét.** Mấu chốt của bài toán là nhìn ra hai BĐT (a) và (b). Việc chứng minh (b) tương đối đơn giản. Khi chứng minh (a), ta có thể chỉ ra được

$$a^2 - ab + b^2 = (y + z)^2.$$

Vấn đề chủ yếu còn lại là phải chứng minh

$$a + b \le 2(y + z). \qquad (*)$$

Thông thường rất khó phát hiện ra (*). Dạng BĐT ra theo kiểu của bài toán này có một cách thường được sử dụng là đặt thêm ẩn phụ $c = y + z > 0$.

Khi đó $x+y+z=\dfrac{a+b+c}{2}$,

$x=\dfrac{a+b-c}{2}$, $y=\dfrac{a+c-b}{2}$, $z=\dfrac{b+c-a}{2}$

và giả thiết của bài toán tương đương với

$(a+b-c)(a+b+c)=3(a+c-b)(b+c-a)$

$\Leftrightarrow (a+b)^2-c^2=3(c^2-(a-b)^2)$

$\Leftrightarrow c^2=a^2+b^2-ab$.

Suy ra $4c^2=3(a-b)^2+(a+b)^2 \ge (a+b)^2$

$\Rightarrow 2c \ge a+b$. Tức là (*) đã được chứng minh.

**Bài toán 2.** Cho các số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $(x+y)^3+4xy \ge 2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$A=3(x^4+y^4+x^2y^2)-2(x^2+y^2)+1$.

*(Câu V (1,0 điểm) môn Toán khối B)*

**Lời giải.** Đặt $S=x+y$, $P=xy$, $t=x^2+y^2$.

Vì $(x-y)^2 \ge 0$ nên $(x+y)^2 \ge 4xy \Leftrightarrow S^2 \ge 4P$.

Từ giả thiết suy ra $S^3 + S^2 \geq S^3 + 4P \geq 2$.

Do đó $S^3 + S^2 - 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (S-1)(S^2 + 2S + 2) \geq 0$

$\Leftrightarrow S \geq 1$ (vì $S^2 + 2S + 2 > 0$).

Do đó $t = x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\left((x+y)^2 + (x-y)^2\right)$

$\geq \frac{1}{2}(x+y)^2 = \frac{1}{2}S^2 \geq \frac{1}{2}$.

Do đó

$A = \frac{3}{4}\left(3(x^2+y^2)^2 + (x^2-y^2)^2\right)$

$-2(x^2+y^2)+1$

$\geq \frac{9}{4}(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)+1$

$= \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1 = \left(\frac{3}{2}t - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}$.

Vì $t \geq \frac{1}{2}$ nên $\frac{3}{2}t - \frac{2}{3} \geq \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$.

Suy ra $A \geq \frac{1}{144} + \frac{5}{9} = \frac{9}{16}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn giả thiết).

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{9}{16}$.

**Nhận xét.** Sau khi chứng minh được $S \geq 1$, dẫn đến $t \geq \frac{1}{2}$, thì có nhiều cách để biến đổi A nhưng cách biểu diễn

$x^4 + y^4 + x^2y^2 = \frac{1}{4}\left(3(x^2+y^2)^2 + (x^2-y^2)^2\right)$

là đơn giản hơn cả.

**Bài toán 3.** Cho các số thực không âm x, y thay đổi và thỏa mãn $x + y = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$.

*(Câu V (1,0 điểm) môn Toán khối D)*

**Lời giải.** Ta có

$S = 12(x^3 + y^3) + 16x^2y^2 + 34xy$

$= 12((x+y)^3 - 3xy(x+y)) + 16x^2y^2 + 34xy$

$= 12(1 - 3xy) + 16x^2y^2 + 34xy$ (do $x + y = 1$)

$= 16x^2y^2 - 2xy + 12$.

Đặt $t = xy$. Ta có $0 \leq t \leq \frac{1}{4}(x+y)^2 \leq \frac{1}{4}$ và

$S = 16t^2 - 2t + 12 = \left(4t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{191}{16}$.

Vì $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$ nên $-\frac{1}{4} \leq 4t - \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4}$

$\Rightarrow 0 \leq \left(4t - \frac{1}{4}\right)^2 \leq \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{191}{16} \leq S \leq \frac{25}{2}$.

* $S = \frac{191}{16} \Leftrightarrow t = \frac{1}{16}$. Khi đó $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = \frac{1}{16}. \end{cases}$

Theo định lí Vi-ét đảo thì x, y là hai nghiệm của phương trình $X^2 - X + \frac{1}{16} = 0$.

Giải phương trình trên ta suy ra

$x = \frac{2+\sqrt{3}}{4}, y = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

hoặc $x = \frac{2-\sqrt{3}}{4}, y = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

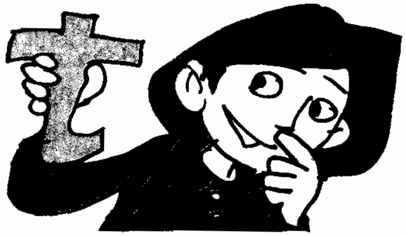
Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $\frac{191}{16}$.

* $S = \frac{25}{2} \Leftrightarrow t = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của S là $\frac{25}{2}$.

**Nhận xét.** Thông thường, việc tìm cực trị các đa thức đối xứng như đề bài, với giả thiết $x + y = a$, ta thường đặt ẩn phụ $t = xy$ (với $|t| \leq \frac{a^2}{4}$) để giải. Ở bài toán này thì với giả thiết $x, y \geq 0$, thì $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$.

Để kết thúc, mời các bạn hãy tìm thêm các lời giải khác cho mỗi bài toán trên.




# MỘT BÀI TOÁN THÚ VỊ

NGUYỄN ĐỨC TẤN *(TP. Hồ Chí Minh)*

*Tình cờ, chúng tôi phát hiện ra một bài toán thú vị. Bài viết này xin được trao đổi cùng bạn đọc bài toán này.*

**Bài toán.** Cho $\Delta ABC$ nhọn. Gọi O, I, H, G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp, trực tâm và trọng tâm của $\Delta ABC$.

Giả sử $X \in \{O ; I ; H ; G\}$. Chứng minh rằng nếu $XB + AC = XC + AB$ (*) thì $\Delta ABC$ cân.

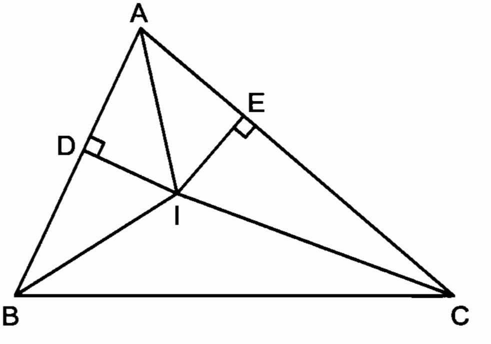
**Lời giải.** 1) Xét trường hợp $X \equiv O$.

Khi đó $OB = OC$.

Từ (*) suy ra $AC = AB$ (đpcm).

2) Xét $X \equiv I$.

Vẽ $ID \perp AB$, $IE \perp AC$ ($D \in AB$, $E \in AC$).




Ta thấy D, E thứ tự thuộc cạnh AB, AC và $ID = IE$.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào các tam giác BID và CIE ta có

$$BI^2 - BD^2 = ID^2 = IE^2 = CI^2 - CE^2$$

$$\Rightarrow BI^2 - CI^2 = BD^2 - CE^2$$

$$\Leftrightarrow (BI + CI)(BI - CI) = (BD + CE)(BD - CE).$$

Từ (*) suy ra $BI - CI = AB - AC$.

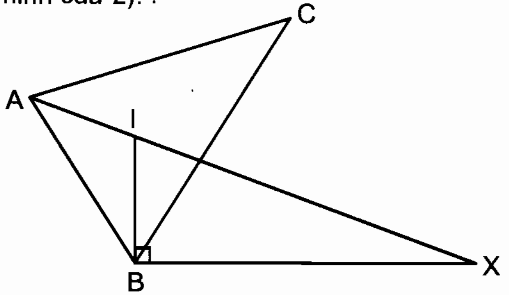
Mà $BD - CE = AB - AC$ (vì $AD = AE$) nên

$$(BI + CI)(AB - AC) = (BD + CE)(AB - AC)$$

$$\Leftrightarrow (AB - AC)(BI + CI - BD - CE) = 0.$$

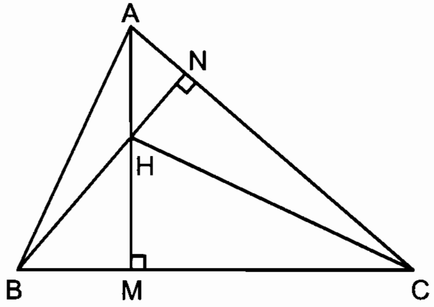
Mà $BI + CI - BD - CE > 0$ (do $BI > BD$ và $CI > CE$) nên $AB = AC$ (đpcm).

**Nhận xét.** Bài toán vẫn đúng trong trường hợp điểm X trùng với một trong ba điểm là tâm đường tròn bàng tiếp của $\Delta ABC$. Bạn đọc tự chứng minh (tương tự như chứng minh *câu 2*). .




3) Xét $X \equiv H$.

Gọi AM, BN là các đường cao của $\Delta ABC$.




Vì $\Delta ABC$ nhọn nên H nằm trong tam giác và M, N theo thứ tự trên cạnh BC, AC.

Áp dụng định lí Py-ta-go ta suy ra

$$BH^2 - CH^2 = BM^2 - CM^2 = AB^2 - AC^2$$

$$\Rightarrow (BH + CH)(BH - CH) = (AB + AC)(AB - AC).$$

Mà $BH - CH = AB - AC$ (theo (*)) nên

$(AB - AC)(BH + CH - AB - AC) = 0.$

Mặt khác ta có $BH < BN < AB$.

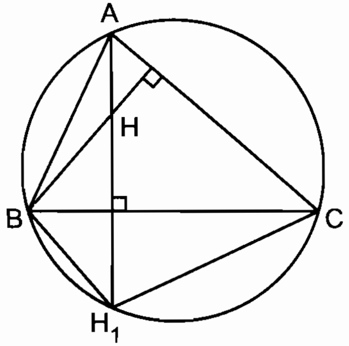
Tương tự $CH < AC$.

Suy ra $BH + CH - AB - AC < 0$.

Do đó $AB = AC$ (đpcm).

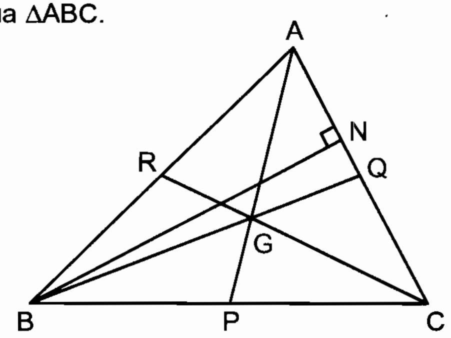
**Nhận xét.** Nếu $H_1$, $H_2$, $H_3$ lần lượt là điểm đối xứng của H qua BC, CA, AB thì ba điểm này nằm trên đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$. Khi đó bài toán vẫn đúng nếu

$$X \in \{H_1 ; H_2 ; H_3\}.$$




4) Xét $X \equiv G$.

Gọi AP, BQ, CR là các đường trung tuyến của $\Delta ABC$.




Ta chứng minh

$$2(BA^2 + BC^2) = 4BQ^2 + AC^2. \quad (1)$$

Thật vậy, giả sử N nằm giữa A và Q (các trường hợp còn lại chứng minh tương tự).

Theo định lí Py-ta-go ta có

$BA^2 + BC^2 = (BN^2 + AN^2) + (BN^2 + NC^2)$

$= 2BN^2 + (AQ - QN)^2 + (CQ + QN)^2$

$= 2BN^2 + 2AQ^2 + 2QN^2$ (vì $AQ = CQ$)

$= 2(BN^2 + QN^2) + 2AQ^2$

$= 2BQ^2 + \dfrac{AC^2}{2}$ (vì $AQ = \dfrac{1}{2}AC$).

Từ đó suy ra (1).

Tương tự $2(CA^2 + CB^2) = 4CR^2 + AB^2$. (2)

Trừ theo vế của (1) và (2) ta suy ra

$3(AB^2 - AC^2) = 4(BQ^2 - CR^2)$

$\Leftrightarrow AB^2 - AC^2 = 3(GB^2 - GC^2)$

(vì $BQ = \dfrac{3}{2}GB$; $CR = \dfrac{3}{2}CG$)

$\Leftrightarrow (AB + AC)(AB - AC) = 3(GB + GC)(GB - GC)$.

Mà $AB - AC = GB - GC$ (theo (*)) nên

$(AB - AC)[AB + AC - 3(GB + GC)] = 0$.

Mặt khác ta có

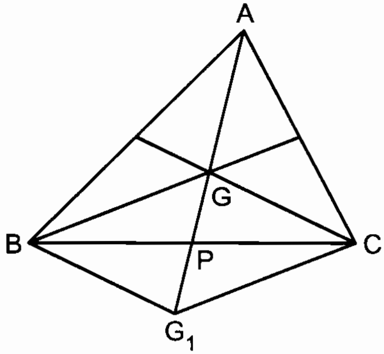
$$GB + GR > BR; \; GC + GQ > CQ.$$

Suy ra $GB + GR + GC + GQ > BR + CQ$

$\Leftrightarrow AB + AC - 3(GB + GC) < 0$.

Do đó $AB = AC$ (đpcm).

**Nhận xét.** Nếu $G_1$, $G_2$, $G_3$ thứ tự là điểm đối xứng của G qua P, Q, R thì bài toán vẫn đúng nếu $X \in \{G_1 ; G_2 ; G_3\}$.




**Kết luận.** 1) Điểm X thật đẹp, bài toán thật hay và thú vị. Hơn nữa, ý tưởng chung để chứng minh các kết quả trên là áp dụng định lí Py-ta-go và sử dụng bất đẳng thức tam giác. Đây là những kiến thức hình học cơ bản của sách giáo khoa.

2) Bài toán trên chỉ sử dụng giả thiết $\Delta ABC$ nhọn trong trường hợp $X \equiv H$. Ba trường hợp còn lại vẫn ra kết quả đúng với $\Delta ABC$ bất kì.

3) Ngoài bốn điểm O, I, H, G và các điểm đã nói ở trên, theo các bạn còn có điểm X nào khác có cùng tính chất như trên hay không?

Các bạn hãy tìm thêm các bài toán kiểu trên nhé.


# CHỨNG MINH GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC KHÔNG LÀ MỘT SỐ NGUYÊN

THÁI NHẬT PHƯỢNG

*(GV. THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)*

Để chứng minh giá trị của một biểu thức A không phải là một số nguyên, ta có thể sử dụng một số cách làm sau:

- Chứng minh $n < A < n + 1$, với $n \in \mathbb{Z}$.
- Biểu diễn A dưới dạng $\frac{m}{n}$ (với $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$), rồi chứng minh m không chia hết cho n.
- Viết A dưới dạng bc, trong đó $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ và c không là một số nguyên.

Sau đây là một số ví dụ.

**Bài toán 1.** Cho biểu thức

$$A = \left(1+\frac{1}{1\cdot 3}\right)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{99\cdot 101}\right).$$

Chứng minh rằng A không phải là một số nguyên.

**Lời giải.** Với mỗi số tự nhiên $n > 0$ ta có

$$1+\frac{1}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}.$$

Suy ra

$$A = \frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\frac{99^2}{98\cdot 100}\cdot\frac{100^2}{99\cdot 101} = \frac{200}{101}.$$

Từ đó ta có đpcm.

**Bài toán 2.** Cho biểu thức

$$B = \frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}, \text{ với } a, b, c \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng B không phải là một số nguyên.

**Lời giải.** Ta có

$$B > \frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+a+b} = 1.$$

Mặt khác

$$B = \left(1-\frac{b}{a+b}\right)+\left(1-\frac{c}{b+c}\right)+\left(1-\frac{a}{c+a}\right)$$
$$= 3-\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right)$$
$$< 3-\left(\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+a}+\frac{a}{c+a+b}\right) = 2.$$

Vậy $1 < B < 2$, ta có đpcm.

**Bài toán 3.** Cho $C = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{8}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

Chứng minh rằng C không phải là một số nguyên.

**Lời giải.** Vì

$$1 > \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} > \ldots > \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{101}}$$

nên $2C > \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{101}}$

$$= \sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{101}-\sqrt{100}$$
$$= \sqrt{101}-1 > 10-1 = 9$$

và $2C < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} +$

$+ \dfrac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} + \dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

$= 1 + \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + ... + \sqrt{100} - \sqrt{99}$

$= \sqrt{100} = 10.$

Suy ra $4 < C < 5$, ta có đpcm.

**Bài toán 4.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên x thì giá trị của biểu thức

$$D = \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + \sqrt{36x^2 + 10x + 3}}}$$

không thể là một số nguyên.

**Lời giải.** Với $x = 0$ thì D không là một số nguyên. Khi x là số nguyên dương thì

$36x^2 < 36x^2 + 10x + 3 < 36x^2 + 24x + 4$

$\Leftrightarrow (6x)^2 < 36x^2 + 10x + 3 < (6x + 2)^2$

$\Rightarrow 6x < \sqrt{36x^2 + 10x + 3} < 6x + 2$

$\Rightarrow 4x^2 + 6x < 4x^2 + \sqrt{36x^2 + 10x + 3} <$

$< 4x^2 + 6x + 2.$

Mà $(2x + 1)^2 < 4x^2 + 6x$ và

$4x^2 + 6x + 2 < (2x + 2)^2$ nên

$2x + 1 < \sqrt{4x^2 + \sqrt{36x^2 + 10x + 3}} < 2x + 2.$

Suy ra

$D > \sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{(x+1)^2} = x + 1$

và $D < \sqrt{x^2 + 2x + 2} < \sqrt{(x+2)^2} = x + 2.$

Tức là $x + 1 < D < x + 2$, ta có đpcm.

**Bài toán 5.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 1$ thì giá trị biểu thức

$$E = \frac{3n^2}{2n^2 + n - 1} + \frac{1}{n+1}$$

không thể là một số tự nhiên.

**Lời giải.** Ta có

$E = \dfrac{3n^2}{(n+1)(2n-1)} + \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{3n^2 + 2n - 1}{(n+1)(2n-1)}.$

$= \dfrac{(n+1)(3n-1)}{(n+1)(2n-1)} = \dfrac{3n-1}{2n-1}.$

Giả sử $E \in \mathbb{N}$. Suy ra $(3n - 1) \vdots (2n - 1)$.

Do đó $(6n - 2) \vdots (2n - 1)$.

Mà $(6n - 3) \vdots (2n - 1)$ nên

$((6n - 2) - (6n - 3)) \vdots (2n - 1)$

hay $1 \vdots (2n - 1)$: vô lí vì $2n - 1 > 1$.

Vậy giá trị của E không thể là một số tự nhiên, ta có đpcm.

**Bài toán 6.** Cho n là một số tự nhiên và số thực G thỏa mãn

$$G^3 = \underbrace{11111...1}_{n \text{ chữ số } 1}0\underbrace{77777...7}_{n \text{ chữ số } 7}8\underbrace{1111111...1}_{n+1 \text{ chữ số } 1}.$$

Chứng minh rằng G không phải là một số nguyên.

**Lời giải** *(vắn tắt)*. Biến đổi

$$9G^3 = (10^{n+1} - 1)^3 = \underbrace{9999999...9}_{n+1 \text{ chữ số } 9}{}^3.$$

Suy ra $G = \sqrt[3]{3} \cdot \underbrace{3333333...3}_{n+1 \text{ chữ số } 3}.$

Vì $\sqrt[3]{3}$ là một số vô tỉ nên G là một số vô tỉ. Tức là G không thể là một số nguyên, ta có đpcm.

**Bài toán 7.** Cho p là tích của n số nguyên tố đầu tiên ($n \in \mathbb{N}^*$). Chứng minh rằng $\sqrt{p+1}$ không là một số nguyên.

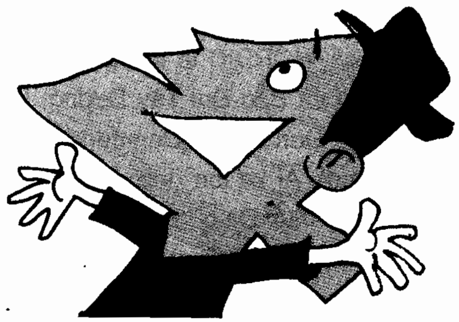
**Lời giải.** Vì p chẵn nên $p + 1$ lẻ.

Như thế, nếu $\sqrt{p+1}$ là một số nguyên thì tồn tại số tự nhiên k thỏa mãn

$$\sqrt{p+1} = 2k + 1.$$

Do đó $p = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$.

Suy ra $p \vdots 4$: vô lí, suy ra đpcm.



# VẬN DỤNG ĐƯỜNG THẲNG SIM-SƠN ĐỂ GIẢI TOÁN

THÁI NHẬT PHƯỢNG
*(GV. THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)*

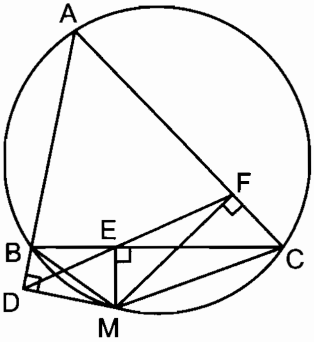
**Đường thẳng Sim-sơn**

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và M là một điểm bất kì trên (O). Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các đường thẳng AB, BC, CA. Chứng minh D, E, F thẳng hàng.

Đường thẳng đi qua D, E, F có tên là đường thẳng Sim-sơn ứng với điểm M của $\Delta ABC$.

**Chứng minh.** Xét trường hợp $\Delta ABC$ nhọn và $\widehat{MBA} \geq \widehat{MCA}$ (các trường hợp khác chứng minh tương tự).

Khi đó D thuộc tia đối của tia BA, E và F tương ứng nằm trên cạnh BC, CA.




Vì các tứ giác MDBE, ABMC và MCFE nội tiếp nên $\widehat{MED} = \widehat{MBD} = \widehat{ACM} = 180^\circ - \widehat{MEF}$

$\Rightarrow \widehat{MED} + \widehat{MEF} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{DEF} = 180^\circ$.

Do đó D, E, F thẳng hàng (đpcm).

Bây giờ ta vận dụng định lí trên để giải một số bài toán sau.

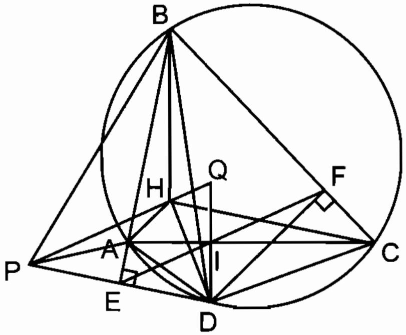
**Bài toán 1.** Cho $\Delta ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O). H là trực tâm $\Delta ABC$, D là một điểm nằm trên cung nhỏ BC. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên các đường thẳng AB, BC.

a) Chứng minh rằng EF đi qua trung điểm của DH.

b) Xác định vị trí của D để EF lớn nhất.

**Lời giải.** a) Xét trường hợp $\widehat{BAD} \geq \widehat{BCD}$ (các trường hợp khác chứng minh tương tự).

Khi đó E thuộc tia đối của tia AB và F nằm trên cạnh BC.




Hạ $DI \perp AC$ ($I \in AC$). Khi đó EF là đường thẳng Sim-sơn ứng với điểm D của $\Delta ABC$. Hơn nữa, I nằm giữa E và F.

Gọi P, Q thứ tự là điểm đối xứng của D qua các đường thẳng AB, AC.

Vì $\widehat{APB} = \widehat{ADB} = \widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{AHB}$ nên tứ giác AHBP nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AHP} = \widehat{ABP} = \widehat{ABD}$.

Tương tự $\widehat{CHQ} = \widehat{CBD}$.

Suy ra $\widehat{AHP} + \widehat{AHC} + \widehat{CHQ}$

$= \widehat{ABD} + \widehat{AHC} + \widehat{CBD} = 180^\circ$.

Do đó P, H, Q thẳng hàng.

Mà IE là đường trung bình của $\Delta DPQ$ nên IE đi qua trung điểm của DH hay EF đi qua trung điểm của DH (đpcm).

b) Vì $\widehat{DEI}=\widehat{DAI}$ và $\widehat{DFI}=\widehat{DCI}$ nên

$$\Delta DEF \backsim \Delta DAC \text{ (g-g)}.$$

Suy ra $\dfrac{EF}{AC}=\dfrac{ED}{AD}\le 1.$

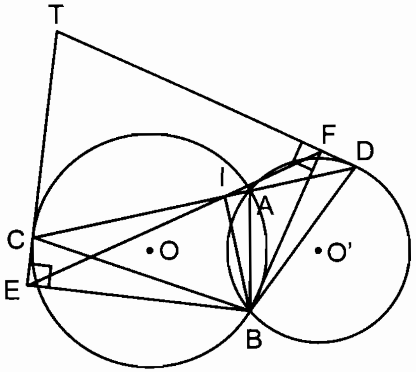
Do đó EF lớn nhất bằng AC và xảy ra khi và chỉ khi BD là đường kính của (O).

**Bài toán 2.** Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Một cát tuyến thay đổi qua A cắt (O) và (O') tương ứng tại C và D. Gọi E, F thứ tự là hình chiếu vuông góc của B lên tiếp tuyến của (O) tại C và tiếp tuyến của (O') tại D.

Chứng minh rằng EF tiếp xúc một đường tròn cố định.

**Lời giải.** Đặt T = CE ∩ DF.

Giả sử $\widehat{TCB}\ge\widehat{TDB}$. Hạ BI ⊥ CD (I ∈ CD).




Vì $\widehat{CBD}=\widehat{CBA}+\widehat{DBA}=\widehat{TCD}+\widehat{TDC}$ nên

$$\widehat{CBD}+\widehat{CTD}=180^o.$$

Do đó tứ giác TCBD nội tiếp.

Suy ra EF là đường thẳng Sim-sơn ứng với điểm B của ΔTCD.

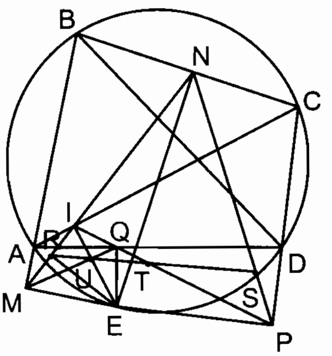
Do đó I, E, F thẳng hàng. Mà tứ giác BICE nội tiếp nên $\widehat{BIE}=\widehat{BCE}=\widehat{BAC}$.

Vậy EF tiếp xúc với đường tròn đường kính AB cố định (đpcm).

**Bài toán 3.** Cho ngũ giác ABCDE nội tiếp một đường tròn. Gọi M, N, P, Q, R, S, T và U lần lượt là hình chiếu vuông góc của E trên các đường thẳng AB, BC, CD, DA, MN, NP, PQ và QM.

Chứng minh rằng R, S, T, U thẳng hàng.

**Lời giải.** Hạ EI ⊥ AC (I ∈ AC).




Đường thẳng Sim-sơn ứng với điểm E của các tam giác ABC, ACD và IMQ cho ta các cặp điểm M, N, I, R; P, Q, I, T và R, U, T thẳng hàng.

Tương tự R, S, T thẳng hàng, ta có đpcm.

**Bài tập tự luyện.**

**Bài 1.** Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). M là một điểm bất kì trên (O), H là trực tâm ΔABC. Chứng minh rằng H và các điểm đối xứng của M qua AB, BC, CA thẳng hàng.

**Bài 2.** Cho lục giác ABCDEF nội tiếp đường tròn đường kính AD và BC = EF. Gọi H, K lần lượt là giao điểm của AC với BD và AE với DF; P, Q và R, S lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên các đường thẳng AF, DE và K trên các đường thẳng AB, CD. Chứng minh rằng RS, PQ, HK đồng quy.

**Bài 3.** Cho đường tròn (O) và một điểm A cố định nằm ngoài (O). M là một điểm thay đổi trên đường thẳng qua A vuông góc với AO. Gọi MB, MC là các tiếp tuyến của (O) (B, C là các tiếp điểm). Kẻ AE ⊥ MB, AF⊥ MC (E ∈ MB, F ∈ MC). Chứng minh rằng EF đi qua một điểm cố định.

**Bài 4.** Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). M là một điểm thay đổi trên cung nhỏ BC. Kẻ ME ⊥ AB, AF ⊥ MC (E ∈ AB, F ∈ AC).

1) Xác định vị trí của M để EF đi qua trung điểm của BC.

2) Kẻ AP ⊥ MB, AQ ⊥ MF (P ∈ MB, Q ∈ MC). Chứng minh rằng PQ đi qua một điểm cố định.


# BÀI TOÁN CŨ với cách giải mới

CAO NGỌC TOẢN
*(GV. THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên - Huế)*

***Với mỗi bài toán, nếu giải được bằng nhiều cách thì thật là thú vị. Bài toán cũ hôm qua nhưng cách giải mới hôm nay. Bài viết dưới đây xin giới thiệu với bạn đọc một bài toán như vậy.***

**Bài toán 1.** Cho x, y là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^3 + y^3$.

(Từ một bài toán cực trị đơn giản - TTT2 số 72, tháng 2.2009)

**Lời giải.** *Cách 1* (Đưa về một biến số).

Từ giả thiết suy ra $y = 1 - x$ và $0 \le x \le 1$.

Từ đó $A = x^3 + (1 - x)^3$

$= 3x^2 - 3x + 1 = 3(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \ge \frac{1}{4}$.

$A = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Vậy $A_{min} = \frac{1}{4}$ tại $x = \frac{1}{2}$.

*Cách 2* (Sử dụng bất đẳng thức).

Ta chứng minh $x^3 + \frac{1}{4} \ge \frac{3}{4}x$. (1)

Thật vậy, biến đổi (1) trở thành

$$(x - \frac{1}{2})^2(x + 1) \ge 0.$$

Tương tự $y^3 + \frac{1}{4} \ge \frac{3}{4}y$. (2)

Cộng theo vế của (1) và (2) suy ra $A \ge \frac{1}{4}$.

*Cách 3* (Phân tích đi lên).

Vì $(x - y)^2 \ge 0$ nên $x^2 - xy + y^2 \ge xy$.

Suy ra $(x + y)(x^2 - xy + y^2) \ge xy(x + y)$

hay $x^3 + y^3 \ge xy(x + y)$

$\Leftrightarrow 4(x^3 + y^3) \ge x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

$\Leftrightarrow 4(x^3 + y^3) \ge (x + y)^3$.

Từ đó cũng suy ra $A_{min} = \frac{1}{4}$.

**Một số hướng phát triển bài toán.**

**Hướng 1.** Tổng quát *bài toán 1* theo số mũ của x và y (đã trình bày trong bài viết trên).

**Hướng 2.** Thay đổi kết luận *bài toán 1* thành tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A.

**Bài toán 2.** Cho x, y là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = x^3 + y^3$.

**Lời giải.** Từ giả thiết suy ra $0 \le x \le 1$.

Do đó $x^3 \le x$.

Tương tự $y^3 \le y$.

Cộng theo vế hai bất bất đẳng thức trên ta được $A \le x + y = 1$.

$A = 1 \Leftrightarrow (x ; y) \in \{(1 ; 0), (0 ; 1)\}$.

**Hướng 3.** Thay đổi giả thiết và kết luận *bài toán 1* cho nhau.

**Bài toán 3.** Cho x, y là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn $x^3 + y^3 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B = x + y$.

**Lời giải.** Theo *cách 3 bài toán 1* ta có $4(x^3 + y^3) \ge (x + y)^3$ hay $B \le \sqrt[3]{4}$.

$B = \sqrt[3]{4} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.


# Kì này Bài toán MỪNG SINH NHẬT TOÁN TUỔI THƠ

Chào mừng 10 năm sinh nhật Toán Tuổi thơ 25.10.2010, mời các bạn thử sức với bài toán sau:

Cho 2010 số thực, trong đó tích của 25 số bất kì trong chúng là một số âm. Chứng minh rằng tổng của 10 số bất kì trong 2010 số đã cho luôn là số âm.

NGUYỄN ĐỨC TẤN *(TP. Hồ Chí Minh)*

## Kết quả LỚN HƠN HAY NHỎ HƠN? (TTT2 số 80)

Đặt $M = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{1}{10^{2009}}$.

Ta có $10M = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^{2008}}$.

Suy ra $10M - M = 1 - \frac{1}{10^{2009}} < 1 \Rightarrow M < 1$.

Mà $A = (9 + M)^3$ nên $A < 10^3 = 1000$.

Vậy Vẻ nói đúng.

Mặt khác, khi thay dấu "–" trước phân số của biểu thức A bởi dấu "+" thì ta được biểu thức $B = (11 + M)^3$.

Vì $M > 0$ nên $B > 11^3 > 1000$.

Vậy Vui cũng nói đúng.

**Nhận xét.** Ngoài cách biến đổi M như trên, một số bạn đã quy đồng mẫu số các phân số trong M và tính được $M = \underbrace{0{,}11111\ldots1}_{2009 \text{ chữ số } 1}$ cũng suy ra được đáp số.

Các bạn sau được thưởng kì này: *Ngô Vương Minh*, $7A_5$, THCS thị trấn Cầu Diễn, Từ Liêm, **Hà Nội**; *Nguyễn Thị Mai Hương*, $9A_5$, THCS Vũ Thư, **Thái Bình**; *Bùi Đức Thịnh*, 8A, THCS Xuân Trường, **Nam Định**; *Trần Phương Nga*, 9C, THCS Thanh Thủy, **Phú Thọ**; *Vũ Mạnh Tiến*, 9A, THCS Đồng Kỵ, TX. Từ Sơn, **Bắc Ninh**.

ANH COM PA

☞ Vậy $B_{max} = \sqrt[3]{4}$ tại $x = y = \frac{1}{2}$.

**Nhận xét.** Tiếp tục tổng quát *bài toán 3* ta được bài toán sau.

**Bài toán 4.** Cho x, y là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn $x^n + y^n = 1$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $C = x + y$.

**Lời giải.** Bằng quy nạp toán học, ta chứng minh được $2^{n-1}(x^n + y^n) \geq (x + y)^n$.

Do đó $C \leq \sqrt[n]{2^{n-1}}$.

$C = \sqrt[n]{2^{n-1}} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

Vậy $C_{max} = \sqrt[n]{2^{n-1}}$ tại $x = y = \frac{1}{2}$.

Việc phát triển và mở rộng các bài toán trên chắc chắn sẽ còn nhiều hấp dẫn cần khám phá. Rất mong được cùng trao đổi với bạn đọc.


# Vẽ thêm đường thẳng song song

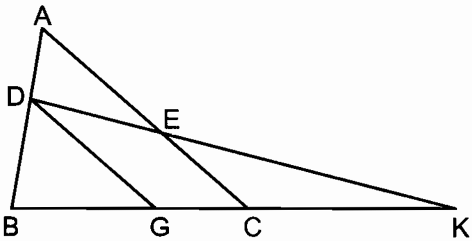
TRẦN BÁ DUY LINH
*(SV. lớp 30, Đại học Kinh tế TP. Hồ Chí Minh)*

*Vẽ thêm đường phụ là một trong những cách giúp chúng ta đơn giản hóa một số bài toán phức tạp. Ngoài các phương pháp vẽ thêm thường gặp như vẽ thêm đường vuông góc, dựng trung điểm, vẽ đường phân giác... thì vẽ thêm đường thẳng song song trở nên hiệu quả với các bài toán có liên quan đến tỉ lệ thức.*

*Sau đây là một số ví dụ.*

**Bài toán 1.** Cho $\Delta ABC$ ($AC > AB$). Lấy các điểm D, E tùy ý thứ tự nằm trên các cạnh AB, AC sao cho $BD = CE$. Gọi K là giao điểm của DE và BC. Chứng minh rằng tỉ số $\frac{KE}{KD}$ không phụ thuộc vào cách chọn các điểm D và E.

**Lời giải.** Kẻ DG // AC ($G \in BC$)



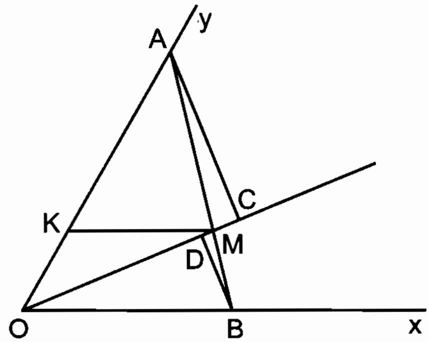

Theo định lí Ta-lét, với chú ý $BD = CE$, ta có $\frac{KE}{KD} = \frac{EC}{DG} = \frac{BD}{DG} = \frac{AB}{AC}$, ta có đpcm.

**Bài toán 2.** Cho góc xOy và điểm M cố định thuộc miền trong của góc. Một đường thẳng thay đổi quay quanh M cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại các điểm A, B. Gọi $S_1$, $S_2$ tương ứng là diện tích các tam giác MOA, MOB.

a) Chứng minh rằng $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}$ không đổi.

b) Tìm giá trị lớn nhất của $\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB}$.

**Lời giải.** a) Kẻ MK // OB ($K \in OA$).




Vì $\frac{OK}{OA} = \frac{BM}{BA}$ nên $\frac{S_{MOK}}{S_{MOA}} = \frac{S_{MOB}}{S_{AOB}}$

hay $S_{AOB} \times S_{MOK} = S_1 S_2$

$\Rightarrow \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} = \frac{S_1 + S_2}{S_1 S_2} = \frac{S_{OAB}}{S_1 S_2} = \frac{1}{S_{MOK}}$: không đổi, ta có đpcm.

b) Kẻ $AC \perp OM$, $BD \perp OM$ ($C, D \in OM$).

Ta có $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} = \frac{2}{OM \cdot AC} + \frac{2}{OM \cdot BD}$

$\geq \frac{2}{OM}\left(\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB}\right)$.

Từ đó, kết hợp với kết quả câu a) ta suy ra

$$\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}\le\frac{OM}{2S_{MOK}}.$$

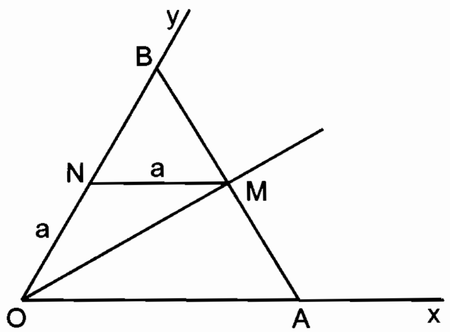
Vậy giá trị lớn nhất của $\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}$ là $\frac{OM}{2S_{MOK}}$, đạt được khi và chỉ khi $AB\perp OM$.

**Bài toán 3.** Cho góc xOy và hai điểm A, B thứ tự chuyển động trên hai tia Ox, Oy sao cho $\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=k$ (k là hằng số dương cho trước). Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

**Nhận xét.** Nếu lấy C thuộc Oy, D thuộc Ox sao cho OC = OA, OD = OB thì $\frac{1}{OC}+\frac{1}{OD}=k$. Vậy điểm cố định phải là giao điểm của AB và CD. Gọi M là giao của AB và CD. Ta thấy OM là phân giác của góc xOy.

**Lời giải.** Gọi M là giao điểm của tia phân giác của góc xOy với AB.

Kẻ MN // OA ($N\in Oy$).




Vì $\widehat{NMO}=\widehat{MOA}=\widehat{MON}$ nên $\Delta NMO$ cân tại N.

Mà $\frac{NM}{OA}=\frac{BN}{BO}$ nên $\frac{ON}{OA}=\frac{OB-ON}{BO}$.

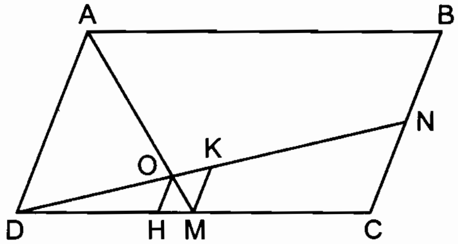
Suy ra $\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{1}{ON}=k\Rightarrow ON=\frac{1}{k}$: không đổi. Do đó N cố định.

Từ đó M cố định, ta có đpcm.

**Bài toán 4.** Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của CD và CB. O là giao điểm của AM và DN.

Biết $\frac{OA}{OM}=4$ và $\frac{OD}{ON}=\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng ABCD là hình bình hành.

**Lời giải.** Kẻ OH // AD, MK // BC ($H\in CD$, $K\in DN$).




Vì $\frac{OD}{ON}=\frac{2}{3}$ nên $\frac{OD}{DN}=\frac{2}{5}$.

Vì MK // BC và M là trung điểm CD nên K là trung điểm DN.

Suy ra $\frac{OD}{DK}=\frac{4}{5}$.

Mặt khác, vì OH // AD nên

$$\frac{DH}{HM}=\frac{OA}{OM}=4\Rightarrow\frac{DH}{DM}=\frac{4}{5}.$$

Do đó $\frac{DO}{DK}=\frac{DH}{DM}$. Suy ra OH // MK.

Mà OH // AD, MK // BC nên AD // BC.

Tương tự AB // CD, ta có đpcm.

**Bài tập tự luyện.**

**Bài 1.** Cho $\Delta ABC$, trung tuyến AM. Gọi I là điểm bất kì trên cạnh BC. Đường thẳng qua I song song với AB cắt AM, AC thứ tự ở E. Chứng minh rằng AE = BK.

**Bài 2.** Cho $\Delta ABC$ có AB = 4, AC = 6 và phân giác AD. O là điểm thuộc đoạn AD sao cho OA = 2OD. Gọi K là giao điểm của BO và AC. Tính tỉ số AK : KC.

**Bài 3.** Điểm M chuyển động trên đáy nhỏ AB của hình thang ABCD. Gọi O là giao điểm của các cạnh bên của hình thang, G là giao điểm của OA và CM, H là giao điểm của OB và DM. Chứng minh rằng khi M chuyển động trên đáy AB thì tổng $\frac{GO}{GD}+\frac{HO}{HC}$ không đổi.

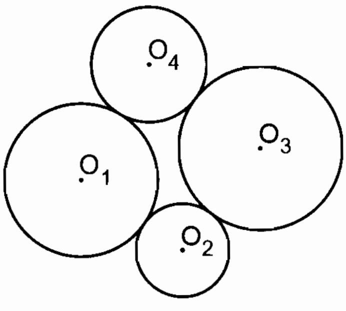
# NHIỀU ĐƯỜNG TRÒN TIẾP XÚC NGOÀI NHAU

NGƯT. ThS. TRẦN ANH DŨNG
*(GV. THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai)*

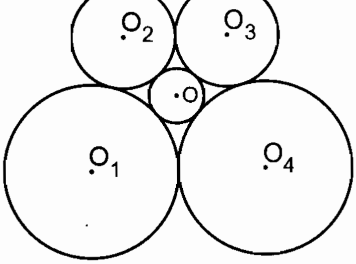
***Những bài toán được giới thiệu dưới đây là một phần nhỏ trong "Các bài toán cổ" xuất hiện trong khoảng thế kỉ 18, 19 ở Nhật Bản.***

Để thuận tiện, ta quy ước khái niệm "xâu đường tròn" như sau: Một xâu gồm n đường tròn $(O_1)$, $(O_2)$,... , $(O_n)$, với $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, là tập hợp n đường tròn thỏa mãn $(O_1)$ tiếp xúc ngoài với $(O_2)$, $(O_2)$ tiếp xúc ngoài với $(O_3)$,... , $(O_{n-1})$ tiếp xúc ngoài với $(O_n)$ và $(O_n)$ tiếp xúc ngoài với $(O_1)$.

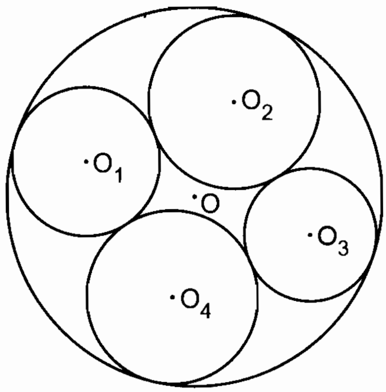
Hình dưới là một xâu gồm 4 đường tròn.



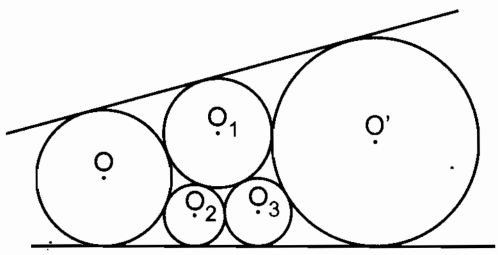

**Bài toán 1.** Một xâu 4 đường tròn, trong đó 2 đường có bán kính R, 2 đường còn lại có bán kính r (hình vẽ). Biết rằng mỗi đường tròn thuộc xâu trên tiếp đều tiếp xúc ngoài với đường tròn (O ; t). Tính t theo R và r.



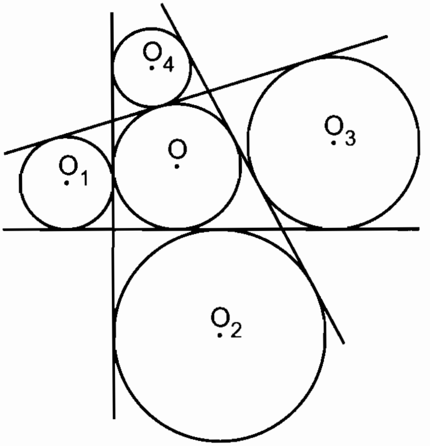

**Bài toán 2.** Một xâu 4 đường tròn có bán kính tương ứng là $r_1$, $r_2$, $r_3$ và $r_4$, trong đó mỗi đường tròn thuộc xâu đều tiếp xúc trong với đường tròn (O ; R). Tính R theo $r_1$, $r_2$, $r_3$ và $r_4$.




**Bài toán 3.** Một xâu 3 đường tròn $(O_1 ; r_1)$, $(O_2 ; r_2)$ và $(O_3 ; r_3)$. *l* là một tiếp tuyến chung ngoài của $(O_2)$ và $(O_3)$. Biết rằng tồn tại một tiếp tuyến *m* của $(O_1)$ sao cho có các đường tròn (O), (O') cùng tiếp xúc với *l*, *m* thỏa mãn (O), $(O_1)$, $(O_2)$ là một xâu và (O'), $(O_1)$, $(O_3)$ là một xâu. Tính $r_1$ theo $r_2$, $r_3$.

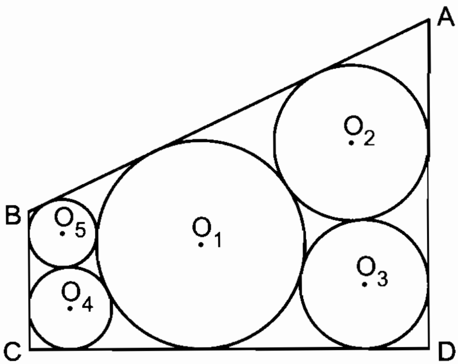


**Bài toán 4.** 4 tiếp tuyến của đường tròn (O) tiếp xúc với 4 đường tròn bán kính lần lượt là $r_1$, $r_2$, $r_3$ và $r_4$ (hình vẽ). Chứng minh rằng $r_1r_3 = r_2r_4$.



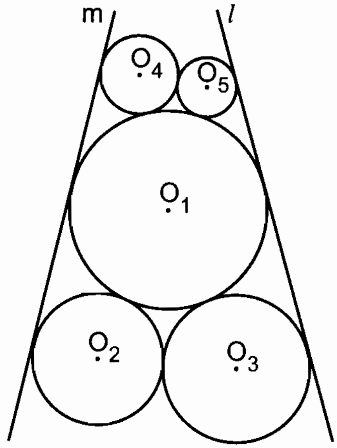

**Bài toán 5.** 4 đường tròn có bán kính lần lượt là $r_1$, $r_2$, $r_3$ và $r_4$ tiếp xúc ngoài với đường tròn (O) và tiếp xúc với các cạnh của hình thang vuông ABCD (hình vẽ).

Chứng minh rằng $\sqrt{r_3} + \sqrt{r_4} = \sqrt{2r_1}$.

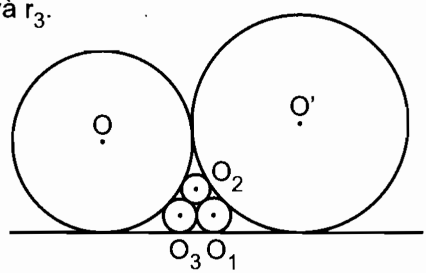



**Bài toán 6.** 4 đường tròn có bán kính lần lượt là $r_2$, $r_3$, $r_4$ và $r_5$ tiếp xúc ngoài với đường tròn $(O_1\ ;\ r_1)$ và tiếp xúc với hai tiếp tuyến của $(O_1)$ (hình vẽ). Chứng minh rằng

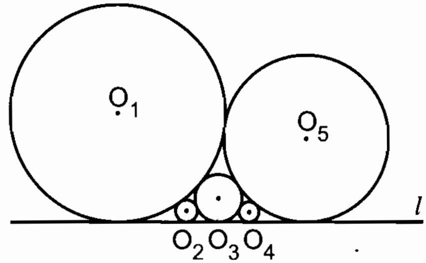
$$\sqrt{r_1 + r_4 + r_5} = \sqrt{r_4} + \sqrt{r_5} + \frac{r_2r_3 - r_4r_5}{\sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} + \sqrt{r_4} + \sqrt{r_5}}.$$




**Bài toán 7.** Cho hai đường tròn (O ; a) và (O'; b) tiếp xúc ngoài nhau có $l$ là một tiếp tuyến chung. Biết rằng tồn tại một xâu 3 đường tròn có bán kính lần lượt là $r_1$, $r_2$, $r_3$ tiếp xúc ngoài với các đường tròn (O), (O') và tiếp xúc với $l$ (hình vẽ). Tính a, b theo $r_1$, $r_2$ và $r_3$.




**Bài toán 8.** Một xâu 5 đường tròn có bán kính lần lượt là $r_1$, $r_2$, $r_3$ , $r_4$ và $r_5$ nhận $l$ là một tiếp tuyến chung (hình vẽ). Chứng minh rằng $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_4} = \frac{1}{r_2}$.




Chúc các bạn thành công trong việc giải các bài toán trên.


# ỨNG DỤNG CỦA PHẦN TRĂM

VŨ KIM THỦY

**Ví dụ.** a) Nếu giá của một mặt hàng tăng 35% thì giá sau khi tăng bằng 100% + 35% = 135% của giá ban đầu (giá gốc).

b) Nếu giá sau khi tăng bằng 112% của giá gốc thì giá đã tăng 112% − 100% hay 12% của giá gốc.

c) Nếu giá của một mặt hàng giảm 18% thì giá sau khi giảm bằng 100% − 18% hay 82% của giá gốc.

d) Nếu giá sau khi giảm của một mặt hàng là 76% của giá gốc thì giá đã giảm đi 100% − 76% hay 24% của giá gốc.

**Chú ý.** Khi ta nói "giá được tăng 35%" nghĩa là "giá được tăng 35% của giá gốc". Như vậy giá gốc ứng với 100%.

Mệnh đề: *GDP năm 2009 tăng 6% so với năm 2008* tương đương với mệnh đề *GDP năm 2009 bằng 106% của năm 2008*. Nhầm lẫn trong trường hợp này là nói: *GDP năm 2009 tăng 106%*.

**Bài tập 1.** Một người tiết kiệm được $80 trong một tháng nhất định.

a) Trong tháng sau, anh ấy tiết kiệm được $96. Tìm số phần trăm tăng lên của số tiền tiết kiệm.

b) Trong tháng thứ ba, anh ấy tiết kiệm được $86,40. Tìm số phần trăm giảm đi của số tiền tiết kiệm.

**Lời giải.** a) Số tiền tăng lên = $96 − $80 = $16.

Do vậy số phần trăm tăng lên $= \dfrac{16}{80} \times 100\% = 20\%$.

b) Số tiền giảm đi = $96 − $86,40 = $9,60.

Vậy số phần trăm giảm đi $= \dfrac{9,60}{96} \times 100\% = 10\%$.

**Chú ý.** Khi nói về phần trăm tăng lên, chúng ta chú ý đến từ "tăng". Trong trường hợp này là so với số tiền tiết kiệm của tháng trước. Số tăng thêm là $96 − $80 = $16.

Trong câu b) chúng ta chú ý từ "giảm" với hàm ý tháng trước lúc này là $96 chứ không phải $80 (khi đề bài không nói là so với tháng đầu tiên).

**Bài tập 2.** Hai sinh viên A và B ứng cử vào Hội đồng sinh viên. A nhận được 60% số phiếu bầu và số phiếu chênh lệch là 45 so với B. Hỏi có bao nhiêu sinh viên đã tham gia bầu cử?

**Lời giải.** B nhận được 100% − 60% = 40% số phiếu bầu.

Vậy A nhận được nhiều hơn 60% − 40% hay 20% số phiếu (của tổng số sinh viên tham gia bầu cử). Ta có

$$20\% \text{ số sinh viên} = 45$$

$$1\% \text{ số sinh viên} = \frac{45}{20}$$

$$100\% \text{ số sinh viên } = \frac{45}{20} \times 100 = 225.$$

Vậy có 225 sinh viên tham gia bầu cử.

**Bài tập.** An alloy of copper and silver containing 60% of pure silver is mixed with another alloy, also of copper and silver containing 65% of pure silver. How much of each type is needed to produce 1200 g of alloy containing 62% of pure silver?

**Lời giải.** Chờ các bạn gửi về.

## TỪ TIẾNG ANH THƯỜNG GẶP

| | |
|---|---|
| *increased price* | giá đã tăng, giá sau khi tăng |
| *original price* | giá gốc, giá ban đầu |
| *article* | mặt hàng |
| *decreased price* | giá đã được giảm, giá sau khi giảm |
| *correspond to* | tương ứng với |
| *the percentage increase* | phần trăm tăng lên |
| *the percentage decrease* | phần trăm giảm đi |
| *a certain month* | một tháng nhất định, một tháng nào đó |
| *the enrolment* | đầu vào, học sinh mới vào |

## TỪ TRONG BÀI

| | |
|---|---|
| *alloy* | hợp kim |
| *pure* | nguyên chất |
| *copper* | đồng |
| *silver* | bạc |


# ỨNG DỤNG CỦA TRUNG ĐIỂM VÀO GIẢI TOÁN

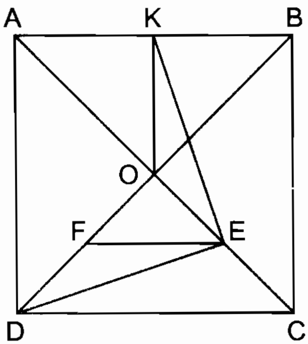
ÂU ANH MINH

*(HS. 9A$_1$, THCS Kim Hồng, TP. Cao Lãnh, Đồng Tháp)*

*Có nhiều cách tạo ra yếu tố phụ để giải bài toán hình học, trong đó có việc tạo ra trung điểm của đoạn thẳng. Điều này giúp ta sử dụng được các tính chất về đường trung bình của tam giác, hình thang hay tính chất đường trung tuyến,... Sau đây là một số ví dụ.*

**Bài toán 1.** Cho hình vuông ABCD tâm O. Gọi K, E tương ứng là trung điểm của AB, OC. Chứng minh rằng $KE \perp DE$.

**Lời giải.** Gọi F là trung điểm OD.




Vì EF là đường trung bình của $\Delta OCD$ nên $EF = \frac{1}{2}DC$.

Mà $OK = \frac{1}{2}AB$ (do OK là đường trung tuyến của $\Delta OAB$ vuông cân) nên EF = OK.

Mặt khác ta có DF = OE;

$$\widehat{DFE} = 180^{o} - \widehat{OFE} = 135^{o} = \widehat{EOK}.$$

Suy ra $\Delta DFE = \Delta EOK$ (c-g-c).

Do đó $\widehat{FDE} = \widehat{OEK}$

$$\Rightarrow \widehat{DEK} = \widehat{DEO} + \widehat{OEK} = \widehat{DEO} + \widehat{FDE}$$

$= \widehat{AOD}$ (tính chất góc ngoài của tam giác) $= 90^{o}$ hay $KE \perp DE$ (đpcm).

**Bài toán 2.** Cho hình vuông ABCD. M, N tương ứng là trung điểm của AB, BC. I là giao điểm của CM với DN.

Chứng minh rằng AI = ID.

**Lời giải.** *Cách 1.* Gọi P là trung điểm CD, H là giao điểm của AP với DN.

Vì $\Delta DCN = \Delta CBM$ (c-g-c) nên $\widehat{IDC} = \widehat{ICN}$.

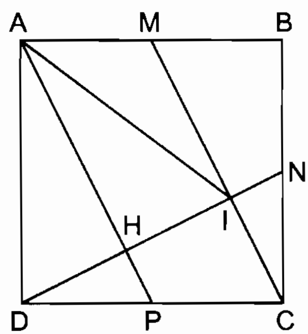
Do đó $CI \perp DN$.

Tương tự $AP \perp DN$. Suy ra AP // CI.

Mà PD = PC nên HD = HI.

Mà $AP \perp DN$ nên $\Delta ADI$ cân tại A.

Do đó AI = AD (đpcm).



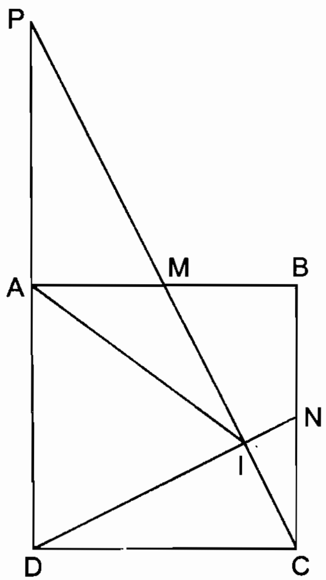

*Cách 2.* Kéo dài CM cắt DA tại P.

Theo *cách 1* thì $CI \perp DN$.

Tức là $\Delta IPD$ vuông tại I.

Mà $\Delta AMP = \Delta BMC$ (g-c-g) nên AP = BC = AD.

Do đó $AI = \frac{1}{2}DP = AD$ (đpcm).

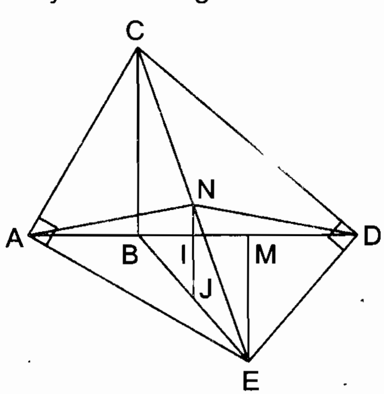



**Nhận xét.** *Cách 1* tạo ra trung điểm H của DI để sử dụng tính chất: Nếu một tam giác có đường trung tuyến đồng thời là đường cao thì tam giác ấy cân. *Cách 2* tạo ra điểm P để sử dụng tính chất: Trong một tam giác vuông thì đường trung tuyến thuộc cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.

**Bài toán 3.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại B. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D thỏa mãn AD = 3AB. Đường thẳng vuông góc với CD tại D cắt đường thẳng vuông góc với AC tại A ở E. Chứng minh rằng $\Delta BDE$ cân.

**Lời giải.** Gọi N, I, M thứ tự là trung điểm CE, AD, BD.

Vì AD = 3AB và do cách dựng các điểm M, I ta suy ra I là trung điểm BM.




Vì AN, DN tương ứng là đường trung tuyến của các tam giác ACE, DCE nên $AN = \frac{1}{2}CE = DN.$

Do đó $\Delta NAD$ cân tại N.

Suy ra $NI \perp AD$.

Gọi J là giao điểm của NI với BE.

Vì JN // BC (do cùng vuông góc với AD) mà N là trung điểm CE nên J là trung điểm BE.

Mà I là trung điểm BM nên IJ là đường trung bình của $\Delta BME$.

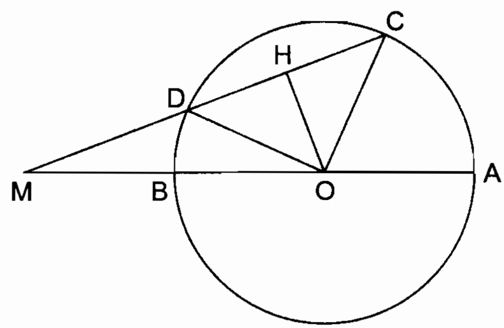
Do đó IJ // ME.

Suy ra $EM \perp BD$ (vì $NI \perp AD$).

Mà M là trung điểm BD nên $\Delta BDE$ cân tại E (đpcm).

**Bài toán 4.** Cho đường tròn tâm O đường kính AB = 2R và điểm M thỏa mãn OM = 2R. Một đường thẳng qua M cắt (O) tại hai điểm C, D (D nằm giữa M, C) thỏa mãn $\widehat{COD} = 90^o$. Tính MC, MD.

**Lời giải.** Gọi H là trung điểm CD.




Vì $\Delta OCD$ vuông cân tại O nên

$$OH = \frac{1}{2}CD = \frac{\sqrt{2}}{2}R.$$

Ta có $MH^2 = MO^2 - OH^2$

$$= 4R^2 - \frac{R^2}{2} = \frac{7R^2}{2}.$$

Do đó $MH = \frac{\sqrt{14}}{2}R.$

Suy ra

$$MD = \frac{\sqrt{14} - \sqrt{2}}{2}R;\ MC = \frac{\sqrt{14} + \sqrt{2}}{2}R.$$


# Một số dạng toán về đa thức một biến

NGUYỄN VĂN TIẾN *(GV. THCS Lâm Thao, Phú Thọ)*

*Khi học về đa thức một biến, học sinh thường gặp một số dạng toán sau.*

**1. Xác định đa thức**

**Bài toán 1.** a) Tìm đa thức P(x) bậc 4 thỏa mãn các điều kiện sau: $P(-1) = 0$; $P(x) - P(x-1) = x(x+1)(2x+1), \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Từ đó tính tổng

$$S = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + \ldots + n(n+1)(2n+1).$$

**Lời giải.** Với x = 0 thì $P(0) = P(-1) = 0$.

Với x = −1 thì $P(-1) = P(-2) = 0$.

Suy ra P(x) nhận 0, −1, −2 là nghiệm.

Đặt $P(x) = x(x+1)(x+2)(ax+b)$, với $a \neq 0$.

Với x = 1 thì $P(1) = P(0) + 6 = 6$.

Suy ra $a + b = 1$.

Với x = 2 thì $P(2) = P(1) + 30 = 36$.

Suy ra $2a + b = \frac{3}{2}$.

Từ đó $a = b = \frac{1}{2}$.

Vậy $P(x) = \frac{1}{2}x(x+1)^2(x+2)$.

b) Ta có $S = P(1) - P(0) + P(2) - P(1) + \ldots + P(n) - P(n-1) =$

$= P(n) - P(0) = P(n) = \frac{1}{2}n(n+1)^2(n+2)$.

**2. Tính giá trị của đa thức**

**Bài toán 2.** Cho đa thức P(x) thỏa mãn

$P(1) = 1$; $P(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2}P(x), \forall x \neq 0$;

$P(x_1 + x_2) = P(x_1) + P(x_2), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Tính $P(\frac{5}{7})$.

**Lời giải.** Ta có

$$P(2) = P(1+1) = P(1) + P(1) = 2.$$

Tương tự $P(3) = 3$; $P(5) = 5$; $P(7) = 7$.

Từ đó $P(\frac{1}{7}) = \frac{1}{7^2} \cdot P(7) = \frac{1}{7}$;

$P(\frac{2}{7}) = P(\frac{1}{7}) + P(\frac{1}{7}) = \frac{2}{7}$.

Tương tự $P(\frac{3}{7}) = \frac{3}{7}$; $P(\frac{5}{7}) = \frac{5}{7}$.

**3. Đa thức với hệ số nguyên**

**Bài toán 3.** Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn điều kiện với số nguyên x bất kì thì P(x) là một số chính phương. Chứng minh rằng a, b, c là các số nguyên và b là số chẵn.

**Lời giải.** Vì $P(0) = c$ là một số chính phương nên $c = m^2$, với m là một số nguyên (hiển nhiên c là một số nguyên).

Vì $P(1) = a + b + c$ và $P(-1) = a - b + c$ là những số nguyên nên $a + b, a - b \in \mathbb{Z}$.

Suy ra $2a, 2b \in \mathbb{Z}$.

Đặt $2a = n$; $2b = p$; $P(4) = k^2$, với $n, p, k \in \mathbb{Z}$.

Suy ra $k^2 - m^2 = 16a + 4b$ hay

$$(k+m)(k-m) = 2(4n+p).$$

Nếu k, m khác tính chẵn lẻ thì $(k+m)(k-m)$ là số lẻ: vô lí.

Do đó k, m cùng tính chẵn lẻ. ☞

Suy ra $(k + m)(k - m) \vdots 4$.

Do đó $(4n + p) \vdots 2$ hay $p \vdots 2$.

Suy ra $b \in \mathbb{Z}$.

Mà $a + b \in \mathbb{Z}$ nên $a \in \mathbb{Z}$.

Đặt $P(2) = t^2$, với $t \in \mathbb{Z}$.

Ta có $t^2 - m^2 = 2(2a + b)$.

Lập luận tương tự như trên ta suy ra b chẵn (đpcm).

**4. Chia hết và chia còn dư**

**Bài toán 4.** Cho các đa thức $P(x) = x^3 - x$ và $Q(x) = x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x + 1$.

a) Tìm dư trong phép chia Q(x) cho P(x).

b) Tìm x để $Q(x) \vdots P(x)$.

**Lời giải.** a) Ta có $P(x) = x(x^2 - 1)$;

$Q(x) = x(x^{80} - 1) + x(x^{48} - 1) + x(x^{24} - 1) + x(x^8 - 1) + 5x + 1$.

Vì các đa thức $x^{80} - 1$, $x^{48} - 1$, $x^{24} - 1$ và $x^8 - 1$ đều chia hết cho $x^2 - 1$ nên Q(x) chia P(x) dư $5x + 1$.

b) Ta có $Q(x) \vdots P(x) \Leftrightarrow 5x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{5}$.

**Bài tập tự giải.**

**Bài 1.** Chứng minh rằng với mỗi số $a > 0$ thì đa thức $f(x) = x^4 + ax^2 + 2$ viết được thành tổng các bình phương của hai đa thức bậc hai.

**Bài 2.** Tìm đa thức P(x) bậc 3 thỏa mãn các điều kiện sau: $P(-1) = -18$ và khi chia P(x) cho $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$ đều dư 6.

**Bài 3.** Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn điều kiện với số nguyên x bất kì thì P(x) là một số nguyên. Hỏi a, b, c có nhất thiết là những số nguyên hay không?

**Bài 4.** a) Chứng minh rằng nếu P(x) là một đa thức thì $[P(x) - P(x - 2)] \vdots (x - 2)$.

b) Biết rằng P(x), Q(x) là những đa thức thỏa mãn $(2x - 5)P(x) + (4x - 1)Q(x)$ là một đa thức chia $(x - 2)$ dư 17. Tính Q(2).


# BÀI TOÁN TỔNG QUÁT

NGUYỄN ĐÌNH THI *(HS. 12 Toán, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa, Phú Yên)*

TTT2 số 70 có đăng bài toán 4 (thi GTQT), đó là bài 2 trong kì thi Toán Quốc tế (IMO) năm 2008. Bài toán này có rất nhiều cách giải nhưng tư tưởng chính vẫn là đưa về bình phương của một tổng dạng $x^2 \geq 0$. Trong bài này, tôi xin giới thiệu với các bạn một lời giải như thế và một lời giải khác nữa cũng đẹp mắt bằng bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki, và phần cuối sẽ là bài toán tổng quát.

**Bài toán 1.** Cho x, y, z là các số thực khác 1 và thỏa mãn xyz = 1. Chứng minh rằng $\dfrac{x^2}{(x-1)^2}+\dfrac{y^2}{(y-1)^2}+\dfrac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1.$ (1)

**Lời giải 1.** Đặt $x=\dfrac{a}{b}$; $y=\dfrac{b}{c}$; $z=\dfrac{c}{a}$;

$m=\dfrac{a+b}{a-b}$; $n=\dfrac{b+c}{b-c}$; $p=\dfrac{c+a}{c-a}$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b}{b-c}\right)^2+\left(\frac{c}{c-a}\right)^2 \geq 1 \quad (2)$$

$\Leftrightarrow (m+1)^2+(n+1)^2+(p+1)^2 \geq 4$

$\Leftrightarrow m^2+n^2+p^2+2(m+n+p) \geq 1.$ (3)

Vì $(m+1)(n+1)(p+1)$ $=(m-1)(n-1)(p-1)$ nên $mn+np+pm=-1$.

Do đó (3) $\Leftrightarrow (m+n+p)^2+2(m+n+p) \geq -1$

$\Leftrightarrow (m+n+p+1)^2 \geq 0$ : đúng (đpcm).

**Lời giải 2.** Cũng như trên, để chứng minh (2) ta sử dụng bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki cho hai bộ số $(a-b)(a-c)$, $(b-c)(b-a)$, $(c-a)(c-b)$ và $\dfrac{a}{a-b}$, $\dfrac{b}{b-c}$, $\dfrac{c}{c-a}$ ta được

$$[(a-b)^2(a-c)^2+(b-c)^2(b-a)^2+(c-a)^2(c-b)^2]\times\left[\left(\frac{a}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b}{b-c}\right)^2+\left(\frac{c}{c-a}\right)^2\right] \geq (a^2-ac+b^2-ba+c^2-cb)^2.$$

Khai triển hai vế của bất đẳng thức trên ta có đpcm.

Trên đây là hai lời giải đẹp mắt cho *bài toán 1*. Tuy nhiên chưa dừng lại, ta thử tìm một bài toán tổng quát hơn như sau.

**Bài toán 2.** Cho x, y, z là các số thực khác 1 và thỏa mãn xyz = 1. Chứng minh rằng với mọi số thực m ta có

$$\left(\frac{x+m}{x-1}\right)^2+\left(\frac{y+m}{y-1}\right)^2+\left(\frac{z+m}{z-1}\right)^2 \geq 1. \quad (4)$$

**Lời giải .** Đặt $a=\dfrac{x+m}{x-1}$, $b=\dfrac{y+m}{y-1}$, $c=\dfrac{z+m}{z-1}$.

Suy ra $x=\dfrac{a+m}{a-1}$; $y=\dfrac{b+m}{b-1}$; $z=\dfrac{c+m}{c-1}$.

Do đó $\dfrac{a+m}{a-1}\cdot\dfrac{b+m}{b-1}\cdot\dfrac{c+m}{c-1}=1$

$\Leftrightarrow (m+1)[ab+bc+ca+(m-1)(a+b+c)+ m^2-m+1]=0.$

Nếu $m=-1$ thì (4) đúng.

Nếu $m \neq -1$ thì $ab+bc+ca$ $=(1-m)(a+b+c)-m^2+m-1.$

Suy ra $a^2+b^2+c^2$ $=(a+b+c+m-1)^2+m^2+1 \geq 1$ (đpcm).

**Nhận xét.** Rõ ràng *bài toán 2* là bài toán tổng quát, *bài toán 1* là trường hợp riêng ứng với m = 0, và điều kiện để đẳng thức xảy ra trong *bài toán 2* cũng là m = 0. Các bạn hãy giải *bài toán 2* theo hướng của lời giải 1 của *bài toán 1*, xem như bài tập.

# ĐỊNH LÍ PTÔLÊMÊ VÀ ỨNG DỤNG

PHẠM VĂN CHIẾN

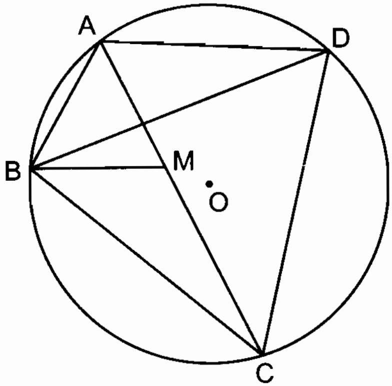
*(GV. THCS Xuân Phong, Xuân Trường, Nam Định)*

**Định lí.** Chứng minh rằng nếu ABCD là tứ giác nội tiếp thì

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

**Chứng minh.** Giả sử $\widehat{DBC} \ge \widehat{ABD}$.

Lấy điểm M trên đoạn AC thỏa mãn $\widehat{MBC} = \widehat{ABD}$.




Vì $\Delta ABM \backsim \Delta DBC$ (g-g) nên

$$AB \cdot CD = BD \cdot AM.$$

Tương tự $AD \cdot BC = BD \cdot CM$.

Suy ra $AB \cdot CD + AD \cdot BC = BD(AM + CM)$ $= AC \cdot BD$ (đpcm).

**Ứng dụng.**

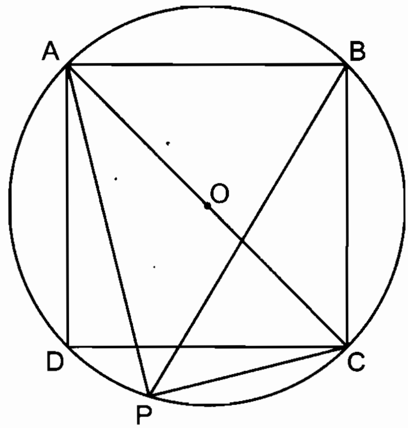
**Bài toán 1.** Cho hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. P là một điểm nằm trên cung nhỏ CD của (O).

Chứng minh rằng $PA + PC = \sqrt{2}PB$.

**Lời giải.** Vì ABCD là hình vuông nội tiếp đường tròn (O ; R) nên $AB = BC = R\sqrt{2}$, $AC = 2R$.

Áp dụng định lí Ptôlêmê cho tứ giác ABCP ta được $AB \cdot CP + AP \cdot BC = AC \cdot BP$.

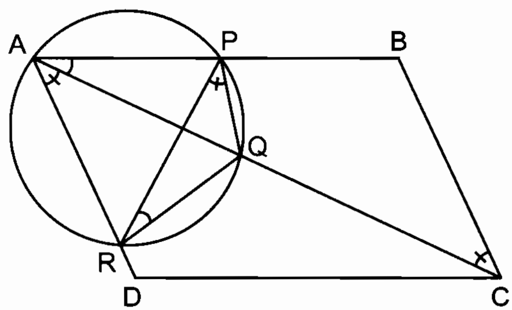
Từ đó suy ra đpcm.




**Bài toán 2.** Cho hình bình hành ABCD. Một đường tròn đi qua A cắt các đoạn thẳng AB, AC, AD lần lượt tại điểm thứ hai khác A là P, Q, R. Chứng minh rằng

$$AB \cdot AP + AD \cdot AR = AQ \cdot AC.$$

**Lời giải.**




Vì $\widehat{ACB} = \widehat{CAD} = \widehat{RPQ}$ và $\widehat{BAC} = \widehat{PRQ}$ nên $\Delta ABC \backsim \Delta RQP$ (g-g).

Suy ra $\frac{AB}{RQ} = \frac{BC}{QP} = \frac{AC}{RP}$ (đặt là t).

Khi đó $RQ = \frac{AB}{t}$, $QP = \frac{BC}{t}$, $RP = \frac{AC}{t}$.

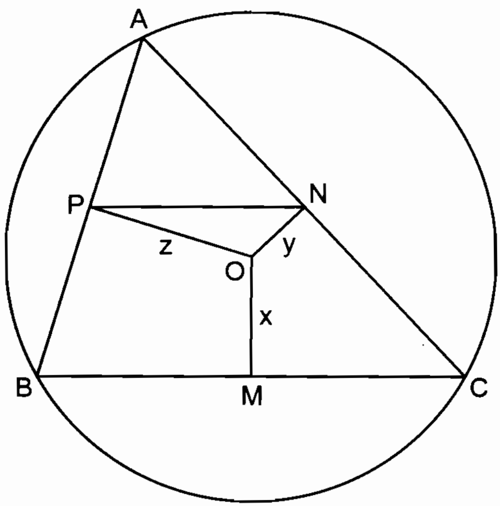
Áp dụng định lí Ptôlêmê cho tứ giác APQR ta được $AP \cdot QR + AR \cdot PQ = AQ \cdot PR$

$\Leftrightarrow AP \cdot \frac{AB}{t} + AR \cdot \frac{BC}{t} = AQ \cdot \frac{AC}{t}$.

Từ đó suy ra đpcm.

**Bài toán 3.** Cho $\Delta ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R và ngoại tiếp đường tròn tâm I, bán kính r. Gọi x, y, z thứ tự là khoảng cách từ O đến BC, CA, AB. Chứng minh rằng $x + y + z = R + r$.

**Lời giải.** Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.




Áp dụng định lí Ptôlêmê cho tứ giác ANOP ta được $\frac{cy}{2} + \frac{bz}{2} = \frac{aR}{2}$ (vì $NP = \frac{a}{2}$)

$\Leftrightarrow cy + bz = aR$.

Tương tự $az + cx = bR$; $bx + ay = cR$.

Suy ra

$a(y + z) + b(z + x) + c(x + y) = R(a + b + c)$.

Mà $ax + by + cz = 2S_{ABC} = (a + b + c)r$ nên cộng theo vế hai đẳng thức trên rồi chia hai vế cho $(a + b + c)$, suy ra đpcm.

**Bài toán 4.** Cho đường tròn (O) và dây BC cố định (khác đường kính). Xác định vị trí của điểm A trên cung lớn BC sao cho $AB + AC$ lớn nhất.

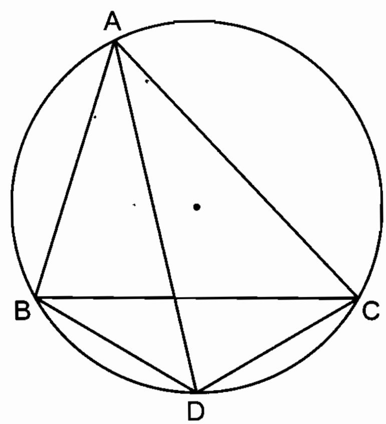
**Lời giải.** Gọi D là trung điểm của cung nhỏ BC.

Áp dụng định lí Ptôlêmê cho tứ giác ABDC ta được $AB \cdot DC + AC \cdot BD = AD \cdot BC$.

$\Leftrightarrow DC(AB + AC) = AD \cdot BC$ (vì $BD = DC$).

Vì DC và BC cố định nên $AB + AC$ lớn nhất khi và chỉ khi AD lớn nhất.

Vậy A là trung điểm của cung lớn BC.




**Bài tập tự luyện.**

**Bài 1.** Cho ngũ giác đều ABCDE nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là một điểm thuộc cung nhỏ AE. Chứng minh rằng

$$MA + MC + ME = MB + MD.$$

**Bài 2.** Cho $\Delta ABC$ tù. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp, r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác và x, y, z thứ tự là khoảng cách từ tâm O của đường tròn ngoại tiếp tới các cạnh BC, CA, AB.

Chứng minh rằng $y + z - z = R + r$.

**Bài 3.** Cho đường tròn (O) và dây BC cố định (khác đường kính). Xác định vị trí của điểm A trên cung lớn BC sao cho $AB + 2AC$ lớn nhất.

GIẢI TOÁN THẾ NÀO?

# SO SÁNH HAI BIỂU THỨC QUA BIỂU THỨC TRUNG GIAN

NGUYỄN ANH THUẤN
*(Sở GD-ĐT Hải Phòng)*

Trong thực tế cuộc sống, chúng ta cũng đã thấy được tầm quan trọng của *yếu tố trung gian* và việc lựa chọn được *yếu tố trung gian* phù hợp cho từng trường hợp, đối tượng cụ thể. Nhân dịp TTT2 số 42 đề cập đến một dạng toán so sánh biểu thức trong sách giáo khoa, tôi muốn nhắc lại với các bạn một phương pháp quan trọng để so sánh giá trị của hai biểu thức, đó chính là phương pháp xét biểu thức trung gian. Mời các bạn hãy theo dõi các ví dụ sau.

**Ví dụ 1.** Với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, hãy so sánh $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ với 1.

**Lời giải.**

***Cách 1.*** Do $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2 - 1}$ với mọi $n \geq 2$ nên

$$A < B = \frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{3^2 - 1} + \frac{1}{4^2 - 1} + \ldots + \frac{1}{n^2 - 1}.$$

Mặt khác,

$$B = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n-1)(n+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4} < 1.$$

Vậy $A < 1$.

***Cách 2.*** Do $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$ với mọi $n \geq 2$ nên $A < C = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}$.

Mặt khác,

$$C = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$= 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

Vậy A < 1.

***Nhận xét.*** Hai cách giải trên đều chọn được biểu thức trung gian có thể so sánh trực tiếp được với biểu thức *A* và so sánh được với 1 chỉ qua các bước biến đổi khá đơn giản và quen thuộc.

Trong bài toán cụ thể này, rõ ràng *cách 2* ngắn gọn và đơn giản hơn *cách 1*, tuy nhiên nếu bài toán bắt so sánh *A* với $\frac{3}{4}$ thì đương nhiên không thể dùng được *cách 2*.

**Ví dụ 2.** Với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, hãy so sánh $P = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}$ với $\frac{1}{2}$.

**Lời giải.**

***Cách 1.*** Tương tự *cách 1* của *ví dụ 1*, ta có

$$P < Q = \frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{4^2 - 1} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2 - 1}.$$

Mặt khác, $\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$

nên $2Q = \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{2n+1} < 1.$$

Suy ra $P < Q < \frac{1}{2}$.

***Cách 2.*** Thử nghĩ đến việc sử dụng kết quả trong *ví dụ 1* ta biến đổi $P$ như sau :

$$P = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}$$

$$= \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2^2}(1 + A).$$

Suy ra $P < \frac{1}{2^2}(1+1) = \frac{1}{2}$.

***Nhận xét.*** *Cách 2* trong *ví dụ 1* là một lựa chọn tốt, nhưng áp dụng vào *ví dụ 2* thì sẽ là một công việc khó khăn. Khi đó ta có

$$P < R = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \ldots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n}$$

và ta phải so sánh $R$ với $\frac{1}{2}$.

Như vậy, việc chọn biểu thức trung gian cơ bản phải thỏa mãn được những điều kiện thuận lợi cho việc rút gọn, so sánh hoặc gắn kết được với biểu thức cần so sánh ...

Qua các ví dụ trên, phần nào chúng ta thấy được yêu cầu và lợi thế của phương pháp sử dụng biểu thức trung gian trong bài toán so sánh giá trị hai biểu thức. Chúc các bạn thành công và để kết thúc, đề nghị các bạn thử làm bài tập sau :

Hãy so sánh :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{999999}{1000000} \text{ và } \frac{1}{1000}.$$

## ● *Kết quả :* (TTT2 số 41)

# Câu đố Hồng Hà

*Sản phẩm mới của Hồng Hà*
*Giúp nhau rất dễ nhận ra cùng trường*
*Mọi người chắc đã tỏ tường*
*Gọi tên sản phẩm yêu thương đó là :*
***Đồng phục học sinh Hồng Hà***
*Vải tốt, kiểu dáng thật là dễ thương.*

Kì này có rất nhiều bạn tham gia giải câu đố. Tất cả đều trả lời đúng đáp án. Hồng Hà xin tặng quà cho các bạn trả lời bằng thơ hay nhất : *Nguyễn Thị Hà*, Bưu điện Cổ Tiết, Tam Nông, **Phú Thọ** ; *Lê Thị Hồng Nhung*, xóm 6, Thụy Quỳnh, Thái Thụy, **Thái Bình** ; *Hoàng Văn Đông*, xóm 1, Xuân Sơn, Đô Lương ; *Hoàng Thu Phương*, mẹ là Nguyễn Thị Dương, giáo viên THCS Đông Sơn, Đô Lương ; *Trần Thái Sơn*, bố là Trần Thanh Biên, xóm 7, xã Nghi Hoa, Nghi Lộc, **Nghệ An** ; *Phạm Kiều Linh*, 140 Trưng Trắc, Phúc Yên ; *Lê Thái Sơn*, khu 2, xã Tề Lỗ, Yên Lạc ; *Nguyễn Thị Ngọc*, $7A_1$, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc** ; *Trịnh Việt Hùng*, xóm 5, Thọ Trường, Thọ Xuân ; *Lê Thị Mai Phương*, số nhà 01 đường 30 tháng 4, tiểu khu 4, Thị trấn Hà Trung, Hà Trung, **Thanh Hóa** ; *Đỗ Kiều Linh*, đội II, xóm 4, thôn Tảo Khê, xã Tảo Dương Văn, Ứng Hòa, **Hà Tây** ; *Kiều Hồng Vân*, tổ 2, khối 8, Bắc Hồng, Hồng Lĩnh, TX. Hà Tĩnh ; *Ngô Thu Hường*, số 31, Hà Huy Tập, P. Nam Hà, TX. Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh** ; *Nguyễn Thị Mỹ Linh*, 48D/212, Đà Nẵng, Ngô Quyền, **Hải Phòng** ; *Nguyễn Diệu Thắm*, Đông Lễ, Đông Tảo, Khoái Châu, **Hưng Yên** ; *Nguyễn Kiều My*, con bố Nguyễn Văn Thức, Ban Dân vận Tỉnh ủy Quảng Ngãi, 146 Lê Trung Đình, TP. Quảng Ngãi, **Quảng Ngãi** ; *Trần Hoàng Phương Thảo*, 50/3 đường Phan Chu Trinh, TP. Huế, **Thừa Thiên - Huế** ; *Nguyễn Đình Cương*, mẹ là Nguyễn Thị Xuân, số 6 Tống Duy Tân, phường Ngọc Châu, TP. Hải Dương, **Hải Dương**.

# BÀI TOÁN VỀ KHOẢNG CÁCH TRÊN MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

NGUYỄN THANH HÀI
*(THCS Nam Cường, Nam Trực, Nam Định)*

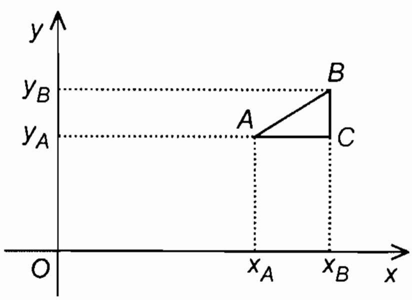
★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★

Trong nội dung hàm số và đồ thị có một dạng toán cũng hay được đề cập đến ở các kì thi cuối cấp, đó là xác định khoảng cách giữa hai điểm ; hai đường thẳng song song trên mặt phẳng tọa độ.

● Trên mặt phẳng tọa độ $Oxy$, cho hai điểm $A(x_A\,;\,y_A)$, $B(x_B\,;\,y_B)$. Khoảng cách giữa $A$ và $B$ được tính bởi công thức :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}. \qquad (*)$$

*Chứng minh.*




Gọi $C$ là giao điểm của $Ay_A$ và $Bx_B$. Ta có $\Delta ABC$ vuông tại $C$ và $AC=|x_B-x_A|$ ; $BC=|y_B-y_A|$. Suy ra $AB^2=AC^2+BC^2$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.$$

● Khoảng cách giữa hai đường thẳng $d_1 \,//\, d_2$ chính là khoảng cách giữa hai điểm $A$ và $B$, trong đó $A$ thuộc $d_1$, $B$ thuộc $d_2$ và $AB$ vuông góc với $d_1$ và $d_2$.

**Ví dụ 1.** Cho $A(3\,;-1)$, $B(-1\,;-3)$, $C(2\,;-4)$. Chứng minh rằng tam giác $ABC$ vuông cân và tính diện tích của nó.

**Lời giải.** Áp dụng (*) ta có

$AB^2=(-1-3)^2+(-3+1)^2=20$

$CA^2=(3-2)^2+(-1+4)^2=10$

$CB^2=(-1-2)^2+(-3+4)^2=10.$

Suy ra $CA=CB$ và $AB^2=CA^2+CB^2$ hay tam giác $ABC$ vuông cân tại $C$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}CA\cdot CB=\frac{1}{2}\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}=5.$$

**Ví dụ 2** *(đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định, 1997-1998)*. Cho đường thẳng $(d)$ có phương trình $y=mx-m+1$ và parabol $(P)$ có phương trình $y=x^2$. Tìm giá trị của $m$ để $(d)$ cắt $(P)$ tại hai điểm phân biệt $A$ và $B$ sao cho $AB=\sqrt{3}$.

**Lời giải.** Hoành độ giao điểm của $(d)$ và $(P)$ là nghiệm của phương trình :

$mx-m+1=x^2 \Leftrightarrow x^2-mx+m-1=0,$

có hai nghiệm là $x_1=1$ ; $x_2=m-1$.

Giả sử $x_A=x_1$ và $x_B=x_2$ thì ta có

$A(1\,;\,1)$ và $B(m-1\,;\,(m-1)^2)$.

Từ đó, với giả thiết $AB=\sqrt{3}$, áp dụng (*) ta có $AB^2=(m-2)^2+[(m-1)^2-1]^2=$
$=m^4-4m^3+5m^2-4m+4=3.$

Suy ra $m^4-4m^3+5m^2-4m+1=0,$

$m=0$ không là nghiệm của phương trình này nên chia cả hai vế của phương trình cho $m^2$ ta được phương trình tương đương :

$$\left(m^2+\frac{1}{m^2}\right)-4\left(m+\frac{1}{m}\right)+5=0$$

$$\Leftrightarrow t^2-4t+3=0 \text{ với } t=m+\frac{1}{m};\ |t|\geq 2$$

$$\Rightarrow t=m+\frac{1}{m}=3\Rightarrow m=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

**Ví dụ 3.** Cho đường thẳng ($d$) có phương trình $y = mx - 2$ và parabol ($P$) có phương trình $y=-\frac{x^2}{4}$. Chứng minh rằng ($d$) luôn cắt ($P$) tại hai điểm $A$, $B$ phân biệt. Với giá trị nào của $m$ thì đoạn thẳng $AB$ có độ dài ngắn nhất ? Tìm giá trị đó.

**Lời giải.** Hoành độ giao điểm của ($d$) và ($P$) là nghiệm của phương trình :

$$mx-2=-\frac{x^2}{4}\Leftrightarrow x^2+4mx-8=0,$$

có $\Delta' = 4m^2 + 8 > 0$ với mọi $m$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt. Nói cách khác, ($d$) luôn cắt ($P$) tại hai điểm phân biệt $A$, $B$.

Theo định lí Vi-ét ta có $x_B + x_A = -4m$ ; $x_Bx_A = -8$. Từ phương trình đường thẳng ($d$) ta có $y_B - y_A = (mx_B - 2) - (mx_A - 2) = m(x_B - x_A)$ nên theo (*), $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (x_B - x_A)^2(1 + m^2) = [(x_B + x_A)^2 - 4x_Bx_A](1 + m^2) = [(-4m)^2 - 4(-8)](1 + m^2) = (16m^2 + 32)(1 + m^2)$.

Suy ra $AB=\sqrt{(16m^2+32)(1+m^2)}\geq\sqrt{32}$.

Vậy $AB$ có độ dài ngắn nhất là $\sqrt{32}=4\sqrt{2}$, khi $m = 0$.

**Ví dụ 4.** Cho hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ lần lượt có phương trình là :

$y = x + 2$ và $y = (2m^2 - m)x + m^2 + m$.

a) Xác định giá trị của $m$ để $d_1 // d_2$.

b) Biết $A$ thuộc $d_1$ có hoành độ bằng 2. Viết phương trình đường thẳng $d_3$ đi qua $A$ vuông góc với $d_1$ và $d_2$.

c) Tính khoảng cách giữa $d_1$ và $d_2$.

**Lời giải.**

a) $d_1 // d_2 \Leftrightarrow \begin{cases}2m^2-m=1\\ m^2+m\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$

(với $m=-\frac{1}{2}$ thì $d_2$ : $y=x-\frac{1}{4}$).

b) Ta có $A(2 ; 4)$ ; $d_3$ vuông góc với $d_1$ và đi qua $A$ suy ra $d_3$ có dạng $y = -x + b$ $\Rightarrow 4 = -2 + b \Rightarrow b = 6 \Rightarrow d_3 : y = -x + 6$.

c) Gọi $B$ là giao điểm của $d_3$ và $d_2$ thì $B(\frac{25}{8};\frac{23}{8})$ (là nghiệm của hệ hai phương trình $y=x-\frac{1}{4};\ y=-x+6$). Khoảng cách giữa $d_1$ và $d_2$ chính là độ dài đoạn $AB$ :

$$AB=\sqrt{\left(\frac{25}{8}-2\right)^2+\left(\frac{23}{8}-4\right)^2}=\frac{9\sqrt{2}}{8}.$$

Các bạn làm thêm một số bài tập sau :

**Bài 1.** Cho parabol ($P$) : $y=\frac{x^2}{2}$ và hai điểm $I(0 ; 2)$, $M(m ; 0)$. Viết phương trình đường thẳng ($d$) đi qua $I$ và $M$. Chứng minh rằng ($d$) luôn cắt ($P$) tại hai điểm phân biệt $A$, $B$ và $AB > 4$.

**Bài 2.** Cho ($P$) : $y=\frac{x^2}{4}$ ; ($d$) : $y=-\frac{x}{2}+2$.

a) Chứng minh ($d$) luôn cắt ($P$) tại hai điểm phân biệt $A$, $B$. Tính độ dài đoạn thẳng $AB$.

b) Tìm điểm $M$ trên cung $AB$ của ($P$) sao cho tam giác $MAB$ có diện tích lớn nhất.

c) Tìm trên trục hoành $Ox$ điểm $N$ sao cho $NA + NB$ có độ dài nhỏ nhất.

**Bài 3.** Cho ($P$) : $y = -x^2$ và đường thẳng ($d$) có hệ số góc $k$, đi qua $I(0 ; -1)$. Chứng minh rằng ($d$) luôn cắt ($P$) tại hai điểm phân biệt $A$, $B$ và tam giác $AOB$ vuông.

**Bài 4.** Cho hai đường thẳng $y = -x + 2$ và $y = 2mx - m^2 + 4$. Tìm giá trị của $m$ để hai đường thẳng song song với nhau. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng đó.

# ĐỊNH LÍ LYNESS MỞ RỘNG VÀ CÁC HỆ QUẢ

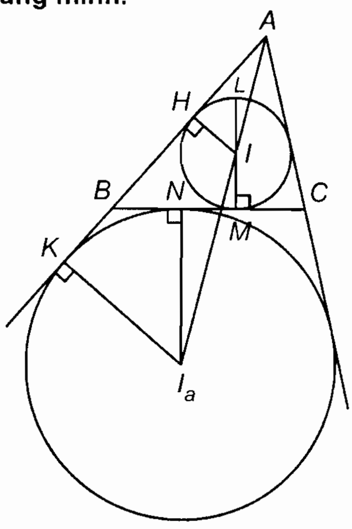
*TS.* NGUYỄN MINH HÀ *(ĐHSP Hà Nội)*

***(Tiếp theo kì trước)***

Để chứng minh *hệ quả 1*, ta cần có một bổ đề.

**Bổ đề 3.** Tam giác $ABC$ có $(I)$ là đường tròn nội tiếp, $(I_a)$ là đường tròn bàng tiếp đối diện với đỉnh $A$. $(I)$, $(I_a)$ theo thứ tự tiếp xúc với $BC$ tại $M$, $N$. $L$ là điểm đối xứng của $M$ qua $I$. Khi đó $A$, $L$, $N$ thẳng hàng.

**Chứng minh.**




Dễ thấy $A$, $I$, $I_a$ thẳng hàng. (1)

Mặt khác ta có :

$$\begin{cases} IL \perp BC \\ I_aN \perp BC \end{cases} \Rightarrow IL \mathbin{//} I_aN. \qquad (2)$$

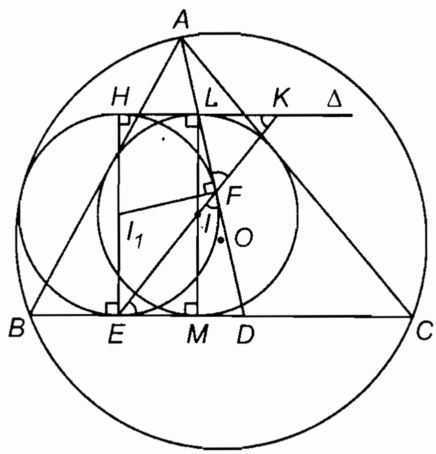
Gọi $H$, $K$ là tiếp điểm của $(I)$, $(I_a)$ với $AB$.

Ta có : $\dfrac{IL}{I_aN} = \dfrac{IH}{I_aK} = \dfrac{IA}{I_aA}$. (3)

(vì $IH \mathbin{//} I_aK$).

Từ (1), (2), (3), theo định lí Ta-lét, dễ dàng suy ra $A$, $L$, $N$ thẳng hàng.

Trở lại việc chứng minh *hệ quả 1*.




Gọi $(I)$ là đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$ ; gọi $E$, $F$ theo thứ tự là tiếp điểm của $(I_1)$ với $BD$, $BA$ ; $M$ là tiếp điểm của $(I)$ với $BC$ ; $L$ là điểm đối xứng của $M$ qua $I$.

Qua $L$, kẻ $\Delta$ tiếp xúc với $(I)$.

Đặt $K = \Delta \cap EF$ ; $H = \Delta \cap EI_1$.

Theo *bổ đề 3*, $L \in AD$. Suy ra :

$\widehat{LFK} = \widehat{AFK} = \widehat{DFE}$ (đối đỉnh)

$= \widehat{DEF}$ ($\Delta DEF$ cân tại D)

$= \widehat{FKL}$ ($\Delta \mathbin{//} BC$)

$\Rightarrow LF = LK$. (1)

Theo *định lí Lyness mở rộng*, $I \in EF$.

Suy ra $\dfrac{KL}{EM} = \dfrac{IL}{IM}$ (vì $\Delta \mathbin{//} BC$)

$= 1$ (vì $IL = IM$)

$\Rightarrow KL = EM.$ (2)

Mặt khác, dễ thấy $EMLH$ là hình chữ nhật. Suy ra $EM = LH$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $LF = LH$ $\Rightarrow \Delta LFI_1 = \Delta LHI_1 \Rightarrow FI_1 = HI_1 \Rightarrow D$ tiếp xúc với $(I_1)$ tại $H$.

Gọi $r$, $r_1$, $r_2$ là bán kính của $(I)$, $(I_1)$, $(I_2)$.

Ta có $2r_1 = EH = ML = 2r \Rightarrow r_1 = r$.

Tương tự $r_2 = r$. Vậy $r_1 = r_2$.

*Hệ quả 1* đã được chứng minh. Dễ thấy kết luận "bán kính $p$ của $(\omega)$ bằng $r$" trong *bài 4(40)* đã được chứng minh trong phép chứng minh *hệ quả 1*.

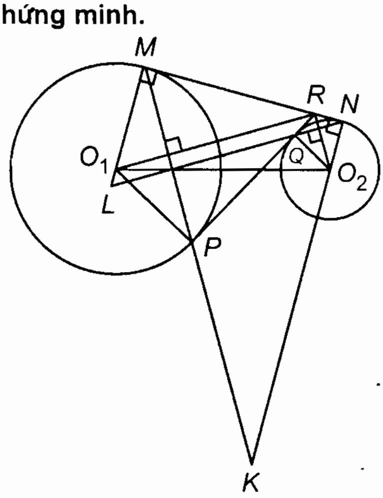
So với *hệ quả 1*, hệ quả sau đây có vẻ thú vị hơn nhiều.

**Hệ quả 2.** Tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$, $D$ là một điểm bất kì trên cạnh $BC$ của tam giác. Các đường tròn $(O_1)$, $(O_2)$ cùng tiếp xúc với $(O)$ ; cùng tiếp xúc với đoạn $DA$ và theo thứ tự tiếp xúc với các đoạn $DB$, $DC$. Ta có $O_1O_2$ đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $ABC$.

Tác giả của *hệ quả 2* là một nhà toán học Mĩ, rất tiếc là tôi không nhớ tên. Để chứng minh *hệ quả 2*, ta cần có một bổ đề.

**Bổ đề 4.** $MN$, $PQ$ theo thứ tự là tiếp tuyến chung ngoài, tiếp tuyến chung trong của các đường tròn $(O_1)$, $(O_2)$ ($M, P \in (O_1)$ ; $N, Q \in (O_2)$). Ta có $MP$, $NQ$, $O_1O_2$ đồng quy.

**Chứng minh.**




Đặt $K = MP \cap NO_2$ ; $L = NQ \cap MO_1$ ; $R = MN \cap PQ$. Dễ thấy $RO_1 \perp RO_2$ (1) (phân giác của hai góc kề bù).

Từ (1), với chú ý rằng $NQ \perp RO_2$, $MP \perp RO_1$, ta có $RO_1 \parallel NQ$ ; $RO_2 \parallel MP$

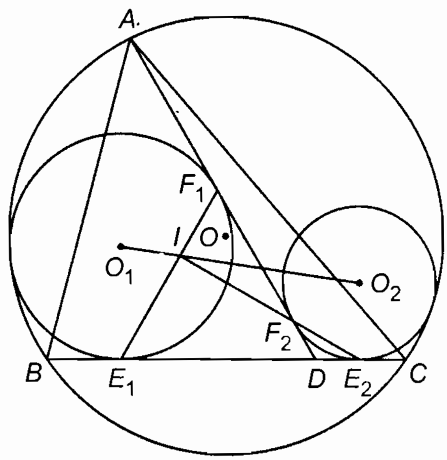
$$\Rightarrow \frac{O_1M}{O_1L} = \frac{RM}{RN} = \frac{O_2K}{O_2N}. \quad (2)$$

Mặt khác ta có : $\begin{cases} LM \perp MN \\ KN \perp MN \end{cases}$

$\Rightarrow LM \parallel KN.$ (3)

Từ (2), (3), theo định lí về chùm đường thẳng đồng quy, ta có $MP$, $NQ$, $O_1O_2$ đồng quy.

Trở lại việc chứng minh *hệ quả 2*.




Gọi $I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$ ; gọi $E_1$, $F_1$ là tiếp điểm của $(O_1)$ với các đoạn $DB$, $DA$ ; gọi $E_2$, $F_2$ là tiếp điểm của $(O_2)$ với các đoạn $DC$, $DA$.

Theo *định lí Lyness mở rộng*, ta có $I \in E_1F_1$ và $I \in E_2F_2$. Suy ra :

$$I = E_1F_1 \cap E_2F_2. \quad (1)$$

Theo *bổ đề 4* ta có $E_1F_1$, $E_2F_2$, $O_1O_2$ đồng quy. (2)

Từ (1), (2) suy ra $I \in O_1O_2$. Nói cách khác, $O_1O_2$ đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$.

# TỪ MỘT CÔNG THỨC ĐƠN GIẢN

PHAN THẾ HẢI *(GV. CĐSP Bà Rịa - Vũng Tàu)*

Khi làm bài tập, các em có thể gặp bài toán liên quan đến số tự nhiên có dạng $\overline{aa\ldots a}$. Bài viết này sẽ giúp các em sử dụng một công thức đơn giản để giải một số bài toán dạng này.

Công thức đó là

$$\underbrace{11111\ldots1}_{n \text{ chữ số } 1} = \frac{1}{9}\cdot\underbrace{99999\ldots9}_{n \text{ chữ số } 9} = \frac{1}{9}\cdot(10^n - 1)$$

(với $n \in \mathbb{N}^*$).

Sau đây là một số ví dụ.

**Bài toán 1.** Rút gọn tổng sau

$$S = 7 + 77 + 777 + \ldots + \underbrace{777777\ldots7}_{2008 \text{ chữ số } 7}.$$

**Lời giải.** Ta có

$$S = \frac{7}{9}\cdot\left((10-1) + (10^2-1) + \ldots + (10^{2008}-1)\right)$$

$$= \frac{7}{9}\cdot(\underbrace{1111111\ldots1}_{2008 \text{ chữ số } 1}0 - 2008)$$

$$= \frac{7}{9}\cdot(\underbrace{1111111\ldots1}_{2004 \text{ chữ số } 1}09102).$$

**Bài toán 2.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 0$ thì số sau là tích của hai số tự nhiên liên tiếp :

$$a = \underbrace{11111\ldots1}_{n \text{ chữ số } 1}\underbrace{22222\ldots2}_{n \text{ chữ số } 2}.$$

**Lời giải.** Ta có $a = \underbrace{11111\ldots1}_{n \text{ chữ số } 1}\cdot 10^n +$

$$+\underbrace{2222\ldots2}_{n \text{ chữ số } 2} = \frac{10^n-1}{9}\cdot 10^n + 2\cdot\frac{10^n-1}{9} =$$

$$= \frac{10^n-1}{9}\cdot(10^n+2) = \frac{10^n-1}{3}\cdot\frac{10^n+2}{3} =$$

$$= \underbrace{3333\ldots3}_{n \text{ chữ số } 3}\cdot\underbrace{333333\ldots3}_{n-1 \text{ chữ số } 3}4,$$ suy ra đpcm.

**Bài toán 3.** Chứng minh rằng số sau là một số chính phương (tức là một bình phương đúng của một số tự nhiên) :

$$N = \underbrace{1111111\ldots1}_{1995 \text{ chữ số } 1}\cdot 1\underbrace{000000\ldots0}_{1994 \text{ chữ số } 0}5 + 1.$$

**Lời giải.** Ta có

$$N = \frac{10^{1995}-1}{9}\cdot(10^{1995}+5) + 1$$

$$= \left(\frac{10^{1995}+2}{3}\right)^2 = \left(\frac{10^{1995}-1}{3}+1\right)^2$$

$$= \underbrace{333333\ldots3}_{1994 \text{ chữ số } 3}4^2,$$ suy ra đpcm.

**Bài toán 4.** Cho $A = \underbrace{99999\ldots9}_{n \text{ chữ số } 9}$ (với $n \in \mathbb{N}^*$).

So sánh tổng các chữ số của $A^2$ với tổng các chữ số của A.

**Lời giải.** Ta có $A^2 = (10^n - 1)^2 =$

$$= (10^n - 2)10^n + 1 =$$

$$= \underbrace{999999\ldots9}_{n-1 \text{ chữ số } 9}8\underbrace{000000\ldots0}_{n-1 \text{ chữ số } 0}1.$$

Suy ra tổng các chữ số của $A^2$ là $9n$, bằng tổng các chữ số của A.

**Bài toán 5.** Tìm các chữ số a, b, c > 0 sao cho với mọi số tự nhiên n > 0 thì

$$\overline{\underbrace{aaaa\ldots a}_{n \text{ chữ số } a}\underbrace{bbbb\ldots b}_{n \text{ chữ số } b}} + 1 = (\overline{\underbrace{cccc\ldots c}_{n \text{ chữ số } c}} + 1)^2. \quad (1)$$

**Lời giải.** Đặt $m = \underbrace{11111\ldots1}_{n \text{ chữ số } 1}$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow am\cdot 10^n + bm + 1 = (cm+1)^2$

$\Leftrightarrow am(9m+1)+bm+1=(cm+1)^2.$

Điều kiện của bài toán đã cho tương đương với $\begin{cases} 9a = c^2 \\ a+b=2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{c^2}{9} \\ b = 2c - \dfrac{c^2}{9}. \end{cases}$

Suy ra $c \in \{3 ; 6 ; 9\}$. Ta có ba bộ $(a ; b ; c)$ thỏa mãn là $(1 ; 5 ; 3)$, $(4 ; 8 ; 6)$ và $(9 ; 9 ; 9)$.

**Bài toán 6.** Tìm tất cả các chữ số x, y thỏa mãn số A chia hết cho 37, với

$$A = \overline{1\underbrace{000000\ldots0}_{2009\text{ chữ số }0}1\underbrace{000000\ldots0}_{2008\text{ chữ số }0}xy}.$$

**Lời giải.** Ta có $A = 10^{4020} + 10^{2010} + \overline{xy}$

$= (10^{4020} - 1) + (10^{2010} - 1) + \overline{xy} + 2$

$= \underbrace{9999999\ldots9}_{4020\text{ chữ số }9} + \underbrace{9999999\ldots9}_{2010\text{ chữ số }9} + \overline{xy} + 2.$

Vì $999 \,\vdots\, 37$ ; $4020 \,\vdots\, 3$ ; $2010 \,\vdots\, 3$ nên các số $\underbrace{9999999\ldots9}_{4020\text{ chữ số }9}$ và $\underbrace{9999999\ldots9}_{2010\text{ chữ số }9}$ đều chia hết cho 37.

Do đó yêu cầu bài toán đã cho tương đương với $(\overline{xy} + 2) \,\vdots\, 37$.

Vậy $\overline{xy} \in \{35 ; 72\}$.

**Các bài toán luyện tập.**

**Bài 1.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $(10^n + 18n - 1) \,\vdots\, 27$.

**Bài 2.** Rút gọn tích sau

$\underbrace{\overline{33333\ldots3}}_{n\text{ chữ số }3} \cdot \underbrace{\overline{6666\ldots6}}_{n\text{ chữ số }6}$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

**Bài 3.** Cho $m \in \mathbb{N}^*$ ; $A = \underbrace{111111\ldots1}_{2m\text{ chữ số }1}$ ;

$B = \underbrace{1111111\ldots1}_{m+1\text{ chữ số }1}$ ; $C = \underbrace{66666\ldots6}_{m\text{ chữ số }6}$.

Chứng minh rằng $A + B + C + 8$ là một số chính phương với mọi $m \in \mathbb{N}^*$.

**Bài 4.** Tìm các chữ số a, b, c, d > 0 sao cho với mọi số tự nhiên n > 0 thì

$\overline{\underbrace{aaaa\ldots a}_{n\text{ chữ số }a}\underbrace{bbbb\ldots b}_{n\text{ chữ số }b}\underbrace{cccc\ldots c}_{n\text{ chữ số }c}} + 1$

$= (\underbrace{\overline{dddd\ldots d}}_{n\text{ chữ số }d} + 1)^3.$

**Bài 5.** Tìm tất cả các chữ số a sao cho với mọi số tự nhiên n > 0 thì M là một số chính phương, với

$$M = \overline{\underbrace{4444\ldots4}_{n\text{ chữ số }4}3\underbrace{5555\ldots5}_{n\text{ chữ số }5}a}.$$

*Các bạn được thưởng kì này*

**THI GIẢI TOÁN QUA THƯ**

Nguyễn Văn Cường, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An** ; Nguyễn Hải Đăng, $8A_2$, THCS Vũ Hữu, Bình Giang, **Hải Dương** ; Nguyễn Nhật Linh, 8C, THCS Vũ Kiệt, Thuận Thành ; Nguyễn Như Ngọc, 6A, THCS Nguyễn Cao ; Vũ Văn Cận, 7B, THCS Cách Bi, Quế Võ, **Bắc Ninh** ; Võ Duy Văn, 6A ; Hồ Khánh Duy, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Nghệ An** ; Nguyễn Thị Ngân, 7A, THCS Trung Lộc, Can Lộc, **Hà Tĩnh** ; Lê Hoàng Đại Long, $7A_4$, THCS Trà Nóc, TP. Cần Thơ, **Cần Thơ**.

# MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ CĂN THỨC

*ThS.* NGUYỄN ANH DŨNG *(Hà Nội)*

Trong các đề thi ở cấp THCS, ta thường gặp một số bài toán về căn thức. Phần lớn các bài toán loại này hay và không dễ. Sau đây là một số ví dụ.

**1. Bài toán tính tổng**

**Ví dụ 1.** Tính tổng sau

$$S = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

**Lời giải.** Với mỗi số thực dương n ta có

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Suy ra $S = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \ldots +$

$+ \sqrt{100} - \sqrt{99} = \sqrt{100} - 1 = 10 - 1 = 9.$

**2. Tính giá trị của một biểu thức theo các số vô tỉ cho trước**

**Ví dụ 2.** Tính $S = \frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5}$ biết

$$a = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\ ;\ b = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}.$$

**Lời giải.** Từ giả thiết suy ra

$$a + b = \sqrt{7}\ ;\ ab = 1.$$

Do đó $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 5$ ;

$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 4\sqrt{7}.$

Suy ra $S = \frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5} = a^5 + b^5 =$

$= (a^2+b^2)(a^3+b^3) - a^2b^2(a+b) =$

$= 20\sqrt{7} - \sqrt{7} = 19\sqrt{7}.$

**3. Chứng minh một số là số vô tỉ**

**Ví dụ 3.** Cho $x = \sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$. Chứng minh rằng x là một số vô tỉ.

**Lời giải.** Giả sử x là một số hữu tỉ.

Ta có $\sqrt[3]{2} = x - \sqrt{3} \Leftrightarrow 2 = (x - \sqrt{3})^3$

$\Leftrightarrow 2 = x^3 - 3\sqrt{3}x^2 + 9x - 3\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{x^3 + 9x - 2}{3(x^2+1)}.$

Suy ra $\sqrt{3}$ là một số hữu tỉ : vô lí, ta có đpcm.

**4. Chứng minh một số là số nguyên**

**Ví dụ 4.** Chứng minh rằng số sau là một số nguyên

$$y = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}.$$

**Lời giải.** Ta có

$y = \sqrt[3]{1 + 3\sqrt{2} + 3(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^3} +$

$+ \sqrt[3]{1 - 3\sqrt{2} + 3(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^3} =$

$= \sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3} + \sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3} =$

$= 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2$, suy ra đpcm.

**Ví dụ 5.** Cho $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ; $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì số $S_n = a^n + b^n$ là một số tự nhiên.

**Lời giải.** Ta có $a + b = 1$ ; $ab = -1$.

Với mỗi số tự nhiên n ta có

$S_{n+2} = a^{n+2} + b^{n+2} =$

$= (a^{n+1} + b^{n+1})(a+b) - ab(a^n + b^n) =$

$= S_{n+1} + S_n.$

Kết hợp với $S_0 = 2$ ; $S_1 = 1$ ta được

$S_2 = S_0 + S_1 \in \mathbb{N}$ ; $S_3 = S_1 + S_2 \in \mathbb{N}$ ; ...

Bằng quy nạp ta chứng minh được $S_n \in \mathbb{N}$ với mọi số tự nhiên n, ta có đpcm.

**5. Bài toán về phần nguyên**

**Ví dụ 6.** Chứng minh rằng nếu n là số nguyên dương thì

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}]$$

trong đó kí hiệu [a] chỉ số nguyên lớn nhất không lớn hơn a.

**Lời giải.** Đặt $a=[\sqrt{4n+2}]$ $(a \in \mathbb{N})$.

Ta có $a \le \sqrt{4n+2} \Rightarrow a^2 \le 4n+2$.

Vì không có số chính phương có dạng $4n+2$ nên $a^2 \ne 4n+2$. Do đó $a^2 \le 4n+1$.

Suy ra $a \le \sqrt{4n+1} \Rightarrow a \le [\sqrt{4n+1}]$.

Ta có

$(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2=2n+1+2\sqrt{n^2+n}>4n+1$.

Suy ra $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}>\sqrt{4n+1}$

$\Rightarrow [\sqrt{n}+\sqrt{n+1}] \ge [\sqrt{4n+1}] \ge a$. (1)

Mặt khác ta có

$(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})^2>0 \Rightarrow 2n+1>2\sqrt{n(n+1)}$

$\Rightarrow 4n+2>(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2$

$\Rightarrow \sqrt{4n+2}>\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$

$\Rightarrow [\sqrt{4n+2}] \ge [\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]$

hay $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}] \le a$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=a=[\sqrt{4n+2}],$$

ta có đpcm.

**Nhận xét.** Nếu $a<b$ thì $[a] \le [b]$.

**Bài tập tự luyện.**

**Bài 1.** Tính $S=\dfrac{1}{a^7}+\dfrac{1}{b^7}$, biết

$$a=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2};\ b=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.$$

**Bài 2.** Cho $x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}$. Chứng minh rằng x là một số vô tỉ.

**Bài 3.** Chứng minh rằng số sau là một số nguyên $\sqrt[3]{6+\sqrt{\dfrac{827}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\dfrac{827}{27}}}$.

**Bài 4.** Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n thì $[(2+\sqrt{3})^n]$ là một số tự nhiên lẻ.


# BIẾN ĐỔI CĂN BẬC HAI PHỨC TẠP DẠNG $\sqrt{M \pm 2\sqrt{N}}$

NGUYỄN ĐỨC HẢO *(GV. THCS Lam Sơn, Q.6, TP. Hồ Chí Minh)*

**LTS. Theo đề nghị của nhiều độc giả, từ số này TTT mở chuyên mục mới *Ôn tập cùng bạn*. Tại đây sẽ đăng các bài giúp các bạn học sinh ôn tập chương, phần, chuyên đề hoặc toàn học kì.**

**Rất mong được các thầy cô giáo hưởng ứng viết bài cho chuyên mục mới này.**

Trong các kì thi tuyển sinh vào lớp 10 và thi chọn học sinh giỏi lớp 9 thường có bài toán nhỏ yêu cầu "tính" hay "rút gọn" một biểu thức có dạng $\sqrt{M \pm 2\sqrt{N}}$ $(M, N \in \mathbb{N})$.

Ta chú ý đến hai *hằng đẳng thức* sau

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + y + 2\sqrt{xy};$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x + y - 2\sqrt{xy}.$$

Như vậy, nếu ta tìm được hai số tự nhiên x, y thỏa mãn $x + y = M$ và $xy = N$ thì

$$\sqrt{M \pm 2\sqrt{N}} = \sqrt{(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2}.$$

Sau đây là một số ví dụ.

**Bài toán 1.** Rút gọn $A = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$.

Ta có $6 = 3 \cdot 2 = 6 \cdot 1$. Hai số 2 và 3 thỏa mãn $3 + 2 = 5$. Do đó

$$A = \sqrt{3 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 2} = \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} =$$
$$= |\sqrt{3} + \sqrt{2}| = \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

**Bài toán 2.** Rút gọn $B = \sqrt{7 - 2\sqrt{6}}$.

**Lời giải.** Ta chọn được cặp số 1 và 6 thỏa mãn $6 \cdot 1 = 6$ ; $6 + 1 = 7$. Do đó

$$B = \sqrt{(\sqrt{6} - 1)^2} = \sqrt{6} - 1 \text{ (vì } \sqrt{6} - 1 > 0).$$

**Bài tập tương tự.** Rút gọn các biểu thức sau : $\sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$ ; $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$ ; $\sqrt{8 + 2\sqrt{7}}$ ; $\sqrt{11 - 2\sqrt{30}}$.

**Bài toán 3.** Rút gọn $C = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$.

**Lời giải.** Ta phân tích $4\sqrt{3} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}$ và có $4 + 3 = 7$. Suy ra $C = 2 + \sqrt{3}$.

**Bài tập tương tự.** Rút gọn các biểu thức sau : $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$ ; $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$ ; $\sqrt{19 + 8\sqrt{3}}$ ; $\sqrt{11 - 4\sqrt{7}}$.

**Bài toán 4.** Rút gọn $D = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$.

**Lời giải.** Ta có $4\sqrt{3} = 2\sqrt{12}$ ; $12 = 6 \cdot 2$ ; $6 + 2 = 8$.

Suy ra $D = \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

**Bài tập tương tự.** Rút gọn các biểu thức sau : $\sqrt{11 + 4\sqrt{6}}$ ; $\sqrt{23 - 4\sqrt{15}}$ ; $\sqrt{9 + 6\sqrt{2}}$ ; $\sqrt{13 - 4\sqrt{3}}$.

**Bài toán 5.** Rút gọn $E = \sqrt{4 + \sqrt{15}}$.

**Lời giải.** Ta có $E\sqrt{2} = \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} =$
$$= \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2} = \sqrt{3} + \sqrt{5}.$$

Suy ra $E = \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{10}}{2}$.

**Bài tập tương tự.** Rút gọn các biểu thức sau : $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ ; $\sqrt{3 - \sqrt{5}}$ ; $\sqrt{5 - \sqrt{21}}$ ; $\sqrt{7 + 3\sqrt{5}}$ ; $\sqrt{9 - 3\sqrt{5}}$.

**Bài toán 6.** Rút gọn $F = \sqrt{49 + 5\sqrt{96}}$.

**Lời giải.** Ta có $49 = 24 + 25$ và
$$5\sqrt{96} = \sqrt{5^2 \cdot 2^2 \cdot 24} = 2\sqrt{25 \cdot 24}.$$

Suy ra $F = \sqrt{24} + \sqrt{25} = \sqrt{24} + 5$.

**Bài tập tương tự.** Rút gọn các biểu thức sau :

$$\sqrt{51 - 7\sqrt{8}} ; \sqrt{28 + 5\sqrt{12}} ; \sqrt{12 - 3\sqrt{12}}.$$

**Bài toán 7.** Rút gọn biểu thức

$$P=(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-2)\sqrt{\sqrt{3}+2}.$$

**Lời giải.** Ta có thể thực hiện theo một số hướng sau.

$+\ P=(\sqrt{2}-\sqrt{6})\sqrt{\sqrt{3}+2}=$

$=-\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{6})^2(\sqrt{3}+2)}=$

$=-\sqrt{4(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+2)}=-\sqrt{4\cdot(4-3)}=-2.$

$+\ P=(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-2)\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}=$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{6})\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2-6}{2}=-2.$

**Bài tập tương tự.** Rút gọn các biểu thức sau : $(\sqrt{10}+\sqrt{2})(6-2\sqrt{5})\sqrt{3+\sqrt{5}}$ ;

$(4-\sqrt{7})(\sqrt{14}+\sqrt{2})\sqrt{4+\sqrt{7}}$ ;

$(\sqrt{14}-\sqrt{6})(5+\sqrt{21})\sqrt{5-\sqrt{7}}$ ;

$(\sqrt{22}-\sqrt{2})(6+\sqrt{11})\sqrt{6-\sqrt{11}}.$

**Bài tập tự luyện.** Rút gọn các biểu thức sau : a) $\sqrt{4+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}\cdot(\sqrt{10}-\sqrt{2}).$

b) $\sqrt{6+2\sqrt{5}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}.$

c) $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}.$

d) $(3\sqrt{2}+\sqrt{6})\sqrt{6-3\sqrt{3}}.$

e) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\sqrt{7+4\sqrt{3}}.$

f) $\sqrt{53+12\sqrt{10}}-\sqrt{47-6\sqrt{10}}.$

g) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\dfrac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}.$

h) $\dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{7+2\sqrt{10}}.$

i) $\sqrt{13-\sqrt{160}}+\sqrt{53+4\sqrt{90}}.$

Qua một số ví dụ và bài tập tương tự, mong rằng các em đã thành thạo được một dạng toán về căn thức và tự tin đổi tựa bài đọc thêm này là “CĂN BẬC HAI ĐƠN GIẢN”.

# TỨ GIÁC NGOẠI TIẾP

TS. NGUYỄN MINH HÀ *(ĐHSP Hà Nội)*

Cùng với tứ giác nội tiếp, tứ giác ngoại tiếp là một khái niệm thú vị liên quan tới đường tròn. Tuy nhiên, trong các tài liệu về đường tròn, tứ giác ngoại tiếp thường ít được đề cập. Vì lí do trên, tôi viết bài báo này nhằm giới thiệu với bạn đọc TTT2 những hiểu biết chung nhất, những kết quả cơ bản nhất liên quan tới tứ giác ngoại tiếp cùng một số bài toán rèn luyện kĩ năng.

**I. Định nghĩa và các định lí**

**1. Định nghĩa.** Một tứ giác được gọi là tứ giác ngoại tiếp nếu tồn tại một đường tròn nằm trong tứ giác đó và tiếp xúc với các cạnh của tứ giác.

Đường tròn nói trong định nghĩa trên được gọi là đường tròn nội tiếp tứ giác.

**2. Định lí 1.** Tứ giác ABCD là ngoại tiếp khi và chỉ khi ba trong bốn góc của tứ giác có các đường phân giác đồng quy.

**Chứng minh.** *Điều kiện cần.* Dành cho bạn đọc.

*Điều kiện đủ.* Không mất tính tổng quát, giả sử đường giác của các góc A, B, C đồng quy tại I (bạn đọc tự vẽ hình).

Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của I trên AB, BC, CD, DA.

Ta có IM = IN = IP = IQ.

Vì các tia AI, BI, CI thứ tự nằm trong các góc DAB, ABC, BCD nên I nằm trong tứ giác ABCD.

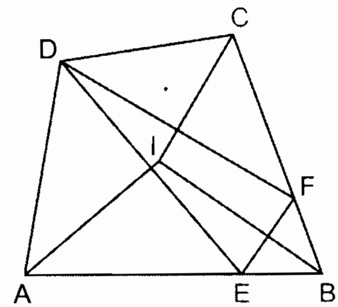
Suy ra đường tròn (I ; IM) nằm trong tứ giác ABCD và tiếp xúc với các cạnh của tứ giác. Do đó, tứ giác ABCD ngoại tiếp.

**3. Định lí 2.** Tứ giác ABCD là ngoại tiếp khi và chỉ khi AB + CD = AD + CB.

**Chứng minh.** *Điều kiện cần.* Dành cho bạn đọc.

*Điều kiện đủ.*

+ Nếu AB = AD thì CD = CB. Khi đó giao điểm I của AC với đường phân giác trong góc B chính là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác ABCD, ta có đpcm.




+ Xét trường hợp AB > AD (trường hợp AB < AD chứng minh tương tự).

Vì AB + CD = AD + BC nên BC > CD.

Do đó tồn tại các điểm E, F thứ tự trên các cạnh AB, BC sao cho AE = AD, CF = CD.

Suy ra BE = BF.

Vì các tam giác ADE, BEF, CDF thứ tự cân tại A, B, C nên các đường phân giác trong của các góc A, B, C chính là các đường trung trực tương ứng của các cạnh DE, EF, FD của ΔDEF, do đó chúng đồng quy.

Vậy theo *định lí 1* thì tứ giác ABCD ngoại tiếp, ta có đpcm.

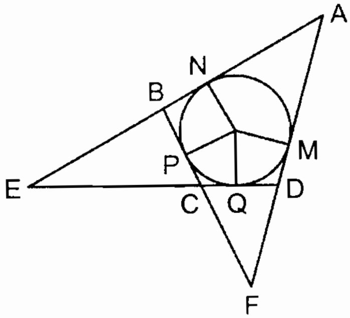
**Định lí 3.** Cho tứ giác ABCD. Các tia AB, DC cắt nhau tại E. Các tia AD, BC cắt nhau tại F. Khi đó tứ giác ABCD là ngoại tiếp khi và chỉ khi AE + CF = AF + CE.

**Chứng minh.** *Điều kiện cần.*

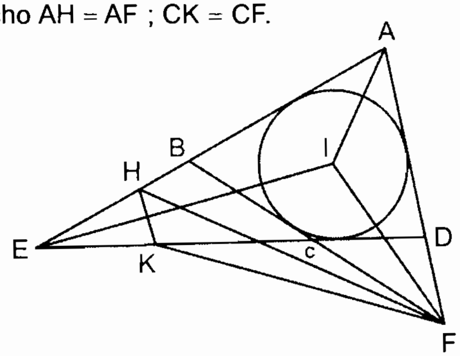
Giả sử đường tròn nội tiếp tứ giác ABCD theo thứ tự tiếp xúc với các cạnh DA, AB, BC, CD tại M, N, P, Q.

Ta có AE + CF = AN + EN + FP − CP =

$= AM + EQ + FM - CQ = AM + FM + EQ - CQ = AF + EC$.




*Điều kiện đủ.* Đặt $AE - AF = CE - CF = m$.
+ Trường hợp $m = 0$ : bạn đọc tự chứng minh.
+ Xét $m > 0$ (trường hợp $m < 0$ chứng minh tương tự). Vì $m > 0$ nên trên các đoạn AE, DE theo thứ tự tồn tại các điểm H, K sao cho $AH = AF$ ; $CK = CF$.




Dễ thấy $EH = EK$ (cùng bằng m).

Vậy các tam giác AHF, CFK, EKH theo thứ tự cân tại A, C, F.

Suy ra đường phân giác của các góc HAF, FCK, KEH là các đường trung trực của $\Delta FHK$, do đó chúng đồng quy.

Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ADE thì I chính là giao điểm của các đường phân giác của các góc HAF, FCK, KEH. Dễ thấy (I) cũng chính là đường tròn nội tiếp tam giác ABF. Điều đó có nghĩa là (I) cũng là đường tròn nội tiếp tứ giác ABCD.

Vậy tứ giác ABCD ngoại tiếp.

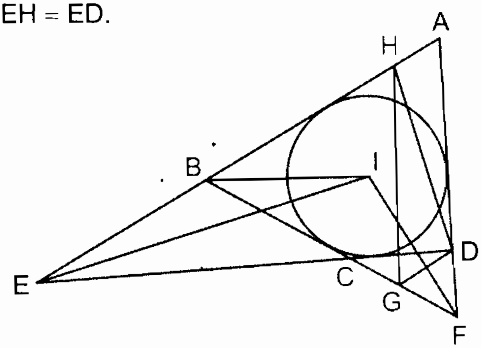
**5. Định lí 4.** Cho tứ giác ABCD. Các tia AB, DC cắt nhau tại E. Các tia AD, BC cắt nhau tại F. Khi đó tứ giác ABCD là ngoại tiếp khi và chỉ khi $EB + BF = ED + DF$.

**Chứng minh.** *Điều kiện cần.* Giả sử đường tròn nội tiếp tứ giác ABCD theo thứ tự tiếp xúc với các cạnh DA, AB, BC, CD tại M, N, P, Q.

Ta có $EB + BF = EN - BN + BP + FP = EN + FP = EQ + FM = ED - DQ + DM + FD = ED + DF$.

*Điều kiện đủ.* Đặt $BF - DF = ED - EB = m$.
+ Trường hợp $m = 0$ : bạn đọc tự chứng minh.
+ Xét $m > 0$ (trường hợp $m < 0$ chứng minh tương tự).

Vì $m > 0$ nên tồn tại các điểm G, H thứ tự trên các tia FB, BA theo sao cho $FG = FD$ ; $EH = ED$.




Dễ thấy $BG = BH$ (cùng bằng m).

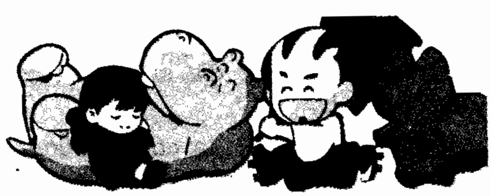
Vậy các tam giác FGD, EDH, BHG theo thứ tự cân tại F, E, B.

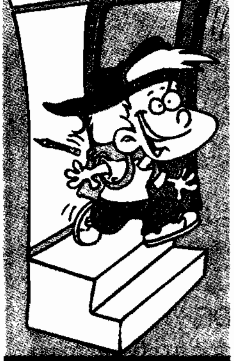
Suy ra đường phân giác của các góc GFD, DEH, HBG là các đường trung trực của $\Delta GHD$, do đó chúng đồng quy.

Gọi (I) là đường tròn bàng tiếp đối diện với đỉnh E của tam giác EBC thì I chính là giao điểm của các đường phân giác của các góc GFD, DEH, HBG. Dễ thấy (I) cũng chính là đường tròn bàng tiếp đối diện với đỉnh F của tam giác FDC. Điều đó có nghĩa là (I) cũng là đường tròn nội tiếp tứ giác ABCD.

Vậy tứ giác ABCD ngoại tiếp.

***(Kì sau đăng tiếp)***





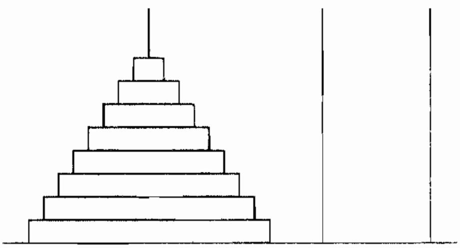
TOÁN QUANH TA

# BÀI TOÁN THÁP HÀ NỘI

PGS. TSKH. VŨ ĐÌNH HÒA
*(Khoa CNTT, Đại học Sư phạm Hà Nội)*

Bài toán Tháp Hà Nội được phát biểu như sau :

**Bài toán.** Một ngọn tháp được xếp bởi 8 đĩa kích thước khác nhau được xếp vào 1 trong 3 cái cọc như trong hình dưới đây.



*Hình 1*

Các bước chuyển toàn bộ 8 đĩa từ một cọc sang cọc khác tuân theo các quy luật sau :

i) Mỗi bước thực hiện chỉ được chuyển đúng một đĩa

ii) Không đĩa nào được xếp trên đĩa nhỏ hơn nó.

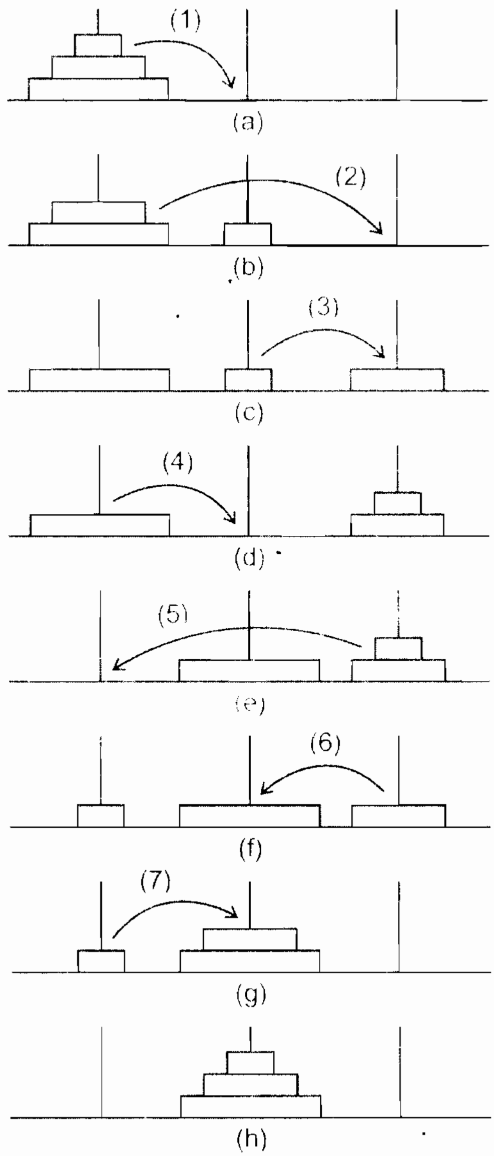
Tính số bước chuyển ít nhất có thể để có thể chuyển hết 8 đĩa từ cọc ban đầu sang một cọc khác.

Ta kí hiệu $b_n$ là số bước chuyển ít nhất để có thể chuyển hết n đĩa từ một cọc sang một cọc khác.

Bài toán trên là bài toán xác định giá trị của $b_8$.

Để xác định được con số này, chúng ta thử khảo sát một vài ví dụ đơn giản nhất. Dễ thấy $b_1 = 1$. Khi $n = 2$ ta có thể thấy 2 bước chuyển không thể đủ thực hiện và với 3 bước chuyển thì ta mới có thể làm được việc chuyển 2 đĩa sang một cọc khác. Vì vậy $b_2 = 3$.

Trường hợp $n = 3$, ta có thể dùng 7 bước chuyển để chuyển 3 đĩa sang một cọc khác. Vì vậy $b_2 \le 7$. Các bước thực hiện được nêu trong hình 2.




*Hình 2*

Liệu 7 bước thực hiện có phải là ít nhất có thể không ? Ta hãy xem hình 2. Trước khi chuyển đĩa lớn nhất nằm dưới cùng, ta cần phải chuyển hai đĩa nằm trên nó sang một cọc khác, và số phép chuyển ít nhất như ta đã biết là $b_2 = 3$. Sau đó, cần một phép chuyển để đưa đĩa lớn nhất ra khỏi cọc ban đầu và ta cần $b_2 = 3$ phép chuyển nữa để chuyển 2 đĩa nhỏ lên trên đĩa lớn nhất. Tổng cộng ta cần ít nhất $b_2 + 1 + b_2 = 7$ phép dịch chuyển tất cả.

Vậy $b_3 = 7$.

Chính xác hơn, ta đã chỉ ra $b_3 = 2b_2 + 1$.

Một cách tổng quát, người ta đã chứng minh được rằng $b_{n+1} = 2b_n + 1 = 2^{n+1} - 1$, với mọi số tự nhiên n.

Đến đây ta có $b_8 = 2^8 - 1 = 255$.

Điều thú vị đã nói đầu tiên là bài toán này được gọi tên là *Bài toán tháp Hà Nội*. Tại sao lại được gọi là Hà Nội, thủ đô của Việt Nam ? Việc này liên quan tới hai điều. Trước hết là người nghĩ ra bài toán này là một người Pháp và sau nữa là bài toán được đưa ra vào đúng lúc Pháp đang xâm chiếm Việt Nam (xem [1]).

*Hình 3*

Theo Hinz (xem [2]), bức tranh trong hình 3 được tìm thấy ở Paris vào năm 1883. Nếu nhìn vào bức tranh kĩ lưỡng chúng ta sẽ thấy nhiều điểm phù hợp với khí hậu và đất nước con người Việt Nam. Trong tranh có một người Việt Nam đội nón với các dòng chữ : Tonkin (Bắc kì) và Annam (Tên cũ chỉ Việt Nam). Có hai tên đặc biệt xuất hiện trên đó nữa. Đó là giáo sư N. Claus và trường của ông là Li-Sou-Stian.

Theo các nhà toán học Pháp thì đó là tên của nhà toán học Pháp Lucas và trường Saint Louis. Người ta tin rằng Lucas là người cõng ngọn tháp 10 tầng trong tranh.

Édouard Anatole Lucas (1842 – 1891) là nhà toán học Pháp làm nhiều trong lí thuyết số, dãy truy hồi ... Trong thời kì còn chưa có máy tính điện tử, ông là người đã từng phát hiện được số nguyên tố lớn nhất. Dãy số 2, 1, 3, 4, ... được xây dựng tương tự như dãy số Fibonacci được mang tên của ông.

---

Tài liệu tham khảo

[1] A. M. Hinz, *The tower of Hanoi*, Enseign. Math (2) 35 (1989), 289-321.

[2] A. M. Hinz, *The tower of Hanoi*, Algebras and Combinatorics, An International Congress, ICAC. 97, Hongkong, Springer Verlag (1999) 217-236.

*(Theo Mathematical Medley, Volume 26, No 2, December 1999)*

# TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ CÓ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

ĐẶNG XUÂN SƠN
*(GV Trường năng khiếu Trần Phú, Hải Phòng)*

Khi tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) hay giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức có chứa dấu giá trị tuyệt đối, chúng ta thường xét các trường hợp để khử dấu giá trị tuyệt đối để vẽ đồ thị hoặc sử dụng các bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối như $|a|+|b| \ge |a+b| \ge \big||a|-|b|\big|$ ..., sau đó xét khả năng trở thành đẳng thức. Bài viết này đề cập đến một phương pháp tìm GTNN, GTLN khá hiệu quả cho một lớp bài toán.

Giả sử tồn tại $m$ là GTNN của hàm số $f(x)$ trên miền $D$ khi đó $f(x) \ge m$ với mọi $x \in D$.

Với một số $\alpha \in D$ thì $m$ sẽ đạt tại các giá trị $x$ thỏa mãn điều kiện $f(x) \le f(\alpha)$. Từ đó xác định được $x \in K$, trong đó $K \subset D$ được gọi là *phạm vi tìm kiếm.*

Để tìm giá trị $m$ của hàm số $f(x)$ trên miền $D$, khi đó ta chỉ cần tìm giá trị $m$ trên miền $K$ (tương tự đối với GTLN). Nếu chọn được số $\beta$ khác $\alpha$ mà $f(\alpha) < f(\beta)$ thì ta sẽ xác định được phạm vi tìm kiếm hẹp hơn.

Phương pháp này cần có kĩ năng giải bất phương trình để tìm được $K$.

Công việc trên được ví giống như ta đi tìm chiếc chìa khóa bị đánh rơi, nếu ta chắc chắn nó bị rơi trong nhà thì không lẽ ta lại tìm nó ở ngoài đường ?

**Ví dụ 1.** Tìm GTNN của hàm số :

$$y = f(x) = |x+1| + |2x-1|.$$

**Lời giải.**

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

***Cách 1.*** Vì $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$ nên ta chỉ cần tìm $x$ thỏa mãn $f(x) \le \frac{3}{2}$, suy ra :

$$|x+1| \le \frac{3}{2};\ |2x-1| \le \frac{3}{2}.$$

Giải hệ hai bất phương trình trên, ta nhận được *phạm vi tìm kiếm* $K = \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$.

Chỉ cần xét $x \in K$, ta có $x+1>0$ ; $1-2x \ge 0$ suy ra $f(x) = 2 - x \ge \frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \in K$.

Vậy GTNN của $f(x)$ là $\frac{3}{2}$.

***Cách 2.*** Ta có $|2x-1| \ge \left|x - \frac{1}{2}\right|$ suy ra

$$f(x) = |x+1| + |2x-1| \ge |x+1| + \left|x-\frac{1}{2}\right| \ge$$

$$\ge \left|(x+1) - (x-\frac{1}{2})\right| = \frac{3}{2}.$$

Mặt khác, $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$ nên GTNN $f(x)$ là $\frac{3}{2}$.

**Bình luận.** *Mặc dù cách 2 đơn giản hơn cách 1 nhưng không phát huy được cho các* bài toán dưới đây.

**Ví dụ 2.** Tìm GTNN của các hàm số sau :

a) $y = f(x) = |x-1| + \left|\frac{2}{x}\right|$ ;

b) $y = g(x) = 3|x-1| + \left|\frac{2}{x}\right|$ ;

c) $y = h(x) = 2|x+1| + \left|\dfrac{x-1}{x}\right|$.

**Lời giải.**

*1) Lời giải cho cả câu a) và câu b).*

Vì $f(1) = 2 = g(1)$ nên ta chỉ cần tìm $x$ thỏa mãn $|x-1| \le 2$ ; $\left|\dfrac{2}{x}\right| \le 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 3 \\ |x| \ge 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ 1 \le x \le 3. \end{array}\right.$

Do $f(-1) > 2$ và $g(-1) > 2$ nên chỉ cần xét $x$ thuộc miền $K = [1 ; 3]$, ta có

$$f(x) = (x-1) + \frac{2}{x} = x + \frac{2}{x} - 1 \ge 2\sqrt{2} - 1.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \in K$.

Vậy GTNN của $f(x)$ là $2\sqrt{2} - 1$.

$$g(x) = 3(x-1) + \frac{2}{x} = 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + x - 3$$

$$\ge 2 \cdot 2 + 1 - 3 = 2.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 1 \in K$.

Vậy GTNN của $g(x)$ là 2.

*2) Lời giải cho câu c).*

Vì $h(-1) = 2$ nên ta chỉ cần tìm $x$ thỏa mãn $h(x) \le 2$, suy ra $2|x+1| \le 2$ ; $\left|\dfrac{x-1}{x}\right| \le 2$, giải hệ hai bất phương trình này ta thu được miền $K = [-2 ; -1]$. Với $x \in K$ ta có

$$h(x) = -2(x+1) + \frac{x-1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) - x - 1 \ge$$

$$\ge 2 - (-1) - 1 = 2.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = -1 \in K$.

Vậy GTNN của $h(x)$ là 2.

**Bình luận.** Cách tìm miền $K$ như vậy giúp cho việc khử dấu giá trị tuyệt đối thuận lợi và đưa bài toán đã cho về việc tìm GTNN của hàm số trên một miền $K$ nhỏ hơn. Phương pháp này tỏ ra rất hiệu quả đối với bài toán chứa tham số.

**Ví dụ 3.** Tìm $m$ để GTNN của hàm số

$y = f(x) = \left|\dfrac{m}{x}\right| + 3|x-1|$ là 2.

**Lời giải.**

*Điều kiện cần.* Nếu GTNN của $f(x)$ là 2 thì ta có $f(1) = |m| \ge 2$.

*Điều kiện đủ.* Với $|m| \ge 2$, ta xét $x$ thỏa mãn điều kiện $f(x) = \left|\dfrac{m}{x}\right| + 3|x-1| \le 2$, suy ra

$\left|\dfrac{m}{x}\right| \le 2$ ; $3|x-1| \le 2 \Rightarrow |x| \ge \dfrac{|m|}{2}$ ; $\dfrac{1}{3} \le x \le \dfrac{5}{3}$

$\Rightarrow x \in K = \left[1 ; \dfrac{5}{3}\right]$. Với $x \in K$, ta có

$$f(x) = \frac{|m|}{x} + 3x - 3 = \left(\frac{|m|}{x} + 2x\right) + x - 3 \ge$$

$$\ge 2\sqrt{2|m|} + 1 - 3 = 2\sqrt{2|m|} - 2 \ge 2.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 1 \in K$ và $|m| = 2$, suy ra GTNN của $g(x)$ là 2.

*Kết luận.* Vậy với $m = \pm 2$ thì GTNN của $f(x)$ là 2.

**Bài tập áp dụng.**

**Bài 1.** Tìm GTNN của các hàm số sau :

a) $y = |x+1| + |2x-1| + |2x+1|$ ;

b) $y = |x-1| + \left|\dfrac{x+1}{x}\right|$ ;

c) $y = |x+1| + \left|\dfrac{x-2}{x-1}\right|$ ;

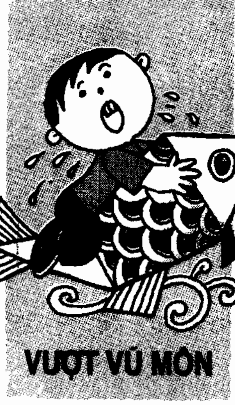
d) $y = |x+2| + 2\left|\dfrac{x^2-1}{3x}\right|$.

**Bài 2.** Tìm $m$ để các hàm số :

a) $y = |x+1| + |2x-m| + |4x+2m|$ đạt GTNN là $\dfrac{5}{2}$ ;

b) $y = 2|x+1| + \left|\dfrac{x-m}{x}\right|$ đạt GTNN là 2 ;

c) $y = |x-1| + \left|\dfrac{m}{x}\right|$ đạt GTNN là $2\sqrt{2} - 1$.




# PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG PHẢN CHỨNG

GIÁP TRẦN QUÂN *(Hà Nội)*

Bài toán chứng minh bất đẳng thức có rất nhiều dạng và đã gây không ít trở ngại cho các bạn học sinh trong các kì thi. Một trong các phương pháp được sử dụng để chứng minh bất đẳng thức chính là phương pháp phản chứng. Phương pháp này tỏ ra có ưu thế rõ rệt khi trong giả thiết và kết luận của bài toán có nhiều bất đẳng thức.

Sau đây là các ví dụ minh họa.

**Ví dụ 1.** Chứng minh rằng $(a+b)^2 \geq 4ab$.

**Lời giải.** Giả sử $(a+b)^2 < 4ab$ suy ra

$$a^2 + 2ab + b^2 < 4ab \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 < 0$$

$\Rightarrow (a-b)^2 < 0$, điều này là sai với mọi $a$, $b$. Vậy giả sử trên là sai, suy ra đpcm.

**Ví dụ 2.** Cho ba số $a, b, c \in (0\,;\,1)$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các bất đẳng thức sau đây là sai :

$$a(1-b) > \frac{1}{4}\,;\; b(1-c) > \frac{1}{4}\,;\; c(1-a) > \frac{1}{4}.$$

**Lời giải.** Giả sử cả ba bất đẳng thức trên đều đúng. Theo giả thiết ta có $a$, $b$, $c$, $1-a$, $1-b$, $1-c$ đều là các số dương, suy ra

$$a(1-b)b(1-c)c(1-a) > \frac{1}{64}. \qquad (1)$$

Mặt khác $a(1-a) = \dfrac{1}{4} - \left(\dfrac{1}{2} - a\right)^2 \leq \dfrac{1}{4}$;

Tương tự ta có $b(1-b) \leq \dfrac{1}{4}$; $c(1-c) \leq \dfrac{1}{4}$

suy ra $a(1-b)b(1-c)c(1-a) \leq \dfrac{1}{64}$. $\qquad (2)$

Ta có (1) mâu thuẫn với (2) nên giả sử ban đầu là sai, suy ra đpcm.

**Ví dụ 3.**

Chứng minh rằng nếu $a_1 \cdot a_2 \geq 2(b_1 + b_2)$ thì ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm : $x^2 + a_1x + b_1 = 0$ ; $\qquad (1)$

$$x^2 + a_2x + b_2 = 0. \qquad (2)$$

**Lời giải.** Giả sử (1) và (2) đều vô nghiệm, khi đó ta có $\Delta_{(1)} < 0$ và $\Delta_{(2)} < 0$ suy ra

$$\Delta_{(1)} + \Delta_{(2)} < 0 \Rightarrow a_1^2 - 4b_1 + a_2^2 - 4b_2 < 0$$

$$\Rightarrow a_1^2 + a_2^2 - 4(b_1 + b_2) < 0$$

$$\Rightarrow a_1^2 + a_2^2 < 4(b_1 + b_2) \leq 2a_1a_2$$

$$\Rightarrow (a_1 - a_2)^2 < 0,$$

điều này là sai với mọi $a_1$, $a_2$. Vậy giả sử trên là sai, suy ra đpcm.

**Ví dụ 4.** *(đề thi vô địch Tiệp Khắc 1959)* Cho các số thực $a$, $b$, $c$ thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} a+b+c > 0 & (1) \\ ab+bc+ca > 0 & (2) \\ abc > 0. & (3) \end{cases}$$

Chứng minh rằng $a$, $b$, $c$ cùng dương.

**Lời giải.** Giả sử có một trong ba số $a$, $b$, $c$ không dương. Không mất tính tổng quát, giả sử số không dương đó là $a$ ($a \leq 0$).

Từ (3) suy ra $a < 0$ và $bc < 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \\ c > 0 \end{cases} (4) \qquad \text{hoặc} \qquad \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ c < 0. \end{cases} (5)$$

Nếu (4) xảy ra thì $a + b < 0$ suy ra (theo (1)) $c > -(a+b) > 0 \Rightarrow c(a+b) < -(a+b)^2$ $\Rightarrow ab + c(a+b) < ab - (a+b)^2$

$\Rightarrow ab + bc + ca < -(a^2 + ab + b^2) < 0$, mâu thuẫn với (2).

Nếu (5) xảy ra thì tương tự ta cũng chỉ ra được $ab + bc + ca < 0$, mâu thuẫn với (2).

Vậy giả sử ban đầu là sai và ta có đpcm.

**Ví dụ 5.** *(đề thi HSG Mát-xcơ-va 1986)* Với mọi số thực $x$, $y$, $z$, chứng minh rằng có ít nhất một trong ba bất đẳng thức sau là sai :

$|x| < |y - z|$ ; $|y| < |z - x|$ ; $|z| < |x - y|$.

**Lời giải.** Giả sử cả ba bất đẳng thức trên đều đúng, suy ra $x^2 < (y - z)^2$

$\Rightarrow x^2 - (y - z)^2 < 0$

$\Rightarrow (x - y + z)(x + y - z) < 0$ ; tương tự ta có

$(y - z + x)(y + z - x) < 0$ ;

$(z - x + y)(z + x - y) < 0$.

Nhân theo từng vế 3 bất đẳng thức trên suy ra $(x - y + z)^2(y - z + x)^2(z - x + y)^2 < 0$ là bất đẳng thức sai với mọi $x, y, z \Rightarrow$ giả sử ban đầu là sai $\Rightarrow$ đpcm.

**Bài tập áp dụng.**

**Bài 1.** Cho $a + b = 2cd$. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai bất đẳng thức sau là đúng : $c^2 \geq a$ ; $d^2 \geq b$.

**Bài 2.** Cho các số $a$, $b$, $c$, $A$, $B$, $C$ thỏa mãn $aC - 2bB + cA = 0$ và $ac - b^2 > 0$. Chứng minh rằng $AC - B^2 \leq 0$.

**Bài 3.** Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng :

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

*(Vô địch Toán quốc tế 2000)*

**Bài 4.** Cho $abc \neq 0$, chứng minh rằng ít nhất một trong ba phương trình sau có nghiệm : $ax^2 + 2bx + c = 0$ ; $bx^2 + 2cx + a = 0$ ; $cx^2 + 2ax + b = 0$.

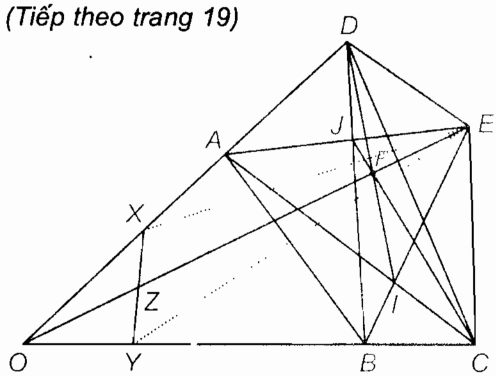
**Bài 5.** Chứng minh rằng trong ba bất đẳng thức sau đây, có ít nhất một bất đẳng thức đúng : $a^2 + b^2 > \dfrac{(b+c)^2}{2}$ ;

$b^2 + c^2 > \dfrac{(c+a)^2}{2}$ ; $c^2 + a^2 > \dfrac{(a+b)^2}{2}$.

# *Kết quả :*

# TRẬN ĐẤU THỨ BA MƯƠI TÁM

*(Tiếp theo trang 19)*




Mặt khác từ đẳng thức $\dfrac{IA}{IC} = \dfrac{JB}{JD}$ ta có :

$\dfrac{JB}{JD}S(ABE) = \dfrac{IA}{IC}S(ABE)$

$\Rightarrow S(ADE) = S(BCE) \Rightarrow S(OXE) = S(OYE)$ (vì $OX = AD$ ; $OY = BC$) $\Rightarrow Z \in OE \Rightarrow E \in OZ$.

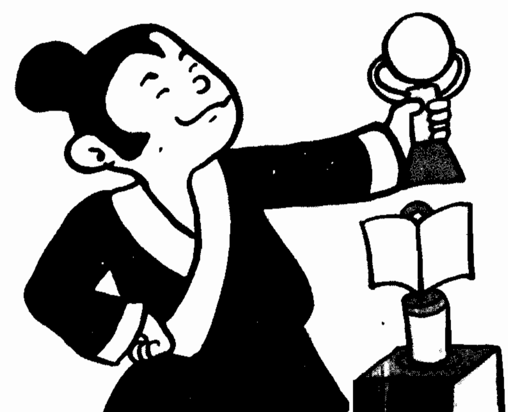
Tương tự ta có $F \in OZ$.

Vậy đường thẳng $OZ$ chính là đường thẳng $EF$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $EF // HK$.

**Lời bình.** Võ sĩ Trung xứng đáng là người đăng quang trong trận đấu này vì sự cố gắng trong việc mở rộng bài toán thách đấu.

NGUYỄN MINH HÀ




# GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẰNG CÁCH ĐƯA VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

CAO MINH QUANG
(*GV Toán trường THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long*)

Phương trình (đại số) là bài toán thường xuất hiện trong các kì thi tuyển sinh, thi học sinh giỏi. Có rất nhiều phương pháp giải phương trình như dùng các phép biến đổi đại số để đưa phương trình về dạng tích, dạng đa thức, dùng bất đẳng thức, dùng tính chất đơn điệu của hàm số ... và một số phương trình còn được giải bằng cách đưa về giải hệ phương trình.

**Bài toán 1.** Giải phương trình :

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2.$$

**Lời giải.** Điều kiện $x \ge 6$.

Đặt $a=\sqrt{x+2}$ ; $b=\sqrt{x-6}$ (a, b không âm), từ đó ta có hệ :

$$\begin{cases} a-b=2 \\ a^2-b^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ a+b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2}=3 \\ \sqrt{x-6}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=9 \\ x-6=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=7.$$

$x = 7$ thỏa mãn điều kiện nên là nghiệm của phương trình.

**Bài toán 2.** Giải phương trình :

$$\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x-3}=\sqrt[3]{2}.$$

**Lời giải.** Đặt $a=\sqrt[3]{x-1}$ ; $b=\sqrt[3]{x-3}$, từ đó ta có hệ :

$$\begin{cases} a-b=\sqrt[3]{2} \\ a^3-b^3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=\sqrt[3]{2} \\ a^2+ab+b^2=\sqrt[3]{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=\sqrt[3]{2} \\ (a-b)^2+3ab=\sqrt[3]{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=\sqrt[3]{2} \\ ab=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-\sqrt[3]{2} \end{cases} \text{hoặc } \begin{cases} a=\sqrt[3]{2} \\ b=0. \end{cases}$$

Nếu $a=0$ ; $b=-\sqrt[3]{2}$ thì suy ra $x=1$ ;

Nếu $a=\sqrt[3]{2}$, $b=0$ thì suy ra $x=3$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là 1 và 3.

**Bài toán 3.** Giải phương trình :

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}+x}+\sqrt{\frac{1}{2}-x}=1.$$

**Lời giải.** Điều kiện : $x \le \frac{1}{2}$.

Đặt $a=\sqrt[3]{\frac{1}{2}+x}$ ; $b=\sqrt{\frac{1}{2}-x}$ $(b \ge 0)$, từ đó ta có hệ $\begin{cases} a+b=1 \\ a^3+b^2=1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a^3+(1-a)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a^3+a^2-2a=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \text{hoặc } \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \text{hoặc } \begin{cases} a=-2 \\ b=3. \end{cases}$$

Từ đó ta tính được các giá trị của $x$ là $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $-\frac{17}{2}$.

Vì $b$ và $x$ đều thỏa mãn điều kiện nên phương trình có ba nghiệm trên.

**Bài toán 4.** Giải phương trình :

$$-x^2+2=\sqrt{2-x}.$$

**Lời giải.** Điều kiện : $x \le 2$.

Đặt $y = \sqrt{2-x}$ $(y \geq 0)$, từ đó ta có hệ :

$$\begin{cases} -x^2+2=y \\ -y^2+2=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y=2 \\ x^2-y^2=x-y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y=2 \\ x-y=0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x^2+y=2 \\ x+y=1. \end{cases}$$

Nếu $\begin{cases} x^2+y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$ thì suy ra $\left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=-2\,; \end{array}\right.$

Nếu $\begin{cases} x^2+y=2 \\ x+y=1 \end{cases}$ thì suy ra $\begin{cases} x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ y=\dfrac{1\mp\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện $x \leq 2$ và $y \geq 0$ ta suy ra phương trình ban đầu có hai nghiệm là 1 và $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

**Bài toán 5.** Giải phương trình :

$$x^3+1=2\cdot\sqrt[3]{2x-1}.$$

**Lời giải.** Đặt $y=\sqrt[3]{2x-1}$, từ đó ta có hệ :

$$\begin{cases} x^3+1=2y \\ y^3+1=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+1=2y & (1) \\ x^3-y^3=2(y-x). & (2) \end{cases}$$

Ta có (2) $\Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2+2)=0$

$$\Leftrightarrow x-y=0$$

vì $x^2+xy+y^2+2=\left(x+\dfrac{1}{2}y\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2+2>0.$

Suy ra $x=y$, thế vào (1) ta có :

$$x^3-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ hoặc } x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy phương trình có ba nghiệm là :

$$1\,;\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

**Bài toán 6.** Giải phương trình :

$$x\cdot\sqrt[3]{35-x^3}\cdot\left(x+\sqrt[3]{35-x^3}\right)=30.$$

**Lời giải.** Đặt $y=\sqrt[3]{35-x^3}$, từ đó ta có hệ : $\begin{cases} xy(x+y)=30 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y)=30 \\ (x+y)^3-3xy(x+y)=35 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y)=30 \\ (x+y)^3=125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=2 \\ y=3. \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=3$ và $x=2$.

● **Một số bài tập tự luyện**

Giải các phương trình sau :

1. $x^2-\sqrt{x+5}=5$ ;
2. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-3}=\sqrt[3]{2}$ ;
3. $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x+3}=\sqrt[3]{2x+1}$ ;
4. $\sqrt[3]{-x-1}+\sqrt{x+2}=1$ ;
5. $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2$ ;
6. $\sqrt[4]{57-x}+\sqrt[4]{x+40}=5$ ;
7. $(x+3)^4+(x+5)^4=2$ ;
8. $x^2+\sqrt[3]{(16-x^3)^2}=8$ ;
9. $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x-15}=4$ ;
10. $\sqrt[5]{\dfrac{1}{2}+x}+\sqrt[5]{\dfrac{1}{2}-x}=1.$

VƯỢT VŨ MÔN

# MỘT PHƯƠNG PHÁP TÌM CỰC TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC

PHAN BÍCH NGỌC
*(THCS Chu Văn An, Hương Khê, Hà Tĩnh)*

Chúng ta đều biết rằng điều kiện cần và đủ để phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có nghiệm là $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ ; điều kiện này được sử dụng để giải khá nhiều dạng toán, trong đó có dạng toán tìm giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của một biểu thức. Sau đây là một số ví dụ minh họa.

**Ví dụ 1.** Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $Q = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x + 1}$.

**Lời giải.** Do $x^2 - x + 1 > 0$ với mọi $x$ nên $Q$ xác định với mọi $x$. Giả sử tồn tại $x$ để $Q$ đạt GTLN và GTNN, khi đó phương trình

$$Q \cdot (x^2 - x + 1) = x^2 - 2x + 2$$

$$\Leftrightarrow (Q - 1)x^2 + (2 - Q)x + Q - 2 = 0 \qquad (*)$$

phải có nghiệm đối với ẩn $x$.

Nếu $Q = 1$ thì $(*) \Leftrightarrow x = 1$ ;

Nếu $Q \neq 1$ thì $(*)$ là một phương trình bậc hai đối với ẩn $x$, có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta_x \geq 0$

$$\Leftrightarrow (2 - Q)^2 - 4(Q - 1)(Q - 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (Q - 2)(-3Q + 2) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq Q \leq 2.$$

Vì $\frac{2}{3} < 1 < 2$ suy ra :

$Q$ đạt GTLN là $2 \Leftrightarrow x = 0$ (thay vào (*)) ;

$Q$ đạt GTNN là $\frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 2$.

**Nhận xét.** *Ví dụ 1* có thể mở rộng cho biểu thức tổng quát có dạng :

$$Q(x) = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2} \text{ với } b_2^2 - 4a_2c_2 < 0.$$

**Ví dụ 2.** Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $Q = \dfrac{x + 2y + 1}{x^2 + y^2 + 7}$.

**Lời giải.** Ta có $Q$ xác định với mọi $x$, $y$.

Ta tìm $Q$ để tồn tại $x$, $y$ thỏa mãn :

$$Q = \frac{x + 2y + 1}{x^2 + y^2 + 7}$$

hay $Qx^2 - x + Qy^2 + 7Q - 2y - 1 = 0$. $\qquad (*)$

Với $Q = 0$ thì (*) trở thành $x + 2y + 1 = 0$ hiển nhiên tồn tại x và y, chẳng hạn $x = 0,\ y = -\frac{1}{2}$.

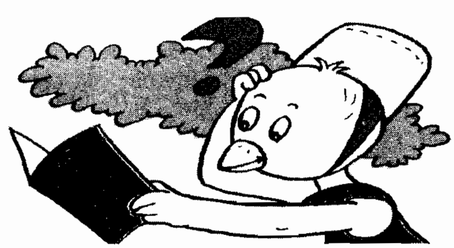
Với $Q \neq 0$ thì tồn tại x, y thỏa mãn $(*) \Leftrightarrow$ tồn tại y thỏa mãn $\Delta_x \geq 0 \Leftrightarrow$ tồn tại y thỏa mãn : $4Q^2y^2 - 8Qy + 28Q^2 - 4Q - 1 \leq 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{\Delta'_y}{4Q^2} \leq 0 \Leftrightarrow \Delta'_y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 28Q^2 - 4Q - 5 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{14} \leq Q \leq \frac{1}{2}.$$

Với $x = 1$, $y = 2$ thì $Q = \frac{1}{2}$ nên $Q$ đạt GTLN là $\frac{1}{2}$.

Với $x = -\frac{7}{5},\ y = -\frac{14}{15}$ thì $Q = -\frac{5}{14}$ nên $Q$



đạt GTNN là $-\frac{5}{14}$

**Ví dụ 3.** Cho $x$, $y$ thỏa mãn hệ thức

$$36x^2 + 16y^2 - 9 = 0. \qquad (1)$$

Tìm GTLN và GTNN của biểu thức :

$$P = -2x + y + 5. \qquad (2)$$

**Lời giải.** Từ (2) suy ra $y = 2x + P - 5$, thay vào (1) ta được phương trình :

$$36x^2 + 16(2x + P - 5)^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 100x^2 + 64(P - 5)x + 16(P - 5)^2 - 9 = 0.$$

Phương trình có nghiệm đối với ẩn x

$$\Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0 \Leftrightarrow 576(P - 5)^2 \leq 900$$

$$\Leftrightarrow 16(P - 5)^2 \leq 25$$

$$\Leftrightarrow \frac{15}{4} \leq P \leq \frac{25}{4}.$$

$$P = \frac{15}{4} \Leftrightarrow (x\ ;\ y) = \left(\frac{2}{5}\ ;\ -\frac{9}{20}\right);$$

$$P = \frac{25}{4} \Leftrightarrow (x\ ;\ y) = \left(-\frac{2}{5}\ ;\ \frac{9}{20}\right).$$

Vậy $P$ đạt GTLN là $\frac{25}{4}$ và GTNN là $\frac{15}{4}$.

**Nhận xét.** Từ *ví dụ 3*, ta có thể giải bài toán tổng quát sau :

"Cho $x$, $y$ thỏa mãn hệ thức :

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0.$$

Tìm GTLN và GTNN của biểu thức :

$P = Ax + By + C$, với $B \neq 0$."

● **Bài tập áp dụng.**

**Bài 1.**

Tìm GTLN và GTNN của các biểu thức :

$$A = \frac{x^2 + 4\sqrt{2}x + 3}{x^2 + 1}; \quad B = \frac{3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2}.$$

**Bài 2.**

Cho $x^2 + 5y^2 - 4xy - x + 2y - 6 = 0$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức :

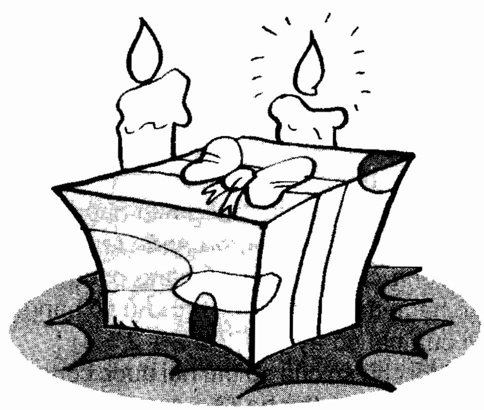
$$A = \frac{x}{2} - y + \frac{1}{2}.$$

*Gợi ý :* Đối với biểu thức $B$ có thể xét $y = 0$ thì $B = 0$ với $x \neq 0$. Khi $y \neq 0$ chia cả tử và mẫu cho $y^2$ và đặt $t = \frac{x}{y}$.

## *Các bạn được thưởng kì này*

# Thi giải toán qua thư

*Trần Vũ Trung*, 9A$_9$, THCS Phùng Chí Kiên, TP. Nam Định, **Nam Định** ; *Nguyễn Ngọc Trung*, 9A$_1$, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ** ; *Phạm Tuấn Minh*, 7/3, THCS Lê Quý Đôn, TP. Hải Dương, **Hải Dương** ; *Lê Đại Thành*, 9A$_4$,THC S Trà Nóc, TP. Cần Thơ, **Cần Thơ** ; *Trần Văn Khang*, 9A, THCS Từ Sơn, Từ Sơn, **Bắc Ninh** ; *Nguyễn Phước Thịnh*, 8H, THCS Hùng Vương, TP. Tuy Hòa, **Phú Yên** ; *Nguyễn Hoàng Hiệp*, 127B, tiểu khu 3, thị trấn Neo, Yên Dũng, **Bắc Giang** ; *Mai Chí Đạt*, 9A, THCS Lý Thường Kiệt, Hà Trung, **Thanh Hóa** ; *Hoàng Bùi Khánh*, 9$^5$, THCS thị trấn Kì Anh, Kì Anh, **Hà Tĩnh** ; *Dương Đăng Hiệp*, 9A, THCS Kì Lâm, thị trấn Sơn Dương, Sơn Dương, **Tuyên Quang** ; *Lê Thị Tuyết Mai*, 8A$_1$, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc.**



GIẢI TOÁN THẾ NÀO?

# PHÁT HIỆN BÀI TOÁN CƠ BẢN CÓ NHIỀU ỨNG DỤNG

NGUYỄN BÁ ĐANG *(Sở GD-ĐT tỉnh Hải Dương)*

Trong kì thi toán quốc tế IMO năm 2006 tại Slô-vê-ni-a, thí sinh bắt gặp bài toán :

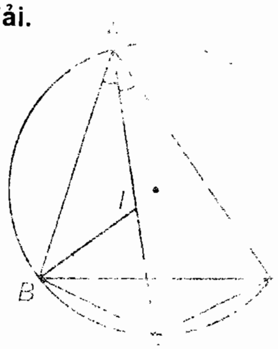
*"Cho $\Delta ABC$ ngoại tiếp đường tròn tâm I. Điểm P nằm trong tam giác, thỏa mãn $\widehat{PBA}+\widehat{PCA}=\widehat{PBC}+\widehat{PCB}$. Chứng minh rằng $AP \geq AI$, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow P \equiv I$."*

Thục ra đây là một bài toán của lớp 9, trong chương trình SGK hiện nay. Để giải quyết bài toán này cũng như nhiều bài toán trong các kì thi khác, đều xuất phát từ hai bài toán cơ bản, quen thuộc sau đây.

**Bài toán cơ bản 1.**

Cho $\Delta ABC$, đường phân giác của góc $A$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại $D$. Điểm $I$ nằm trong $\Delta ABC$ và thuộc đoạn $AD$. Chứng minh rằng $I$ là tâm đường tròn nội tiếp của $\Delta ABC \Leftrightarrow DB = DC = DI$.

**Lời giải.**




Vì $AD$ là phân giác của góc $A$ nên ta có $\widehat{BAD}=\widehat{CAD}=\widehat{CBD}=\widehat{DCB}$ và $DB = DC$ ;

Vì $I$ nằm trong $\Delta ABC$ và thuộc $AD$ nên ta có $\widehat{BID}=\dfrac{\widehat{A}}{2}+\widehat{ABI}$ và $\widehat{IBD}=\widehat{IBC}+\widehat{CBD}=$

$=\widehat{IBC}+\widehat{CAD}=\widehat{IBC}+\dfrac{\widehat{A}}{2}$.

Suy ra $DI = DB \Leftrightarrow \widehat{BID}=\widehat{IBD}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\widehat{A}}{2}+\widehat{ABI}=\widehat{IBC}+\dfrac{\widehat{A}}{2} \Leftrightarrow \widehat{ABI}=\widehat{IBC}$

$\Leftrightarrow I$ thuộc đường phân giác của góc $B$

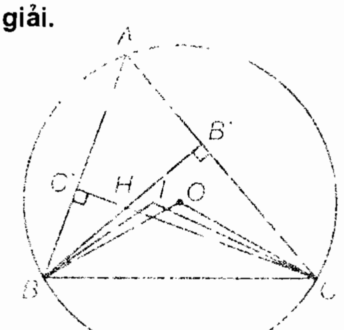
$\Leftrightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$.

**Bài toán cơ bản 2.** Cho $I$ là tâm đương tròn nội tiếp của $\Delta ABC$. Chứng minh rằng $\widehat{BIC}=90^o+\dfrac{\widehat{A}}{2}$ *(Bạn đọc tự chứng minh).*

● Vận dụng hai bài toán cơ bản trên chúng ta sẽ giải quyết được các bài toán sau đây.

**Bài toán 1.** *(bài 51 trang 87, SGK Toán 9 tập 2)* Cho $I$, $O$ lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$ với $\widehat{A}=60^o$. Gọi $H$ là giao điểm của các đường cao $BB'$ và $CC'$. Chứng minh rằng các điểm $B$, $C$, $O$, $H$, $I$ cùng thuộc một đường tròn.

**Lời giải.**



Từ giả thiết $\widehat{A} = 60^{o}$ kết hợp với :

+ $H$ là giao điểm của các đường cao $BB'$ và $CC'$ suy ra tứ giác $AB'HC'$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BHC} = \widehat{B'HC'} = 180^{o} - \widehat{A} = 120^{o}$ ;

+ $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$ suy ra $\widehat{BOC} = 2 \cdot \widehat{A} = 120^{o}$ ;

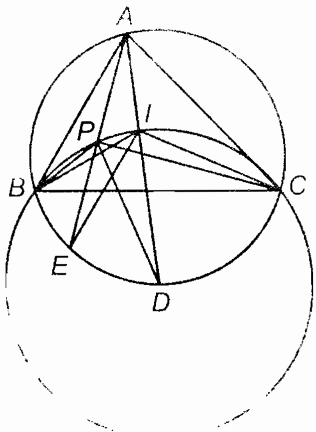
+ $I$ là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$, áp dụng *bài toán cơ bản 2* ta suy ra

$$\widehat{BIC} = 90^{o} + \frac{\widehat{A}}{2} = 90^{o} + 30^{o} = 120^{o}.$$

Vậy $O$, $H$, $I$ cùng nhìn $BC$ dưới góc $120^{o}$, suy ra đpcm.

**Bài toán 2.** *(IMO-2006 - xem đề bài toán ở đầu bài viết)*

**Lời giải.**




Ta có $\widehat{PBA} + \widehat{PCA} + \widehat{PBC} + \widehat{PCB} = \widehat{B} + \widehat{C}$, từ giả thiết suy ra $\widehat{PBC} + \widehat{PCB} = \dfrac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{BPC} = 180^{o} - \widehat{PBC} - \widehat{PCB}$

$$= 180^{o} - \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} = 90^{o} + \frac{\widehat{A}}{2} = \widehat{BIC}$$

(áp dụng *bài toán cơ bản 2*)

$\Rightarrow B, P, I, C$ cùng thuộc một đường tròn.

Gọi $D$ là giao điểm của $AI$ và đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$, theo *bài toán cơ bản 1* thì $D$ là tâm đường tròn qua $B$, $P$, $I$, $C$ suy ra $PD = ID \Rightarrow AP + PD \geq AD = AI + ID$

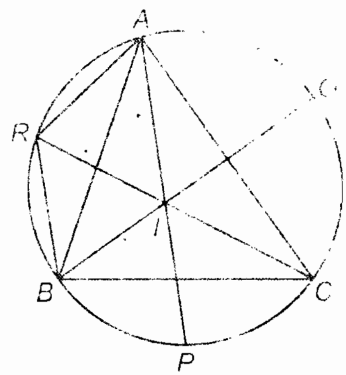
$$\Rightarrow AP \geq AI.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow P \in AD \Leftrightarrow P \equiv I$.

**Bài toán 3.** Cho $\Delta ABC$ có $I$ là tâm đường tròn nội tiếp. $AI$, $BI$, $CI$ lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại $P$, $Q$, $R$. Chứng minh rằng $AP + BQ + CR > AB + BC + CA$.

**Lời giải.** Theo *bài toán cơ bản 1* ta có :

$$2 \cdot IR = RA + RB > AB;$$
$$2 \cdot IP = PB + PC > BC;$$
$$2 \cdot IQ = QC + QA > CA.$$




Suy ra $2(IR + IP + IQ) > AB + BC + CA$.

Mặt khác $CR = CI + IR$ ; $AP = AI + IP$ ; $BQ = BI + IQ$ suy ra

$2(CR + AP + BQ) = [(AI + BI) + (BI + IC) + (IC + IA)] + 2(IR + IP + IQ) >$

$> 2(AB + BC + CA)$

$\Rightarrow AP + BQ + CR > AB + BC + CA$.

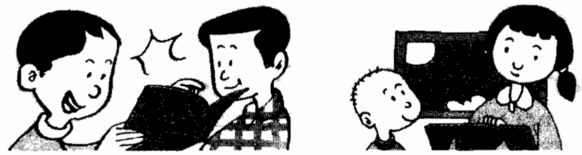
● *Bài toán 1* đã được phát triển dưới nhiều góc độ khác nhau để ra đề trong các kì thi, chúng ta hãy cùng khai thác để thấy vẻ đẹp của bài toán đó nhé.

**Bài toán 4.** Cho $\Delta ABC$ có $\widehat{A} = 60^{o}$. Các điểm $O$, $H$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm của tam giác. Đường thẳng $OH$ cắt cạnh $AB$, $AC$ lần lượt tại $M$, $N$. Chứng minh rằng $\Delta AMN$ đều.

*(Xem tiếp trang 15)*


# VẼ THÊM HÌNH BÌNH HÀNH

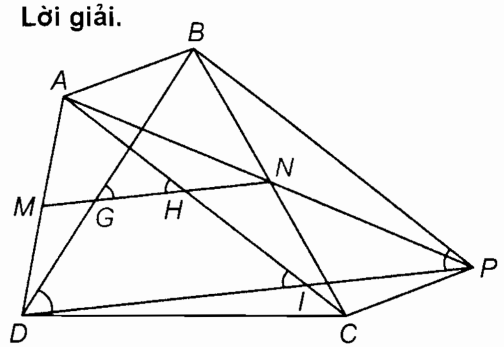
TẠ QUANG HƯNG
*(THCS Nghĩa Hưng, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc)*



Khi giải bài toán hình học, việc vẽ thêm hình phụ để tạo "cầu nối" giữa giả thiết và kết luận là công việc rất phổ biến. Tùy thuộc vào mỗi bài toán, dạng toán mà chúng ta chọn những cách vẽ hình phụ khác nhau. Sau đây là một vài bài toán giải được bằng cách vẽ thêm hình bình hành.

**Bài toán 1.** Cho tứ giác $ABCD$ có $M$, $N$ lần lượt là trung điểm của hai cạnh $AD$ và $BC$. Gọi $H$, $G$ lần lượt là giao điểm của $MN$ với hai đường chéo $AC$, $BD$. Chứng minh rằng $AC = BD \Leftrightarrow \widehat{AHM} = \widehat{BGN}$.

**Lời giải.**




Vẽ hình bình hành $ACPB$. Khi đó $AC = BP$ ; $AC \parallel BP$ ; $N$ là trung điểm của $BC$ nên $N$ cũng là trung điểm của $AP$.

Suy ra $MN$ là đường trung bình của $\Delta APD$, ta có $MN \parallel PD$, do đó $\widehat{BGN} = \widehat{BDP}$.

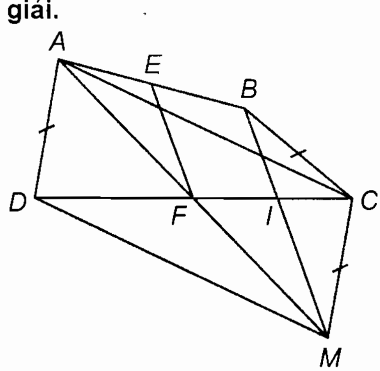
Gọi I là giao điểm của AC và PD suy ra $\widehat{AHM} = \widehat{AID} = \widehat{BPD}$.

Từ các kết quả trên suy ra $AC = BD \Leftrightarrow BP = BD \Leftrightarrow \widehat{BDP} = \widehat{BPD} \Leftrightarrow \widehat{AHM} = \widehat{BGN}$.

**Nhận xét.** Bài toán yêu cầu chứng minh một quan hệ tương đương giữa một đẳng thức về góc và một đẳng thức về độ dài. Điều này luôn tồn tại ở tam giác cân, việc vẽ thêm hình bình hành $ACPB$ đã làm xuất hiện được tam giác cân đó ($\Delta BDP$).

**Bài toán 2.** Cho tứ giác $ABCD$ có $\hat{C} = 40^o$ ; $\hat{D} = 80^o$ và $AD = BC$. Gọi $E$, $F$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB$, $CD$. Tính số đo của $\widehat{EFD}$.

**Lời giải.**




Vẽ hình bình hành $ACMD$, khi đó :

$AD \parallel CM$ suy ra $\widehat{DCM} = \widehat{ADC} = 80^o$

$\Rightarrow \widehat{BCM} = \widehat{BCD} + \widehat{DCM} = 120^o$ ;

$CM = AD = BC$ suy ra $\Delta CMB$ cân tại $C$ $\Rightarrow \widehat{CMB} = 30^o$ ;

$F$ là trung điểm của CD nên $F$ cũng là trung điểm của $AM$, suy ra $EF$ là đường trung bình của $\Delta ABM \Rightarrow EF \parallel BM \Rightarrow \widehat{EFD} = \widehat{BID} = \widehat{CIM}$.

Từ các kết quả trên, xét $\Delta MIC$ ta có $\widehat{EFD} = \widehat{CIM} = 180^o - 80^o - 30^o = 70^o$.

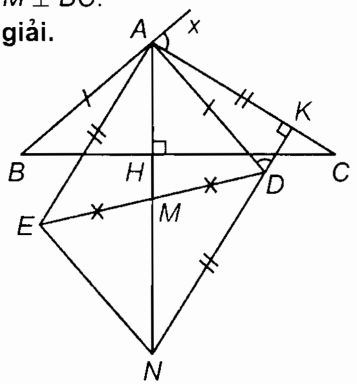
**Nhận xét.** Việc vẽ thêm hình bình hành

$ACMD$ đã tạo ra $\Delta BMC$ cân tại $C$ có $\widehat{BCM} = 120^o$, thuận lợi cho việc tính $\widehat{EFD}$.

**Bài toán 3.** Cho $\Delta ABC$ có $\widehat{A}$ tù. Trong $\widehat{A}$ vẽ các đoạn thẳng $AD$, $AE$ thỏa mãn :
$AD \perp AB$ ; $AD = AB$ ; $AE \perp AC$ ; $AE = AC$.

Gọi $M$ là trung điểm của $DE$, chứng minh rằng $AM \perp BC$.

**Lời giải.**




Gọi $Ax$ là tia đối của tia $AB$, $H$ là giao điểm của $AM$ và $BC$ ; Vẽ hình bình hành $ADNE$, gọi $K$ là giao điểm của $DN$ và $AC$. Khi đó :

$M$ là trung điểm của $DE$ nên $A$, $H$, $M$, $N$ thẳng hàng ;

$AE // DN$ suy ra $DN \perp AC$ (vì $AE \perp AC$), mặt khác $AB \perp AD$ suy ra $\widehat{ADN} = \widehat{BAC}$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc) ;

$DN = AE = AC$.

Theo giả thiết, $AD = AB$ suy ra $\Delta BAC$ và $\Delta ADN$ bằng nhau theo trường hợp c.g.c

$\Rightarrow \widehat{DAN} = \widehat{ABC}$.

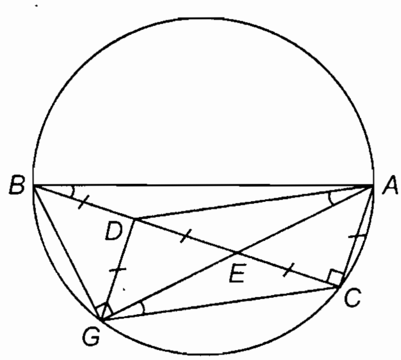
Ta lại có $\widehat{DAN} + \widehat{NAB} = \widehat{BAD} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{NAB} = 90^o \Rightarrow \widehat{AHB} = 90^o$

hay $AM \perp BC$.

**Bài toán 4.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại $C$ ; $BC = 3AC$ ; các điểm $D$, $E$ chia cạnh $BC$ thành ba đoạn có độ dài bằng nhau. Chứng minh rằng $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} + \widehat{AEC} = 90^o$.

**Lời giải.** Không mất tính tổng quát, giả sử bốn điểm $B$, $D$, $E$, $C$ trên $BC$ được xếp theo thứ tự đó.




Từ giả thiết suy ra $\Delta ACE$ vuông cân tại $C$ $\Rightarrow \widehat{AEC} = 45^o$. Suy ra điều phải chứng minh tương đương với $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 45^o$.

Thật vậy, vẽ hình bình hành $ACGD$ ta có $G$, $E$, $A$ thẳng hàng (vì $ED = EC$) ; $AD // CG$ ; $GD = AC = DB = DE$. Suy ra

$\widehat{DAG} = \widehat{AGC}$ ; $\widehat{BGA} = \widehat{BGE} = 90^o = \widehat{BCA}$

$\Rightarrow$ tứ giác $BGCA$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AGC} = \widehat{DAG} = \widehat{DAE}$

$\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ABC} + \widehat{BAD} = \widehat{DAE} + \widehat{BAD} = \widehat{BAE}$

$\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ADC} = \widehat{ABC} + \widehat{BAE} = \widehat{ACE} = 45^o$.

***Sau đây là một số bài tập áp dụng.***

**Bài 1.** Cho tứ giác $ABCD$ có $CD > AB$. Gọi $E$, $F$ lần lượt là trung điểm của $BD$, $AC$. Chứng minh $EF = \dfrac{CD - AB}{2} \Leftrightarrow AB // CD$.

**Bài 2.** Chứng minh rằng trong một tam giác, nếu hai trong ba đường trung tuyến vuông góc với nhau thì tồn tại một tam giác vuông có độ dài ba cạnh bằng độ dài ba đường trung tuyến đó.

**Bài 3.** Cho tam giác $ABC$ có đường cao $AI$. Trên miền ngoài của tam giác dựng các hình vuông $ABEF$, $ACGH$. Chứng minh rằng $AI$, $BG$, $CE$ đồng quy.

**Bài 4.** Cho tam giác $ABC$ có các điểm $D$, $E$ theo thứ tự thuộc tia đối của các tia $BA$, $CA$ sao cho $BD = CE = BC$. Gọi $O$ là giao điểm của $BE$ và $CD$. Qua $O$ kẻ đường thẳng song song với tia phân giác của góc $A$, đường thẳng này cắt $AC$ tại $K$. Chứng minh rằng $AB = CK$.

# XÁC ĐỊNH TRỌNG TÂM TAM GIÁC

NGUYỄN VĂN THIÊM *(Hà Nội)*

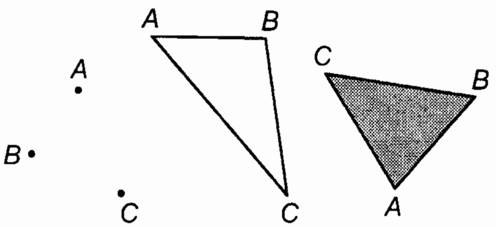
Khi học, ai cũng được biết rằng trọng tâm của một tam giác chính là giao điểm của ba đường trung tuyến (các đường nối từ đỉnh đến trung điểm của cạnh đối diện). Tuy nhiên trong thực tế thì tam giác không chỉ có một loại duy nhất như ta đã học và trọng tâm của từng loại tam giác cũng khác nhau.

● Người ta chia tam giác thành ba loại :

**Tam giác không chiều.** Một tam giác không chiều $ABC$ là một tập hợp ba điểm $A$, $B$, $C$ không thẳng hàng *(hình 1)*.

**Tam giác một chiều.** Một tam giác một chiều $ABC$ gồm tập hợp tất cả các điểm nằm trên đường gấp khúc khép kín gồm ba đoạn thẳng $AB$, $BC$, $CA$ *(hình 2)*.

**Tam giác hai chiều.** Một tam giác hai chiều $ABC$ gồm tập hợp tất cả các điểm của mặt phẳng $ABC$, nằm trong miền tam giác $ABC$ *(hình 3)*.




*hình 1* *hình 2* *hình 3*

Người ta còn phân biệt cả *tam giác hai chiều mở*, là phần tam giác hai chiều $ABC$ bỏ đi phần tam giác một chiều $ABC$.

● Sự phân biệt các loại tam giác như trên là rất cần thiết và quan trọng trong thực tế. Ví dụ như trong cơ học, trọng tâm của một vật là điểm cân bằng trọng lực của vật đó, để tìm trọng tâm của một vật hình tam giác mà không xác định rõ nó thuộc loại nào thì bài toán sẽ hoàn toàn vô nghĩa.

Bây giờ ta sẽ thử tìm cách xác định trọng tâm của từng loại tam giác trong thực tế, cụ thể là :

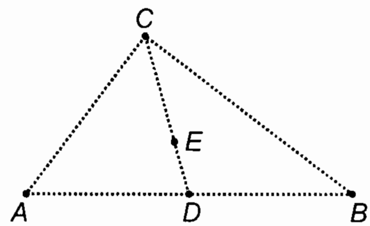
- Ba khối kim loại hình cầu *(đều đặn, thuần nhất và có khối lượng như nhau dạng tam giác không chiều)* ;

- Một tấm kim loại hình tam giác *(phẳng, đều đặn và thuần nhất dạng tam giác hai chiều)* ;

- Một khung kim loại hình tam giác *(phẳng, đều đặn và thuần nhất dạng tam giác một chiều)*.

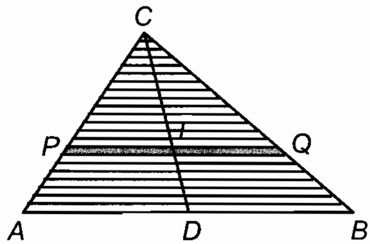
Liệu chúng có cùng chung một cách xác định trọng tâm hay không, chúng ta sẽ làm rõ bằng cách xem xét từng trường hợp :

● **Ba khối kim loại hình cầu.**




Gọi $A$, $B$, $C$ lần lượt là tâm của ba khối cầu này. Như vậy trọng lượng tập trung ở $A$, $B$, $C$ bằng nhau, bằng khối lượng $m$ của mỗi khối cầu. Do đó trọng tâm của $A$ và $B$ là trung điểm $D$ của $AB$, tại $D$ tập trung khối lượng bằng $2m$. Suy ra trọng tâm của ba khối cầu là trọng tâm của $A$, $B$, $C$, chính là trọng tâm của $C$ và $D$. Đó là điểm $E$ thuộc đoạn $CD$, chia đoạn $CD$ thành hai phần tỉ lệ nghịch với hai khối lượng ở tại $C$ và $D$ : $\frac{CE}{DE} = \frac{2}{1} = 2$. Như ta thường biết, $E$ là trọng tâm của tam giác $ABC$ (giao điểm của ba đường trung tuyến).

● **Một tấm kim loại hình tam giác.**



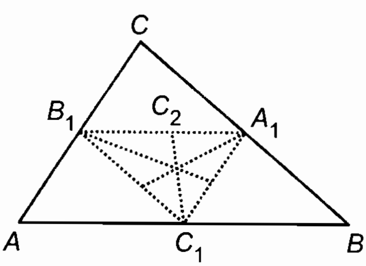

Gọi tấm kim loại đó là $ABC$. Để xác định trọng tâm của tấm $ABC$, ta chia nó thành các dải cực nhỏ, song song với cạnh $AB$. Trọng tâm của mỗi dải sẽ nằm tại điểm chính giữa của dải đó, đều thuộc đường trung tuyến $CD$ của tam giác $ABC$. Nói cách khác, trọng tâm của tấm $ABC$ nằm trên đoạn $CD$. (*)

Khi tập trung khối lượng của mỗi dải tại trọng tâm của nó thì các khối lượng đó đều khác nhau nên ta không xác định ngay được trọng tâm của tấm $ABC$ trên $CD$.

Tuy nhiên (*) đúng với bất kì trung tuyến nào trong ba trung tuyến của tam giác $ABC$ nên kết quả trong trường hợp này giống như trường hợp trên, phù hợp với khái niệm mà ta đã được học.

● **Một khung kim loại hình tam giác.**

Với một khung $ABC$ có độ dài các cạnh khác nhau thì hiển nhiên khối lượng các cạnh cũng khác nhau nên trọng tâm của khung không thể nằm trên bất kì một đường trung tuyến nào của tam giác $ABC$. Vì vậy trường hợp này khác hẳn hai trường hợp trên.




Gọi độ dài của các cạnh $BC$, $CA$, $AB$ lần lượt là $a$, $b$, $c$ và khối lượng tương ứng của chúng là $m_a$, $m_b$, $m_c$, ta có $\frac{a}{m_a} = \frac{b}{m_b} = \frac{c}{m_c}$;

Gọi $A_1$, $B_1$, $C_1$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC$, $CA$, $AB$ ta có

$$B_1C_1 = \frac{a}{2};\ C_1A_1 = \frac{b}{2};\ A_1B_1 = \frac{c}{2}.$$

Như vậy $C_1$ là trọng tâm của đoạn $AB$, tại $C_1$ tập trung khối lượng bằng $m_c$;

$B_1$ là trọng tâm của đoạn $CA$, tại $B_1$ tập trung khối lượng bằng $m_b$;

$A_1$ là trọng tâm của đoạn $BC$, tại $A_1$ tập trung khối lượng bằng $m_a$.

Suy ra trọng tâm của khung $ABC$ là trọng tâm của tam giác không chiều $A_1B_1C_1$ nhưng các khối lượng tập trung tại $A_1$, $B_1$, $C_1$ khác nhau.

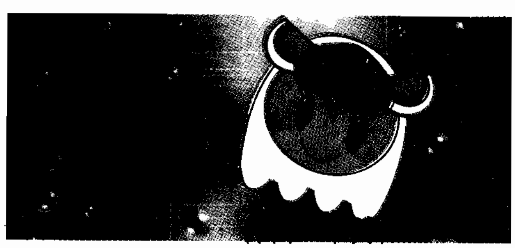
Ta tiếp tục có trọng tâm của hai điểm $A_1$, $B_1$ là điểm $C_2$ thuộc đoạn $A_1B_1$, chia đoạn $A_1B_1$ thành hai phần tỉ lệ nghịch với hai khối lượng ở tại $A_1$, $B_1$ :

$$\frac{A_1C_2}{B_1C_2} = \frac{m_b}{m_a} = \frac{b}{a} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1}.$$

Suy ra $C_1C_2$ là một phân giác của tam giác $A_1B_1C_1$ và trọng tâm của tam giác $A_1B_1C_1$ nằm trên $C_1C_2$. Điều này cũng đúng với các phân giác khác của tam giác.

Vậy trọng tâm của khung $ABC$ là giao điểm của ba đường phân giác của tam giác $A_1B_1C_1$.

Các bạn có thể tự kiểm nghiệm các kết quả trên bằng một thí nghiệm đơn giản. Đến đây thì chúng ta đã thấy, tam giác có trọng tâm là giao điểm của ba đường trung tuyến, như khái niệm hình học chúng ta đã được học chính là tam giác thuộc các dạng không chiều và hai chiều. Tuy nhiên nhiều bạn sẽ hơi ngạc nhiên vì về mặt trực quan, lâu nay các bạn vẫn thường liên tưởng về tam giác như là tam giác một chiều. Chúc các bạn tìm thấy nhiều điều thú vị khi học toán.





# CẦN PHẢI BIẾT THẮC MẮC

ĐẶNG VĂN BIỂU
(Giáo viên trường THCS Đông Dư, Gia Lâm, Hà Nội)

Luôn tự đặt các câu hỏi và tìm cách giải đáp trước mỗi vấn đề khi học toán là một phẩm chất rất đáng khích lệ. Nó không những giúp bạn hiểu kĩ được vấn đề mà còn tạo cho bạn phong cách học tập chủ động và thói quen suy nghĩ sâu sắc, đầy đủ.

Tôi đã thực hiện kinh nghiệm học toán này từ khi còn đang ngồi trên ghế nhà trường, hôm nay xin được chia sẻ cùng với các bạn thông qua một ví dụ.

Khi học bài *"Đường trung bình của tam giác - Áp dụng vào tam giác vuông"*, SGK Hình Học 7 cũ (trang 51) có nêu hai định lí sau đây :

**Định lí 1 :** *Trong tam giác vuông, trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền.*

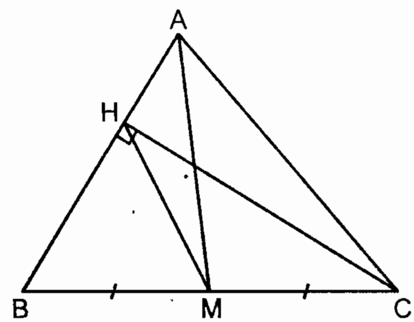
**Định lí 2 :** *Trong một tam giác nếu trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.*

● Việc chứng minh hai định lí này không khó (dựa vào tính chất đường trung bình trong tam giác) nhưng vấn đề sẽ nảy sinh nếu *định lí 1* được phát biểu bằng cách khác : *"Trong một tam giác, trung tuyến xuất phát từ đỉnh góc vuông bằng nửa cạnh đối diện với đỉnh đó"*.

Câu hỏi tôi đã đặt ra khi đó là : Trong một tam giác, trung tuyến xuất phát từ đỉnh góc nhọn (hay đỉnh góc tù) so với cạnh đối diện với đỉnh đó sẽ như thế nào ? Không khó khăn lắm để có trả lời cho câu hỏi này.

**Trường hợp 1** *(trung tuyến xuất phát từ đỉnh góc nhọn)* :

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} < 90^\circ$, M là trung điểm của BC. Ta so sánh AM với $\dfrac{BC}{2}$ :




*Hình 1*

Không mất tính tổng quát, giả sử $\widehat{B} < 90^\circ$ *(hình 1)*. Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB thì H phải thuộc đoạn thẳng AB (H khác A và H khác B). Suy ra :

$\widehat{AHM} = \widehat{AHC} + \widehat{CHM} > \widehat{AHC} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{H}$ là góc lớn nhất trong tam giác AHM

$\Rightarrow$ AM > HM.

Mặt khác, theo *định lí 1* thì $HM = \dfrac{BC}{2}$ nên : $AM > \dfrac{BC}{2}$.

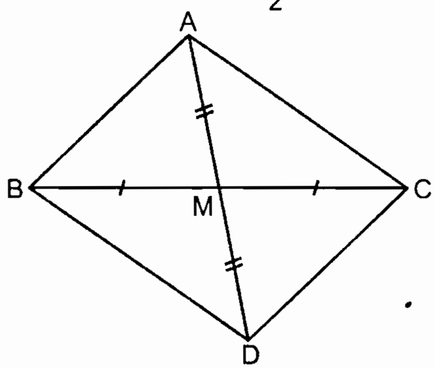
**Trường hợp 2** *(trung tuyến xuất phát từ đỉnh góc tù)* :

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} > 90^\circ$, M là trung điểm của BC. Ta so sánh AM với $\dfrac{BC}{2}$ :

Dựng hình bình hành ABDC *(hình 2)*.

Dễ thấy M là trung điểm của AD và $\widehat{ACD} < 90^\circ$, theo *định lí 1* thì $\dfrac{AD}{2} < CM$.

Suy ra $AM < \frac{BC}{2}$.




*Hình 2*

Như vậy ta có thêm hai định lí sau đây :

**Định lí 1.1** : *Trong một tam giác, trung tuyến xuất phát từ đỉnh góc nhọn lớn hơn nửa cạnh đối diện với đỉnh đó.*

**Định lí 1.2** : *Trong một tam giác, trung tuyến xuất phát từ đỉnh góc tù nhỏ hơn nửa cạnh đối diện với đỉnh đó.*

Bằng phương pháp phản chứng ta dễ dàng chứng minh được hai định lí khác :

**Định lí 2.1** : *Trong một tam giác nếu trung tuyến ứng với một cạnh lớn hơn nửa cạnh ấy thì góc đối diện với cạnh này nhọn.*

**Định lí 2.2** : *Trong một tam giác nếu trung tuyến ứng với một cạnh nhỏ hơn nửa cạnh ấy thì góc đối diện với cạnh này tù.*

● Tôi đã rất vui sướng đem kết quả này khoe với người anh họ. Anh ấy khen và đặt thêm cho tôi một câu hỏi : Với tam giác vuông ABC vuông tại A, trung tuyến AM. Đặt BC = a, AM = $m_a$ khi đó *định lí 1* được viết dưới dạng hệ thức là : $m_a = \frac{a}{2}$ (*), vậy có hệ thức tổng quát tính độ dài các đường trung tuyến khi ABC là tam giác bất kì không ?

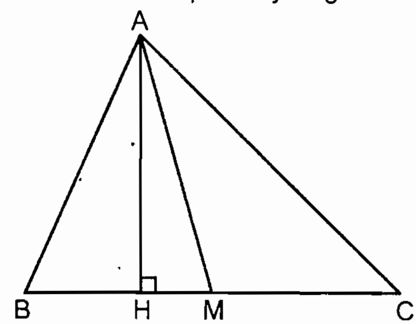
Phải đợi đến khi học định lí Py-ta-go ở lớp 8 tôi mới trả lời được câu hỏi này, chính là định lí sau đây (trong SGK mới, định lí Py-ta-go được giới thiệu ngay từ lớp 7).

**Định lí 3** : Một tam giác có độ dài ba cạnh là a, b, c và độ dài ba đường trung tuyến tương ứng là $m_a$, $m_b$, $m_c$ thì :

$$m_b^2 = \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4},\ m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$$

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \quad (**).$$

**Chứng minh** (**) : Dựng đường cao AH *(hình 3)*, không mất tổng quát, giả sử H thuộc tia MB. Theo định lí Py-ta-go ta có :




*Hình 3*

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 = AH^2 + |MB - MH|^2$$
$$= AH^2 + MH^2 + MB^2 - 2.MB.MH$$
$$= AM^2 + \frac{BC^2}{4} - 2.MB.MH\ ;$$

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 = AH^2 + (MC + MH)^2$$
$$= AH^2 + MH^2 + MC^2 + 2.MC.MH$$
$$= AM^2 + \frac{BC^2}{4} + 2.MB.MH.$$

$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$\Rightarrow AM^2 = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}$$

hay $m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$.

● Tôi tiếp tục dự đoán và chứng minh được *định lí 3* bao trùm các *định lí 1 ; 1.1* ; *1.2.*

*(Xem tiếp trang 25)*

# MỘT HẰNG ĐẲNG THỨC THÚ VỊ

PHAN THỊ MÙI

*(Giáo viên trường THCS Trần Quốc Toản, TX. Tuy Hòa, Phú Yên)*

Với mọi số thực a, b, c, ta có :

$$(a + b)(a + c) = a^2 + (ab + bc + ca)$$
$$= a(a + b + c) + bc \qquad (*).$$

Với tôi, (*) là hằng đẳng thức rất thú vị. Trước hết, từ (*) ta có ngay :

*Hệ quả 1 :* Nếu $ab + bc + ca = 1$ thì

$$a^2 + 1 = (a + b)(a + c).$$

*Hệ quả 2 :* Nếu $a + b + c = 1$ thì

$$a + bc = (a + b)(a + c).$$

Bây giờ, chúng ta đến với một vài ứng dụng của (*) và hai hệ quả trên.

**Bài toán 1 :** Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Hãy tính giá trị của biểu thức : $A = a.\sqrt{\dfrac{(b^2+1)(c^2+1)}{a^2+1}} + b.\sqrt{\dfrac{(c^2+1)(a^2+1)}{b^2+1}} + c.\sqrt{\dfrac{(a^2+1)(b^2+1)}{c^2+1}}$.

**Lời giải :** Theo hệ quả 1 ta có

$a^2 + 1 = a^2 + (ab + bc + ca) = (a + b)(a + c)$ ;

$b^2 + 1 = b^2 + (ab + bc + ca) = (b + a)(b + c)$ ;

$c^2 + 1 = c^2 + (ab + bc + ca) = (c + a)(c + b)$.

Suy ra $a.\sqrt{\dfrac{(b^2+1)(c^2+1)}{a^2+1}} =$

$$= a.\sqrt{\frac{(b+a)(b+c)(c+a)(c+b)}{(a+b)(a+c)}} = a(b+c) ;$$

$$b.\sqrt{\frac{(c^2+1)(a^2+1)}{b^2+1}} = b(c+a) ;$$

$$c.\sqrt{\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{c^2+1}} = c(a+b).$$

Vì vậy $A = a(b + c) + b(c + a) + c(a + b)$

$$= 2(ab + bc + ca) = 2.$$

Vấn đề sẽ khó hơn khi ta hướng tới việc đánh giá các biểu thức.

**Bài toán 2 :** Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $(a + b)(a + c) = 1$. Chứng minh rằng :

a) $abc(a+b+c) \le \dfrac{1}{4}$ ;

b) $a(ab+bc+ca) \le \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

**Lời giải :** a) Sử dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $a(a + b + c)$ ; $bc$ :

$$1 = (a + b)(a + c) = a(a + b + c) + bc \ge$$
$$\ge 2.\sqrt{a(a+b+c)bc} = 2.\sqrt{abc(a+b+c)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{abc(a+b+c)} \le \frac{1}{2} \Rightarrow abc(a+b+c) \le \frac{1}{4}.$$

b) Sử dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương $a^2$ ; $\dfrac{ab+bc+ca}{2}$ ; $\dfrac{ab+bc+ca}{2}$ :

$$1 = (a + b)(a + c) = a^2 + (ab + bc + ca) =$$

$$= a^2 + \frac{ab+bc+ca}{2} + \frac{ab+bc+ca}{2} \ge$$

$$\ge 3.\sqrt[3]{\frac{a^2(ab+bc+ca)^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2(ab+bc+ca)^2}{4} \le \frac{1}{27}$$

$$\Rightarrow a(ab+bc+ca) \le \sqrt{\frac{4}{27}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

**Bài toán 3 :** Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn ab + bc + ca = 1. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{a^4+a^2}+\sqrt{b^4+b^2}+\sqrt{c^4+c^2}\le$$
$$\le 1+a^2+b^2+c^2.$$

**Lời giải :** Theo hệ quả 1 ta có

$$\sqrt{a^4+a^2}=\sqrt{a^2(a^2+1)}=\sqrt{a^2(a+b)(a+c)}$$
$$=\sqrt{(a^2+ab)(a^2+ac)}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $a^2$ + ab ; $a^2$ + ac :

$$\sqrt{(a^2+ab)(a^2+ac)}\le\frac{2a^2+ab+ac}{2}$$
$$\Rightarrow\sqrt{a^4+a^2}\le\frac{2a^2+ab+ac}{2}.$$

Tương tự ta có $\sqrt{b^4+b^2}\le\dfrac{2b^2+ba+bc}{2}$;

$$\sqrt{c^4+c^2}\le\frac{2c^2+ca+cb}{2}.$$

Từ các kết quả trên ta suy ra :

$$\sqrt{a^4+a^2}+\sqrt{b^4+b^2}+\sqrt{c^4+c^2}$$
$$\le(ab+bc+ca)+a^2+b^2+c^2$$
$$=1+a^2+b^2+c^2.$$

Bài toán sau đây nguyên là đề thi Châu Á - Thái Bình Dương năm 2002 đã được viết lại cho đơn giản hơn (thay $\left(\dfrac{1}{x};\dfrac{1}{y};\dfrac{1}{z}\right)$ bởi (a ; b ; c)).

**Bài toán 4 :** Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn a + b + c = 1. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab}$$
$$\ge 1+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}.$$

**Lời giải :** Theo hệ quả 2 và bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ski ta có

$$a+bc=(a+b)(a+c)\ge(a+\sqrt{bc})^2$$
$$\Rightarrow\sqrt{a+bc}\ge a+\sqrt{bc}.$$

Tương tự ta có $\sqrt{b+ca}\ge b+\sqrt{ca}$ ;

$$\sqrt{c+ab}\ge c+\sqrt{ab}.$$

Từ các kết quả trên ta suy ra :

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab}$$
$$\ge a+\sqrt{bc}+b+\sqrt{ca}+c+\sqrt{ab}$$
$$=(a+b+c)+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$$
$$=1+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}.$$

Để kết thúc, xin các bạn làm thêm một số bài tập :

**Bài tập 1 :** Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn a + b + c = 1. Hãy tính giá trị của biểu thức : $B=\sqrt{\dfrac{(a+bc)(b+ca)}{c+ab}}+$

$$+\sqrt{\frac{(b+ca)(c+ab)}{a+bc}}+\sqrt{\frac{(c+ab)(a+bc)}{b+ca}}.$$

**Bài tập 2 :** Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn ab + bc + ca = 1. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{a^4+a^2}+\sqrt{b^4+b^2}+\sqrt{c^4+c^2}\ge$$
$$\ge\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)+\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)^2.$$

**Bài tập 3 :** Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn a + b + c = 1. Chứng minh rằng :

$$(a+bc)(b+ca)(c+ab)\ge\frac{64}{81}(ab+bc+ca)^2.$$

# NHỮNG SAI LẦM THƯỜNG GẶP

# KHI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

NGUYỄN ĐỨC TẤN *(TP. Hồ Chí Minh)*

Khi giải các phương trình mà ẩn nằm trong dấu căn thức (phương trình vô tỉ), một số học sinh do chưa nắm vững kiến thức về căn thức và phép biến đổi tương đương các phương trình nên thường mắc phải một số sai lầm. Bài viết này nhằm giúp các bạn học sinh lớp 9 tránh được những sai lầm đó !

**Ví dụ 1 :**

Giải phương trình $(x+3)\sqrt{x-1}=0$.

**Lời giải sai :** Ta có

$$(x+3)\sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3=0 \\ \sqrt{x-1}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1. \end{array}\right.$$

**Nhận xét :** Rõ ràng $x = -3$ không phải là nghiệm của phương trình trên.

Ghi nhớ rằng : $A\sqrt{B}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} A=0 \\ \sqrt{B}=0. \end{array}\right. \end{cases}$

**Ví dụ 2 :** Giải phương trình $\sqrt{x+4}=x+2$.

**Lời giải sai :** $\sqrt{x+4}=x+2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \ge 0 \\ x+4=(x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -4 \\ x+4=x^2+4x+4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -4 \\ x(x+3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -4 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-3. \end{array}\right.$$

**Nhận xét :** Rõ ràng $x = -3$ không phải là nghiệm của phương trình trên.

Ghi nhớ rằng : $\sqrt{A}=B \Leftrightarrow \begin{cases} B \ge 0 \\ A=B^2. \end{cases}$

**Ví dụ 3 :** Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{2x+5}{x-2}}=1$.

**Lời giải sai :** $\sqrt{\dfrac{2x+5}{x-2}}=1 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2x+5}}{\sqrt{x-2}}=1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+5}=\sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \ge 0 \\ 2x+5=x-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x=-7. \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

**Nhận xét :** Các bạn nghĩ sao khi phương trình đã cho thực sự có nghiệm là $x = -7$ ?

Ghi nhớ rằng :

$$\sqrt{\frac{A}{B}}=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{-A}}{\sqrt{-B}} & \text{khi } A \le 0 \text{ ; } B < 0 \\ \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} & \text{khi } A \ge 0 \text{ ; } B > 0 \end{cases}$$

Như vậy lời giải trên đã bỏ sót một trường hợp khi $A \le 0$ ; $B < 0$ nên mất nghiệm $x = -7$.

**Ví dụ 4 :** Giải phương trình

$2\sqrt{x-4}+\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x-16}$.

**Lời giải sai :** Ta có

$$2\sqrt{x-4}+\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x-16}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-4}+\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3}+\sqrt{4(x-4)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ x-1=2x-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x = 2. \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm x = 2.

**Nhận xét :** Ta thấy ngay x = 2 không nghiệm đúng phương trình đã cho.

Ghi nhớ rằng :

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{A} + \sqrt{C} \Leftrightarrow \begin{cases} A \ge 0 \\ \sqrt{B} = \sqrt{C}. \end{cases}$$

**Ví dụ 5 :** Giải phương trình

$$\sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x-2)} = 2\sqrt{x(x-3)}.$$

**Lời giải sai :**

Phương trình tương đương với :

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-1} + \sqrt{x}.\sqrt{x-2} = 2\sqrt{x}.\sqrt{x-3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = 2\sqrt{x-3}.$$

Căn thức có nghĩa $\Leftrightarrow x \ge 3$. Khi đó ta có :

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} > \sqrt{x-3} \\ \sqrt{x-2} > \sqrt{x-3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} > 2\sqrt{x-3}.$$

Do đó phương trình vô nghiệm.

**Nhận xét :** Có thể thấy ngay x = 0 là nghiệm. Việc chia hai vế cho $\sqrt{x}$ đã làm mất nghiệm này. Mặt khác cần ghi nhớ :

$$\sqrt{A.B} = \begin{cases} \sqrt{A}.\sqrt{B} \text{ khi } A \ge 0 \text{ ; } B \ge 0 \\ \sqrt{-A}.\sqrt{-B} \text{ khi } A \le 0 \text{ ; } B \le 0. \end{cases}$$

Do đó lời giải phải bổ sung trường hợp $\sqrt{x} = 0$ và trường hợp x < 0. Khi x < 0 thì phương trình viết về dạng :

$$\sqrt{-x}.\sqrt{1-x} + \sqrt{-x}.\sqrt{2-x} = 2\sqrt{-x}.\sqrt{3-x}.$$

Vì $\sqrt{-x} > 0$ nên chia hai vế cho $\sqrt{-x}$ ta có :

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{2-x} = 2\sqrt{3-x}.$$

Với x < 0 thì :

$$\begin{cases} \sqrt{1-x} < \sqrt{3-x} \\ \sqrt{2-x} < \sqrt{3-x} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{1-x} + \sqrt{2-x} < 2\sqrt{3-x}.$$

Do đó x < 0 không thỏa mãn phương trình. Cuối cùng phương trình có nghiệm duy nhất x = 0.

Mong các bạn trao đổi thêm về vấn đề này.

## *Kết quả :* TRẬN ĐẤU THỨ MƯỜI BỐN

*(Tiếp theo trang 19)*

**Lời bình :** 1) Lời giải trên không được coi là hoàn chỉnh nếu không có đoạn phân tích ban đầu nhằm khẳng định rằng : Chỉ có duy nhất (sai khác một phép đồng dạng) một tam giác ABC thỏa mãn điều kiện của đầu bài.

2) Nhiều võ sĩ nhận xét rằng, bài toán này là một trong những Đề thi Vô địch Toán toàn nước Mĩ (USAMO) 1996 và lời giải trong đáp án dùng phương pháp lượng giác (xem "Tuyển tập các bài toán từ những cuộc thi tại Mĩ và Ca-na-đa" của các tác giả Vũ Dương Thụy - Nguyễn Văn Nho, bài toán 246).

3) Lời giải trong đáp án dùng phương pháp lượng giác nói trên là lời giải không phụ thuộc hình vẽ. Chính vì vậy, trong lời giải này đương nhiên không xảy ra vấn đề tam giác ABC thỏa mãn điều kiện đề bài có "duy nhất" hay "không duy nhất" như đã phân tích ở trên.

4) Chính vì những lí do trên mà tôi không thể tìm được võ sĩ đăng quang trong trận đấu này.

NGUYỄN MINH HÀ

**HỌC RA SAO?**

# TIẾP TỤC PHÁT HIỆN VÀ MỞ RỘNG

LÊ HỮU ĐIỀN KHUÊ
*(Lớp 10 Toán, THPT Quốc học Huế)*

Tiếp tục mở rộng những kết quả trong bài SÁNG TẠO KHI TỰ HỌC TOÁN, đăng trên TTT2 số 1, tôi đã tìm thêm được một số kết quả. Điều này càng khẳng định lời của thầy giáo NGUYỄN ĐỨC TẤN ở bài trên : “Tự học nhiều khi giúp ta tìm đến những điều thú vị trong toán học”.

Thầy Tấn đã mở rộng bất đẳng thức

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\quad\text{(I)}$$

(với a, b, c là ba cạnh của một tam giác) theo hướng nâng lên lũy thừa bậc n các mẫu số của các phân thức :

$$\frac{1}{(a+b-c)^n}+\frac{1}{(b+c-a)^n}+\frac{1}{(c+a-b)^n}\ge$$
$$\ge\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}\qquad\text{(II)}$$

● Câu hỏi đầu tiên đặt ra là : tại sao không thử mở rộng bất đẳng thức (I) theo hướng ngược lại - khai căn bậc n các mẫu số của các phân thức ?

Tiếp tục áp dụng cách chứng minh của bài toán phụ ($\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ với x, y > 0) ta có :

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x}}+\frac{1}{\sqrt[n]{y}}\ge 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{y}}}=\frac{2}{\sqrt[n]{\sqrt{xy}}}\ge\frac{2}{\sqrt[n]{\frac{x+y}{2}}}.$$

Suy ra : $\frac{1}{\sqrt[n]{a+b-c}}+\frac{1}{\sqrt[n]{b+c-a}}\ge\frac{2}{\sqrt[n]{b}}$ ;

$$\frac{1}{\sqrt[n]{b+c-a}}+\frac{1}{\sqrt[n]{c+a-b}}\ge\frac{2}{\sqrt[n]{c}};$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{c+a-b}}+\frac{1}{\sqrt[n]{a+b-c}}\ge\frac{2}{\sqrt[n]{a}}.$$

Từ đó ta có :

**Kết quả 1 :** Nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì :

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a+b-c}}+\frac{1}{\sqrt[n]{b+c-a}}+\frac{1}{\sqrt[n]{c+a-b}}\ge$$
$$\ge\frac{1}{\sqrt[n]{a}}+\frac{1}{\sqrt[n]{b}}+\frac{1}{\sqrt[n]{c}}$$

(với mọi số tự nhiên n khác 0).

● Thay đổi các tử số ở vế trái của bất đẳng thức (I) thầy Tấn đưa ra kết quả tiếp theo :

$$\frac{c}{a+b-c}+\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}\ge 3\quad\text{(III)}.$$

Khai căn bậc n các tử số của các phân số ở vế trái của (III) lại có thêm kết quả khác.

**Kết quả 2 :** Nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì :

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{b+c-a}+\frac{\sqrt[n]{b}}{c+a-b}+\frac{\sqrt[n]{c}}{a+b-c}\ge$$
$$\ge\frac{1}{\sqrt[n]{a^{n-1}}}+\frac{1}{\sqrt[n]{b^{n-1}}}+\frac{1}{\sqrt[n]{c^{n-1}}}$$

(với mọi số tự nhiên n khác 0).

**Chứng minh** : Trước hết ta phát biểu và chứng minh *bất đẳng thức Trê-bư-sép cho 3 số* :

*Phát biểu :*

Nếu $a_1\ge a_2\ge a_3$ và $b_1\ge b_2\ge b_3$

thì $3(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\ge$

$$\ge(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)\quad(1);$$

Nếu $a_1\le a_2\le a_3$ và $b_1\ge b_2\ge b_3$

thì $3(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\le$

$$\le(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)\quad(2).$$

*Chứng minh :*

Với $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ và $b_1 \geq b_2 \geq b_3$ ta có :

$$(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \geq 0$$

$\Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 \geq a_1b_2 + a_2b_1$ ;

Tương tự ta có :

$a_2b_2 + a_3b_3 \geq a_2b_3 + a_3b_2$ ;

$a_3b_3 + a_1b_1 \geq a_3b_1 + a_1b_3$.

Cộng theo từng vế ba bất đẳng thức trên ta có $2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \geq$

$\geq a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_3b_1 + a_1b_3$

$\Leftrightarrow 3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \geq a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_3b_1 + a_1b_3 + (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) =$

$= (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$.

Vậy (1) được chứng minh.

Tương tự, ta cũng chứng minh được (2).

*Trở lại kết quả 2.*

Vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$

$\Rightarrow b + c - a \leq c + a - b \leq a + b - c$

$$\Rightarrow \frac{1}{b+c-a} \geq \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{1}{a+b-c}.$$

Theo các bất đẳng thức (1) ; (I) ; (2) ta có :

$$3.\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{b+c-a} + \frac{\sqrt[n]{b}}{c+a-b} + \frac{\sqrt[n]{c}}{a+b-c}\right)$$

$$= 3.\left(\sqrt[n]{a}.\frac{1}{b+c-a} + \sqrt[n]{b}.\frac{1}{c+a-b} + \sqrt[n]{c}.\frac{1}{a+b-c}\right)$$

$$\geq (\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c})\left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c}\right)$$

$$\geq (\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c})\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$\geq 3.\left(\sqrt[n]{a}.\frac{1}{a} + \sqrt[n]{b}.\frac{1}{b} + \sqrt[n]{c}.\frac{1}{c}\right)$$

$$= 3.\left(\frac{1}{\sqrt[n]{a^{n-1}}} + \frac{1}{\sqrt[n]{b^{n-1}}} + \frac{1}{\sqrt[n]{c^{n-1}}}\right).$$

Suy ra điều phải chứng minh.

● Từ bất đẳng thức (III) thầy Tấn đã nâng lên lũy thừa bậc n các tử số của các phân số ở vế trái để tìm kết quả mới, còn tôi đã mạnh dạn tiếp tục nâng lên lũy thừa bậc m các mẫu số của chúng. Ý tưởng sử dụng bất đẳng thức Trê-bư-sép cho 3 số một lần nữa lại có hiệu quả.

**Kết quả 3 :** Nếu a, b, c là ba cạnh của một tam giác thì :

$$\frac{c^n}{(a+b-c)^m} + \frac{a^n}{(b+c-a)^m} + \frac{b^n}{(c+a-b)^m} \geq$$
$$\geq a^{n-m} + b^{n-m} + c^{n-m},$$

với mọi số tự nhiên m, n.

**Chứng minh :** Áp dụng các bất đẳng thức (1) ; (II) ; (2) ta có :

$$3.\left(\frac{c^n}{(a+b-c)^m} + \frac{a^n}{(b+c-a)^m} + \frac{b^n}{(c+a-b)^m}\right)$$

$$\geq (a^n + b^n + c^n)\left(\frac{1}{(a+b-c)^m} + \frac{1}{(b+c-a)^m} + \frac{1}{(c+a-b)^m}\right)$$

$$\geq (a^n + b^n + c^n)\left(\frac{1}{a^m} + \frac{1}{b^m} + \frac{1}{c^m}\right)$$

$$\geq 3.(a^{n-m} + b^{n-m} + c^{n-m}).$$

Suy ra điều phải chứng minh.

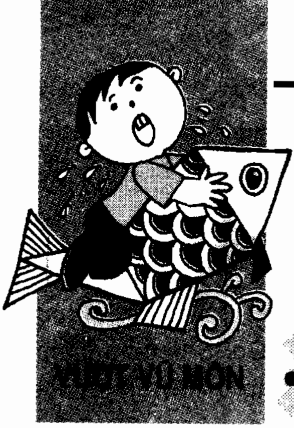
● Chưa dừng lại, tôi còn tìm ra và chứng minh được các kết quả sau :

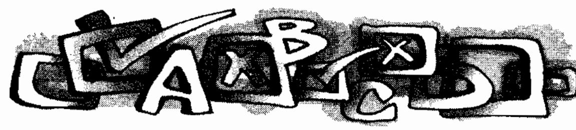
1) $$\frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[m]{a+b-c}} + \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b+c-a}} + \frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[m]{c+a-b}} \geq \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} + \frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[m]{b}} + \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[m]{c}};$$

2) $$\frac{\sqrt[n]{c^p}}{\sqrt[m]{(a+b-c)^q}} + \frac{\sqrt[n]{a^p}}{\sqrt[m]{(b+c-a)^q}} + \frac{\sqrt[n]{b^p}}{\sqrt[m]{(c+a-b)^q}} \geq \frac{\sqrt[n]{a^p}}{\sqrt[m]{a^q}} + \frac{\sqrt[n]{b^p}}{\sqrt[m]{b^q}} + \frac{\sqrt[n]{c^p}}{\sqrt[m]{c^q}}$$

(trong đó a, b, c là ba cạnh của một tam giác, m, n, p, q là các số tự nhiên khác 0).

Các bạn thử chứng minh xem !



# Thi trắc nghiệm như thế nào ?

NGƯT. TRẦN ANH DŨNG

*(Hiệu trưởng trường THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai)*

Hình thức thi trắc nghiệm đã được nhiều nước phát triển áp dụng từ lâu cho các kì thi, từ các kì thi đánh giá chất lượng cuối kì, tốt nghiệp, tuyển sinh đến chọn học sinh giỏi. Trong xu hướng chung của sự phát triển và đổi mới, hình thức thi hay đánh giá bằng trắc nghiệm đã được xem là một hình thức đánh giá rất tốt.

Chương trình thí điểm cải cách lớp 9 của nước ta cũng đã dự kiến đưa vào đề thi tốt nghiệp THCS phần câu hỏi trắc nghiệm. Để giúp bạn đọc làm quen với hình thức thi này chúng tôi xin được giới thiệu phần trắc nghiệm trong đề thi chọn học sinh giỏi bậc THCS ở Sin-ga-po năm 1995 (mỗi câu trả lời đúng được 4 điểm ; sai bị trừ 1 điểm).

**Câu 1 :** Giá trị thu gọn của $\dfrac{2^{40}}{4^{20}}$ là :

(A) 1 (B) 4 (C) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{20}$ (D) $2^{20}$ (E) $2^{18}$

**Câu 2 :** Nếu $(8,047)^3 = 521,077119823$ thì $(0,8047)^3$ có giá trị là :

(A) 0,521077119823 (B) 52,1077119823
(C) 521077,119823 (D) 0,00521077119823
(E) 0,0521077119823

**Câu 3 :** Nếu x là một số dương thì biểu thức nào sau đây có giá trị bé hơn 1 ?

(A) $\dfrac{1}{x}$ (B) $\dfrac{1+x}{x}$ (C) $x^2$ (D) $\dfrac{1-x}{x}$ (E) $\dfrac{x}{x+1}$

**Câu 4 :** Chữ số ở hàng đơn vị của số $(243)^{10}(163)^{9}(633)^{8}$ là :

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

**Câu 5 :** Hãy xem các mệnh đề về số $\pi$ sau, mệnh đề nào đúng :

a) $\pi$ là số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

b) $\pi$ là số vô tỉ.

c) $\pi = \dfrac{22}{7}$.

d) $\pi$ có giá trị gần đúng là 3,142.

e) $\pi$ là một số thực.

(A) Chỉ c) đúng ; (B) Chỉ b) và c) đúng ;
(C) Chỉ a), b), d) và e) đúng ;
(D) Chỉ c) và d) đúng ;
(E) Chỉ c) và e) đúng.

**Câu 6 :** Tổng của hai số dương bằng tổng các nghịch đảo của chúng, tích của hai số dương đó là :

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) $\dfrac{1}{2}$ (E) $\dfrac{1}{4}$

**Câu 7 :** Giá trị của x là bao nhiêu biết : $2^{1995} + 2^{1995} + 2^{1995} + 2^{1995} + 2^{1995} + 2^{1995} + 2^{1995} + 2^{1995} = 2^x$.

(A) 1996 (B) 1997 (C) 1998
(D) 1999 (E) 2000

**Câu 8 :** Ở thời điểm 3 giờ 40 phút, kim giờ và kim phút tạo thành góc tù có giá trị tính bằng độ là :

(A) $150^o$ (B) $160^o$ (C) $130^o$
(D) $120^o$ (E) $180^o$

**Câu 9 :** Một tứ giác có các cạnh đối diện tương ứng bằng nhau. Mệnh đề nào sau đây là đúng :

(A) Nếu 4 cạnh bằng nhau thì hai đường chéo cũng bằng nhau.

(B) Nếu các cạnh kề nhau vuông góc

với nhau thì 4 cạnh bằng nhau.

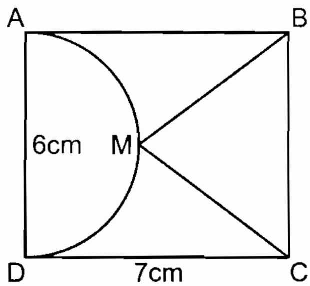
(C) Nếu các đường chéo bằng nhau thì các cạnh kề nhau vuông góc với nhau.

(D) Nếu các đường chéo vuông góc với nhau thì các cạnh kề nhau vuông góc với nhau.

(E) Nếu các đường chéo bằng nhau thì 4 cạnh bằng nhau.

**Câu 10 :** Trong hình vẽ, M là trung điểm của nửa đường tròn đường kính AD, hình chữ nhật ABCD có AD = 6cm ; AB = 7cm. Chu vi tam giác cân MBC bằng bao nhiêu ?

(A) 14cm
(B) 15cm
(C) 16cm
(D) 18cm
(E) 20cm




**Câu 11 :** Mỗi khi kim giờ và kim phút tạo với nhau một góc $180^o$ thì đồng hồ đổ chuông 1 lần. Từ 12 giờ trưa hôm nay đến 12 giờ trưa hôm sau, đồng hồ đổ chuông mấy lần ?

(A) 20 (B) 21 (C) 22 (D) 23 (E) 24

**Câu 12 :** 20 người lính đứng thành vòng tròn, tất cả đều quay mặt vào tâm, được đánh số thứ tự từ 1 đến 20 theo chiều kim đồng hồ. Họ bắt đầu đếm số theo chiều kim đồng hồ : người thứ nhất đếm 1, người thứ hai đếm 2,... người kế tiếp đếm số tự nhiên lớn hơn 1 đơn vị so với số mình vừa nghe người bên phải đếm. Người lính có số thứ tự bao nhiêu sẽ đếm số 1995 ?

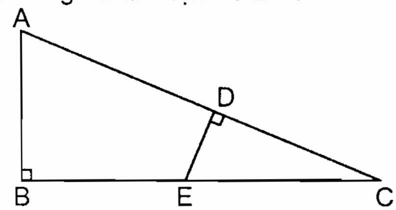
(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

**Câu 13 :** Vào giờ ăn trưa của một công ty, nếu mỗi người ngồi riêng 1 bàn thì còn 1 người không có bàn để ngồi, vì vậy họ đã ngồi 2 người vào 1 bàn. Lúc đó có một bàn còn trống. Hỏi có bao nhiêu chiếc bàn ?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

**Câu 14 :** Trong hình vẽ bên, $\widehat{ABC}$ và $\widehat{CDE}$ đều vuông. Cho biết CD = 6cm ; AD = 7cm và AB = 5cm. Diện tích của tứ giác ABED là :

(A) $15cm^2$ (B) $20\ cm^2$ (C) $22,5\ cm^2$
(D) $27,5\ cm^2$
(E) Không đủ dữ kiện để tính.




**Câu 15 :** Nếu $0 < x < 1$ ; $y = x^x$ và $z = x^y$ thì thứ tự tăng dần của 3 số x ; y ; z là :

(A) x ; y ; z (B) x ; z; y (C) y ; z ; x
(D) z ; y ; x (E) z ; x ; y

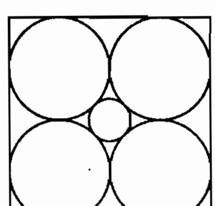
**Câu 16 :** Hai tàu hỏa chạy ngược chiều nhau với vận tốc của mỗi chiếc là 180km/giờ. Một người đứng trong chiếc tàu này thì thấy chiếc tàu kia chạy qua hết 5 giây. Hỏi chiếc tàu thứ hai dài bao nhiêu ?

(A) 100m (B) 200m (C) 250m
(D) 400m (E) 500m

**Câu 17 :** Trên một dòng sông có dòng chảy ổn định. Một người bơi một khoảng a ngược dòng mất 6 phút và bơi xuôi dòng cùng khoảng cách đó mất 3 phút. Nếu người đó thả nổi cho trôi xuôi dòng trên cùng khoảng a đó thì hết mấy phút ?

(A) 8 phút (B) 9 phút (C) 10 phút
(D) 11 phút (E) 12 phút

**Câu 18 :** Bốn vòng tròn bằng nhau, mỗi vòng tiếp xúc với 2 cạnh hình vuông và tiếp xúc ngoài với 2 vòng khác (như hình vẽ). Diện tích hình vuông là $144cm^2$. Nếu vẽ vòng tròn nhỏ tiếp xúc với cả 4 vòng tròn thì đường kính của vòng tròn nhỏ là :



(A) $6(\sqrt{2}-1)$cm
(B) $3(\sqrt{2}-1)$cm
(C) 3cm
(D) 2cm
(E) 1cm

*(Xem tiếp trang 25)*

# CUỘC THI

## "GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH ĐIỆN TỬ CASIO NĂM 2005"

**ĐƠN VỊ TÀI TRỢ : CÔNG TY CỔ PHẦN XUẤT NHẬP KHẨU BÌNH TÂY (BITEX)**

## ĐỀ THI KÌ THỨ BA

(Bài giải gửi trước ngày 16-04-2005)

**Bài 1.** (*Phan Ngọc Thơ*, Tân Bình Thạnh, Chợ Gạo, **Tiền Giang**)

Cho hai số

a = 3022005 và b = 7503021930.

**1.1.** Tìm ƯCLN(a, b) và BCNN(a, b).

**1.2.** Lập quy trình bấm phím liên tục tính ƯCLN(a, b).

**1.3.** Tìm số dư khi chia BCNN(a, b) cho 75.

**Bài 2.** (*Nguyễn Thị Huyền Trân*, $9A_1$, THCS Võ Văn Tần, Đức Hòa, **Long An**)

Cho $x^{1000} + y^{1000} = 6,912$ và $x^{2000} + y^{2000} = 33,76244$. Tính $x^{3000} + y^{3000}$.

**Bài 3.**

Tính và viết kết quả dưới dạng phân số :

**3.1.** $A = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{5}{6}}}}}$ ;

**3.2.** $B = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7}}}}}}$.

**Bài 4.** (*Ngô Phú Thanh*, 11 chuyên Toán, Quốc học Huế, **Thừa Thiên - Huế**)

Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình : $y = \sqrt[3]{18 + \sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{18 - \sqrt{x+1}}$.

**Bài 5.** Cho dãy số $\{b_n\}$ được xác định như sau : $b_{n+2} = 4b_{n+1} - b_n$, $b_1 = 4$, $b_2 = 14$.

**5.1.** Chứng minh rằng diện tích tam giác với các cạnh là $b_{k-1}$, $b_k$, $b_{k+1}$ là những số nguyên.

**5.2.** Chứng minh rằng bán kính đường tròn nội tiếp tam giác được tính theo công thức

$$r_k = \frac{1}{2\sqrt{3}}[(2+\sqrt{3})^k - (2-\sqrt{3})^k].$$

**Bài 6.**

**6.1.** Bao nhiêu số có tám chữ số tạo thành từ các chữ số 2 và 5 mà hai chữ số 2 không đứng cạnh nhau.

**6.2.** Bao nhiêu số có chín chữ số tạo thành từ các chữ số 2 và 5 mà hai chữ số 2 không đứng cạnh nhau.

**6.3.** Bao nhiêu số có mười chữ số tạo thành từ các chữ số 2 và 5 mà hai chữ số 2 không đứng cạnh nhau.

## PHIẾU DỰ THI

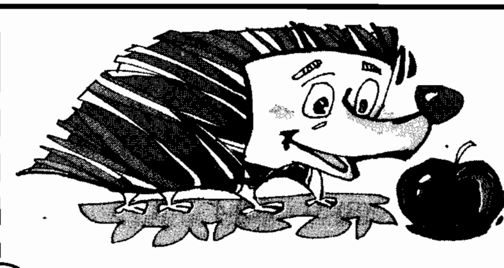
TOÁN TUỔI THƠ

CUỘC THI GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CASIO

Họ và tên : ........................................

Địa chỉ : ...........................................

.......................................................



**Bài 1.** *Đáp số :* M = 0.

**Lời bình :** Làm toán (biến đổi biểu thức) hay hơn làm tính (tính trên máy chỉ được $M \approx 1,32.10^{-9}$, như một số bạn đã làm). Người ra đề muốn cảnh báo : không nên quá lợi dụng máy tính dẫn tới không biết biến đổi toán học để được đáp số đúng.

**Bài 2.** Các bạn đã vào chương trình giải phương trình bậc ba để tìm được kết quả đúng. Một số bạn dùng dãy lặp nhưng không tìm được hết nghiệm. *Đáp số :*

**2.1.** 1) $8x^3 - 6x - 1 = 0$ : $x_1 = 0,93969262$ ; $x_2 = -0,766044443$ ; $x_3 = -0,173648177$.

2) $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ : $x_1 = 1,246979604$ ; $x_2 = -1,801937736$ ; $x_3 = -0,445041867$.

3) $16x^3 - 12x - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = 0$ : $x_1 = 0,994521895$ ; $x_2 = -0,587785252$ ; $x_3 = -0,406736643$.

**2.2.** Trong các phương trình trên, không có phương trình nào có nghiệm hữu tỉ.

Một số bạn hiểu sai, coi *nghiệm gần đúng* (đến 10 chữ số) là *nghiệm hữu tỉ chính xác* !

**2.3.** *Hướng dẫn :* Dùng công thức Các-đa-nô.

Thí dụ, phương trình $16x^3 - 12x - \sqrt{10+2\sqrt{5}} = 0$ có nghiệm là : $-\frac{1}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}(-1+\sqrt{5})$ ;

$$\frac{\sqrt{5}-1}{16}\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \frac{(\sqrt{5}+1)\sqrt{3}}{8};$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{16}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \frac{(\sqrt{5}+1)\sqrt{3}}{8}.$$

Một số bạn hiểu sai khái niệm : đưa *nghiệm gần đúng* vào trong căn bậc hai và coi đó là *nghiệm chính xác* !

**Bài 3.** **3.1.** Nếu $a_1$ là bội của 9 thì quy trình sẽ kết thúc bởi số 9. Nếu không là bội của 9 thì quy trình kết thúc tại phần dư của số đó khi chia cho 9.

**3.2.** Quy trình kết thúc bởi số 1 hoặc số 89.

**Bài 4.** Đa số bạn làm được.

**4.1.** *Đáp số :* $18^2 + 19^2 + 20^2 + 21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 + 25^2 + 26^2 + 27^2 + 28^2 = 77^2$.

**4.2.** Không.

**Bài 5.** *Đáp số :* số 3.

*Thử lại :* $3^2 = 9$ ; $3^3 = 27$. Số tạo thành là 927. Đảo lại của số này là 729. $729 = 3^6$.

**Bài 6.** Đầu bài không chính xác. Phải sửa lại là : Tìm hai hàm số $f : R \to R$ biết $f(f(x)) = f(x) + x$ với mọi x.

*Đáp số :* $f_1(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x$ ; $f_2(x) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}x$.

Kiểm tra :

$$f_1(f_1(x)) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}f_1(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\frac{1+\sqrt{5}}{2}x$$

$$= \frac{3+\sqrt{5}}{2}x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + x;$$

$$f_2(f_2(x)) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}f_2(x) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\frac{1-\sqrt{5}}{2}x$$

$$= \frac{3-\sqrt{5}}{2}x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + x = f_2(x) + x.$$

**Nhận xét : 1.** Các bạn còn mơ hồ về các khái niệm toán học (nghiệm gần đúng, nghiệm chính xác của một phương trình đại số).

**2.** Chưa kết hợp tốt tư duy giải toán (là chủ yếu trong các bài toán khó) với trợ giúp của máy tính (tính nhanh để loại bỏ nhiều trường hợp, tính toán với số lớn, ...).

**Danh sách mười bạn đoạt giải :** *Nguyễn Vũ Thanh Long*, 9/1, THCS Chu Văn An, TP. Huế, **Thừa Thiên - Huế** ; *Nguyễn Duy Hưng*, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy, **Hà Nội** ; *Đào Thu Quyên*, 9A, THCS thị trấn Kì Sơn, **Hòa Bình** ; *Bùi Đỗ Phương Tùng*, 29-31, Võ Công Tồn, thị trấn Bến Lức, **Long An** ; *Nguyễn Thảo Nguyên* và *Lê Hà An*, 8B, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An** ; *Trần Văn Ngọc Tân*, 10/1, THPT Hoàng Diệu, Điện Bàn, **Quảng Nam** ; *Trần Văn Tuấn*, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc** ; *Trần Ngọc Minh*, 9C$_1$, THCS thị trấn Nghèn, Can Lộc, **Hà Tĩnh** ; *Nguyễn Kế Viễn*, 10A$_{12}$, THPT Chí Linh, **Hải Dương**.

TẠ DUY PHƯƠNG

# LẠI BÀN VỀ CÁC BỘ SỐ NGUYÊN DƯƠNG CÓ TỔNG BẰNG TÍCH

NGUYỄN DANH NINH (*Hà Đông, Hà Tây*)

Bài toán tìm các bộ số nguyên dương có tổng các số đó bằng tích của chúng đã được đề cập đến trong TTT2 số 19. Ở đây tôi muốn trình bày thêm một hướng khai thác khác của bài toán này.

**BÀI TOÁN 1 :** Tìm n số nguyên dương có tổng bằng tích, trong đó có 2 số lớn hơn 1.

**LỜI GIẢI :** Phân tích số $n - 1 = a \times b$. Khi đó ta khẳng định 2 số lớn hơn 1 (các số còn lại đều bằng 1) cần tìm chính là $a + 1$ và $b + 1$. Điều này được suy ra từ các đẳng thức (1) và (2) sau đây :

Tích của n số $1, 1, ..., 1, a + 1, b + 1$ là :

$$\begin{aligned}(a + 1)(b + 1) &= a \times b + a + b + 1\\ &= n - 1 + a + b + 1\\ &= n + a + b \qquad (1);\end{aligned}$$

Tổng của n số $1, 1, ..., 1, a + 1, b + 1$ là :

$$\begin{aligned}1 + 1 + ... + 1 + (a + 1) + (b + 1) &=\\ &= n + a + b \qquad (2).\end{aligned}$$

**ỨNG DỤNG :**

**Bài toán 2 :** Tìm 7 số nguyên dương có tổng bằng tích.

**Lời giải :** Ta có $7 - 1 = 6 = 1 \times 6 = 2 \times 3$.

Bằng cách này ta tìm được 2 bộ số là : (1, 1, 1, 1, 1, 2, 7) và (1, 1, 1, 1, 1, 3, 4).

**Bài toán 3 :** Tìm 13 số nguyên dương có tổng bằng tích.

**Lời giải :**

Ta có $13 - 1 = 12 = 1 \times 12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$.

Bằng cách này ta tìm được 3 bộ số là :

$(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{11 \text{ số } 1}, 2, 13)$ ; $(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{11 \text{ số } 1}, 3, 7)$ ;

$(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{11 \text{ số } 1}, 4, 5)$.

**Bài toán 4 :** Tìm 14 số nguyên dương có tích lớn hơn tổng là 3.

**Lời giải :** Vì tích lớn hơn tổng là 3 nên nếu thêm vào bộ số đó 3 số 1 nữa thì ta được 17 số có tổng bằng tích, tìm 17 số này rồi bỏ đi 3 số 1 ta được 14 số cần tìm :

$(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{12 \text{ số } 1}, 2, 17)$ ; $(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{12 \text{ số } 1}, 3, 9)$ ;

$(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{12 \text{ số } 1}, 5, 5)$.

**Bài toán 5 :** Tìm 29 số nguyên dương có tổng lớn hơn tích là 4.

**Lời giải :** Ngược lại với bài toán 3, nếu bớt đi 4 số 1 ở bộ số này thì ta được 25 số có tổng bằng tích. Từ đó ta tính được bộ 29 số có tổng lớn hơn tích là 4 : $(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{27 \text{ số } 1}, 2, 25)$ ;

$(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{27 \text{ số } 1}, 3, 13)$ ; $(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{27 \text{ số } 1}, 4, 9)$ ; $(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{27 \text{ số } 1}, 5, 7)$.

**Bài toán 6 :** Tìm bộ số nguyên dương có tổng bằng tích và bằng 36.

**Lời giải :** Phân tích 36 thành tích của các thừa số khác 0 ta có :

Với 36 = 2 x 18 ta có 2 + 18 = 20 ; 36 − 20 = 16 nên bộ số có tổng bằng tích bằng 36, chứa hai số 2 và 18 gồm 18 số là : $(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{16 \text{ số } 1}, 2, 18)$.

Với 36 = 3 x 12 ta có 3 + 12 = 15 ; 36 − 15 = 21 nên bộ số có tổng bằng tích bằng 36, chứa hai số 3 và 12 gồm 23 số là : $(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{21 \text{ số } 1}, 3, 12)$.

Tương tự, ta tìm được các bộ số khác có tổng bằng tích bằng 36, gồm : $(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{23 \text{ số } 1}, 4, 9)$ ;

$(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{24 \text{ số } 1}, 6, 6)$ ; $(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{26 \text{ số } 1}, 4, 3, 3)$ ;

$(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{23 \text{ số } 1}, 2, 2, 9)$ ; $(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{26 \text{ số } 1}, 2, 2, 3, 3)$.

*Các bạn thử giải hai bài toán sau :*

**Bài toán 7 :** Tìm bộ n số nguyên dương có tổng bằng tích và bằng k.

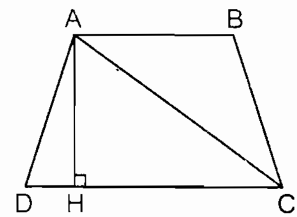
**Bài toán 8 :** Tìm bộ n số nguyên dương có tổng bằng tích, trong đó có m số lớn hơn 1 (2 < m < n).

# Thi trắc nghiệm ...

*(Tiếp theo trang 21)*

**Câu 19 :** ABCD là một hình thang cân, AB//CD, AC = DC, AD = BC. Nếu đường cao AH của hình thang và AB có độ dài bằng nhau thì tỉ số AB : CD là :

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{5}{7}$ (E) $\frac{5}{9}$




**Câu 20 :** Cho tam giác đều ABC có diện tích là $\sqrt{3}$, M là một điểm tuỳ ý ở trong tam giác. Tổng khoảng cách từ M đến 3 cạnh của tam giác là :

(A) 1 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

*Các bạn có thể nào hoàn tất phần làm bài trắc nghiệm trên trong 60 phút không ? Nếu đã thử làm, các bạn hãy đối chiếu với đáp án sau đây xem mình được bao nhiêu điểm +4 và bao nhiêu điểm −1 nhé !*

**Đáp án :** *Câu 1* : (A) ; *Câu 2* : (A) ; *Câu 3* : (E) ; *Câu 4* : (D) ; *Câu 5* : (C) ; *Câu 6* : (A) ; *Câu 7* : (C) ; *Câu 8* : (C) ; *Câu 9* : (C) ; *Câu 10* : (C) ; *Câu 11* : (C) ; *Câu 12* : (C) ; *Câu 13* : (B) ; *Câu 14* : (C) ; *Câu 15* : (B) ; *Câu 16* : (E) ; *Câu 17* : (E) ; *Câu 18* : (A) ; *Câu 19* : (B) ; *Câu 20* : (B).

HỌC RA SAO?

# ĐẰNG SAU MỘT BÀI TOÁN

NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG
*(THCS Đa Tốn, Gia Lâm, Hà Nội)*

● Đề thi tuyển sinh lớp 10 (vòng 2), khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, năm học 2006-2007 có bài toán : "Cho $X$ là một tập hợp gồm 700 số nguyên dương đôi một khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2006. Chứng minh rằng trong tập hợp $X$ luôn tìm được hai phần tử $x$, $y$ sao cho $x - y$ thuộc tập hợp $E = \{3 ; 6 ; 9\}$".

Nghiên cứu kĩ bài toán này, tôi thấy có hai lời giải khác ngoài lời giải đã đăng trên TTT2 số 44, mà đằng sau nó là nhiều điều thú vị. Xin trình bày cùng các bạn.

**Lời giải 1.**

Chia dãy các số nguyên dương từ 1 đến 2006 thành 201 đoạn : [1 ; 10], [11 ; 20], [21 ; 30], ... , [1991 ; 2000], [2001 ; 2006].

Vì $X$ có 700 số nguyên dương khác nhau nên theo nguyên lí Đi-rích-lê, tồn tại ít nhất 4 số trong 700 số trên thuộc cùng một đoạn. Mặt khác, với 4 số bất kì, luôn tồn tại ít nhất 2 số khi chia cho 3 có cùng số dư, hiệu của hai số đó chia hết cho 3, suy ra hiệu này thuộc tập hợp $E = \{3 ; 6 ; 9\}$.

**Nhận xét.** Với lời giải này, ta có thể làm chặt hơn bài toán bằng cách thay thông số "700" bởi "604" (lời giải trên TTT2 số 44 chỉ có thể làm chặt thông số này tới "672").

**Lời giải 2.**

Chia $X$ thành 3 tập hợp như sau :

$A = \{x \mid x = 3k + 1, k \in \mathbb{N}\}$ ;

$B = \{x \mid x = 3k + 2, k \in \mathbb{N}\}$ ;

$C = \{x \mid x = 3k + 3, k \in \mathbb{N}\}$.

Có 700 số được chia thành 3 tập hợp, theo nguyên lí Đi-rích-lê thì tồn tại một tập hợp có ít nhất 234 phần tử. Trong tập hợp này luôn tồn tại hai số cách nhau 3 hoặc 6 đơn vị. Thật vậy, nếu các số trong tập hợp này chỉ cách nhau ít nhất là 9 đơn vị thì số lớn nhất trong tập hợp không nhỏ hơn $9 \cdot 233 = 2097 > 2006$, mâu thuẫn với giả thiết. Suy ra trong $X$ luôn tồn tại ít nhất hai số cách nhau 3 hoặc 6 đơn vị.

Vậy trong $X$ luôn tìm được hai phần tử $x$, $y$ để $x - y \in \{3 ; 6\} \in E$.

**Nhận xét.** Với lời giải này, ta có thể làm chặt hơn bài toán ở cả hai thông số : "700" và "$E = \{3 ; 6 ; 9\}$", lần lượt thay bởi "670" và "$E = \{3 ; 6\}$".

● Sử dụng kĩ thuật của hai lời giải trên, chúng ta có thể tạo ra được nhiều bài toán hay và khó, sau đây là một số ví dụ.

**Ví dụ 1.** Cho $X$ là một tập hợp gồm 473 số nguyên dương đôi một khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2006. Chứng minh rằng trong tập hợp $X$ luôn tìm được hai phần tử $x$, $y$ sao cho $x - y$ thuộc tập hợp $E = \{4 ; 8 ; 12 ; 16\}$.

**Ví dụ 2.** Cho $X$ là một tập hợp gồm 805 số nguyên dương đôi một khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2006.

Chứng minh rằng trong tập hợp $X$ luôn tìm được hai phần tử $x$, $y$ sao cho $x - y$ thuộc tập hợp $E = \{4 ; 8\}$.

Các bạn tự giải hai ví dụ trên.

**Ví dụ 3.** Cho tập hợp :

$$X = \left\{\sqrt{1} ; \sqrt{2} ; \sqrt{3} ; \ldots ; \sqrt{2006}\right\}.$$

Chứng minh rằng trong 46 số khác nhau tùy ý được lấy ra từ tập hợp $X$ luôn tồn tại ít nhất hai số $x$, $y$ sao cho $x - y < 1$.

**Lời giải.** Chia dãy các số của tập hợp $X$ từ $\sqrt{1}$ đến $\sqrt{2006}$ thành 44 đoạn có dạng

$\left[\sqrt{k^2}\,;\sqrt{(k+1)^2-1}\right]$:

$\left[\sqrt{1}\,;\sqrt{3}\right]$, $\left[\sqrt{4}\,;\sqrt{8}\right]$, ...,

..., $\left[\sqrt{1936}\,;\sqrt{2006}\right]$.

Theo nguyên lí Đi-rích-lê, trong $X$ tồn tại ít nhất hai số $x$, $y$ thuộc cùng một đoạn bất kì $\left[\sqrt{k^2}\,;\sqrt{(k+1)^2-1}\right]$.

Ta có $x-y \le \sqrt{(k+1)^2-1}-\sqrt{k^2} =$

$= \sqrt{k(k+2)}-\sqrt{k\cdot k} = \sqrt{k}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$

$= \dfrac{\sqrt{k}(k+2-k)}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}} = \dfrac{2\cdot\sqrt{k}}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}} < 1$

(với mọi $k \le 44$).

Suy ra điều phải chứng minh.

**Ví dụ 4** Cho tập hợp :

$$X = \left\{\sqrt{1}\,;\sqrt{2}\,;\sqrt{3}\,;\ldots;\sqrt{2006}\right\}.$$

Chứng minh rằng trong 90 số khác nhau tùy ý được lấy ra từ tập hợp $X$ luôn có hai số x, y sao cho $x-y < \dfrac{1}{2}$.

**Lời giải.** Chia dãy các số của tập hợp $X$ từ $\sqrt{1}$ đến $\sqrt{2006}$ thành 44 đoạn có dạng $\left[\sqrt{k^2}\,;\sqrt{(k+1)^2-1}\right]$ (như trên).

Theo nguyên lí Đi-rích-lê, trong $X$ tồn tại ít nhất ba số $x$, $y$, $z$ thuộc cùng một đoạn bất kì $\left[\sqrt{k^2}\,;\sqrt{(k+1)^2-1}\right]$.

Khi đó tồn tại hai số trong ba số $x$, $y$, $z$ thuộc một trong hai đoạn $\left[\sqrt{k^2}\,;\sqrt{k^2+k}\right]$ hoặc $\left[\sqrt{k^2+k}\,;\sqrt{(k+1)^2-1}\right]$.

Giả sử đó là $x$, $y$ và $x > y$, ta có :

Nếu $x$, $y$ thuộc $\left[\sqrt{k^2}\,;\sqrt{k^2+k}\right]$ thì $x-y \le$

$\le \sqrt{k^2+k}-\sqrt{k^2} = \dfrac{k}{\sqrt{k^2+k}+\sqrt{k^2}} < \dfrac{1}{2}$.

Nếu $x$, $y$ thuộc $\left[\sqrt{n^2+n}\,;\sqrt{(n+1)^2-1}\right]$, ta cũng có kết quả tương tự.

Suy ra điều phải chứng minh.

**Ví dụ 5** Chứng minh rằng trong 2007 số đôi một khác nhau, được lấy ra từ tập hợp $X = \{1\,;2\,;3\,;4\,;\ldots;2006^2\}$ có ít nhất hai số $x$, $y$ thỏa mãn $\sqrt{x}-\sqrt{y} < 1$.

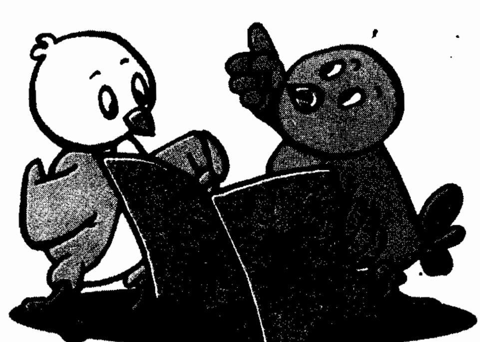
**Lời giải.** Chia dãy các số của tập hợp $X$ từ 1 đến $2006^2$ (bỏ ra số $2006^2$) thành 2005 đoạn có dạng $[k^2\,;(k+1)^2-1]$ là : $[1\,;3]$, $[4\,;8]$, ..., $[2005^2\,;2006^2-1]$. Như vậy trong 2007 số đã cho, có ít nhất 2006 số thuộc các đoạn trên. Theo nguyên lí Đi-rích-lê, tồn tại ít nhất hai số thuộc cùng một đoạn bất kì $[k^2\,;(k+1)^2-1]$. Ta có :

$$\sqrt{x}-\sqrt{y} < \sqrt{(k+1)^2-1}-\sqrt{k^2} = 1.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

**Ví dụ 6.** Chứng minh rằng trong 2007 số khác nhau tùy ý được lấy ra từ tập hợp $A = \{1\,;2\,;3\,;4\,;\ldots;2006^{2007}\}$ có ít nhất hai số $x$, $y$ thỏa mãn $\sqrt[2007]{x}-\sqrt[2007]{y} < 1$ (đề thi tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên Amsterdam và Chu Văn An, Hà Nội, năm học 2006-2007).

Đề nghị các bạn viết lời giải đầy đủ cho các ví dụ 6 xem như bài tập và sáng tạo ra nhiều bài toán tương tự. Hi vọng rằng chúng ta sẽ có được niềm vui đằng sau những khám phá vẻ đẹp của mỗi bài toán.



GIẢI TOÁN THẾ NÀO?

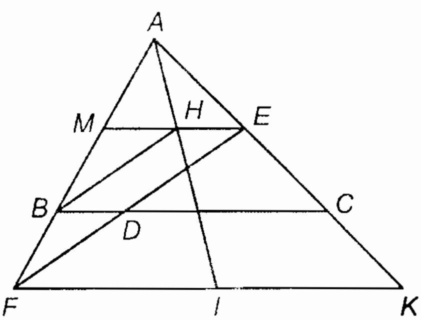
# CHỨNG MINH HAI ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU BẰNG CÁCH XÉT HAI TỈ SỐ BẰNG NHAU

NGND. VŨ HỮU BÌNH *(Hà Nội)*

Trong nhiều trường hợp, để chứng minh hai đoạn thẳng $AB$ và $CD$ bằng nhau, ta có thể chứng minh $\frac{AB}{EF}=\frac{CD}{EF}$. Cách chứng minh trên khá hiệu quả trong những bài toán có vận dụng định lí Ta-lét và tam giác đồng dạng.

**Bài toán 1.** Cho tam giác $ABC$. Một đường thẳng cắt các cạnh $AC$, $BC$ và cắt tia đối của tia $BA$ theo thứ tự ở $E$, $D$, $F$. Vẽ hình bình hành $BDEH$. Đường thẳng qua $F$ và song song với $BC$ cắt $AH$ ở $I$. Chứng minh rằng $DC = FI$.

**Lời giải.** Gọi $K$ là giao điểm của $FI$ và $AC$, ta sẽ chứng minh $\frac{DC}{FK}=\frac{FI}{FK}$.




Ta có $DC \parallel FK$ nên $\frac{DC}{FK}=\frac{ED}{EF}$. Mặt khác, $ED = HB$ nên $\frac{DC}{FK}=\frac{ED}{EF}=\frac{HB}{EF}$. (1)

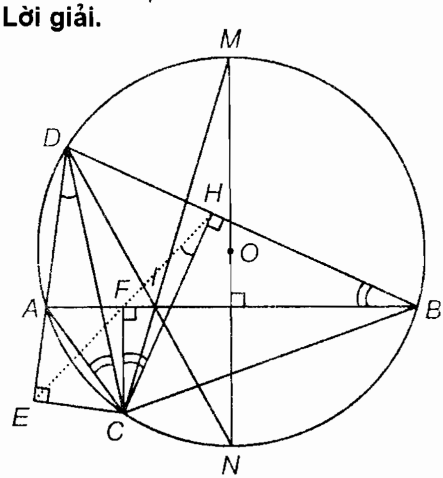
Gọi $M$ là giao điểm của $EH$ và $AB$.
Do $ME \parallel FK$ ; $BH \parallel EF$ nên

$$\frac{FI}{FK}=\frac{MH}{ME}=\frac{HB}{EF}. \quad (2)$$

Từ (1) ; (2) suy ra $\frac{DC}{FK}=\frac{FI}{FK} \Rightarrow DC = FI$.

**Bài toán 2.** Cho đường tròn $(O)$, đường kính $MN$ vuông góc với dây cung $AB$. Gọi $I$ là một điểm thuộc dây $AB$ ($IA < IB$). Các tia $MI$, $NI$ cắt $(O)$ theo thứ tự ở $C$, $D$. Gọi hình chiếu của $C$ trên các đường thẳng $AD$, $AB$, $BD$ theo thứ tự là $E$, $F$, $H$. Chứng minh rằng $F$ là trung điểm của $EH$.

**Lời giải.**




Ba điểm $E$, $F$, $H$ thẳng hàng (đường thẳng Xim-xơn, bạn đọc tự chứng minh).

Ta sẽ chứng minh $\frac{HF}{FC}=\frac{EF}{FC}$. Thật vậy :

Theo tính chất của tứ giác nội tiếp và góc nội tiếp ta có $\widehat{FCH}=\widehat{FBH}=\widehat{ACD}$ và $\widehat{FHC}=\widehat{ADC}$ nên $\Delta HFC \backsim \Delta DAC$ (g.g), suy ra $\frac{HF}{FC}=\frac{DA}{AC}$. (1)

Chứng minh tương tự ta có $\frac{EF}{FC}=\frac{DB}{BC}$. (2)

Do $DI$ là đường phân giác của $\Delta ADB$ nên $\frac{DA}{DB}=\frac{AI}{IB}$; $CI$ là đường phân giác của $\Delta ACB$ nên $\frac{CA}{CB}=\frac{AI}{IB}$.

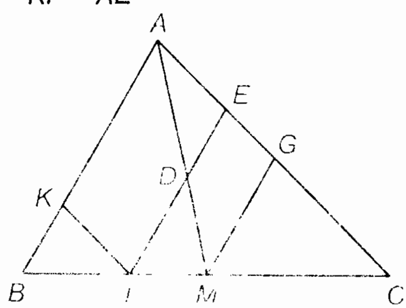
Suy ra $\frac{DA}{DB}=\frac{CA}{CB}\Rightarrow\frac{DA}{AC}=\frac{DB}{BC}$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{HF}{FC}=\frac{EF}{FC}$

$\Rightarrow HF=EF$. Vậy $F$ là trung điểm của $EH$.

**Bài toán 3.** Cho tam giác $ABC$, đường trung tuyến $AM$. Gọi $I$ là một điểm thuộc cạnh $BC$. Đường thẳng đi qua $I$ và song song với $AB$ cắt $AM$, $AC$ theo thứ tự ở $D$, $E$. Đường thẳng đi qua $I$ và song song với $AC$ cắt $AB$ ở $K$. Chứng minh rằng $BK=DE$.

**Lời giải.** Chú ý rằng $KI=AE$, ta sẽ chứng minh $\frac{BK}{KI}=\frac{DE}{AE}$.




Do $KI\parallel AC$ nên $\frac{BK}{KI}=\frac{BA}{AC}$. (1)

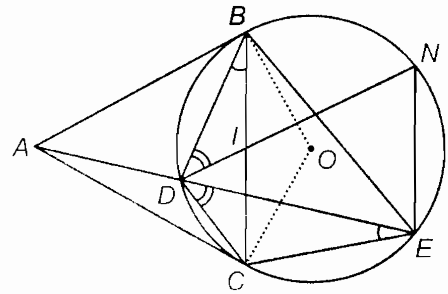
Kẻ $MG\parallel DE$ ($G$ thuộc $AC$), ta có $AG=GC$ và $\frac{DE}{AE}=\frac{MG}{AG}=\frac{MG}{GC}=\frac{BA}{AC}$. (2)

Từ (1) ; (2) suy ra $\frac{BK}{KI}=\frac{DE}{AE}\Rightarrow BK=DE$.

**Bài toán 4.** Từ điểm $A$ nằm ngoài đường tròn $(O)$, kẻ các tiếp tuyến $AB$, $AC$ và cát tuyến $ADE$. Kẻ dây cung $EN\parallel BC$, gọi $I$ là giao điểm của $DN$ và $BC$.

Chứng minh rằng $BI=CI$.

**Lời giải.** Ta sẽ chứng minh $\frac{BI}{ID}=\frac{CI}{ID}$.




Tỉ số $\frac{BI}{ID}$ làm ta chú ý đến $\Delta BID$.

Ta có $\widehat{DBC}=\widehat{DEC}$ ; $EN\parallel BC$ suy ra $\overset{\frown}{BN}=\overset{\frown}{CE}\Rightarrow\widehat{BDN}=\widehat{CDE}$. Suy ra :

$\Delta BID\backsim\Delta ECD$ (g.g) $\Rightarrow\frac{BI}{ID}=\frac{EC}{CD}$. (1)

Chứng minh tương tự ta có $\frac{CI}{ID}=\frac{EB}{BD}$. (2)

Ta cũng có $\Delta AEC\backsim\Delta ACD$ (g.g), suy ra $\frac{EC}{CD}=\frac{AE}{AC}$ ; tương tự ta có $\frac{EB}{BD}=\frac{AE}{AB}$.

Mặt khác $AC=AB$ suy ra $\frac{EC}{CD}=\frac{EB}{BD}$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{BI}{ID}=\frac{CI}{ID}$.

Vậy $BI=CI$.

**Nhận xét.** Để làm xuất hiện các tỉ số bằng nhau, ta thường sử dụng định lí Ta-lét (*bài toán 1, bài toán 2*), sử dụng các tam giác đồng dạng (*bài toán 3, bài toán 4*). Ở *bài toán 3*, ta còn kẻ thêm đường thẳng song song để vận dụng định lí Ta-lét.

*Các bạn hãy dùng phương pháp trên để giải các bài tập sau :*

**Bài 1 (lớp 8).** Cho hình thang $ABCD$ ($AB\parallel CD$). Một đường thẳng song song với hai đáy của hình thang cắt hai cạnh bên $AD$, $BC$ theo thứ tự ở $M$, $N$ và cắt hai đường chéo $BD$, $AC$ theo thứ tự ở $H$, $K$.

Chứng minh rằng $MH=KN$.

*Gợi ý.* Hãy chứng minh $\frac{MH}{AB}=\frac{KN}{AB}$.

*(Xem tiếp trang 9)*


# BẤT NGỜ KHI XÉT BÀI TOÁN ĐẢO

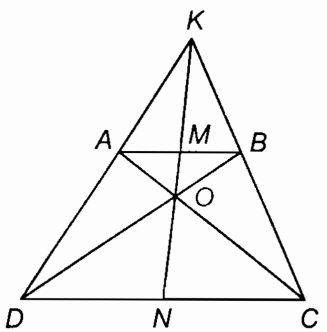
PHẠM THỊ TÁM *(THCS Bạch Liêu, Yên Thành, Nghệ An)*

Bài viết này xuất phát từ một thực tế, đó là vào một giờ dạy bồi dưỡng toán cho học sinh, tôi đưa ra bài toán đảo của một bài toán trong sách giáo khoa. Kết quả thật bất ngờ và thú vị, học sinh của tôi đã đưa ra 7 cách giải cho bài toán đảo. Tôi thấy rất hạnh phúc và yêu môn toán hơn, rất muốn được bạn đọc cùng chia sẻ.

**Bài toán thuận** *(Bài 59, trang 92, SGK Toán 8 tập 2)*. Cho hình thang $ABCD$ ($AB$ // $CD$) có $AC$ và $BD$ cắt nhau ở $O$. $AD$ và $BC$ cắt nhau tại $K$. Chứng minh $OK$ đi qua trung điểm của các cạnh $AB$ và $CD$.

**Lời giải.** Gọi giao điểm của $AB$ và $CD$ với $OK$ lần lượt là $M$ và $N$, ta có :

$$\frac{AM}{DN}=\frac{KA}{KD}=\frac{AB}{CD}\ ;\ \frac{AM}{NC}=\frac{OA}{OC}=\frac{AB}{CD}.$$




Suy ra $\dfrac{AM}{DN}=\dfrac{AM}{NC}\Rightarrow ND=NC\Rightarrow N$ là trung điểm của $CD$.

Tương tự ta có $M$ là trung điểm của $AB$.

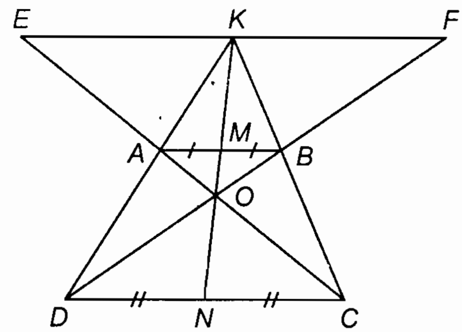
- Bài toán được phát biểu lại như sau : *"Hình thang ABCD (AB // CD). Gọi K là giao điểm của hai cạnh bên AD và BC. O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng 4 điểm K, M, O, N thẳng hàng."*

Từ đó ta có bài toán đảo :

**Bài toán đảo.** Cho tứ giác $ABCD$ có $O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$. $K$ là giao điểm của $AD$ và $BC$. $M$ và $N$ lần lượt là trung điểm của $AB$ và $CD$. Bốn điểm $K$, $M$, $O$, $N$ thẳng hàng. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình thang.

**Lời giải.**

***Cách 1.*** Qua $K$ kẻ đường thẳng song song với $CD$, cắt tia $CA$ ở $E$, cắt tia $DB$ ở $F$.




Ta có $\dfrac{KE}{NC}=\dfrac{KO}{ON}=\dfrac{KF}{ND}$ ; $ND=NC$ nên $KE=KF$. Suy ra $\dfrac{KA}{AD}=\dfrac{KE}{CD}=\dfrac{KF}{CD}=\dfrac{KB}{BC}\Rightarrow$ $AB$ // $CD$ (định lí Ta-lét đảo).

***Cách 2.*** Trong $\Delta KCD$, $KN$, $CA$, $DB$ đồng quy tại $O$ nên áp dụng định lí Xê-va ta có *(sử dụng hình vẽ của bài toán thuận)* :

$$\frac{KA}{AD}\cdot\frac{ND}{NC}\cdot\frac{BC}{BK}=1\text{ ; vì } ND=NC \text{ suy ra}$$

$$\frac{KA}{AD}\cdot\frac{BC}{BK}=1\Rightarrow\frac{KA}{AD}=\frac{BK}{BC}\Rightarrow AB\ //\ CD.$$

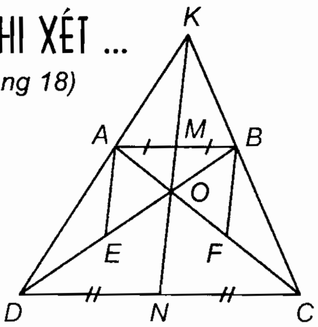
***Cách 3.*** Từ $A$ và $B$ kẻ các đường thẳng song song với $KO$ cắt $OD$ ; $OC$ lần lượt tại $E$ ; $F$. $MO$ là đường trung bình của các tam giác $ABE$ và $ABF$ nên $AE=BF$ ($=2OM$).

Xét tam giác $KDO$, ta có $\dfrac{DA}{DK}=\dfrac{AE}{KO}$ ;

*(Xem tiếp trang 25)*

# BẤT NGỜ KHI XÉT ...

(Tiếp theo trang 18)

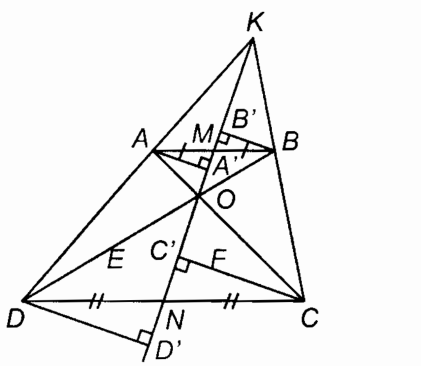



Xét tam giác $KCO$, ta có $\frac{CB}{CK} = \frac{BF}{KO}$.

Do $AE = BF$ nên $\frac{DA}{DK} = \frac{CB}{KC}$,

suy ra AB // CD (định lí Ta-lét đảo).

***Cách 4.*** Gọi $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A$, $B$, $C$, $D$ trên $KN$.




Ta chứng minh được $AA' = BB'$ ; $CC' = DD'$

suy ra $\frac{AA'}{CC'} = \frac{BB'}{DD'}$, mặt khác

$\frac{OA}{OC} = \frac{AA'}{CC'}$ ; $\frac{OB}{OD} = \frac{BB'}{DD'}$ suy ra

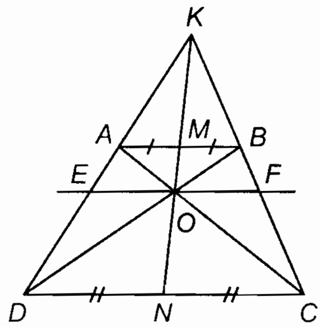
$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow$ AB // CD (định lí Ta-lét đảo).

***Cách 5.*** Đường thẳng qua $O$ song song với $CD$ cắt $AD$, $BC$ lần lượt tại $E$, $F$. Ta có

$\frac{OE}{DN} = \frac{KO}{KN} = \frac{OF}{NC} \Rightarrow OE = OF$ (vì $DN = NC$).

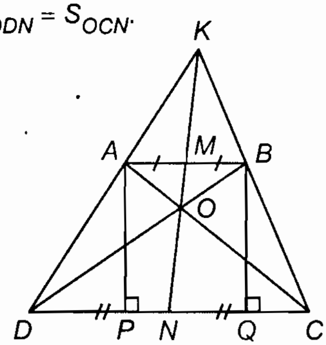
Vì $EF$ // $CD$ suy ra $\frac{OA}{AC} = \frac{OE}{CD} = \frac{OF}{CD} = \frac{OB}{BD}$

$\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow AB$ // $CD$.




***Cách 6.*** Gọi $P$, $Q$, lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A$, $B$, trên $DC$. Ta có :

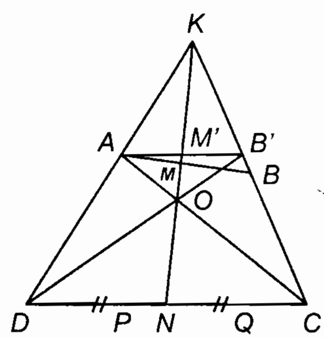
$S_{KDN} = S_{KCN}$ ; $S_{KAM} = S_{KBM}$ ; $S_{OAM} = S_{OBM}$ ; $S_{ODN} = S_{OCN}$.




Suy ra $S_{OAD} = S_{OBC} \Rightarrow S_{ACD} = S_{BCD}$

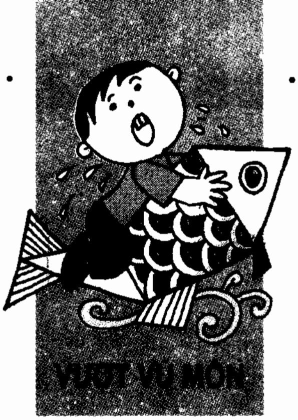
$\Rightarrow AP = BQ \Rightarrow AB$ // $CD$.

***Cách 7.*** Giả sử $AB$ không song song với $CD$. Từ $A$ kẻ $AB'$ // $CD$ ($B' \in KC$, $B' \neq B$).




$AB'$ cắt $KN$ tại $M'$, ta có $M'$ là trung điểm của $AB'$ (bài toán thuận).

Suy ra $\frac{AM}{BM} = \frac{AM'}{M'B'} = 1 \Rightarrow MM'$ // $BB'$, trái với giả thiết. Vậy $AB$ // $CD$.



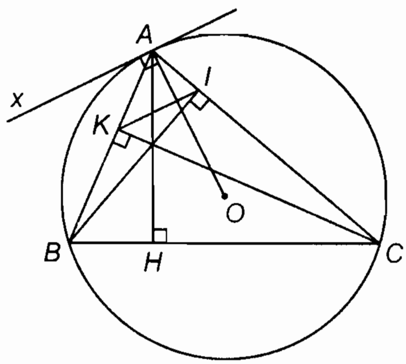

# VẼ THÊM TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

ĐẶNG QUỐC CHẤN *(THCS Nam Sơn, Nam Trực, Nam Định)*

Đối với các bài toán liên quan đến đường tròn, trong nhiều trường hợp, việc vẽ thêm tiếp tuyến thích hợp của đường tròn sẽ giúp chúng ta nhìn rõ hơn các mối liên hệ giữa các yếu tố của bài toán và đi đến lời giải của bài toán đó.

**Bài toán 1.** Cho tam giác nhọn $ABC$ nội tiếp trong đường tròn tâm $O$, bán kính $R$. Các đường cao $AH$, $BI$, $CK$. Gọi $S$ là diện tích tam giác $ABC$ và $2p$ là chu vi của tam giác $HIK$. Chứng minh rằng $S = pR$.

**Lời giải.** Kẻ tiếp tuyến $Ax$ của $(O\,;\,R)$.




Ta có $\widehat{xAB} = \widehat{ACB} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AB}$. (1)

Mặt khác, $\widehat{BKC} + \widehat{BIC} = 90^o$ suy ra $B$, $K$, $I$, $C$ cùng thuộc đường tròn đường kính $BC$

$\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{AKI}$. (2)

Từ (1) ; (2) suy ra $\widehat{xAB} = \widehat{AKI} \Rightarrow Ax \,//\, KI$.

Ta lại có $OA \perp Ax$ suy ra $OA \perp IK$.

Tương tự, ta có $OB \perp KH$ ; $OC \perp HI$.

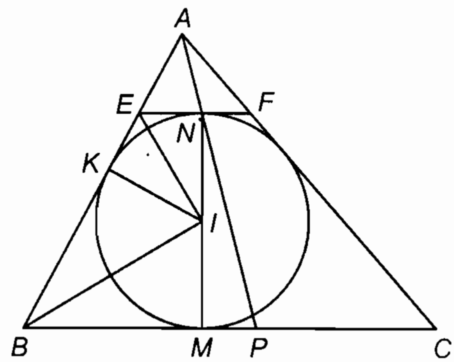
Do đó $S = S_{OKAI} + S_{OKAI} + S_{OKAI}$

$= \frac{1}{2}OA \cdot IK + \frac{1}{2}OB \cdot KH + \frac{1}{2}OC \cdot HI$

$= \frac{1}{2}R(IK + KH + HI) = \frac{1}{2}R \cdot 2p = pR$.

**Bài toán 2.** Cho đường tròn tâm $I$, bán kính $r$ nội tiếp tam giác $ABC$, tiếp xúc với cạnh $BC$ tại $M$. Kẻ đường kính $MN$, đường thẳng $AN$ cắt $BC$ tại $P$. Chứng minh rằng $BM = CP$.

**Lời giải.** Kẻ tiếp tuyến với $(I;\ r)$ tại $N$, cắt $AB$, $AC$ lần lượt tại $E$, $F$.




Gọi tiếp điểm của $(I;\ r)$ với $AB$ là $K$, ta có $IE$ là phân giác của $\widehat{KIN}$ ; $IB$ là phân giác của $\widehat{KIM}$ suy ra $IE \perp IB$.

Xét tam giác vuông BIE có $IK \perp EB$, suy ra $IK^2 = KE{\cdot}KB \Rightarrow IK^2 = NE{\cdot}MB \Rightarrow r^2 = NE{\cdot}MB$. Tương tự, ta có $r^2 = NF{\cdot}MC$.

Suy ra $NE{\cdot}MB = NF{\cdot}MC$

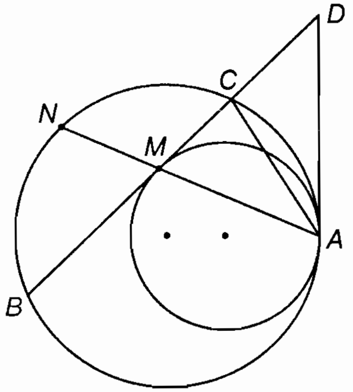
$\Rightarrow \frac{NF}{MB} = \frac{NE}{MC} = \frac{NF+NE}{MB+MC} = \frac{EF}{BC}$. (3)

Mặt khác, $EF \,//\, BC$ (vì cùng vuông góc với $MN$) suy ra $\frac{NF}{CP} = \frac{NE}{BP} = \frac{EF}{BC}$. (4)

Từ (3), (4) suy ra $BM = CP$.

**Bài toán 3.** Cho hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau tại $A$. Dây $BC$ của đường tròn lớn tiếp xúc với đường tròn nhỏ tại $M$. Gọi $N$ là điểm chính giữa của cung $BC$ không chứa điểm $A$. Chứng minh rằng $A$, $M$, $N$ thẳng hàng.

**Lời giải.** Kẻ tiếp tuyến chung của hai đường tròn tại $A$, cắt đường thẳng $BC$ tại $D$.




Ta có $DM = DA$ suy ra tam giác $DAM$ cân

$\Rightarrow \widehat{DAM} = \widehat{DMA} = \widehat{MBA} + \widehat{MAB}$

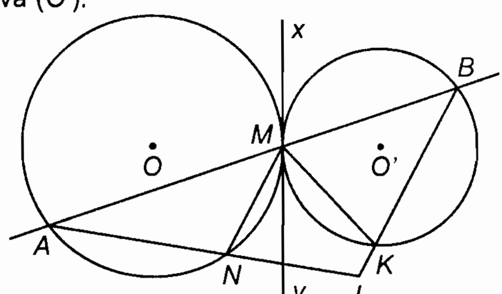
$= \widehat{CAD} + \widehat{MAB}$;

Mặt khác, $\widehat{DAM} = \widehat{CAD} + \widehat{CAM}$.

Suy ra $\widehat{CAM} = \widehat{MAB} \Rightarrow AM$ là phân giác của $\widehat{BAC} \Rightarrow AM$ đi qua trung điểm $N$ của cung $BC$ hay $A$, $M$, $N$ thẳng hàng.

**Bài toán 4.** Cho hai đường tròn $(O)$ và $(O')$ tiếp xúc ngoài với nhau tại $M$. Một đường thẳng đi qua $M$, cắt $(O)$ và $(O')$ lần lượt tại $A$ và $B$. Trên $(O)$ lấy một điểm $N$ cố định. Đường thẳng qua $B$ song song với $MN$ cắt $AN$ tại $I$. Xác định vị trí của điểm $B$ để $MNIB$ là hình thang cân.

**Lời giải.** Kẻ tiếp tuyến chung $xMy$ của hai đường tròn và gọi $K$ là giao điểm của $BI$ và $(O')$.




Ta có $\widehat{NIK} = \widehat{ANM}$ (hai góc đồng vị);

$\widehat{ANM} = \widehat{AMx} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AM}$ (không chứa $N$);

$\widehat{AMx} = \widehat{BMy}$ suy ra $\widehat{NIK} = \widehat{BMy}$.

Mặt khác,

$$\widehat{BMy} + \widehat{BKM} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BKM} + \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BM} = 180^\circ$$

suy ra $\widehat{NIK} + \widehat{BKM} = 180^\circ = \widehat{MKI} + \widehat{BKM}$

$\Rightarrow \widehat{NIK} = \widehat{MKI} \Rightarrow MNIK$ là hình thang cân (vì $MN \parallel IK$).

Vậy $MNIK$ là hình thang cân $\Leftrightarrow B \equiv K \Leftrightarrow$ $BI$ là tiếp tuyến của $(O') \Leftrightarrow B$ là giao điểm của đường thẳng qua $O'$, vuông góc với $MN$.

*Các bạn rèn luyện qua các bài toán sau.*

**Bài 1.** Cho nửa đường tròn đường kính $AB$. $C$ là điểm chính giữa cung $AB$. Trên cung $BC$ lấy một điểm $I$, trên tia $AI$ lấy một điểm $K$ sao cho $AK = BI$. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua $K$, vuông góc với $AI$ luôn đi qua một điểm cố định.

**Bài 2.** Cho tam giác đều $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$. Gọi $(O')$ là đường tròn tiếp xúc trong với $(O)$ và tiếp xúc với hai cạnh $AB$, $AC$ theo thứ tự tại $M$, $N$. Chứng minh rằng $M$, $O$, $N$ thẳng hàng.

**Bài 3.** Cho nửa đường tròn tâm $O$, đường kính $AB$. $OM$ là bán kính vuông góc với $AB$. Đường tròn tâm $I$ tiếp xúc trong với $(O)$ và tiếp xúc với $AB$. Chứng minh rằng $I$ cách đều tiếp tuyến tại $M$ của nửa đường tròn tâm $O$ và điểm $O$.

**Bài 4.** Cho tam giác đều $ABC$ nội tiếp đường tròn tâm $O$. Trên cung nhỏ $BC$, lấy một điểm $E$ và vẽ đường tròn tâm $O'$ tiếp xúc với đường tròn tâm $O$ tại $E$, cắt các dây $EA$, $EB$, $EC$ lần lượt tại $M$, $N$, $P$. Chứng minh tam giác $MNP$ là tam giác đều.

**Bài 5.** Cho hai đường tròn tâm $O$ và tâm $O'$ tiếp xúc ngoài nhau tại $A$. $BC$ là một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn này, trong đó $B \in (O)$ và $C \in (O')$. Vẽ đường kính $BD$ của $(O)$. Chứng minh rằng :

$$BD^2 = DA \cdot DC.$$

**Bài 6.** Cho đường tròn tâm $O$ bán kính $R$ và đường tròn tâm $O'$ bán kính $R'$ tiếp xúc ngoài nhau tại $A$. Tiếp tuyến tại điểm $M$ của đường tròn $(O\,;\,R)$ cắt $(O'\,;\,R')$ tại $N$ và $P$. Chứng minh rằng $M$ cách đều $AN$ và $AP$.


# PHƯƠNG PHÁP CHỌN TRONG BẤT ĐẲNG THỨC

TỐNG THÀNH VŨ *(Thanh Hóa)*

● **Xét *"bài toán chọn"* sau :** Cho hai dãy số thực được sắp thứ tự $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ ; $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$ và các tổng

$$s = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1 ;$$

$$S = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n ; \qquad (*)$$

$$S_j = a_1b_{j_1} + a_2b_{j_2} + \ldots + a_nb_{j_n} \qquad (**)$$

(với $(j_1 ; j_2 ; \ldots ; j_n)$ là một hoán vị bất kì của $(1 ; 2 ; \ldots ; n)$). Chứng minh rằng $S \geq S_j \geq s$.

***Chứng minh.*** Ta sẽ chứng minh $S \geq S_j$.

Thật vậy : xuất phát từ (**), ta thành lập $S_1$ bằng cách giữ nguyên hầu hết các số hạng của $S_j$ (giả sử $j_i = 1$, ta thay đổi $b_{j_1}$ và $b_{j_i}$) :

$$S_1 = a_1b_{j_i} + a_2b_{j_2} + \ldots + a_ib_{j_1} + \ldots + a_nb_{j_n}$$
$$= a_1b_1 + a_2b_{j_2} + \ldots + a_ib_{j_1} + \ldots + a_nb_{j_n}.$$

Ta có :

$$S_1 - S_j = (a_1b_1 + a_ib_{j_1}) - (a_1b_{j_1} + a_ib_1)$$
$$= (a_1 - a_i)(b_1 - b_{j_1}) \geq 0 \text{ suy ra } S_1 \geq S_j ;$$

Tiếp tục thành lập $S_2$ bằng cách giữ nguyên hầu hết các số hạng của $S_1$ (giả sử $j_k = 2$, ta thay đổi $b_{j_2}$ và $b_{j_k}$) :

$$S_2 = a_1b_1 + a_2b_{j_k} + \ldots + a_kb_{j_2} + \ldots + a_nb_{j_n}$$
$$= a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_kb_{j_2} + \ldots + a_nb_{j_n}.$$

Ta có :

$$S_2 - S_1 = (a_2b_2 + a_kb_{j_2}) - (a_2b_{j_2} + a_kb_2)$$
$$= (a_2 - a_k)(b_2 - b_{j_2}) \geq 0 \text{ suy ra } S_2 \geq S_1 ;$$

...

Sau nhiều nhất $n$ bước như trên, ta được kết quả $S \geq \ldots \geq S_2 \geq S_1 \geq S_j$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ hoặc $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$.

Tương tự ta chứng minh được $S_j \geq s$.

Ta cũng có thể áp dụng nguyên lí quy nạp để chứng minh *"bài toán chọn"*.

● **Áp dụng *"bài toán chọn"*.**

**Bài toán 1.** Cho $a, b, c$ là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \qquad (1)$$

**Lời giải.** Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a^5}{b^3c^3} + \frac{b^5}{a^3c^3} + \frac{c^5}{a^3b^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \quad (2)$$

Do $a, b, c$ có vai trò như nhau, không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c > 0$, suy ra

$$a^5 \geq b^5 \geq c^5 \text{ và } \frac{1}{b^3c^3} \geq \frac{1}{a^3c^3} \geq \frac{1}{a^3b^3},$$

Áp dụng *bài toán chọn* ta có

$$\frac{a^5}{b^3c^3} + \frac{b^5}{a^3c^3} + \frac{c^5}{a^3b^3} \geq$$
$$\geq a^5 \cdot \frac{1}{a^3c^3} + b^5 \cdot \frac{1}{a^3b^3} + c^5 \cdot \frac{1}{b^3c^3}$$
$$\Rightarrow \frac{a^5}{b^3c^3} + \frac{b^5}{a^3c^3} + \frac{c^5}{a^3b^3} \geq \frac{a^2}{c^3} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3}. \quad (3)$$

Tiếp tục áp dụng *bài toán chọn* với hai dãy $a^2 \geq b^2 \geq c^2$ và $\frac{1}{c^3} \geq \frac{1}{b^3} \geq \frac{1}{a^3}$, ta có

$$\frac{a^2}{c^3} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3} \geq a^2 \cdot \frac{1}{a^3} + b^2 \cdot \frac{1}{b^3} + c^2 \cdot \frac{1}{c^3}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{c^3}+\frac{b^2}{a^3}+\frac{c^2}{b^3}\ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}. \quad (4)$$

Từ (2), (3), (4) suy ra (1) đúng (đpcm).

**Bài toán 2** *(ĐH Thủy Lợi năm 1997-1998)*. Cho $a$, $b$, $c$, $d$ là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{b^5}+\frac{b^2}{c^5}+\frac{c^2}{d^5}+\frac{d^2}{a^5}\ge \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}.$$

**Lời giải.** Do $a$, $b$, $c$, $d$ có vai trò như nhau, không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c \ge d > 0$, suy ra $a^2 \ge b^2 \ge c^2 \ge d^2$ và $\frac{1}{d^5}\ge\frac{1}{c^5}\ge\frac{1}{b^5}\ge\frac{1}{a^5}$, theo cách chứng minh *bài toán chọn*, đặt

$$s=\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3};$$

$$S_j=a^2\cdot\frac{1}{b^5}+b^2\cdot\frac{1}{c^5}+c^2\cdot\frac{1}{d^5}+d^2\cdot\frac{1}{a^5};$$

$$S_1=a^2\cdot\frac{1}{a^5}+b^2\cdot\frac{1}{c^5}+c^2\cdot\frac{1}{d^5}+d^2\cdot\frac{1}{b^5};$$

$$S_2=a^2\cdot\frac{1}{a^5}+b^2\cdot\frac{1}{b^5}+c^2\cdot\frac{1}{d^5}+d^2\cdot\frac{1}{c^5}.$$

Ta có :

$$S_j-S_1=(a^2-d^2)\left(\frac{1}{b^5}-\frac{1}{a^5}\right)\ge 0\Rightarrow S_j\ge S_1;$$

$$S_1-S_2=(b^2-d^2)\left(\frac{1}{c^5}-\frac{1}{b^5}\right)\ge 0\Rightarrow S_1\ge S_2;$$

$$S_2-s=(c^2-d^2)\left(\frac{1}{d^5}-\frac{1}{c^5}\right)\ge 0\Rightarrow S_2\ge s.$$

Suy ra $S_j \ge S_1 \ge S_2 \ge s$ (đpcm).

**Bài toán 3** *(Vô địch Toán quốc tế - 1983)*. Cho $a$, $b$, $c$ là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0.$$

**Lời giải.** Không mất tính tổng quát, giả sử $0 < a \le b \le c$, suy ra $\frac{1}{a}\ge\frac{1}{b}\ge\frac{1}{c}$ và $a(b+c-a)\ge b(c+a-b)\ge c(a+b-c)$ (*) (xét hiệu $a(b+c-a)-b(c+a-b) = (a-b)(c-a-b)\ge 0$ do $a$, $b$, $c$ là các cạnh của một tam giác, tương tự ta chứng minh được (*)). Áp dụng *bài toán chọn* ta có

$$\frac{1}{a}a(b+c-a)+\frac{1}{b}b(c+a-b)+\frac{1}{c}c(a+b-c)\ge$$

$$\ge\frac{1}{a}b(c+a-b)+\frac{1}{b}c(a+b-c)+\frac{1}{c}a(b+c-a)$$

$$\Rightarrow \frac{b(c-b)}{a}+\frac{c(a-c)}{b}+\frac{a(b-a)}{c}\le 0$$

$$\Rightarrow b^2c(b-c)+c^2a(c-a)+a^2b(a-b)\ge 0$$

(đpcm).

**Bài toán 4** *(Olympiad Chicago 1996)*. Xác định các số thực $1\ge a\ge b\ge c\ge d\ge e\ge 0$ thỏa mãn :

$$\begin{cases}19[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-e)^2+\\ \qquad +(e-a)^2]=2abcde;\\ 19[a^2bcd+b^2cde+c^2dea+d^2eab+\\ \qquad +e^2abc]=96abcde.\end{cases}$$

**Lời giải.** Do $1\ge a\ge b\ge c\ge d\ge e\ge 0$, suy ra $bcde+a\ge cdea+b\ge \ldots\ge abcd+e$.

Áp dụng *bài toán chọn* ta có $a(bcde+a)+b(cdea+b)+\ldots+e(abcd+e)\ge a(abcd+e)+b(bcde+a)+\ldots+e(eabc+d)$

$\Rightarrow 5abcde + a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ge (a^2bcd+b^2cde+\ldots+e^2abc)+(ab+bc+\ldots+ea)$

$\Rightarrow 10abcde+2(a^2+\ldots+e^2)-2(ab+bc+\ldots+ea)\ge 2(a^2bcd+b^2cde+\ldots+e^2abc)$

$\Rightarrow 19\{10abcde+[(a-b)^2+\ldots+(e-a)^2]\}\ge 38(a^2bcd+b^2cde+\ldots+e^2abc)$

$\Rightarrow 192abcde\ge 192abcde.$

Trong bất đẳng thức trên, đẳng thức đã xảy ra nên $a=b=c=d=e=0$.

- **Bài tập tự giải.**

**Bài 1** *(bất đẳng thức Trê-bư-sép)*. Giả sử $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n > 0$ và $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n > 0$. Chứng minh rằng :

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) \geq$$
$$\geq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n).$$

**Bài 2** *(bất đẳng thức Cô-si)*. Cho $a_i \geq 0$ với mọi $i \in \{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

**Bài 3.** Cho các số thực dương $a$, $b$, $c$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^4 + b^4 + c^4} \leq 1.$$

**Bài 4.** Cho $a$, $b$, $c$ là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng : $3abc \geq a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c)$.

**Bài 5.** Cho $a_i > 0$ với mọi $i \in \{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$. Chứng minh rằng : $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq$

$$\leq \frac{1}{n-1}\left(\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_3} + \frac{a_2^2 + a_3^2}{a_4} + \ldots + \frac{a_n^2 + a_1^2}{a_2}\right).$$

**Bài 6** *(Vô địch Toán quốc tế năm 1975)*.

Cho hai dãy số thực dương $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ và $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$. Giả sử $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ là một hoán vị của $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Chứng minh rằng :

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2 \leq$$
$$\leq (x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \ldots + (x_n - z_n)^2.$$

**Bài 7** *(Vô địch Toán quốc tế năm 1978)*. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số nguyên dương đôi một khác nhau. Chứng minh rằng :

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Chắc chắn rằng còn rất nhiều bất đẳng thức khác sẽ được khám phá thông qua bài toán chọn trên. Mong nhận được sự trao đổi của các bạn.

# Hướng dẫn giải ...

*(Tiếp theo trang 10)*

$\Leftrightarrow 1 + 1 + 3\sqrt{3}x^3 \geq 3\sqrt[3]{3\sqrt{3}x^3}$, theo bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương $1$ ; $1$ ; $3\sqrt{3}x^3$ thì đây là bất đẳng thức đúng.

**2.** Ta có

$$\left|x^3 + 7x^2 - 11x - 6\right| + \left|-x^3 + 12x^2 + 5x - 3\right|$$
$$\geq 19x^2 - 6x - 9 \geq 18x^2 - 2x - 13$$

vì $(19x^2 - 6x - 9) - (18x^2 - 2x - 13) =$

$= x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geq 0.$

Suy ra phương trình tương đương với

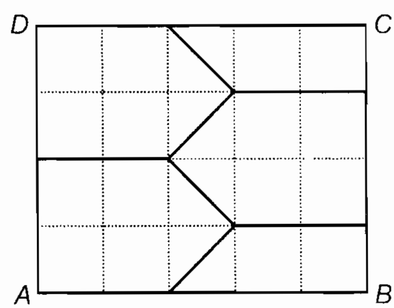
$$\begin{cases} (x^3 + 7x^2 - 11x - 6)(-x^3 + 12x^2 + 5x - 3) \geq 0 \\ 19x^2 - 6x - 9 \geq 0 \\ (x - 2)^2 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 2.$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$.

**Bài 5. 1.** Chia hình chữ nhật *ABCD* thành 5 hình chữ nhật nhỏ kích thước $1 \times 4$, theo nguyên lí Đi-rích-lê, tồn tại 2 điểm thuộc cùng một hình chữ nhật nhỏ có khoảng cách không vượt quá độ dài đường chéo của hình chữ nhật chứa nó là $\sqrt{17}$.

**2.**




Chia hình chữ nhật *ABCD* thành 5 hình như hình vẽ, cũng sử dụng nguyên lí Đi-rích-lê, ta chứng minh được tồn tại 2 điểm có khoảng cách không vượt quá $\sqrt{10}$. Có những cách khác cũng cho kết quả nhỏ hơn $\sqrt{17}$.


# Một số bài toán về phân số tối giản

CAO QUỐC CƯỜNG *(GV. THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc)*

*Khi học bài về phân số tối giản, một số học sinh lớp 6 thường lúng túng khi giải toán. Các dạng toán chủ yếu của phần này là: Cho một phân số phụ thuộc vào một số nguyên, ta phải chứng minh đó là phân số tối giản (không tối giản) hoặc tìm điều kiện để phân số đó là tối giản (không tối giản). Bài viết này sẽ hệ thống một số dạng toán cơ bản về vấn đề này.*

**Bài toán 1.** Chứng minh rằng nếu $n \in \mathbb{N}$ thì phân số $\dfrac{n+1}{2n+3}$ tối giản.

**Lời giải.** Gọi d là ước chung lớn nhất của n + 1 và 2n + 3.

Vì $(n + 1) \vdots d$ nên $(2n + 2) \vdots d$.

Suy ra $(2n + 3 - 2n - 2) \vdots d$ hay $1 \vdots d$.

Vậy d = 1.

Do đó phân số $\dfrac{n+1}{2n+3}$ tối giản (đpcm).

**Nhận xét.** Để chứng minh một phân số là tối giản, ta chứng minh tử số và mẫu số có ước chung lớn nhất là 1.

**Bài toán 2.** Tìm tất cả các số nguyên n để $A = \dfrac{63}{3n+1}$ không là phân số tối giản.

**Lời giải.** Vì $63 = 3^2 \times 7$ nên A không phải là phân số tối giản khi và chỉ khi 3n + 1 chia hết cho 3 hoặc 7.

Vì 3n + 1 không chia hết cho 3 nên 3n + 1 phải chia hết cho 7.

Hay $3n + 1 - 7 = 3(n - 2) \vdots 7$.

Vì (3, 7) = 1 nên $(n - 2) \vdots 7$.

Vậy n = 7k + 2 (với $k \in \mathbb{Z}$).

**Nhận xét.** Để một phân số không phải là tối giản thì tử số và mẫu số phải có ít nhất một ước số chung là một số nguyên tố.

**Bài toán 3.** Tìm tất cả các số nguyên n để $B = \dfrac{6n+7}{3n+2}$ không là phân số tối giản.

**Lời giải.** Gọi d là một ước nguyên tố chung (nếu có) của 6n + 7 và 3n + 2.

Vì $(3n + 2) \vdots d$ nên $(6n + 4) \vdots d$.

Suy ra $(6n + 7 - 6n - 4) \vdots d$ hay $3 \vdots d$.

Vì d là một số nguyên tố nên d = 3.

Khi đó $(3n + 2) \vdots 3$.

Suy ra $2 \vdots 3$, vô lí.

Vậy không có số nguyên n để B là phân số tối giản.

**Bài toán 4.** Tìm tất cả các số nguyên n để phân số $\dfrac{18n+3}{21n+7}$ tối giản.

**Lời giải.**

*Cách 1.* Gọi d là một ước nguyên tố chung (nếu có) của 18n + 3 và 21n + 7.

Vì $(18n + 3) \vdots d$ nên $7(18n + 3) \vdots d$.

Vì $(21n + 7) \vdots d$ nên $6(21n + 7) \vdots d$.

Suy ra $(126n + 42 - 126n - 21) \vdots d$ hay $21 \vdots d$.

Vì d là số nguyên tố nên $d \in \{3 ; 7\}$.

TH1. d = 3. Khi đó $(21n + 7) \vdots 3$, vô lí.

TH2. d = 7. Khi đó $(18n + 3) \vdots 7$.

Mà $(21n + 21) \vdots 7$ nên

$$(21n + 21 - 18n - 3) \vdots 7.$$

Tức là $(3n + 18) \vdots 7$ hay $3(n + 6) \vdots 7$.

Vì (3, 7) = 1 nên $(n + 6) \vdots 7$.

Do đó $n = 7k + 1$ (với $k \in \mathbb{Z}$).

Vậy khi $n \neq 7k + 1$ (với $k \in \mathbb{Z}$) thì phân số $\dfrac{18n+3}{21n+7}$ tối giản.

*Cách 2.* Ta có $\dfrac{18n+3}{21n+7} = \dfrac{3(6n+1)}{7(3n+1)}$.

Gọi d là một ước chung của $3n + 1$ và $6n + 1$.

Vì $(3n + 1) \vdots d$ nên $(6n + 2) \vdots d$.

Suy ra $(6n + 2 - 6n - 1) \vdots d$ hay $1 \vdots d$.

Tức là $(3n + 1, 6n + 1) = 1$.

Mà $(3n + 1, 3) = 1$ nên $\dfrac{18n+3}{21n+7}$ là phân số tối giản khi và chỉ khi $\dfrac{6n+1}{7}$ là phân số tối giản. Tức là $6n + 1$ không chia hết cho 7.

Hay $7n - 6n - 1 = n - 1$ không chia hết cho 7.

Vậy $n \neq 7k + 1$ (với $k \in \mathbb{Z}$).

**Nhận xét.** Bài toán về phân số tối giản có thể được nâng cao ở mức độ khó hơn. Sau đây là một số ví dụ.

**Bài toán 5.** Chứng minh rằng nếu $n \in \mathbb{Z}$ thì phân số $\dfrac{n^2}{n+1}$ tối giản.

**Lời giải.** Gọi d là ước chung lớn nhất của $n^2$ và $n + 1$.

Vì $(n + 1) \vdots d$ nên $n(n + 1) \vdots d$ hay $(n^2 + n) \vdots d$.

Mà $n^2 \vdots d$ nên $(n^2 + n - n^2) \vdots d$ hay $n \vdots d$.

Mà $(n + 1) \vdots d$ nên $(n + 1 - n) \vdots d$ hay $1 \vdots d$.

Vậy $d = 1$.

Do đó phân số $\dfrac{n^2}{n+1}$ tối giản (đpcm).

**Bài toán 6.** Tìm tất cả các số nguyên n để phân số $\dfrac{3n^2+2n+3}{2n+1}$ không tối giản.

**Lời giải.** Gọi d là một ước nguyên tố chung (nếu có) của $3n^2 + 2n + 3$ và $2n + 1$.

Vì $(3n^2 + 2n + 3) \vdots d$ và $(2n + 1) \vdots d$ nên $[2(3n^2 + 2n + 3) - 3n(2n + 1)] \vdots d$ hay $(n + 6) \vdots d$.

Suy ra $(2n + 12) \vdots d$.

Mà $(2n + 1) \vdots d$ nên $(2n + 12 - 2n - 1) \vdots d$ hay $11 \vdots d$.

Vì d là một số nguyên tố nên $d = 11$.

Khi đó $(2n + 1) \vdots 11$.

Suy ra $(2n + 1 - 11) \vdots 11$ hay $2(n - 5) \vdots 11$.

Vì $(2, 11) = 1$ nên $(n - 5) \vdots 11$.

Vậy $n = 11k + 5$ (với $k \in \mathbb{Z}$).

**Bài tập tự luyện.**

**Bài 1.** Chứng minh rằng nếu $n \in \mathbb{N}$ thì các phân số sau tối giản:

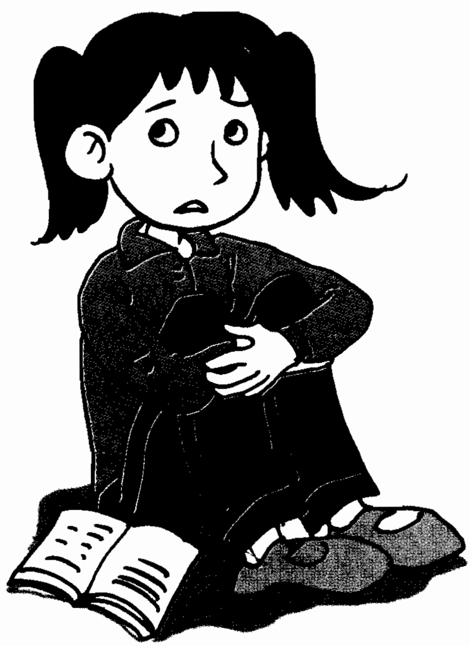
a) $\dfrac{n+2}{2n+5}$; b) $\dfrac{3n+4}{5n+7}$; c) $\dfrac{4n+5}{5n+6}$.

**Bài 2.** Tìm tất cả các số nguyên n để các phân số sau không là phân số tối giản:

a) $\dfrac{6}{2n+1}$; b) $\dfrac{20}{3n+1}$; c) $\dfrac{4n+5}{n+2}$.

**Bài 3.** Tìm tất cả các số nguyên n để các phân số sau là phân số tối giản:

a) $\dfrac{6}{2n+1}$; b) $\dfrac{20}{3n+1}$; c) $\dfrac{4n+5}{n+2}$.




# NHẬN XÉT và ĐÁNH GIÁ

NGUYỄN VĂN THẮNG
*(HS. 9D, THCS thị trấn Cao Thượng, Tân Yên, Bắc Giang)*

*Giải phương trình (PT), hệ PT là các dạng toán được nhiều độc giả quan tâm. Không chỉ vì cái hay của dạng toán này mà đây còn là một phần của các đề thi quan trọng như thi vào lớp 10 THPT, thi vào các lớp chuyên, chọn. Bài viết này giới thiệu một số cách giải PT hoặc hệ PT không mẫu mực bằng cách nhận xét và đánh giá.*

Sau đây là một số ví dụ.

**Bài toán 1.** Giải PT

$$|x-2009|^{2009}+|x-2010|^{2010}=1. \quad (1)$$

**Phân tích.** - Phương trình này không thể giải được bằng các cách thông thường.

- Nhẩm được (1) có hai nghiệm là $x = 2009$ và $x = 2010$.

**Lời giải.** TH1. $x = 2009$ hoặc $x = 2010$: thỏa mãn (1).

TH2. $x > 2010$. Khi đó $x - 2009 > 1$.

Suy ra $|x-2009|^{2009} > 1$.

Mà $|x-2010|^{2010} > 0$ nên (1) vô nghiệm.

TH3. $x < 2009$. Khi đó $x - 2010 < -1$.

Suy ra $|x-2010|^{2010} > 1$.

Mà $|x-2009|^{2009} > 0$ nên (1) vô nghiệm.

TH4. $2009 < x < 2010$.

Khi đó $0 < x - 2009,\ 2010 - x < 1$.

Suy ra $|x-2009|^{2009}+|x-2010|^{2010} =$
$= (x-2009)^{2009}+(2010-x)^{2010} <$
$< x - 2009 + 2010 - x = 1$.

Tức là (1) vô nghiệm.

**Kết luận.** (1) có hai nghiệm là $x = 2009$ và $x = 2010$.

**Bài toán 2.** Giải PT

$$(x+2008)^4+(x+2009)^4=\frac{1}{8}. \quad (2)$$

**Phân tích.** - Nếu khai triển thì (2) sẽ là một PT bậc bốn phức tạp. Hơn nữa việc khai triển cũng không đơn giản.

- Chú ý $\frac{1}{8}=2^{-3}$ và (2) được viết lại dưới dạng $(-x-2008)^4+(x+2009)^4=\frac{1}{8}$, với $-x-2008+x+2009=1$.

Từ đó ta nghĩ đến việc sử dụng bất đẳng thức $\frac{a^4+b^4}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^4$.

**Lời giải.** Với các số thực a, b bất kì ta có

$(a-b)^2\ge 0 \Leftrightarrow a^2+b^2\ge 2ab$

$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2)\ge(a+b)^2. \quad (*)$

Áp dụng (*) ta có $a^4+b^4\ge\frac{1}{2}(a^2+b^2)^2\ge$
$\ge\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(a+b)^2)^2=\frac{1}{8}(a+b)^4$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Suy ra $(x+2008)^4+(x+2009)^4=$
$=(-x-2008)^4+(x+2009)^4\ge$
$\ge\frac{1}{8}(-x-2008+x+2009)^4=\frac{1}{8}$.

Do đó $-x-2008=x+2009\Leftrightarrow x=-\frac{4017}{2}$.

Vậy nghiệm của PT đã cho là $x=-\frac{4017}{2}$.

**Bài toán 3.** Giải PT

$$\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x-1}=2|x|. \quad (3)$$

**Lời giải.** Áp dụng (*) ta có

$$\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x-1} \le$$
$$\le \sqrt{2(x^2+x+1+x^2-x-1)} = \sqrt{4x^2} = 2|x|.$$

Do đó (3) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{x^2-x-1}$

$\Rightarrow x^2 + x + 1 = x^2 - x - 1 \Leftrightarrow x = -1.$

Thử lại thỏa mãn.

Vậy PT có nghiệm duy nhất là $x = -1$.

**Bài toán 4.** Giải hệ PT

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{y-14} = 4 \\ \sqrt{y+2} + \sqrt{x-14} = 4. \end{cases}$$

**Lời giải.** Điều kiện: $x, y \ge 14$.

Ta có $\sqrt{x+2} \ge \sqrt{16} = 4$; $\sqrt{y-14} \ge 0$.

Suy ra $\sqrt{x+2} + \sqrt{y-14} \ge 4$.

Do đó $x = y = 14$.

Thử lại thỏa mãn.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $x = y = 14$.

**Nhận xét.** Hệ PT trên còn có thể giải bằng một số cách khác như sau.

*Cách 1.* Từ hệ đã cho suy ra

$$\begin{cases} y-14 = (4-\sqrt{x+2})^2 \\ y+2 = (4-\sqrt{x-14})^2. \end{cases}$$

Do đó $(4-\sqrt{x-14})^2 - (4-\sqrt{x+2})^2 = 16$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} = \sqrt{x-14} + 4$

$\Leftrightarrow x+2 = (\sqrt{x-14}+4)^2$

$\Leftrightarrow x+2 = x+2+2\sqrt{x-14}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-14} = 0 \Leftrightarrow x = 14 \Rightarrow y = 14.$

*Cách 2.* Từ hệ đã cho suy ra

$\sqrt{x+2}+\sqrt{y-14} = \sqrt{y+2}+\sqrt{x-14}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x+2}+\sqrt{y-14})^2 = (\sqrt{y+2}+\sqrt{x-14})^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)(y-14)} = \sqrt{(y+2)(x-14)}$

$\Leftrightarrow (x+2)(y-14) = (y+2)(x-14)$

$\Leftrightarrow 2y - 14x = 2x - 14y \Leftrightarrow x = y.$

Từ đó ta giải tiếp PT

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x-14} = 4.$$

**Bài toán 5.** Giải hệ PT

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 2 & \text{(a)} \\ \sqrt{x}-\sqrt{y} = (\sqrt{y}-\sqrt{x})(x^{2008}+y^{2008}). & \text{(b)} \end{cases}$$

**Lời giải.** Điều kiện: $x, y \ge 0$.

Từ (a) suy ra $(x ; y) \ne (0 ; 0)$.

Suy ra $x^{2008} + y^{2008} > 0$.

Do đó nếu $x > y$ thì VT(b) > 0 > VP(b): loại; nếu $y > x$ thì VP(b) > 0 > VT(b): loại.

Vậy $x = y$ (thỏa mãn (b)).

Thay vào (a) ta được $x = y = 1$.

Vậy nghiệm của hệ PT đã cho là $x = y = 1$.

**Nhận xét.** Việc *nhận xét và đánh giá* giúp ta giải ngắn gọn một số PT, hệ PT không mẫu mực. Thông thường, phương pháp này được dùng khi ta gặp một trong các dấu hiệu sau ở đề bài:

- Chứa căn thức hoặc lũy thừa bậc cao
- Hệ đối xứng
- Có thể nhẩm nghiệm.

Hi vọng các bạn sẽ giải tốt dạng toán này.


# Tiếp tục về CĂN BẬC HAI

NGUYỄN ĐỨC HẢO *(GV. THCS Lam Sơn, Q. 6, TP. Hồ Chí Minh)*

*TTT2 số 68 đã giới thiệu bài viết* **Biến đổi căn bậc hai phức tạp dạng $\sqrt{M \pm 2\sqrt{N}}$**, *với $M = x + y$, $N = xy$. Bài viết này sẽ tiếp tục giúp các bạn giải một số bài toán khó hơn liên quan đến căn bặc hai. Sau đây là một số ví dụ.*

**Bài toán 1.** Rút gọn biểu thức

$$A = \sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}}.$$

**Lời giải.** Ta rút gọn biểu thức theo các bước sau: $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{4 + 2\sqrt{12} + 3}$

$= \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} = |2 + \sqrt{3}| = 2 + \sqrt{3}$;

$\sqrt{48 - 10(2 + \sqrt{3})} = \sqrt{25 - 2\sqrt{75} + 3}$

$= \sqrt{(5 - \sqrt{3})^2} = |5 - \sqrt{3}| = 5 - \sqrt{3}$;

$\sqrt{5\sqrt{3} + 5(5 - \sqrt{3})} = \sqrt{25} = 5.$

Do đó $A = \sqrt{4 + 5} = \sqrt{9} = 3.$

**Bài tập tương tự.** Rút gọn các biểu thức:

$B = \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$;

$C = 2\sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{13 + \sqrt{48}}}} : (\sqrt{6} - \sqrt{2})$;

$D = \sqrt{6 + 2\sqrt{2}\sqrt{3 - \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12} + \sqrt{18 - \sqrt{128}}}}}.$

**Bài toán 2.** Tìm x, biết

$$x = \sqrt{5 + \sqrt{13 + \sqrt{5 + \sqrt{13 + \ldots}}}}.$$

**Lời giải.** Ta có $x > \sqrt{5}$ và

$$x^2 = 5 + \sqrt{13 + \sqrt{5 + \sqrt{13 + \sqrt{5 + \ldots}}}}.$$

Suy ra $(x^2 - 5)^2 =$

$= 13 + \sqrt{5 + \sqrt{13 + \sqrt{5 + \sqrt{13 + \ldots}}}} = 13 + x.$

Do đó $x^4 - 10x^2 - x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)(x^3 + 3x^2 - x + 4) = 0.$

Vì $x > \sqrt{5}$ nên $x^3 + 3x^2 - x + 4 > 0.$

Suy ra $x = 3.$

**Bài tập tương tự.** Tính

$$y = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}};$$

$$z = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots}}};$$

$$t = 2\sqrt{3 + 2\sqrt{3 + 2\sqrt{3 + \ldots}}}.$$

**Bài toán 3.** Rút gọn các biểu thức:

$A = \sqrt{7 + 3\sqrt{5}} + \sqrt{7 - 3\sqrt{5}}$;

$B = \sqrt{2 - \sqrt{2\sqrt{5} - 2}} - \sqrt{2 + \sqrt{2\sqrt{5} - 2}}.$

**Lời giải.** Ta có

$A^2 = 14 + 2\sqrt{(7 + 3\sqrt{5})(7 - 3\sqrt{5})}$

$= 14 + 2\sqrt{49 - 45} = 14 + 4 = 18.$

Vì $A > 0$ nên $A = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$

Ta có $B^2 = 4 - 2\sqrt{4 - (2\sqrt{5} - 2)}$

$= 4 - 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 4 - 2\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}$

$= 4 - 2|\sqrt{5} - 1| = 4 - 2(\sqrt{5} - 1) = 6 - 2\sqrt{5}$

$= (\sqrt{5} - 1)^2.$

Vì $B < 0$ nên $B = 1 - \sqrt{5}.$

**Bài tập tương tự.** Rút gọn các biểu thức:

$C = \sqrt{3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} + \sqrt{3 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}$;

$D = \sqrt{3 + \sqrt{2\sqrt{7} + 1}} - \sqrt{3 - \sqrt{2\sqrt{7} + 1}}.$

**Bài toán 4.** Rút gọn các biểu thức:

a) $M = \dfrac{\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}}{\sqrt{x-2}-1}$.

b) $N = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

**Lời giải.** a) Điều kiện: $x \geq 2,\ x \neq 3$.

Ta có $\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} =$

$$= \sqrt{(x-2)-2\sqrt{x-2}+1} = \sqrt{(\sqrt{x-2}-1)^2}$$

$$= |\sqrt{x-2}-1| = \begin{cases} \sqrt{x-2}-1 \text{ nếu } x \geq 3 \\ 1-\sqrt{x-2} \text{ nếu } x < 3. \end{cases}$$

Suy ra $M = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x > 3 \\ -1 \text{ nếu } 2 \leq x < 3. \end{cases}$

b) Điều kiện: $x \geq 1$.

Ta có $N^2 = 2x + 2\sqrt{x^2 - 4(x-1)}$

$$= 2x + 2\sqrt{(x-2)^2} = 2x + 2|x-2|$$

$$= \begin{cases} 4(x-1) \text{ nếu } x \geq 2 \\ 4 \text{ nếu } x < 2. \end{cases}$$

Vì $N > 0$ nên $N = \begin{cases} 2\sqrt{x-1} \text{ nếu } x \geq 2 \\ 2 \text{ nếu } 1 \leq x < 2. \end{cases}$

**Bài toán 5.** Giải các phương trình:

a) $$\sqrt{x + \sqrt{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}}} = a, \quad (1)$$

(với $a > 0$ là tham số).

b) $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 5.$ (2)

**Lời giải.** a) Điều kiện: $x \geq -\dfrac{1}{4}$.

Ta có

$$\sqrt{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}} = \sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right) + \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}}$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}.$$

Do đó (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}} = a$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} = a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{1}{4}} = a - \frac{1}{2}. \quad (1')$$

+ Nếu $a < \dfrac{1}{2}$ thì (1') vô nghiệm.

Do đó (1) vô nghiệm.

+ Nếu $a \geq \dfrac{1}{2}$ thì (1') $\Leftrightarrow x + \dfrac{1}{4} = \left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow x = a^2 - a$.

Khi đó nghiệm của (1) là $x = a^2 - a$ (thỏa mãn điều kiện).

b) Điều kiện: $x \geq 1$. Ta có

$$\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1+4\sqrt{x-1}+4}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{x-1}+2)^2} = |\sqrt{x-1}+2| = \sqrt{x-1}+2;$$

$$\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1-6\sqrt{x-1}+9}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = |\sqrt{x-1}-3|.$$

Từ đó ta xét hai trường hợp sau.

+ Nếu $x \geq 10$ thì

(2) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+2+\sqrt{x-1}-3 = 5$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow x = 10$: thỏa mãn.

+ Nếu $1 \leq x < 10$ thì

(2) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+2+3-\sqrt{x-1} = 5$

$\Leftrightarrow 0x = 0$: luôn đúng.

Vậy nghiệm của (2) là $1 \leq x \leq 10$.

# ĐA THỨC BẤT KHẢ QUY LÀ GÌ?

*NGƯT. PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN (*Khoa Toán, Đại học Vinh*)

Để hiểu bài viết này, bạn cần biết khái niệm đa thức, bậc của đa thức và khái niệm phân tích một đa thức thành tích các đa thức.

Trong bài viết này, các đa thức được xét đều là những đa thức với hệ số hữu tỉ.

**Định nghĩa 1.** Đa thức $f(x)$ được gọi là bất khả quy nếu nó không thể phân tích được thành tích của hai đa thức có bậc nhỏ hơn nó.

Trong trường hợp ngược lại, $f(x)$ được gọi là đa thức khả quy.

**Nhận xét.** + Rõ ràng các đa thức bậc nhất là những đa thức bất khả quy và các đa thức bậc hai là bất khả quy khi và chỉ khi nó không có nghiệm hữu tỉ. Đối với các đa thức bậc cao hơn, tình hình trở nên phức tạp hơn. Chẳng hạn, đa thức $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ không có nghiệm hữu tỉ nhưng khả quy. Thật vậy, vì $f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f(x)$ không có nghiệm hữu tỉ. Hơn nữa, $f(x)$ khả quy vì $f(x) = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

+ Ngoài ra, tính khả quy của các đa thức $f(x)$ và $f(x + m)$ là như nhau nếu $m$ là một số hữu tỉ.

+ Giả sử $f(x)$ là một đa thức với hệ số hữu tỉ và $m$ là bội chung nhỏ nhất của mẫu số các hệ số của $f(x)$. Khi đó đa thức $g(x) = mf(x)$ có tất cả các hệ số đều là những số nguyên.

**Định nghĩa 2.** Giả sử $f(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên. Khi đó $f(x)$ được gọi là nguyên bản nếu ước chung lớn nhất của các hệ số của $f(x)$ bằng 1.

**Nhận xét.** Nếu $f(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên và $d$ là ước chung lớn nhất của các hệ số của $f(x)$ thì $f(x) = dg(x)$, trong đó $g(x)$ là một đa thức nguyên bản.

**Bài toán 1.** Chứng minh rằng tích của hai đa thức nguyên bản là một đa thức nguyên bản.

**Lời giải.** Giả sử $u(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ và $v(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ là các đa thức nguyên bản và $f(x) = u(x)v(x)$.

Giả sử $f(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_{n+m}x^{n+m}$.

Để chứng minh $f(x)$ là đa thức nguyên bản ta chỉ cần chứng minh nếu $p$ là một số nguyên tố bất kì thì tồn tại ít nhất một hệ số của $f(x)$ không chia hết cho $p$.

Thật vậy, ta xét các trường hợp sau.

TH1. $a_0$ và $b_0$ đều không chia hết cho $p$.

Khi đó $c_0 = a_0b_0$, là số không chia hết cho $p$ (vì $p$ là số nguyên tố).

TH2. Chỉ một trong hai số $a_0$ hoặc $b_0$ chia hết cho $p$.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a_0 \vdots p$ và $b_0$ không chia hết cho $p$.

Vì $u(x)$ là đa thức nguyên bản nên $p$ không thể là ước số của tất cả các hệ số của $u(x)$.

Suy ra tồn tại số tự nhiên $r$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $r < n$; các số $a_0, a_1, \ldots, a_r$ chia hết cho $p$ và $a_{r+1}$ không chia hết cho $p$.

Xét hệ số $c_{r+1}$. Đây là tổng của các tích $a_ib_k$, với $0 \le i \le r + 1$; $0 \le k \le m$ và $i + k = r + 1$.

Trong tổng này, ngoại trừ $a_{r+1}b_0$ không chia hết cho $p$, các thừa số còn lại đều chia hết cho $p$.

Suy ra $c_{r+1}$ không chia hết cho $p$.

TH3. $a_0 \vdots p$ và $b_0 \vdots p$.

Tương tự như TH2, ta chứng minh được tồn tại các số tự nhiên r, s thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $r < n$; $s < m$; các số $a_0$, $a_1, \ldots, a_r, b_0, b_1, \ldots, b_s$ chia hết cho p; các số $a_{r+1}$, $b_{s+1}$ không chia hết cho p. Từ đó suy ra $c_{r+s+2}$ không chia hết cho p (đpcm).

**Bài toán 2.** Cho f(x) là đa thức với hệ số nguyên, g(x) là đa thức nguyên bản và số hữu tỉ k thỏa mãn $f(x) = kg(x)$.

Chứng minh rằng k là một số nguyên.

**Lời giải.** Giả sử $k = \frac{c}{d}$ là phân số tối giản (với $d > 0$) và $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n$.

Với mọi $i \in \{0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; n\}$ ta có $a_i = \frac{c}{d}b_i \Rightarrow da_i = cb_i$. Do đó $cb_i \vdots d$.

Vì $(c, d) = 1$ nên $b_i \vdots d$.

Mà g(x) là đa thức nguyên bản nên $d = 1$.

Do đó k là một số nguyên (đpcm).

**Nhận xét.** Theo chứng minh trên ta có $a_i \vdots c$ hay $a_i \vdots k$, $\forall i \in \{0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; n\}$. Tức là k là ước của ước chung lớn nhất các hệ số của f(x).

**Bài toán 3.** Cho f(x) là một đa thức khả quy với hệ số nguyên. Chứng minh rằng f(x) phân tích được thành tích các đa thức có bậc nhỏ hơn f(x) với hệ số nguyên.

**Lời giải.** Vì f(x) là đa thức khả quy nên tồn tại các đa thức u(x), v(x) có hệ số hữu tỉ và bậc nhỏ hơn bậc của f(x) sao cho $f(x) = u(x)v(x)$.

Gọi a, b thứ tự là bội chung nhỏ nhất của mẫu số các hệ số của u(x), v(x).

Khi đó au(x), bv(x) là những đa thức có hệ số nguyên.

Gọi c, d thứ tự là ước chung lớn nhất của các hệ số của au(x), bv(x).

Khi đó $\frac{au(x)}{c} = u_1(x)$, $\frac{bv(x)}{d} = v_1(x)$ là những đa thức nguyên bản.

Ta có $f(x) = u(x)v(x) = \frac{cd}{ab}u_1(x)v_1(x)$.

Vì $u_1(x)$, $v_1(x)$ là những đa thức nguyên bản nên theo *bài toán 1* thì $u_1(x)v_1(x)$ là một đa thức nguyên bản.

Theo *bài toán 2* thì $\frac{cd}{ab}$ là một số nguyên.

Vậy f(x) có thể phân tích thành tích hai đa thức có bậc nhỏ hơn f(x) với hệ số nguyên là $\frac{cd}{ab}u_1(x)$ và $v_1(x)$ (đpcm).

**Bài toán 4.** Chứng minh rằng nếu $n \in \mathbb{N}^*$ thì $f(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n) - 1$ là đa thức bất khả quy.

**Lời giải.** Giả sử f(x) là đa thức khả quy. Theo *bài toán 2* thì tồn tại các đa thức g(x) và h(x) có hệ số nguyên và có bậc nhỏ hơn $n + 1$ (là bậc của đa thức f(x)) thỏa mãn $f(x) = h(x)g(x)$.

Đặt $k(x) = h(x) + g(x)$.

Khi đó, với mỗi số $i \in \{0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; n\}$ ta có $f(i) = h(i)g(i) = -1$.

Mà h(i), g(i) là các số nguyên nên $h(i) = 1$, $g(i) = -1$ hoặc $h(i) = -1$, $g(i) = 1$.

Do đó $k(i) = 0$.

Vì g(x), h(x) là các đa thức có bậc nhỏ hơn $n + 1$ nên nếu k(x) có bậc thì bậc của đa thức này phải nhỏ hơn $n + 1$.

Mà k(x) có $n + 1$ nghiệm là 0, 1, 2, ..., n nên $k(x) = 0$.

Tức là $h(x) = -g(x)$.

Suy ra $f(x) = -(h(x))^2$.

Do đó hệ số bậc cao nhất của f(x) là số âm: vô lí vì hệ số đó bằng 1, là một số dương (đpcm).

**Nhận xét.** + Trong chứng minh trên, ta đã sử dụng kết quả quen thuộc: *Đa thức bậc n (với $n \in \mathbb{N}^*$) có không quá n nghiệm thực.*

+ Như vậy, việc xét tính bất khả quy của các đa thức bậc cao nói chung không đơn giản. Nhà toán học Aidenstainơ đã đưa ra một *điều kiện đủ* để nhận biết tính bất khả quy của các đa thức với hệ số hữu tỉ.

**Tiêu chuẩn Aidenstainơ.**

Giả sử $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ (với $n > 1$) là một đa thức với hệ số nguyên và p là một số nguyên tố thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) $a_n$ không chia hết cho p

ii) $a_i \vdots p, \forall i \in \{0 ; 1 ; ... ; n-1\}$.

iii) $a_0$ không chia hết cho $p^2$.

Khi đó f(x) là một đa thức bất khả quy.

**Lời giải.** Giả sử f(x) là một đa thức khả quy. Khi đó tồn tại các đa thức g(x), h(x) với hệ số nguyên và có bậc nhỏ hơn n thỏa mãn f(x) = g(x)h(x).

Giả sử $g(x) = b_0 + b_1x + ... + b_mx^m$ và $h(x) = c_0 + c_1x + ... + c_rx^r$.

Ta có $a_0 = b_0c_0$; $a_1 = b_0c_1 + b_1c_0$; ... ; $a_k = b_0c_k + b_1c_{k-1} + ... + b_kc_0$; ... ; $a_n = b_mc_r$.

Vì $a_0 \vdots p$ nên $b_0c_0 \vdots p$.

Mà p là số nguyên tố nên $b_0 \vdots p$ hoặc $c_0 \vdots p$.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $b_0 \vdots p$.

Vì $b_0c_0$ không chia hết cho $p^2$ nên $c_0$ không chia hết cho p.

Mà $a_1 = b_0c_1 + b_1c_0$ chia hết cho p nên $b_1 \vdots p$.

.........................

Cứ tiếp tục như trên ta suy ra các số $b_0$, $b_1$, ... , $b_m$ chia hết cho p.

Do đó $\dfrac{g(x)}{p}$ là đa thức có các hệ số nguyên.

Suy ra $f(x) = p \cdot \dfrac{g(x)}{p} \cdot h(x)$ là đa thức có các hệ số chia hết cho p: vô lí vì $a_n$ không chia hết cho p.

Vậy f(x) là đa thức bất khả quy (đpcm).

**Nhận xét.** + Theo tiêu chuẩn Aidenstainơ thì đa thức $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 6$ là bất khả quy vì có số nguyên tố p = 2 thỏa mãn: 3 không chia hết cho 2; các hệ số 2, 8 và 6 đều chia hết cho 2; 6 không chia hết cho 4.

+ Áp dụng tiêu chuẩn Aidenstainơ và công thức nhị thức Newton cho khai triển lũy thừa của tổng: $(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + ... + C_n^ka^{n-k}b^k + ... + C_n^nb^n$, với $n \in \mathbb{N}^*$ và kí hiệu $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, ta có bài toán sau.

**Bài toán 5.** Cho p là một số nguyên tố và $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + ... + x + 1$. Chứng minh rằng f(x) là đa thức bất khả quy.

**Lời giải.** Đặt y = x − 1 thì x = y + 1.

Khi đó $f(x) = \dfrac{x^p - 1}{x - 1} = \dfrac{(y+1)^p - 1}{y} =$

$= C_p^0y^{p-1} + C_p^1y^{p-2} + ... + C_p^ky^{p-k-1} + ... + C_p^{p-2}y + C_p^{p-1} = g(y)$.

Với mọi $k \in \{1 ; 2 ; ... ; p-1\}$ thì $C_p^k = \dfrac{p(p-1)...(p-k+1)}{k!}$ là một số tự nhiên.

Mà (p, k!) = 1 (vì p là một số nguyên tố) nên $C_p^k \vdots p$.

Mà $C_p^0 = 1$, là số không chia hết cho p và $C_p^{p-1} = p$, là số không chia hết cho $p^2$ nên theo tiêu chuẩn Aidenstainơ thì g(y) là đa thức bất khả quy.

Do đó f(x) là đa thức bất khả quy (đpcm).

**Nhận xét.** Cho đến nay, một *điều kiện cần và đủ* để đa thức là bất khả quy vẫn chưa được phát hiện.

**Bài tập tự luyện.**

**Bài 1.** Chứng minh rằng các đa thức sau đây bất khả quy

a) $x^4 + 6x^3 - 18x^2 + 42x + 12$.

b) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 3$.

c) $x^4 - x^3 + x + 1$.

**Bài 2.** Tìm điều kiện cần và đủ của các số nguyên p và q để đa thức $x^4 + px^2 + q$ bất khả quy.

**Bài 3.** Chứng minh rằng nếu $a_1$, $a_2$, ... , $a_n$ là các số nguyên phân biệt (với $n \in \mathbb{N}^*$) thì $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) ... (x - a_n) - 1$ là đa thức bất khả quy.


# VIẾT SỐ TỰ NHIÊN DƯỚI DẠNG TỔNG CÁC LŨY THỪA CỦA 10 ĐỂ GIẢI TOÁN

THÁI NHẬT PHƯỢNG
*(GV. THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)*

Bài viết này sẽ giới thiệu một số bài toán giải được nhờ viết số tự nhiên dưới dạng tổng các lũy thừa của 10.

**Bài toán 1.** Chứng minh rằng

$$\overline{abcdef} \,\vdots\, 7 \Leftrightarrow \overline{abc} - \overline{def} \,\vdots\, 7.$$

**Lời giải.** Ta có $\overline{abcdef} = 1000\overline{abc} + \overline{def}$
$= 1001\overline{abc} - (\overline{abc} - \overline{def})$.

Vì $1001 \,\vdots\, 7$ nên $1001\overline{abc} \,\vdots\, 7$, suy ra đpcm.

**Bài toán 2.** Chứng minh rằng

$$A = \underbrace{11111\ldots1}_{81 \text{ chữ số } 1} \,\vdots\, 81.$$

**Lời giải.** Đặt $x = \underbrace{1111\ldots1}_{9 \text{ chữ số } 1}$.

Vì x có tổng các chữ số bằng 9, chia hết cho 9 nên $x \,\vdots\, 9$.

Ta có $A = x(10^{72} + 10^{63} + \ldots + 10^9 + 1)$.

Vì $10^{72} + 10^{63} + \ldots + 10^9 + 1$ chia hết cho 9 (vì cũng có tổng các chữ số bằng 9) nên $A : 81$, ta có đpcm.

**Bài toán 3.** Tìm số tự nhiên $n > 0$ để B là một số nguyên tố, với $B = 101010\ldots101$ (gồm n chữ số 0 và n + 1 chữ số 1 đứng xen kẽ).

**Lời giải.** Ta có

$B = 10^{2n} + 10^{2n-2} + \ldots + 10^2 + 1 =$

$$= \frac{10^{2n+2} - 1}{10^2 - 1} = \frac{(10^{n+1})^2 - 1}{99} =$$

$$= \frac{(10^{n+1} - 1)(10^{n+1} + 1)}{99}.$$

Ta xét các trường hợp sau.

+ Nếu n = 1 thì B = 101 : thỏa mãn.

+ Nếu n > 1 và n lẻ thì $\frac{10^{n+1} - 1}{99}$ và $10^{n+1} + 1$ là hai số tự nhiên lớn hơn 1 nên B là hợp số : loại.

+ Nếu n > 1 và n chẵn thì $\frac{10^{n+1} - 1}{9}$ và $\frac{10^{n+1} + 1}{11}$ là hai số tự nhiên lớn hơn 1 nên B là hợp số : loại.

Vậy n = 1.

**Bài toán 4.** Cho số tự nhiên $n > 0$. Chứng minh rằng C = 11 ... 1077 ... 7811 ... 1 (bắt đầu từ trái sang phải gồm n chữ số 1, một chữ số 0, n chữ số 7, một chữ số 8 và n + 1 chữ số 1) là một số có dạng $3k^3$, với $k \in \mathbb{N}$.

**Lời giải.** Đặt $x = \underbrace{1111\ldots1}_{n \text{ chữ số } 1}$. Ta có

$C = 10^{2n+3}x + 7 \cdot 10^{n+2}x + 8 \cdot 10^{n+1} + 10x + 1$
$= (9x + 1)^2 \cdot 10^3 x + 700(9x + 1)x + 80(9x + 1) + 10x + 1$
$= 3(27000x^3 + 8100x^2 + 810x + 27)$
$= 3(30x + 3)^3$, ta có đpcm.

**Bài tập tự luyện.**

Chứng minh rằng

a) $\overline{abc} \,\vdots\, 21 \Leftrightarrow a - 2b + 4c \,\vdots\, 7$.

b) $\overline{abcabc} \,\vdots\, 91$.

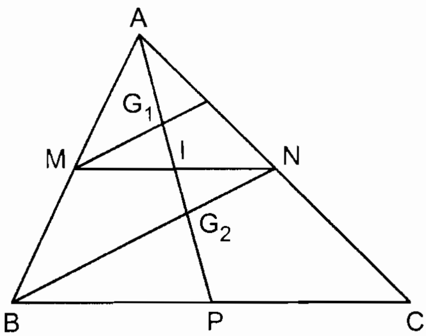
# TỪ MỘT BÀI TOÁN VỀ TAM GIÁC ĐẾN MỘT TÍNH CHẤT CỦA TỨ GIÁC NỘI TIẾP

VŨ VĂN DŨNG
*(THCS Nam Sơn, Nam Trực, Nam Định)*

● Trước hết, các bạn hãy theo dõi bài toán cơ bản sau :

**Bài toán 1.** Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P, I lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC, MN và $G_1$, $G_2$ lần lượt là trọng tâm của các tam giác AMN, ABC. Chứng minh rằng I là trung điểm của $G_1G_2$.

**Lời giải.**




Dựng trung tuyến AP của tam giác ABC, áp dụng định lí Ta-lét ta chứng minh được AP đi qua I, từ đó suy ra A, $G_1$, I, $G_2$, P thẳng hàng và AI = IP. Theo tính chất trọng tâm của tam giác ta có :

$$IG_1 = \frac{1}{3}AI = \frac{1}{6}AP\ ;$$

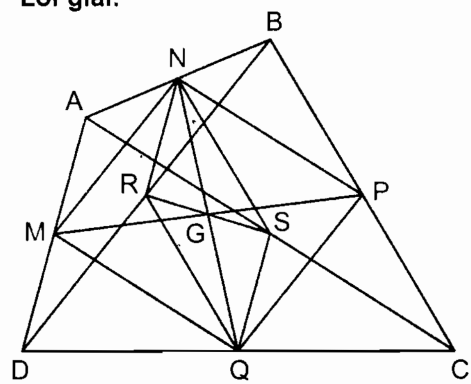
$$IG_2 = IP - PG_2 = \frac{1}{2}AP - \frac{1}{3}AP = \frac{1}{6}AP.$$

Suy ra $IG_1 = IG_2$ hay I là trung điểm của $G_1G_2$.

● Sau khi gặp *bài toán 1*, nếu tiếp tục suy nghĩ, tìm tòi thì ta còn phát hiện ra một kết quả tương tự cho tứ giác, đó là :

**Bài toán 2.** Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AD, AB, BC, CD, DB, AC và G là giao điểm của MP, NQ. Chứng minh rằng G là trung điểm của RS.

**Lời giải.**

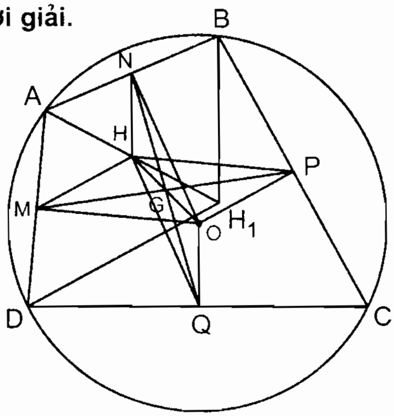



Theo tính chất đường trung bình trong tam giác ta chứng minh được MNPQ, QRNS đều là các hình bình hành. Suy ra G là trung điểm của NQ, do đó G cũng là trung điểm của RS.

● Trong *bài toán 2*, tiếp tục xét tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O và lấy điểm H đối xứng với O qua G. Khi đó có thể xác định được vị trí của điểm H hay không ? Trả lời câu hỏi này, chúng ta lại tiếp tục đi đến kết quả sau :

**Bài toán 3.** Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AD, AB, BC, CD ; G là giao điểm của MP, NQ và H là điểm đối xứng của O qua G. Chứng minh rằng H là trung điểm của đoạn thẳng nối A với trực tâm của tam giác BCD.

**Lời giải.**




Dựng đường thẳng AH, trên tia đối của tia HA, lấy điểm $H_1$ sao cho $AH = HH_1$ (H là trung điểm của $AH_1$). Mặt khác, N là trung điểm của AB nên NH // $BH_1$ (tính chất đường trung bình trong tam giác).

Mặt khác, theo giả thiết và *bài toán 2* ta lại có G là trung điểm của OH và NQ nên HQON là hình bình hành, do đó NH // OQ, suy ra $BH_1$ // OQ. (1)

Vì Q là trung điểm của dây cung CD của (O) nên $OQ \perp CD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BH_1 \perp CD$.

Tương tự ta có $DH_1 \perp CB$.

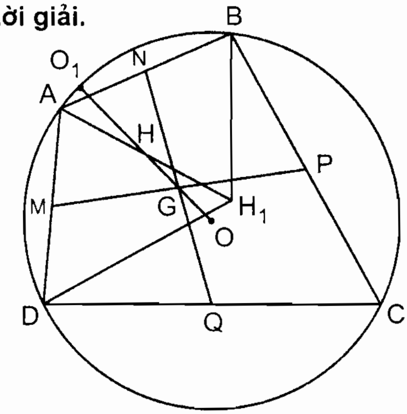
Vậy $H_1$ là trực tâm của tam giác BCD, suy ra đpcm.

• Ta nhận thấy rằng ở *bài toán 3*, H là trung điểm của $AH_1$ nên nếu gọi $O_1$ là điểm đối xứng của điểm O qua điểm H thì H là trung điểm của $OO_1$ và $AOH_1O_1$ là hình bình hành, suy ra $OA = O_1H_1$.

Đến đây, các bạn có liên hệ tiếp được đến điều gì không ? Chúng ta hãy theo dõi bài toán sau nhé.

**Bài toán 4.** Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AD, AB, BC, CD ; G là giao điểm của MP, NQ và $H_1$, $H_2$, $H_3$, $H_4$ lần lượt là trực tâm của của các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Chứng minh rằng $H_1$, $H_2$, $H_3$, $H_4$ cùng thuộc một đường tròn.

**Lời giải.**




Gọi H là điểm đối xứng của điểm O qua điểm G và $O_1$ là điểm đối xứng của điểm O qua điểm H.

Theo *bài toán 3* và nhận xét trên ta có :

H là trung điểm của $AH_1$ và $OA = O_1H_1$ ;

Tương tự ta cũng có :

H là trung điểm của $BH_2$ và $OB = O_1H_2$ ;

H là trung điểm của $CH_3$ và $OC = O_1H_3$ ;

H là trung điểm của $DH_4$ và $OD = O_1H_4$.

Vì OA = OB = OC = OD suy ra :

$O_1H_1 = O_1H_2 = O_1H_3 = O_1H_4 = OA$.

Vậy $H_1$, $H_2$, $H_3$, $H_4$c ùng thuộc đường tròn tâm $O_1$, bán kính OA.

• *Bài toán 4* giúp ta có được một tính chất của tứ giác nội tiếp : *"Nếu tứ giác ABCD nội tiếp một đường tròn có bán kính R thì tứ giác có bốn đỉnh là trực tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC cũng nội tiếp một đường tròn có bán kính R".*

Con đường từ một bài toán cơ bản về tam giác đến một tính chất của tứ giác nội tiếp thật thú vị phải không các bạn ? Chúc các bạn thêm yêu thích môn Toán và có kết quả học môn Toán thật tốt thông qua cách học chủ động và luôn suy nghĩ, tìm tòi, sáng tạo.

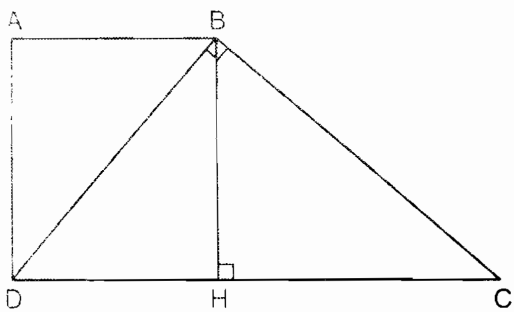

# CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI ĐẠI SỐ TRONG CHỨNG MINH HÌNH HỌC

NGUYỄN THANH HÀI
*(Hiệu phó trường THCS Nam Cường, Nam Trực, Nam Định)*

Trong nhiều bài toán hình học, nhất là các bài toán có liên quan đến độ dài đoạn thẳng, độ lớn góc, xác định vị trí đặc biệt để có hình đặc biệt... thường xuyên được áp dụng các phép biến đổi đại số. Tùy vào từng bài toán mà ta có thể lập phương trình, hệ phương trình hay biến đổi bất đẳng thức. Sau đây là các ví dụ.

**Bài toán 1.** Cho hình thang vuông ABCD ($\hat{A} = \hat{D} = 90^o$) có đường chéo BD vuông góc với cạnh bên BC. Biết AD = 12, CD = 25. Tính AB, BC và BD.

**Lời giải.** Kẻ BH vuông góc với CD.




Ta nhận thấy ABHD là hình chữ nhật nên BH = AD = 12. Đặt AB = DH = x > 0, ta có :

DH + HC = CD = 25 suy ra HC = 25 − x.

Tam giác DBC vuông tại B, có đường cao BH suy ra $DH \cdot HC = BH^2 \Leftrightarrow x(25 - x) = 12^2$ $\Leftrightarrow x^2 - 25x + 144 = 0 \Leftrightarrow x = 9$ hoặc $x = 16$.

Nếu DH = 9 thì AB = 9 ;

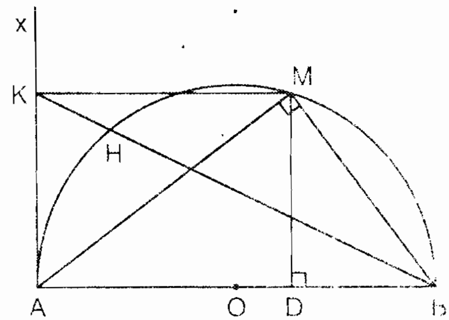
$BD = \sqrt{DH \cdot DC} = 15$ ; $BC = \sqrt{CH \cdot CD} = 20$.

Nếu DH = 16 thì AB = 16 ;

$BD = \sqrt{DH \cdot DC} = 20$ ; $BC = \sqrt{CH \cdot CD} = 15$.

**Bài toán 2.** Cho điểm M thuộc nửa đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Gọi H là điểm chính giữa cung AM. Tiếp tuyến Ax với (O) tại A cắt BH tại K. Tìm vị trí của điểm M để MK vuông góc với Ax.

**Lời giải.** Giả sử MK vuông góc với Ax.




Kẻ MD vuông góc với AB, ta có ADMK là hình chữ nhật, suy ra AD // MK ; AD = MK, do đó $\widehat{ABK} = \widehat{BKM}$ (so le trong). Mặt khác, vì H là điểm chính giữa cung AM nên $\widehat{ABK} = \widehat{KBM}$, do đó $\widehat{KBM} = \widehat{BKM}$, suy ra tam giác MKB cân tại M và MB = MK.

Đặt MB = MK = AD = x > 0. Tam giác AMB vuông tại M, có đường cao MD suy ra :

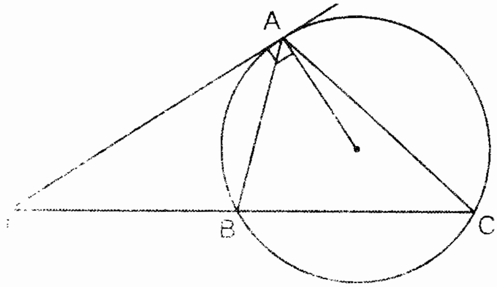
$MB^2 = BD \cdot BA \Leftrightarrow x^2 = (2R - x) \cdot 2R$

$\Leftrightarrow x^2 + 2Rx - 4R^2 = 0 \Leftrightarrow x = (\sqrt{5} - 1)R$.

Ngược lại, với $MB = (\sqrt{5} - 1)R$ (*) ta chứng minh được MK vuông góc với Ax. Vậy điểm M thỏa mãn điều kiện (*) chính là vị trí cần tìm.

**Bài toán 3.** Cho tam giác ABC, AB = 20 ; AC = 28 ; BC = 24. Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng BC tại I. Tính IA và IC.

**Lời giải.** Đặt IA = x > 0 ; IC = y > 0.




Vì IA là tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $\widehat{IAB} = \widehat{ICA}$, suy ra tam giác IAB đồng dạng với tam giác ICA theo trường hợp góc-góc. Do đó :

$$\frac{IA}{IC} = \frac{IB}{IA} = \frac{AB}{CA} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y-24}{x} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}.$$

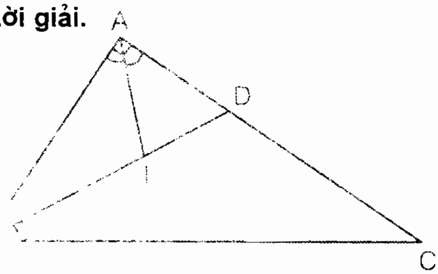
Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 7x = 5y \\ 5x = 7y - 168 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 49. \end{cases}$$

Vậy : IA = 35 ; IC = 49.

**Bài toán 4.** Cho tam giác ABC vuông tại A, phân giác BD. Tia phân giác của góc A cắt BD tại I. Biết IB = 10 ; ID = 5. Tính diện tích tam giác ABC.

**Lời giải.**




Theo tính chất của đường phân giác ta có :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{IB}{ID} = \frac{10}{5} = 2 ;$$

$$\frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC} \Rightarrow \frac{BC}{DC} = \frac{AB}{AD} = 2.$$

Đặt AD = x > 0 ; DC = y > 0 thì AB = 2x ; BC = 2y. Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + (2x)^2 = 15^2 \\ (2x)^2 + (x+y)^2 = (2y)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\sqrt{5} \\ y^2 - 2\sqrt{5}y - 75 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\sqrt{5} \\ y = 5\sqrt{5}. \end{cases}$$

Suy ra $AB = 6\sqrt{5}$ ; $BC = 10\sqrt{5}$ ;

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 8\sqrt{5}.$$

**Bài toán 5.** Cho tam giác ABC. Gọi a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, CA, AB và p là nửa chu vi của tam giác. Chứng minh rằng $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$.

**Lời giải.**

Với mọi x ; y > 0 ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$. (*)

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có :

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{c} ; \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{a} ;$$

$$\frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-a} \geq \frac{4}{b}.$$

Cộng theo từng vế của 3 bất đẳng thức trên suy ra đpcm.

- **Một số bài tập áp dụng.**

**Bài 1.** Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, đường phân giác AD. Biết AH = 24 ; HC – HB = 14. Tính BD và AD.

**Bài 2.** Tính độ dài các bán kính của đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp của một hình thang cân có độ dài hai đáy bằng 16 cm và 64 cm.

**Bài 3.** Cho tam giác ABC có tia phân giác của góc A cắt đường tròn ngoại tiếp ở D. Chứng minh rằng $AD \geq \frac{AB + AC}{2}$.


# MỘT DẤU HIỆU CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

NGÔ ĐỨC MINH
*(THCS Ngô Gia Tự, quận Hồng Bàng, TP. Hải Phòng)*

Có nhiều cách để chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau : gắn chúng vào hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông ; sử dụng các tính chất đặc trưng như tính chất trực tâm của tam giác, tiên đề Ơ-clít về đường thẳng vuông góc ...

• Trong bài biết này, chúng tôi muốn giới thiệu với các bạn phương pháp chứng minh hai đường thẳng vuông góc dựa vào một dấu hiệu của tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau.

**Định lí (*).** Tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau khi và chỉ khi các tổng bình phương của hai cạnh đối diện bằng nhau.

**Chứng minh.**

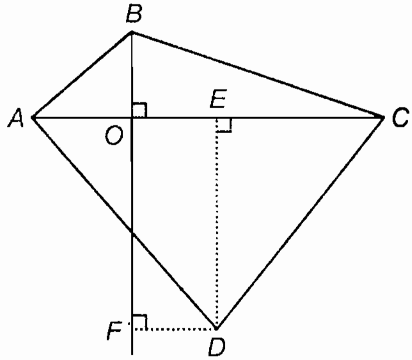
+ *Điều kiện cần.* Xét tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo $AC$ và $BD$ vuông góc với nhau tại $O$, áp dụng định lí Py-ta-go ta dễ dàng chứng được tổng các bình phương của hai cạnh đối diện bằng nhau :

$AD^2 + BC^2 = AO^2 + OD^2 + BO^2 + OC^2 = AO^2 + OB^2 + DO^2 + OC^2 = AB^2 + DC^2$.

+ *Điều kiện đủ.* Xét tứ giác $ABCD$ thỏa mãn điều kiện $AD^2 + BC^2 = AB^2 + DC^2$.

- Nếu $BC = AB$ thì $AD = DC$, theo tính chất đường trung trực của đoạn thẳng ta có $AC \perp BD$.

- Nếu $BC \neq AB$ thì $AD \neq DC$. Qua $B$ dựng đường thẳng vuông góc với $AC$ tại $O$ ; qua $D$ dựng các đường thẳng vuông góc với $AC$, $BO$ lần lượt tại $E$, $F$.




Ta có $OEDF$ là hình chữ nhật. Không làm giảm tính tổng quát, giả sử $O$ nằm giữa $A$ và $E$. Áp dụng định lí Py-ta-go ta có :

$AD^2 + BC^2 = (EA^2 + ED^2) + (OB^2 + OC^2)$
$= (OA + OE)^2 + OF^2 + OB^2 + OC^2 = OA^2 +$
$+ OE^2 + OF^2 + OB^2 + OC^2 + 2OA \cdot OE$ ;

$AB^2 + DC^2 = (OA^2 + OB^2) + (EC^2 + ED^2)$
$= OA^2 + OB^2 + (OC - OE)^2 + OF^2 = OA^2 +$
$+ OB^2 + OC^2 + OE^2 + OF^2 - 2OC \cdot OE$.

Như vậy, vì $AD^2 + BC^2 = AB^2 + DC^2$ suy ra $OA^2 + OE^2 + OF^2 + OB^2 + OC^2 + 2OA \cdot OE = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OE^2 + OF^2 - 2OC \cdot OE$

$\Rightarrow 2OA \cdot OE = -2OC \cdot OE$

$\Rightarrow OE(OA + OC) = 0$.

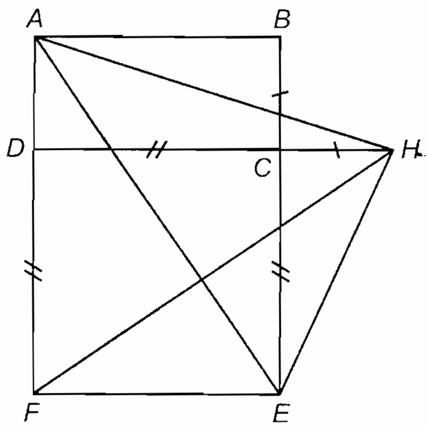
Do $A$ không trùng với $C$ nên $OA + OC \neq 0$, suy ra $OE = 0 \Rightarrow E \equiv C \Rightarrow AC \perp BD$ (tại $O$).

• Như vậy định lí đã được chứng minh. Sau đây là một số ví dụ vận dụng *định lí (*)* để chứng minh hai đường thẳng vuông góc.

**Ví dụ 1.** Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trên các tia đối của các tia $DA$, $CB$ lần lượt lấy hai điểm $F$ và $E$ sao cho $DF = CE = DC$.

Trên tia đối của tia $CD$ lấy điểm $H$ sao cho $CH = CB$. Chứng minh rằng $AE$ vuông góc với $FH$.

**Lời giải.**




Để chứng minh $AE \perp FH$, áp dụng *định lí (*)* ta sẽ chứng minh tứ giác $AHEF$ có các tổng bình phương của hai cạnh đối diện bằng nhau.

Thật vậy, Đặt $AB = x$ và $BC = y$.

Theo giả thiết ta có :

$$AF^2 + HE^2 = (AD + DF)^2 + (HC + CE)^2$$
$$= (x + y)^2 + x^2 + y^2$$
$$= 2(x^2 + y^2 + xy) ;$$
$$AH^2 + EF^2 = AD^2 + (DC + CH)^2 + EF^2$$
$$= y^2 + (x + y)^2 + x^2$$
$$= 2(x^2 + y^2 + xy).$$

Suy ra $AF^2 + HE^2 = AH^2 + EF^2$.

**Ví dụ 2.** Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn tâm $O$ và nội tiếp đường tròn tâm $O'$. Gọi $M$, $N$, $P$, $Q$ lần lượt là các tiếp điểm của $(O)$ với $DA$, $AB$, $BC$, $CD$. Chứng minh rằng $MP$ vuông góc với $NQ$.

**Lời giải.**

Gọi $E$ ; $F$ lần lượt là giao điểm của $PQ$ và $CO$ ; $MN$ và $AO$. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp $(O')$ nên $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$.

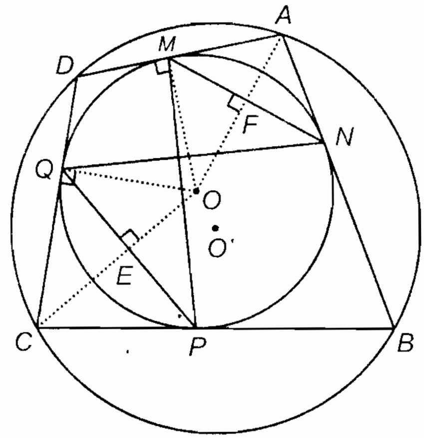
Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp $(O)$, từ tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta suy ra

$$\widehat{OAM} = \frac{1}{2}\widehat{A} ; \widehat{OCQ} = \frac{1}{2}\widehat{C}$$

$$\Rightarrow \widehat{OAM} + \widehat{OCQ} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OAM} = \widehat{COQ}$$

$$\Rightarrow \Delta OAM \backsim \Delta COQ \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{OM}{CQ} = \frac{MA}{QO} \Rightarrow OM^2 = AM \cdot CQ. \qquad (1)$$




Tương tự ta cũng có $\Delta ONB \backsim \Delta DMO$ suy ra $OM^2 = DM \cdot BN$. (2)

Đặt bán kính của (O) bằng $r$ ;

$AM = AN = x$ ; $BN = BP = y$ ; $CP = CQ = z$ ; $DQ = DM = t$ ; $MA = MN = x$.

Từ (1) và (2) suy ra $r^2 = xz = yt$.

Cũng từ tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta suy ra $OA$ là trung trực của $MN \Rightarrow$ $MF$ là đường cao trong $\Delta AMO$ vuông tại $M$

$$\Rightarrow \frac{1}{MF^2} = \frac{1}{MA^2} + \frac{1}{MO^2} \Rightarrow \frac{4}{MN^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{r^2}$$

$$\Rightarrow MN^2 = \frac{4x^2r^2}{x^2 + r^2} = \frac{4x^2xz}{x^2 + xz} = \frac{4x^2z}{x + z}.$$

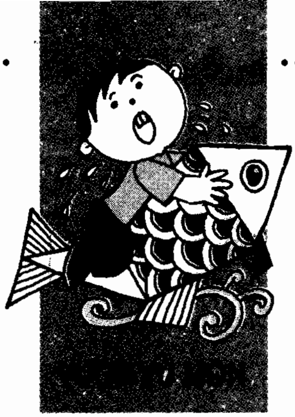
Tương tự ta có :

$$PQ^2 = \frac{4xz^2}{x + z} ; NP^2 = \frac{4y^2t}{y + t} ; PQ^2 = \frac{4yt^2}{y + t}.$$

Suy ra $MN^2 + PQ^2 = NP^2 + MQ^2 = 4r^2$.

Áp dụng *định lí (*)* vào tứ giác $MNPQ$ ta suy ra $MP \perp NQ$.

*(Xem tiếp trang 25)*



# PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ TRONG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN BẬC HAI

NGUYỄN ĐỄ *(Hải Phòng)*

Rất khó đưa ra các bước giải mang tính tổng quan đối với các bài toán giải phương trình và hệ phương trình bằng phương pháp đánh giá. Bởi vậy cách đánh giá phải rất linh hoạt và tùy thuộc vào nội dung bài toán.

**Bài toán 1.** Giải phương trình :

$$\frac{2x^8+2}{x^4}=\sqrt{16-y^2}.$$

**Lời giải.** Điều kiện : $x \neq 0$ và $-4 \leq y \leq 4$. (i)

*Cách 1.* Ta nhận thấy $0 \leq \sqrt{16-y^2} \leq 4$.

Suy ra $\frac{2x^8+2}{x^4} \leq 4 \Rightarrow x^4+\frac{1}{x^4} \leq 2 \Rightarrow$

$\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2 \leq 0 \Rightarrow x^2-\frac{1}{x^2}=0 \Rightarrow x=\pm 1.$

Suy ra $\sqrt{16-y^2}=4 \Rightarrow y=0$.

Các giá trị $x=\pm 1$ ; $y=0$ thỏa mãn điều kiện (i) nên phương trình đã cho có nghiệm hai nghiệm là (1 ; 0) và (–1 ; 0).

*Cách 2.* Với $x \neq 0$ ta có $2x^4>0$ ; $\frac{2}{x^4}>0$ suy ra $2x^4+\frac{2}{x^4} \geq 4$ (áp dụng bất đẳng thức Cô-si). Mặt khác, $0 \leq \sqrt{16-y^2} \leq 4$ suy ra phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow \frac{2x^8+2}{x^4}=\sqrt{16-y^2}=4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4=1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=-1 \\ y=0. \end{cases}$$

Chú ý rằng, phương trình đã cho có hai ẩn số nên không thể giải bằng phương pháp thông thường. Các em thử nghĩ xem, phương trình có thể giải được bằng phương pháp đồ thị hay không ?

**Bài toán 2.** Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+(x-y)^2}=z+4 \\ \sqrt{z+3}+2x=8. \end{cases}$$

**Lời giải.** Tương tự như phương trình trên, hệ phương trình này có hai phương trình nhưng lại có ba ẩn số, bởi vậy ta thử tìm cách đánh giá một ẩn số nào đó, chẳng hạn là biến số $z$.

Xét phương trình thứ nhất của hệ ta có :

$(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1+(x-y)^2 \geq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+(x-y)^2} \leq 1 \Leftrightarrow z+4 \leq 1 \Leftrightarrow z \leq -3.$$

Mặt khác, từ phương trình thứ hai của hệ ta có $z+3 \geq 0 \Leftrightarrow z \geq -3$, suy ra $z=-3$ và $2x=8 \Rightarrow x=4$. Thay các giá trị của $x$ và $z$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta có $y=4$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (4 ; 4 ; –3).

**Bài toán 3.** Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 1+\sqrt{y-1}=\dfrac{1}{y^2}-(x+z)^2 \\ x^2+y^2=2y. \end{cases}$$

**Lời giải.** Điều kiện : $y \geq 1$. (ii)

Đánh giá hai vế của phương trình thứ nhất ta có $1+\sqrt{y-1} \geq 1 \geq \frac{1}{y^2}-(x+z)^2$.

Suy ra $1+\sqrt{y-1}=\frac{1}{y^2}-(x+z)^2$

$\Leftrightarrow 1+\sqrt{y-1}=\dfrac{1}{y^2}-(x+z)^2=1 \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=-z \end{cases}$

(thỏa mãn điều kiện (ii)).

Thay $y = 1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta có $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Với $x = 1$ thì $z = -1$ ; với $x = -1$ thì $z = 1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x ; y ; z)$ là $(1 ; 1 ; -1)$ ; $(-1 ; 1 ; 1)$.

**Bài toán 4.** Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{y}-4+x=\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x+y-9}+2}{\sqrt{y}-x+4} \\ 9+(y-5)^2=x+y. \end{cases}$$

**Lời giải.** Điều kiện : $y \ge 0$ ; $x + y \ge 9$ ; $\sqrt{y} \ne x-4$. (iii)

Ta có :

$9+(y-5)^2=x+y \Leftrightarrow (y-5)^2=x+y-9$

$\Leftrightarrow |y-5|=\sqrt{x+y-9}$ suy ra

$$\sqrt{y}-4+x=\frac{\sqrt{x+y}+|y-5|+2}{\sqrt{y}-x+4}$$

$\Leftrightarrow y-(x-4)^2=\sqrt{x+y}+|y-5|+2.$ (1)

Vì $x+y \ge 9$ nên $\sqrt{x+y} \ge 3$ suy ra

$\sqrt{x+y}+|y-5|+2 \ge 5 \Rightarrow y-(x-4)^2 \ge 5$

$\Rightarrow y \ge 5 \Rightarrow |y-5| = y-5.$

Khi đó phương trình (1) trở thành

$y-(x-4)^2=\sqrt{x+y}+y-5+2$

$\Leftrightarrow (x-4)^2=3-\sqrt{x+y}.$ (2)

Vì $\sqrt{x+y} \ge 3$ nên $3-\sqrt{x+y} \le 0 \le (x-4)^2$

suy ra (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2=0 \\ \sqrt{x+y}-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$

(thỏa mãn điều kiện (iii)). Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x ; y) = (4 ; 5)$.

**Bài toán 5.** Với những giá trị nào của tham số $a$ thì hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} (a-1)y^2-2(3a+1)y+9a=0 \\ y=-\sqrt{x-3}+2. \end{cases}$$

**Lời giải.** Ta có $y=-\sqrt{x-3}+2 \le 2.$

+ Nếu $a = 1$ thì $y=\dfrac{9}{8}<2$ ; $x=\dfrac{241}{64}$.

+ Nếu $a \ne 1$ thì hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình thứ nhất có nghiệm thỏa mãn điều kiện $y_1 \le y_2 \le 2$ hoặc $y_1 \le 2 < y_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ (a-1)f(2) \ge 0 \\ \dfrac{S}{2}<2 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} (a-1)f(2) \le 0 \\ \dfrac{S}{2}>2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15a+1 \ge 0 \\ (a-1)(a-8) \ge 0 \\ \dfrac{3a+1}{a-1}<2 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} (a-1)(a-8) \le 0 \\ \dfrac{3a+1}{a-1}>2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{15} \le a < 1$ hoặc $1 < a \le 8.$

Vậy tất cả các giá trị của $a$ để hệ phương trình có nghiệm là $\left[-\dfrac{1}{15} ; 8\right]$.

● Đề nghị các em hãy giải hai hệ phương trình sau đây, xem như bài tập.

**1.** $\begin{cases} \sqrt{y}-2x+6=\dfrac{\sqrt{x-y-1}+4\sqrt{x-y}}{\sqrt{y}+2x-6} \\ y+\sqrt{x-y}=5+\sqrt{x-y-1}-(x-3)^2 ; \end{cases}$

**2.** $\begin{cases} 2+6y=\dfrac{x}{y}-\sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}}=x+3y-2. \end{cases}$

# LÀM GÌ VỚI BÀI TOÁN QUỸ TÍCH ?

NGUYỄN ANH DŨNG *(Hà Nội)*

Quỹ tích là một loại toán hay và khó trong chương trình phổ thông, có lẽ vì thế nên có nhiều bài viết bàn về vấn đề này. Ta hãy cùng nhau phân tích các bước mà người làm toán thường làm khi giải một bài toán quỹ tích.

**Xin nhắc lại :** Quỹ tích của những điểm có tính chất nào đó là tập hợp tất cả các điểm có tính chất đó. Tìm quỹ tích các điểm $M$ có tính chất $\alpha$ ($M(\alpha)$) là tìm hình $H$ gồm tất cả các điểm $M(\alpha)$.

Như vậy, việc giải bài toán quỹ tích chính là việc đi tìm tập điểm

$$H = \{M(\alpha)\} \Leftrightarrow \begin{cases} \{M(\alpha)\} \subset H \\ H \subset \{M(\alpha)\}. \end{cases}$$

Hai phần trên ứng với hai phần *thuận* và *đảo* của một bài toán quỹ tích.

Trong một số trường hợp người ta còn sử dụng các cặp mệnh đề tương đương với cặp *thuận* và *đảo* như sau : *thuận* và *phản* ; *đảo* và *phản đảo* ; *phản* và *phản đảo*.

Hơn nữa, người ta còn xét quỹ tích các phần tử không nhất thiết là điểm như : tìm tập hợp các đường thẳng, đường tròn...

Trong bài viết này, ta chỉ đề cập tới quỹ tích các điểm và phương pháp thuận đảo.

**Xét một ví dụ sau :** Cho tam giác nhọn $ABC$ với $AB < AC$, nội tiếp trong đường tròn tâm $O$ có bán kính $R$. Một điểm $D$ di động trên đoạn $BC$. Xét đường tròn qua $B$, $D$ và tiếp xúc với cạnh $AB$ tại $B$ và đường tròn qua $C$, $D$ và tiếp xúc với cạnh $AC$ tại $C$. Hai đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ hai là $K$ (khác $D$). Đường thẳng $KD$ cắt $(O)$ tại $L$. Trên tia $AL$ xác định điểm $M$ sao cho $AM = AK$. Tìm quỹ tích điểm $M$ khi điểm $D$ di chuyển trên đoạn $BC$.

**Hình dung quá trình giải bài toán trên :**

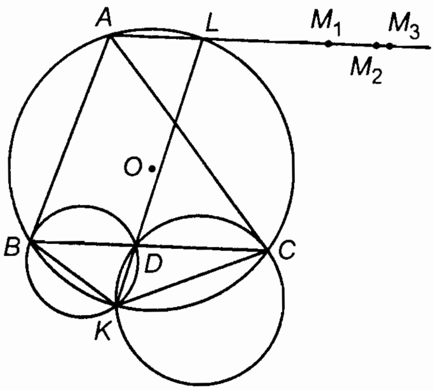
- ***Bước 1.*** *(suy nghĩ và làm trên giấy nháp)*
- Vẽ hình, biểu diễn giả thiết, kết luận.
- Suy nghĩ : điểm $D$ thay đổi suy ra điểm $K$ thay đổi, đường thẳng $KD$ thay đổi. Điểm $L$ và đường thẳng $AL$ sẽ thế nào ?
- Cần bắt đầu từ việc xét điểm $K$. Khai thác các giả thiết đường tròn qua $B$, $D$ tiếp xúc với $AB$ tại $B$ ; đường tròn qua $C$, $D$ tiếp xúc với $AC$ tại $C$ để suy ra $\widehat{CKD} = \widehat{BCA}$ ; $\widehat{BKD} = \widehat{CBA}$. Có vẻ như vấn đề đã được hé mở, $\widehat{BKC} + \widehat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow K \in (O)$.
- Chọn 3 vị trí đặc biệt của điểm $D$, chẳng hạn là các điểm $B$, $C$ và trung điểm của $BC$. Ta nhận thấy các điểm $M$ tương ứng xác định được *"có vẻ"* thẳng hàng, từ đó dự đoán $M$ thuộc một đường thẳng. Như vậy định hướng sẽ là chứng minh tia $AL$ cố định hoặc điểm $L$ cố định, suy ra điểm $M$ nằm trên tia $AL$ (một suy luận có lý, trong bài này là suy luận đúng).
- Chứng minh và khẳng định dự đoán trên.

Có lẽ người làm toán rất vui vì đã tìm ra tia $AL$ là hình chứa quỹ tích. Một mốc quan trọng của bài toán. Thế nhưng phần còn lại cũng không đơn giản.

- Thao tác giới hạn : nếu $D \equiv B$ thì $M \equiv M_1$ với $AM_1 = AB$ ; Nếu $D \equiv C$ thì $M \equiv M_2$ với $AM_2 = AC$. Dự đoán quỹ tích là đoạn $M_1M_2$ (một suy luận có lí, trong bài này là một suy luận sai, đoạn $AM$ có thể bằng $2R > AC$).
- Quá trình dự đoán bằng những suy luận

có lí, rồi chứng minh để khẳng định hoặc bác bỏ được tiếp tục cho đến khi tìm được hình quỹ tích đúng ($M$ thuộc đoạn $M_1M_3$ với $AM_1 = AB$ và $AM_3 = 2R$, trên tia $AL$).

• Chứng minh phần đảo.




● **Bước 2.** *(thực hiện lời giải)*

Trong lời giả này kí hiệu ($XYZ$) là đường tròn đi qua ba điểm $X$, $Y$, $Z$.

***Phần thuận.*** Vì ($BKD$) tiếp xúc với $AB$ tại $B$ nên $\widehat{BKD} = \widehat{ABD} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{BD}$ ; tương tự ta có $\widehat{CKD} = \widehat{ACD} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{CD}$. Suy ra $\widehat{BKC} =$

$= \widehat{BKD} + \widehat{CKD} = \widehat{ABD} + \widehat{ACD} = 180^o - \widehat{BAC}$

$\Rightarrow \widehat{BKD} + \widehat{BAC} = 180^o \Rightarrow K \in (O)$.

Mặt khác, vì $\widehat{CKL} = \widehat{CKD} = \widehat{ACD} = \widehat{ACB}$ nên(O) có $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{LC}$ suy ra AL // BC, mà điểm $A$ và $BC$ cố định $\Rightarrow$ $L$ cố định và điểm $M$ nằm trên tia $AL$ cố định.

Theo giả thiết ta có $AB < AC$, mặt khác dễ thấy $K$ thuộc cung nhỏ $BC$ suy ra $\widehat{AKB} = \widehat{ACB} < \widehat{ABC} < \widehat{ABK} \Rightarrow AB < AK$.

Kể cả trường hợp $D \equiv B$ thì $AB \leq AK$.

Mặt khác, vì $AK$ là dây cung của (O) nên $AK \leq 2R$, suy ra $AB \leq AK = AM \leq 2R$.

Vậy điểm $M$ nằm trên đoạn $M_1M_3$ thuộc tia $AL$ với $AM_1 = AB$ và $AM_3 = 2R$.

***Phần đảo.*** Giả sử $M$ là điểm bất kì trên đoạn $M_1M_3$, vì $AB \leq AM \leq 2R$ nên luôn tồn tại điểm $K$ thuộc cung nhỏ $BC$ sao cho $AK = AM$. Gọi $D$ là giao điểm của $KL$ và $BC$, ta có $D$ nằm trên đoạn $BC$. Vì $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{LC}$ nên $\widehat{CKL} = \widehat{ACB}$. Từ đó ta có ($CKD$) tiếp xúc với $AC$ tại $C$ và ($BKD$) tiếp xúc với $AB$ tại $B$ (bạn đọc tự chứng minh).

Suy ra điểm $M$ thuộc quỹ tích.

Kết luận : quỹ tích điểm $M$ là đoạn $M_1M_3$ trên tia $AL$ // $BC$ với $L$ thuộc (O) ; $AM_1 = AB$ và $AM_3 = 2R$.

**Các bước giải một bài toán quỹ tích bằng phương pháp thuận đảo :**

Qua phân tích thí dụ trên ta thấy, với một bài toán quỹ tích, người làm toán đã thực hiện qua các bước sau :

\+ *Bước 1.* Suy nghĩ và làm trên giấy nháp (thực hiện các thao tác tư duy để tìm ra hình quỹ tích).

\+ *Bước 2.* Thực hiện lời giải.

Trong *bước 1*, tùy theo mức độ khó, dễ của bài toán, người làm toán thực hiện các thao tác như :

• Phân tích mối quan hệ giữa các yếu tố chuyển động và cố định để đoán nhận quỹ tích.

Về kĩ năng, ta thường chọn 3 vị trí của điểm chuyển động (lưu ý các vị trí đặc biệt), xác định và quan sát các vị trí tương ứng của điểm quỹ tích để dự đoán quỹ tích thuộc đường thẳng hay đường tròn (các loại này thường gặp trong chương trình phổ thông)...

• Chứng minh hoặc bác bỏ dự đoán trên. Nếu dự đoán trên là đúng thì ta có thể chỉ ra các điểm thỏa mãn tính chất của bài toán thuộc hình nào (hình chứa quỹ tích).

• Thực hiện các thao tác nhận xét để loại bỏ các điểm thừa của hình trên (các điểm không thuộc quỹ tích).

Chính quá trình thực hiện các thao tác dự đoán, chứng minh để khẳng định hoặc bác bỏ, nhận xét loại bỏ điểm thừa... tạo nên sự hấp dẫn của bài toán quỹ tích.

Kết thúc *bước 1*, ta đã có thể hình dung và trả lời quỹ tích phải tìm là hình gì cùng với các giới hạn cần thiết của nó.

☞

# TÌM CHÌA KHÓA VÀNG TRONG SÁCH GIÁO KHOA

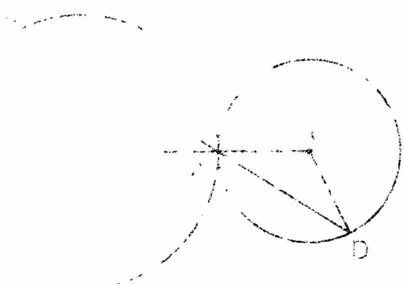
HỌC RA SAO?

HOÀNG HẢI DƯƠNG
*(THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang, Hưng Yên)*

Những bài tập trong sách giáo khoa (SGK) đều là các bài tập cơ bản, được chọn lọc kĩ càng mà chúng ta cần phải nắm chắc để áp dụng. Có thể ví chúng như những chiếc chìa khóa để mở ra nhiều cánh cửa toán học, tất nhiên sẽ có những chiếc chìa khóa đặc biệt. Điều quan trọng là ta có phát hiện ra chúng hay không và bằng cách nào ? Để gợi ý cho các bạn trả lời câu hỏi này, tôi xin giới thiệu với các bạn một chiếc chìa khóa như vậy và một số áp dụng xuất phát từ bài toán này, đó là *bài 33 trang 119, SGK Toán 9, tập 1.*

**Bài 33** *(SGK)*. Hai đường tròn (O ; R) và (O' ; R') tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Một đường thẳng qua A, cắt (O) và (O') lần lượt tại C và D (C khác D). Chứng minh rằng OC // O'D.

**Lời giải.**

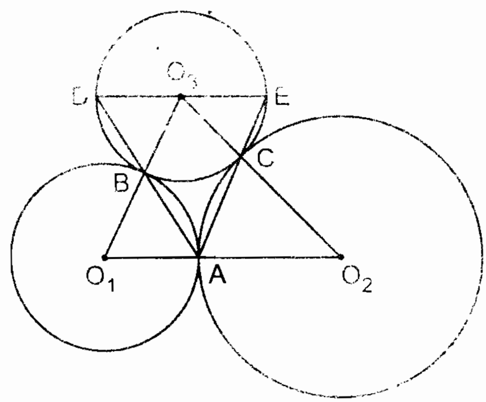



Từ giả thiết ta có O, A, O' thẳng hàng, suy ra $\widehat{OAC} = \widehat{O'AD}$ (đối đỉnh). Mặt khác, tam giác AOC cân tại O và tam giác AO'D cân tại O' nên $\widehat{OAC} = \widehat{OCA}$ ; $\widehat{O'AD} = \widehat{O'DA}$. Suy ra $\widehat{OCA} = \widehat{O'DA}$. Vậy OC // O'D (đpcm).

● Sau đây là một số ví dụ áp dụng *bài 33*.

**Ví dụ 1.** Cho ba đường tròn không biết tâm, đôi một tiếp xúc ngoài với nhau tại A, B, C. Chỉ bằng thước thẳng, hãy xác định tâm của ba đường tròn đó.

**Hướng dẫn.**



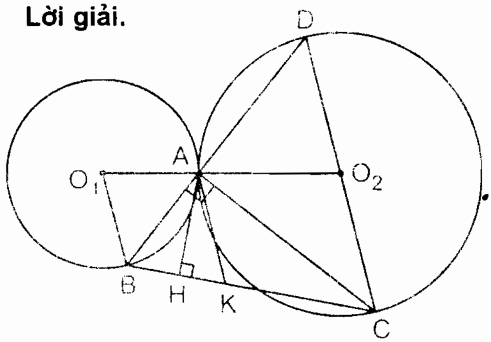

*Phân tích.* Giả sử $O_1$, $O_2$, $O_3$ lần lượt là tâm của ba đường tròn *(xem hình vẽ trên)*. Gọi giao điểm của AB, AC với $(O_3)$ lần lượt là D, E. Theo *bài 33* ta có $O_1$, A, $O_2$ thẳng hàng và $DO_3 // AO_1$ ; $EO_3 // AO_2$ suy ra D, $O_3$, E thẳng hàng hay DE là đường kính của $(O_3)$. Do đó $O_3$ là trung điểm của DE.

Từ phân tích trên, ta dễ dàng xác định được tâm của ba đường tròn.

**Ví dụ 2.** Hai đường tròn $(O_1 ; R_1)$ và $(O_2 ; R_2)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Hai điểm B, C lần lượt di chuyển trên $(O_1)$, $(O_2)$ sao cho $\widehat{BAC} = 90^o$. Dựng AH vuông góc với BC. Chứng minh rằng $AH \le \frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}$.

*(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 phổ thông năng khiếu ĐHQG TP. Hồ Chí Minh năm học 2001-2002)*

**Lời giải.**




Kéo dài BA, cắt $(O_2)$ tại D. Do $\widehat{DAC} = 180^o - \widehat{BAC} = 90^o$ nên D, $O_2$, C thẳng hàng. Theo *bài 33* ta có $BO_1 // DO_2$.

Dựng đường thẳng qua A, song song với $BO_1$, cắt BC tại K. Theo định lí Ta-lét ta có

$$\frac{AK}{CD} = \frac{BA}{BD} = \frac{AO_1}{O_1O_2} \Rightarrow \frac{AK}{2R_2} = \frac{R_1}{R_1+R_2}$$

$$\Rightarrow AK = \frac{2R_1R_2}{R_1+R_2} \Rightarrow AH \le AK = \frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ H trùng với K

$\Leftrightarrow AH // BO_1 // CO_2$

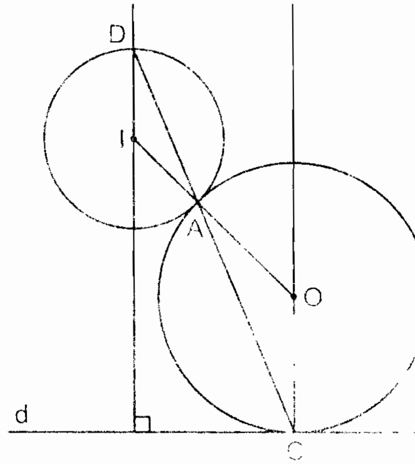
$\Leftrightarrow BC \perp BO_1$ và $BC \perp CO_2$

$\Leftrightarrow$ BC là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (điều này không xảy ra với hai bán kính $R_1$ và $R_2$ bất kì).

**Ví dụ 3.** Cho đường tròn (I ; R) và đường thẳng d không cắt (I). Điểm C nằm trên d. Dựng (O) tiếp xúc ngoài với (I) và tiếp xúc với d tại C.

**Lời giải.**

*Phân tích.* Giả sử ta dựng được (O) thỏa mãn điều kiện đề bài. Gọi A là điểm tiếp xúc của (O) và (I). Đường thẳng CA cắt (I) tại D. Theo *bài 33* ta có ID // OC, mặt khác OC $\perp$ d nên ID $\perp$ d, suy ra D xác định.




*Dựng hình.* Qua I dựng đường thẳng vuông góc với d, cắt (I) tại hai điểm phân biệt. Gọi D là một trong hai điểm đó mà giao điểm A của CD và (I) nằm trong đoạn CD.

Qua C dựng đường thẳng vuông góc với d, cắt IA tại O, ta có (O ; OC) là đường tròn cần dựng.

*Chứng minh.* Theo cách dựng ta có tam giác IDA cân tại I ; điểm A thuộc đoạn CD và ID // OC (cùng vuông góc với d) nên $\widehat{OCD} = \widehat{IDA} = \widehat{IAD} = \widehat{OAC}$, suy ra tam giác OAC cân tại O suy ra (O ; OC) tiếp xúc với d tại C và tiếp xúc với (I) tại A.

*Biện luận.* Theo cách dựng hình, dễ thấy bài toán tồn tại duy nhất một nghiệm hình.

● Ta còn nhận thấy bài toán đảo của *bài 33* cũng đúng *(Hai đường tròn (O ; R) và (O' ; R') tiếp xúc ngoài với nhau tại A, có hai bán kính OC và O'D song song với nhau và nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ là OO'. Chứng minh rằng C, A, D thẳng hàng)* và *bài 33* còn có thể mở rộng cho hai đường tròn tiếp xúc trong nhau. Các bài toán này có rất nhiều ứng dụng thú vị khác, mong các bạn cùng trao đổi.


# ĐỔI BIẾN ĐỂ CHỨNG MINH MỘT DẠNG BẤT ĐẲNG THỨC

LÊ XUÂN ĐẠI
*(THPT chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc)*

Đối với một số bài toán chứng minh bất đẳng thức chứa ba biến a, b, c không âm, có vai trò như nhau, bằng cách đặt :

$p = a + b + c$ ; $q = ab + bc + ca$ ; $r = abc$,

ta có $pq - r = (a + b)(b + c)(c + a)$ ; $p^2 + q = (a + b)(b + c) + (b + c)(c + a) + (c + a)(a + b)$ ;

$p^2 - 2q = a^2 + b^2 + c^2$ ;

$p^3 - 3pq + 3r = a^3 + b^3 + c^3$.

Biến đổi bất đẳng thức chứa ba biến a, b, c nói trên về bất đẳng thức chứa p, q, r, phép chứng minh đôi khi sẽ đơn giản hơn cùng với việc áp các bất đẳng thức đúng sau :

$$p^2 \geq 3q\ ; \quad (1)$$

$$p^3 \geq 27r\ ; \quad (2)$$

$$q^2 \geq 3pr\ ; \quad (3)$$

$$pq \geq 9r\ ; \quad (4)$$

$$p^3 - 4pq + 9r \geq 0. \quad (5)$$

Chúng ta cũng dễ dàng nhận thấy rằng p, q, r và các biểu thức chứa p, q, r ở trên đều không âm. Việc chứng minh các đẳng thức và bất đẳng thức trên xin dành cho bạn đọc. Sau đây các bạn hãy theo dõi một vài ví dụ minh họa.

**Ví dụ 1.** Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng :

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 2(1 + a + b + c).$$

**Lời giải.** Do $r = abc = 1$, với cách đổi biến trên, bất đẳng thức trở thành :

$$pq - r \geq 2(1 + p) \Leftrightarrow pq - 1 \geq 2(1 + p)$$
$$\Leftrightarrow p(q - 2) \geq 3.$$

Cũng do $r = 1$, từ (2) suy ra $p \geq 3$ ;
từ (3) suy ra $q \geq 3$.

Suy ra $p(q - 2) \geq 3$ là bất đẳng thức đúng, suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow p = q = 3$
$\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

**Ví dụ 2.** Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng :

$$abc + \frac{12}{ab + bc + ca} \geq 5.$$

**Lời giải.** Với cách đổi biến trên, bất đẳng thức trở thành $r + \dfrac{12}{q} \geq 5.$ (*)

Do $p = a + b + c = 3$, theo (5) ta có $27 - 12q + 9r \geq 0$, suy ra

$$r \geq \frac{4q - 9}{3} \Rightarrow r + \frac{12}{q} \geq \frac{4q - 9}{3} + \frac{12}{q}. \quad (**)$$

Mặt khác, $\dfrac{4q - 9}{3} + \dfrac{12}{q} \geq 5$

$\Leftrightarrow 4q^2 - 9q + 36 \geq 15q \Leftrightarrow (q - 3)^2 \geq 0$, là bất đẳng thức đúng với mọi q. Từ (*) và (**) suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

**Ví dụ 3.** Cho ba số không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca + abc = 4$. Chứng minh rằng :

$$3(a^2 + b^2 + c^2) + abc \geq 10.$$

**Lời giải.** Do $q + r = ab + bc + ca + abc = 4$, với cách đổi biến trên, bất đẳng thức trở thành $3(p^2 - 2q) + r \geq 10 \Leftrightarrow 3p^2 - 6 \geq 7q$.

Mặt khác, từ (5) $\Rightarrow p^3 - 4pq + 9(q + r) \geq 9q$

$$\Rightarrow p^3 + 36 \geq 9q + 4pq \Rightarrow q \leq \frac{p^3 + 36}{4p + 9}.$$

Vì vậy để hoàn thành bài toán, ta chỉ cần chứng minh $3p^2 - 6 \geq 7 \cdot \dfrac{p^3 + 36}{4p + 9}$.

Thật vậy, từ (1) và (2) suy ra :

$$4 = q + r \le \frac{p^2}{3} + \frac{p^3}{27} \Rightarrow p^3 + 9p^2 - 108 \ge 0$$

$\Rightarrow (p-3)(p^2 + 12p + 36) \ge 0 \Rightarrow p \ge 3.$

Từ đó ta có $3p^2 - 6 \ge 7 \cdot \dfrac{p^3 + 36}{4p + 9}$

$\Leftrightarrow 12p^3 - 24p + 27p^2 - 54 \ge 7p^3 + 252$

$\Leftrightarrow 5p^3 + 27p^2 - 24p - 306 \ge 0$

$\Leftrightarrow (p-3)(5p^2 + 42p + 102) \ge 0$ là bất đẳng thức đúng.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

**Ví dụ 4.** Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 3$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} \ge$

$$\ge \frac{a+b+c}{2(ab+bc+ca)} + \frac{3}{a+b+c}.$$

**Lời giải.** Do $q = ab + bc + ca = 3$, với cách đổi biến trên, bất đẳng thức trở thành :

$$\frac{p^2+q}{pq-r} \ge \frac{p}{2q} + \frac{3}{p} \Leftrightarrow \frac{p^2+3}{3p-r} \ge \frac{p}{6} + \frac{3}{p}$$

$\Leftrightarrow (p^2 + 3)6p - (p^2 + 18)(3p - r) \ge 0$

$\Leftrightarrow 6p^3 + 18p - 3p^3 - 54p + p^2r + 18r \ge 0$

$\Leftrightarrow 3p^3 - 36p + p^2r + 18r \ge 0$

$\Leftrightarrow 3(p^3 - 12p + 9r) + p^2r - 9r \ge 0$

$\Leftrightarrow 3(p^3 - 4pq + 9r) + r(p^2 - 9) \ge 0.$

Do $q = 3$, từ (1) suy ra $p^2 \ge 9$, kết hợp với (5) ta có bất đẳng thức trên đúng, suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

**Ví dụ 5.** Cho ba số a, b, c thuộc (0 ; 1) thỏa mãn điều kiện $abc = (1-a)(1-b)(1-c)$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 + 5abc \ge 1$.

**Lời giải.** Ta có $abc = (1-a)(1-b)(1-c)$ $= 1 - (a + b + c) + (ab + bc + ca) - abc$, suy ra $2r = 1 - p + q$. Với cách đổi biến trên, bất đẳng thức trở thành :

$p^3 - 3pq + 3r + 5r \ge 1$

$\Leftrightarrow p^3 - 3pq + 8r \ge 1$

$\Leftrightarrow p^3 - 3pq + 4(1 - p + q) \ge 1$

$\Leftrightarrow p^3 - 4p + 3 \ge q(3p - 4).$ (***)

Chú ý rằng $1 - p + q = 2r > 0$ và $p^2 \ge 3q$ suy ra $p - 1 < q \le \dfrac{p^2}{3}$.

Ta xét ba trường hợp sau :

*Trường hợp 1.* Nếu $p \le 1$ thì $p^3 - 4p + 3 =$ $= (1-p)(3 - p - p^2) \ge 0 > q(3p - 4)$ ;

*Trường hợp 2.* Nếu $1 < p < \dfrac{4}{3}$ thì :

$3p - 4 < 0$ và $0 < p - 1 < q$, suy ra :

$(p^3 - 4p + 3) - q(3p - 4) > (p^3 - 4p + 3) -$ $- (p - 1)(3p - 4) = (p - 1)^3 > 0$ ;

*Trường hợp 3.* Nếu $p \ge \dfrac{4}{3}$ thì :

$$(p^3 - 4p + 3) - q(3p - 4) >$$

$$> (p^3 - 4p + 3) - \frac{p^2}{3}(3p - 4) =$$

$$= \frac{(2p-3)^2}{2} \ge 0.$$

Như vậy, trong mọi trường hợp ta đều có (***) là bất đẳng thức đúng, suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $a = b = c = \dfrac{1}{2}$.

## BÀI TẬP ÁP DỤNG

**Bài 1.** Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng :

$(a + b)(b + c)(c + a) + 7 \ge 5(a + b + c).$

**Bài 2.** Cho ba số dương a, b, c.

Chứng minh rằng :

$$2(1+abc) + \sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} \ge$$

$$\ge (1 + a)(1 + b)(1 + c).$$

**Bài 3.** Cho ba số không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng $0 \le ab + bc + ca - 2abc \le \dfrac{7}{27}$.

# MỘT BẤT ĐẲNG THỨC TỔNG QUÁT

TRẦN ANH NGỌC
*(Lớp 11A1, THPT Hậu Lộc I, Hậu Lộc, Thanh Hóa)*

Qua *bài toán 1* dưới đây, tôi muốn giới thiệu đến các bạn một bất đẳng thức tổng quát, có thể sử dụng để chứng minh nhiều bất đẳng thức khác.

**Bài toán 1.** Cho các số dương a, b, c, k, m, n. Chứng minh rằng :

$$(a+k)(b+m)(c+n) \geq (\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{kmn})^3. \quad (*)$$

**Lời giải.** Đặt $A = (a + k)(b + m)(c + n)$
$= abc + )(abn + bck + cam) +$
$+ (amn + kbn + cmk) + kmn.$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có $A \geq$

$$\geq abc + 3\sqrt[3]{(abc)^2 kmn} + 3\sqrt[3]{abc(kmn)^2} + kmn$$

$= (\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{kmn})^3$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ k=m=n. \end{cases}$

● Sau đây là một số bài toán ứng dụng bất đẳng thức (*).

**Bài toán 2.** Cho a ; b ; c là các số dương thỏa mãn $a+b+c=\frac{3}{2}$. Chứng minh rằng :

$$B=\left(1+\frac{1}{a^3}\right)\left(1+\frac{1}{b^3}\right)\left(1+\frac{1}{c^3}\right) \geq 729.$$

**Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có :

$$B \geq \left(1+\frac{1}{abc}\right)^3.$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương ta có :

$$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{abc} \geq 8.$$

Suy ra $B \geq \left(1+\frac{1}{abc}\right)^3 \geq (1+8)^3 = 729.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{2}.$

**Bài toán 3.** Cho a ; b ; c là các số dương thỏa mãn $abc \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(a+bc)\left(\frac{b}{2}+2ca\right)\left(\frac{c}{3}+3ab\right)$.

**Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có :

$$P \geq \left(\sqrt[3]{\frac{abc}{6}}+\sqrt[3]{6a^2b^2c^2}\right)^3 \geq (1+6)^3 = 343.$$

Đẳng thức xảy ra

$\Leftrightarrow a=\frac{b}{2}=\frac{c}{3}=\frac{1}{2}$ ; $bc=2ca=3ab$ ; $abc=6$

$\Leftrightarrow a=1$ ; $b=2$ ; $c=3$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 343.

**Bài toán 4.** Cho a ; b ; c là các số dương thỏa mãn $abc = 8$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q=\frac{12-(a+b+c)}{(a+2b)(b+2c)(c+2a)}$.

**Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương ta có $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}=6$, suy ra $12 - (a + b + c) \leq 6$.

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức (*) ta có

$(a+2b)(b+2c)(c+2a) \geq (\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{8abc})^3$

hay $(a + 2b)(b + 2c)(c + 2a) \geq 216$.

Suy ra $Q \leq \frac{6}{216}=\frac{1}{36}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 2$.

Vậy Q đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{36}$.

# HÃY ĐẶT NHỮNG CÂU HỎI NGHI VẤN !

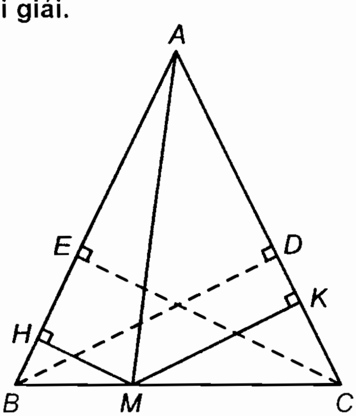
ĐẶNG VĂN BIỂU
*(THCS Đông Dư, Gia Lâm, Hà Nội)*

Lật đi lật lại một vấn đề bằng cách tự đặt ra và giải quyết các câu hỏi nghi vấn, sẽ giúp chúng ta hệ thống, nắm vững và mở rộng được kiến thức ; tạo được cách học tập chủ động, sáng tạo. Xin đơn cử bằng một ví dụ.

● *Bài toán sau khá đơn giản và quen thuộc :*

**Bài toán 1.** Cho tam giác $ABC$ cân tại $A$. Qua điểm $M$ bất kì trên cạnh $BC$, dựng các đoạn $MH$, $MK$ lần lượt vuông góc với $AB$, $AC$ ($H$ thuộc đường thẳng $AB$, $K$ thuộc đường thẳng $AC$). Chứng minh rằng $MH + MK$ có giá trị không phụ thuộc vào vị trí của điểm $M$ trên cạnh $BC$.

**Lời giải.**




Trước hết ta dựng $BD$, $CE$ lần lượt vuông góc với $AC$, $AB$ ($D$ thuộc $AC$, $E$ thuộc $AB$), ta nhận thấy $BD = CE$ và nếu $M$ trùng với $B$ hoặc $C$ thì $MH + MK = BD = CE$. Ta sẽ chứng minh điều này luôn đúng với mọi điểm $M$ nằm trên đoạn $BC$.

Thật vậy, ta có $S_{ABM} + S_{ACM} = S_{ABC}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(AB \cdot MH + AC \cdot MK) = \frac{1}{2}AB \cdot CE$

$\Leftrightarrow AB(MH + MK) = AB \cdot CE$

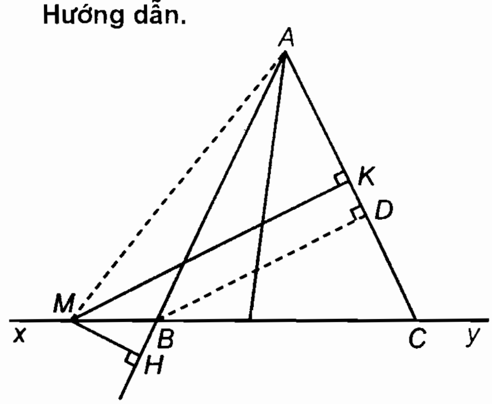
$\Leftrightarrow MH + MK = CE = BD$. Suy ra đpcm.

● *Bây giờ, chúng ta hãy thử đặt những câu hỏi nghi vấn nhé ! Đầu tiên ta có thể thấy giả thiết cho biết điểm M thuộc cạnh BC, vậy nếu điểm M nằm trên đường thẳng BC thì sao ? Liệu kết quả trên có còn đúng không hay nó sẽ biến đổi như thế nào ?*

Tương tự như lời giải trên, ta sẽ tìm ngay được câu trả lời cho câu hỏi này, đó là kết quả của bài toán sau :

**Bài toán 2.** Cho tam giác $ABC$ cân tại $A$. Qua điểm $M$ bất kì trên đường thẳng $BC$ và nằm ngoài cạnh $BC$, dựng các đoạn $MH$, $MK$ lần lượt vuông góc với $AB$, $AC$ ($H$ thuộc đường thẳng $AB$, $K$ thuộc đường thẳng $AC$). Chứng minh rằng $|MH - MK|$ có giá trị không phụ thuộc vào vị trí của điểm $M$.

**Hướng dẫn.**

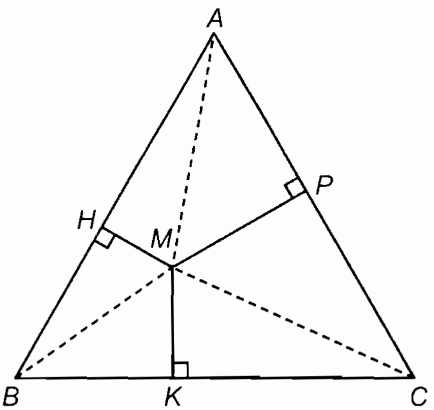



Ta có $|S_{ABM} - S_{ACM}| = S_{ABC}$, suy ra $|MH - MK| = BD = CE$. Suy ra đpcm.

● *Ta cũng thấy ngay rằng nếu ABC là tam giác đều thì các kết quả trên đương nhiên* *vẫn đúng, không những vậy chúng còn đúng khi M chạy trên cả ba cạnh của tam giác hoặc cả ba đường thẳng chứa ba cạnh đó. Nhưng nếu M là điểm bất kì thuộc miền trong của tam giác ABC thì sao nhỉ ?*

Câu trả lời cũng dễ dàng được tìm ra và ta có bài toán sau :

**Bài toán 3.** Cho tam giác đều $ABC$. Qua điểm $M$ bất kì thuộc miền trong của tam giác, dựng các đoạn $MH$, $MK$, $MP$ lần lượt vuông góc với các cạnh $AB$, $BC$, $CA$ ($H$, $K$, $P$ lần lượt thuộc $AB$, $BC$, $CA$). Chứng minh rằng $MH + MK + MP$ có giá trị không phụ thuộc vào vị trí của điểm $M$ thuộc miền trong của tam giác $ABC$.




$MH + MK + MP$ có giá trị không đổi, luôn bằng độ dài đường cao của tam giác $ABC$. Các bạn hãy tự chứng minh nhé.

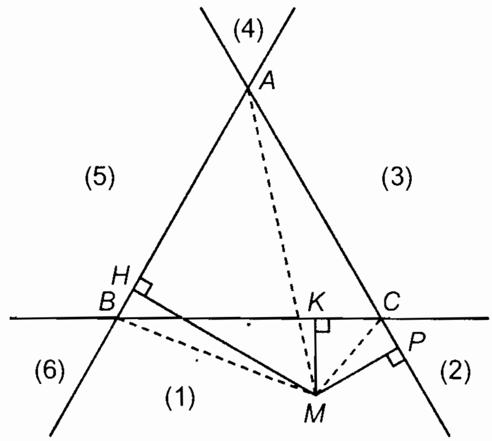
● *Tiếp tục xem xét kết quả của bài toán trên khi điểm M thuộc miền ngoài của tam giác đều ABC, ta tìm được kết quả sau :*

**Bài toán 4.** Cho tam giác đều $ABC$. Qua điểm $M$ bất kì thuộc miền ngoài của tam giác, dựng các đoạn $MH$, $MK$, $MP$ lần lượt vuông góc với $AB$, $BC$, $CA$ ($H$, $K$, $P$ lần lượt thuộc các đường thẳng $AB$, $BC$, $CA$). Chứng minh rằng một trong các biểu thức sau có giá trị không đổi khi điểm $M$ thuộc miền ngoài của tam giác $ABC$ :

$$Q_1 = |MH + MK - MP| ;$$
$$Q_2 = |MP + MH - MK| ;$$
$$Q_3 = |MK + MP - MH|.$$

**Hướng dẫn.**

Lần lượt xét các trường hợp điểm $M$ thuộc các miền (1), (2), (3), (4), (5), (6).

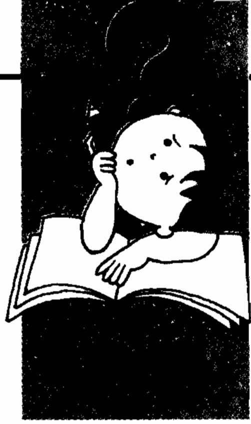



● *Thế còn khi ABC là tam giác bất kì thì điều gì sẽ xảy đến với các kết quả ở bài toán 1 và bài toán 3 ?*

Đề nghị các bạn chứng minh *bài toán 4* và hai bài toán sau đây, xem như bài tập.

**Bài toán 5.** Cho tam giác $ABC$ có độ dài các cạnh $AB = c$, $AC = b$ ($c \le b$) và độ dài các đường cao xuất phát từ $B$, $C$ lần lượt là $h_b$, $h_c$. Qua điểm $M$ bất kì trên cạnh $BC$, dựng các đoạn $MH$, $MK$ lần lượt vuông góc với $AB$, $AC$ ($H$ thuộc đường thẳng $AB$, $K$ thuộc đường thẳng $AC$). Chứng minh rằng $h_b \le MH + MK \le h_c$.

**Bài toán 6.** Cho tam giác $ABC$ có độ dài các cạnh $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ ($c \le b \le a$) và độ dài các đường cao xuất phát từ $A$, $C$ lần lượt là $h_a$, $h_c$. Qua điểm $M$ bất kì thuộc miền trong của tam giác, dựng các đoạn $MH$, $MK$, $MP$ lần lượt vuông góc với các cạnh $AB$, $BC$, $CA$ ($H$, $K$, $P$ lần lượt thuộc các đường thẳng $AB$, $BC$, $CA$). Chứng minh rằng $h_a \le MH + MK + MP \le h_c$.



# ỨNG DỤNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC TRONG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH


CAO MINH QUANG

*(THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)*



***(Tiếp theo kì trước)***


Trong số trước, chúng ta đã đề cập đến ứng dụng của bất đẳng thức trong giải phương trình. Kì này, chúng ta sẽ tiếp tục với ứng dụng của bất đẳng thức trong giải hệ phương trình.

● **Ứng dụng bất đẳng thức trong giải hệ phương trình**

**Ví dụ 5.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3y = 16 \\ 3x + y = 8. \end{cases}$$

**Lời giải.** Từ phương trình thứ nhất, ta nhận thấy $x$, $y$ cùng dấu, kết hợp phương trình thứ hai suy ra $x$, $y$ cùng dương. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 4 số dương ta có $16 = x^3y = xxxy \le \left(\dfrac{3x+y}{4}\right)^4 = \dfrac{8^4}{4^4} = 16.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 2$. Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(2\ ;\ 2)$.

**Ví dụ 6.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[4]{32-x} - y^2 = -3 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt{32-x} + 6y = 24. \end{cases}$$

**Lời giải.** Cộng theo từng vế hai phương trình của hệ ta được

$$(\sqrt{x} + \sqrt{32-x}) + (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32-x}) = \\ = y^2 - 6y + 21 \quad (*)$$

Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-ski ta có

$\sqrt{x} + \sqrt{32-x} \le \sqrt{(1+1)(x+32-x)} = 8$ ;

$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32-x} \le \sqrt{(1+1)(\sqrt{x} + \sqrt{32-x})} \le$

$\le \sqrt{2\sqrt{(1+1)(x+32-x)}} = 4$. Suy ra

$(\sqrt{x} + \sqrt{32-x}) + (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32-x}) \le 12$ ;

Mặt khác $y^2 - 6y + 21 = (y-3)^2 + 12 \ge 12$.

Suy ra $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{32-x} \\ \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{32-x} \\ y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 3. \end{cases}$

Thử lại, ta thấy $(x\ ;\ y) = (16\ ;\ 3)$ nghiệm đúng hệ phương trình. Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x\ ;\ y) = (16\ ;\ 3)$.

**Ví dụ 7.** Tìm các số thực dương $x$, $y$, $z$ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = xy + yz + zx. \end{cases}$$

**Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có $x^2 + 2\sqrt{x} = x^2 + \sqrt{x} + \sqrt{x} \ge$

$\ge 3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}\sqrt{x}} = 3x$ suy ra $x^2 + 2\sqrt{x} \ge 3x$.

Tương tự, $y^2 + 2\sqrt{y} \ge 3y$ ; $z^2 + 2\sqrt{z} \ge 3z$.

Mặt khác, vì $x + y + z = 3$ nên cộng theo từng vế ba bất đẳng thức trên ta có

$x^2 + y^2 + z^2 + 2(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \ge 3(x + y + z)$

$= (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$

suy ra $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \ge xy + yz + zx$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = \sqrt{x}$ ; $y^2 = \sqrt{y}$ ; $z^2 = \sqrt{z}$ ; $x + y + z = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Vậy bộ số thực dương $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ duy nhất thỏa mãn hệ phương trình là (1 ; 1 ; 1).

**Ví dụ 8.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3(x^2+y^2+z^2)=1 \\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=xyz(x+y+z)^3. \end{cases}$$

*(Phần Lan _ 1997)*

**Lời giải.**

Ta có các bất đẳng thức quen thuộc :

$$3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2$$

suy ra $1 \geq (x+y+z)^2$ ; (1)

$$3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) \geq (|xy|+|yz|+|zx|)^2$$

suy ra

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geq x^2|yz|+y^2|zx|+z^2|xy|.$$

Suy ra $1 \cdot (x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) \geq$

$$\geq (x+y+z)^2 \cdot (x^2|yz|+y^2|zx|+z^2|xy|) \geq$$

$$\geq xyz(x+y+z)^3$$

$$\Rightarrow x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geq xyz(x+y+z)^3. \quad (2)$$

Đẳng thức xảy ra ở (2) $\Rightarrow$ đẳng thức xảy ra ở (1) $\Rightarrow$ $x=y=z=\pm\frac{1}{3}$, đều nghiệm đúng hệ phương trình. Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x ; y ; z)$ là $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ và $\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

*Tác giả bài viết rất mong nhận được những ý kiến đóng góp và trao đổi của bạn đọc. Để kết thúc bài viết này xin nêu một số bài tập rèn luyện.*

**Bài 1.** Giải các phương trình

1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$ ;

2) $\sqrt{6-x}+\sqrt{x-4}=x^2-10x+27$ ;

3) $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+2x+10}=\sqrt{29}$ ;

4) $\sqrt{17+8x-2x^2}+\sqrt{4+12x-3x^2}=$
$=x^2-4x+13$ ;

5) $\sqrt[4]{2-x^4}=x^2-3x+3.$

**Bài 2.** Giải các hệ phương trình

1) $\begin{cases} (x+3y+4z)^2=26(x^2+y^2+z^2) \\ x^3+y^3+z^3=92 ; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2005x^{2006}-2006y^{2005}+1=0 \\ x^2+xy+y^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x+y) ; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^4+y^4+z^4=xyz ; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2^x+2^y=1 \\ x+y=-2. \end{cases}$

**Bài 3.** Tìm các số thực dương $x$, $y$, $z$ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} xy+yz+xz=12 \\ xyz=2+x+y+z. \end{cases}$$

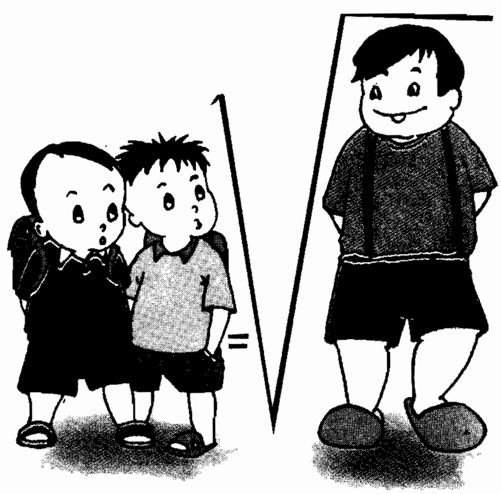
*(Đài Loan - 1998)*

**Bài 4.** Tìm các số thực dương $x$, $y$, $z$, $t$ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z+t=12 \\ xyzt=27+xy+xz+xt+yz+yt+zt. \end{cases}$$

*(Anh - 1996)*

**Ghi chú.** Hướng dẫn giải các bài tập này sẽ được đăng trên TTT2 số 43.




# MỘT BẤT ĐẲNG THỨC TRỊ TUYỆT ĐỐI

ĐINH VĂN SƠN - PHẠM QUỐC DUẨN
*(Lớp 10 Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh)*

Bất đẳng thức chúng tôi muốn nói đến là :

$$|a+b|+|a-b| \le 2\alpha \qquad (*)$$

(với mọi $\alpha \ge 0$ và $a$ ; $b \in [-\alpha ; \alpha]$).

Sử dụng bất đẳng thức này ta có thể chứng minh được nhiều kết quả thú vị. Xin giới thiệu với các bạn một phép chứng minh bất đẳng thức (*) và một ứng dụng của nó.

*Chứng minh.* Gọi max $\{x ; y\}$ là giá trị lớn nhất trong hai số $x$ ; $y$, trước hết ta có

$$x+y+|x-y| = \begin{cases} 2x \text{ với } x \ge y \\ 2y \text{ với } x \le y \end{cases}$$

nên $x+y+|x-y| = 2\max\{x ; y\}$. (1)

Áp dụng (1) ta có $(|a+b|+|a-b|)^2 =$
$= (a+b)^2 + (a-b)^2 + 2\cdot|a+b|\cdot|a-b|$
$= 2(a^2+b^2+|a^2-b^2|) = 4\cdot\max\{a^2 ; b^2\}$,
suy ra

$$|a+b|+|a-b| = 2\cdot\max\{|a| ; |b|\}. \qquad (2)$$

Từ (2) suy ra bất đẳng thức (*).

**Bài toán 1.** Cho đa thức $f(x) = ax^2+bx+c$ thỏa mãn điều kiện $|f(x)| \le \alpha$ với mọi $\alpha$ dương và $x \in [-1 ; 1]$. Chứng minh rằng :

$$|a|+|b|+|c| \le 3\alpha.$$

**Lời giải.** Đặt $f(1) = M$ ; $f(-1) = N$ ; $f(0) = P$

ta có $|M|$ ; $|N|$ ; $|P| \le \alpha$ và $\begin{cases} M = a+b+c \\ N = a-b+c \\ P = c \end{cases}$

suy ra $a = \dfrac{M+N}{2} - P$ ; $b = \dfrac{M-N}{2}$ ; $c = P$

$$\Rightarrow |a|+|b|+|c| = \left|\frac{M+N}{2} - P\right| + \left|\frac{M-N}{2}\right| + |P|$$

$$\le \left|\frac{M+N}{2}\right| + \left|\frac{M-N}{2}\right| + 2|P| \le 2\left|\frac{\alpha}{2}\right| + 2|P|$$

(áp dụng bất đẳng thức (*))

$$\le |\alpha| + 2|\alpha| = 3|\alpha| = 3\alpha$$

$\Rightarrow |a|+|b|+|c| \le 3\alpha$ (đpcm).

**Bài toán 2.** Cho đa thức

$$f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$$

thỏa mãn điều kiện $|f(x)| \le \alpha$ với mọi $\alpha$ dương và $x \in [-1 ; 1]$. Chứng minh rằng :

$$|a|+|b|+|c|+|d| \le 7\alpha.$$

**Lời giải.** Đặt

$$f(1) = M ; f(-1) = N ; f\left(\frac{1}{2}\right) = P ; f\left(-\frac{1}{2}\right) = Q$$

ta có $|M|$ ; $|N|$ ; $|P|$ ; $|P| \le \alpha$ và
$M = a+b+c+d$ ; $N = -a+b-c+d$ ;

$$P = \frac{a}{8}+\frac{b}{4}+\frac{c}{2}+d \text{ ; } Q = -\frac{a}{8}+\frac{b}{4}-\frac{c}{2}+d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6a = 4(M-N-2P+2Q) \\ 6b = 4(M+N-P-Q) \\ 6c = -M+N+8P-8Q \\ 6d = -M-N+4P+4Q \end{cases}$$

$\Rightarrow 6(|a|+|b|+|c|+|d|) =$
$= 4|M-N-2P+2Q| + 4|M+N-P-Q| +$
$+ |-M+N+8P-8Q| + |-M-N+4P+4Q|$
$\le 4|M-N| + 8|P-Q| + 4|M+N| + 4|P+Q|$
$+ |M-N| + 8|P-Q| + |M+N| + 4|P+Q|$
$= 5(|M-N| + |M+N|) +$
$+ 8(|P-Q| + |P+Q|) + 8|P-Q|$
$\le 5\cdot2\alpha + 8\cdot2\alpha + 8|P| + 8|Q| \le 26\alpha + 16\alpha = 42\alpha$
$\Rightarrow |a|+|b|+|c|+|d| \le 7\alpha$ (đpcm).

Hẹn gặp lại các bạn với các dạng khác của bất đẳng thức (*).


# MỘT DẠNG TOÁN SO SÁNH BIỂU THỨC

NGUYỄN CÔNG CHUẨN
*(THPT Phúc Trạch, Hương Khê, Hà Tĩnh)*

Một nội dung khá phổ biến trong các kì thi cuối cấp THCS, đó là *"so sánh biểu thức"*.

Sách bài tập Toán 9, tập 1 có bài 29 (trang 7), nội dung như sau :

**Bài toán 1.** So sánh (không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi)

$$\sqrt{2003}+\sqrt{2005} \text{ và } 2\sqrt{2004}.$$

● Bài toán có khá nhiều lời giải, tuy nhiên bài viết muốn nhắc đến lời giải sử dụng đẳng thức $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ (*)

(đã được đề cập trên tạp chí TTT2 số 38) :

**Lời giải.** Áp dụng đẳng thức (*) ta có

$$\sqrt{2005}-\sqrt{2004}=\frac{1}{\sqrt{2005}+\sqrt{2004}};$$

$$\sqrt{2004}-\sqrt{2003}=\frac{1}{\sqrt{2004}+\sqrt{2003}}.$$

Mặt khác,

$$\sqrt{2005}+\sqrt{2004}>\sqrt{2004}+\sqrt{2003}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2005}+\sqrt{2004}}<\frac{1}{\sqrt{2004}+\sqrt{2003}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2005}-\sqrt{2004}<\sqrt{2004}-\sqrt{2003}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2005}+\sqrt{2003}<2\sqrt{2004}.$$

● Khai thác, mở rộng *bài toán 1* sẽ củng cố và rèn luyện thêm cho chúng ta về dạng toán này.

Trước hết ta mở rộng *bài toán 1* :

**Bài toán 2.** Với mọi số nguyên dương $a$, hãy so sánh $\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}$ và $2\sqrt{a}$.

Tương tự lời giải *bài toán 1*, ta có kết quả

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}<2\sqrt{a}. \qquad (1)$$

Với $a = 2n$ thì (1) trở thành

$$\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}<2\sqrt{2n}. \qquad (2)$$

Lần lượt cho $n$ các giá trị 1, 2, 3, ... từ (2) ta có $\sqrt{1}+\sqrt{3}<2\sqrt{2}$ ; $\sqrt{3}+\sqrt{5}<2\sqrt{4}$ ; ... ; $\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}<2\sqrt{2n}$.

Cộng theo từng vế các bất đẳng thức trên ta có $\sqrt{1}+2\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\ldots$

$$\ldots+2\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}<2(\sqrt{2}+\sqrt{4}+\ldots\sqrt{2n})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\ldots$$

$$\ldots+\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1}>\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}.$$

Từ đó ta có bài toán :

**Bài toán 3.** Với mọi số nguyên dương $n$, chứng minh rằng $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots$

$$\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n}}>\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}.$$

Với $a = 2n + 1$ thì (1) trở thành

$$\sqrt{2n}+\sqrt{2n+2}<2\sqrt{2n+1}. \qquad (3)$$

Lần lượt cho $n$ các giá trị 0, 1, 2, ... từ (3) ta có $\sqrt{0}+\sqrt{2}<2\sqrt{1}$ ; $\sqrt{2}+\sqrt{4}<2\sqrt{3}$ ; ... ; $\sqrt{2n}+\sqrt{2n+2}<2\sqrt{2n+1}$.

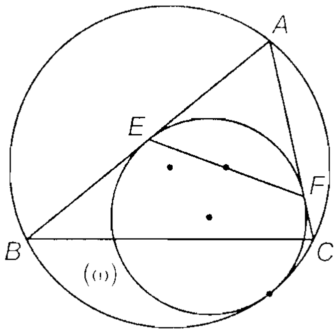
Cộng theo từng vế các bất đẳng thức trên ta có $2\sqrt{2}+2\sqrt{4}+\ldots+2\sqrt{2n}+\sqrt{2n+2}<$

# ĐỊNH LÍ LYNESS MỞ RỘNG VÀ CÁC HỆ QUẢ

NGUYỄN MINH HÀ *(ĐHSP Hà Nội)*

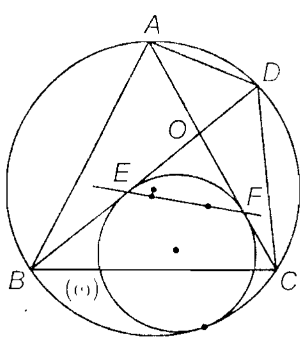
Trong hình học phẳng có một định lí, khá nổi tiếng và quen thuộc.

**Định lí Lyness.** Nếu đường tròn $(\omega)$ tiếp xúc trong với đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ và tiếp xúc với cạnh $AB$, $AC$ của tam giác tại $E$ và $F$ thì $EF$ đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác.




Định lí Lyness có một cách mở rộng rất tự nhiên và hấp dẫn.

**Định lí Lyness mở rộng.** Nếu đường tròn $(\omega)$ tiếp xúc trong với đường tròn ngoại tiếp của tứ giác nội tiếp $ABCD$ và tiếp xúc với các đoạn $OB$, $OC$ ($O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$) tại $E$, $F$ thì $EF$ đi qua tâm đường tròn nội tiếp các tam giác $ABC$, $DBC$.



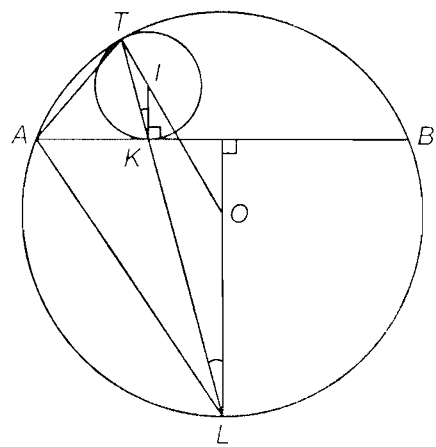

Để chứng minh *định lí Lyness mở rộng*, ta cần có hai bổ đề.

**Bổ đề 1.** $AB$ là một dây của đường tròn $(O)$. Đường tròn $(I)$ tiếp xúc với đoạn $AB$ tại $K$ và tiếp xúc trong với $(O)$ tại $T$ ; $KT$ cắt $(O)$ tại $L$ ($L$ khác $T$). Ta có

a) $L$ là trung điểm của cung $AB$ (không chứa $T$).

b) $LA^2 = LK \cdot LT$.

**Chứng minh.** Ta có $O$, $I$, $T$ thẳng hàng $\Rightarrow \widehat{KTI} = \widehat{LTO}$.

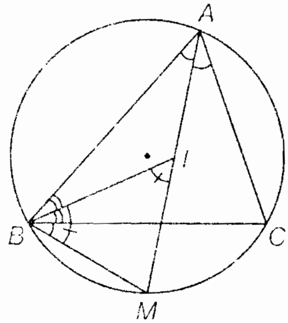



Từ đó, với chú ý rằng các tam giác $KTI$, $LTO$ theo thứ tự cân tại $I$, $O$, ta có $\widehat{TKI} = \widehat{TLO}$, suy ra $KI \parallel LO$ (hai góc đồng vị bằng nhau) $\Rightarrow LO \perp AB$ (vì $KI \perp AB$) $\Rightarrow$ $L$ là trung điểm cung $AB$ (không chứa $T$).

Suy ra $\widehat{LAB} = \widehat{LTA}$ hay $\widehat{LAK} = \widehat{LTA}$ $\Rightarrow$ hai tam giác $ATL$, $KAL$ đồng dạng $\Rightarrow LA^2 = LK \cdot LT$.

**Bổ đề 2.** Điểm $M$ là trung điểm cung $BC$ (không chứa $A$) của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$. Điểm $I$ thuộc đoạn $MA$ và thỏa mãn điều kiện $MI = MB$. Ta có $I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$.

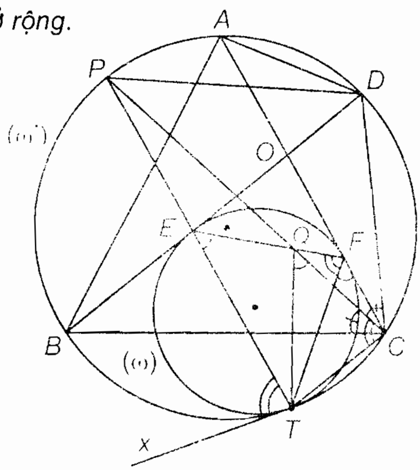
**Chứng minh.** Vì $MI = MB$ nên $\widehat{MBI} = \widehat{MIB}$, suy ra $\widehat{CBI} + \widehat{CBM} = \widehat{IBA} + \widehat{IAB}$.




Từ đó với chú ý rằng các góc $\widehat{CBM}$, $\widehat{IAB}$ cùng bằng $\frac{1}{2}\widehat{BAC}$, ta có $\widehat{CBI} = \widehat{IBA}$.

Vậy $I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$.

Trở lại việc chứng minh *định lí Lyness mở rộng*.




Gọi (ω') là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ ; $T$ là tiếp điểm của (ω) và (ω') ; $P$ là giao điểm của $TE$ và (ω') ($P$ khác $T$).

Theo *bổ đề 1*, $CP$ là phân giác của góc $BCD$. (1)

Gọi $Q$ là giao điểm của $CP$ và $EF$ ; $Tx$ là tiếp tuyến chung của (ω) và (ω').

Ta có : $\begin{cases} \widehat{QFT} = \widehat{EFT} = \widehat{ETx} \\ \widehat{QCT} = \widehat{PCT} = \widehat{PTx} \end{cases}$

Từ đó, với chú ý rằng $\widehat{ETx} = \widehat{PTx}$, ta có $\widehat{QFT} = \widehat{QCT}$ suy ra $QFCT$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{TQC} = \widehat{TFC}$.

Từ đó, với chú ý rằng $\widehat{TFC} = \widehat{TEF}$, ta có $\widehat{TQC} = \widehat{TEF}$ suy ra $\Delta PQT \backsim \Delta PEQ$

$\Rightarrow \frac{PQ}{PT} = \frac{PE}{PQ} \Rightarrow PQ^2 = PT \cdot PE = PD^2$ (theo *bổ đề 1*) $\Rightarrow PQ = PD$. (2)

Từ (1), (2), theo *bổ đề 2* ta có $Q$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $BCD$. Điều đó có nghĩa là $EF$ đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác $DBC$.

Tương tự $EF$ cũng đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$. *Định lí Lyness mở rộng* đã được chứng minh.

Ta thấy kết luận "$E$, $I$, $F$ thẳng hàng" trong *bài 4(40)* là hệ quả trực tiếp của định lí này (bạn đọc tự kiểm tra).

Những hệ quả đáng chú ý của *định lí Lyness mở rộng* sẽ được giới thiệu dưới đây.

**Hệ quả 1.** Tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn ($O$), ($I_a$) là đường tròn bàng tiếp đối diện với đỉnh $A$ của tam giác. ($I_a$) tiếp xúc với $BC$ tại $D$. Các đường tròn ($I_1$), ($I_2$) cùng tiếp xúc trong với ($O$) ; cùng tiếp xúc với đoạn $DA$ và theo thứ tự tiếp xúc với các đoạn $DB$, $DC$ ; ta có các đường tròn ($I_1$), ($I_2$) có bán kính bằng nhau.

*Tác giả của hệ quả 1 chính là nhà giáo Hạ Vũ Anh, THPT chuyên Vĩnh Phúc.*

*(Kì sau đăng tiếp)*


# MỘT KĨ THUẬT CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC CÓ ĐIỀU KIỆN

NGUYỄN ĐỨC TẤN *(TP. Hồ Chí Minh)*

Trong các kì thi học sinh giỏi toán lớp 8, 9 và thi vào lớp 10 chuyên, chúng ta thường gặp dạng bài toán chứng minh bất đẳng thức mà các ẩn có điều kiện ràng buộc.

Các bài toán bất đẳng thức có dạng :

"Cho $C \geq D$. Chứng minh rằng $A \geq B$."

có một kĩ thuật để chứng minh là ta đi chứng minh $(A - B) + (D - C) \geq 0$, khi đó từ điều kiện $C \geq D$ ta suy ra được $A \geq B$.

Đôi khi việc chứng minh bất đẳng thức trung gian trên khá dễ dàng. Sau đây là một số ví dụ.

**Ví dụ 1.** Cho $a + b \geq 1$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}.$$

*(Đề thi vào lớp 10, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh, 1998-1999)*

**Lời giải.**

Ta có $\left(a^2 + b^2 - \frac{1}{2}\right) + (1 - a - b) =$

$$= a^2 + b^2 - a - b + \frac{1}{2}$$

$$= \left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) + \left(b^2 - b + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Mà $a + b \geq 1$ suy ra $1 - a - b \leq 0$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - \frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}.$$

**Ví dụ 2.** Chứng minh rằng nếu $a + b \geq 2$ thì $a^3 + b^3 \leq a^4 + b^4$.

*(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 9, Quận 1, TP. Hồ Chí Minh, 2001-2002)*

**Lời giải.**

Ta có $(a^4 + b^4 - a^3 - b^3) + (2 - a - b) =$

$= a^4 - a^3 - a + 1 + b^4 - b^3 - b + 1$

$= a^3(a - 1) - (a - 1) + b^3(b - 1) - (b - 1)$

$= (a - 1)(a^3 - 1) + (b - 1)(b^3 - 1)$

$= (a - 1)^2(a^2 + a + 1) + (b - 1)^2(b^2 + b + 1)$

$$= (a-1)^2\left[\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] + (b-1)^2\left[\left(b + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] \geq 0.$$

Mà $a + b \geq 2$ suy ra $2 - a - b \leq 0$

$\Rightarrow a^4 + b^4 - a^3 - b^3 \geq 0 \Rightarrow a^3 + b^3 \leq a^4 + b^4$.

**Ví dụ 3.** Cho $x$, $y$ là các số dương thỏa mãn $x^3 + y^4 \leq x^2 + y^3$. Chứng minh rằng :

$$x^3 + y^3 \leq x^2 + y^2 ;$$

$$x^2 + y^3 \leq x + y^2.$$

*(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 9, Quận 1, TP. Hồ Chí Minh, 2004-2005)*

**Lời giải.**

a) Ta có

$(x^2 + y^2 - x^3 - y^3) + (x^3 + y^4 - x^2 - y^3) =$

$= y^2 - 2y^3 + y^4 = y^2(y-1)^2 \geq 0.$

Mà $x^3 + y^4 \leq x^2 + y^3$ suy ra

$x^3 + y^4 - x^2 - y^3 \leq 0 \Rightarrow x^3 + y^3 \leq x^2 + y^2.$

b) Ta có

$(x + y^2 - x^2 - y^3) + (x^3 + y^4 - x^2 - y^3) =$

$= x - 2x^2 + x^3 + y^2 - 2y^3 + y^4$

$= x(x-1)^2 + y^2(y-1)^2 \geq 0$ (vì $x > 0$).

Mà $x^3 + y^4 \leq x^2 + y^3$ suy ra

$x^3 + y^4 - x^2 - y^3 \leq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - x^3 - y^3 \geq 0$

$\Rightarrow x^2 + y^3 \leq x + y^2.$

**Ví dụ 4.** Chứng minh rằng nếu $a + b + c \geq 3$ thì $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3$.

*(Đề thi HSG toán 9, THCS Lê Quý Đôn, Quận 3, TP. Hồ Chí Minh, 2005-2006)*

**Lời giải.**

Ta có

$(a^4 + b^4 + c^4 - a^3 - b^3 - c^3) + (3 - a - b - c)$

$= (a^4 - a^3 - a + 1) + (b^4 - b^3 - b + 1) + (c^4 - c^3 - c + 1)$

$$= (a-1)^2\left[\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] + (b-1)^2\left[\left(b+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] + (c-1)^2\left[\left(c+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] \geq 0.$$

Mà $a + b + c \geq 3$ suy ra $3 - a - b - c \leq 0$

$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 - a^3 - b^3 - c^3 \geq 0$

$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3.$

**Ví dụ 5.** Cho $x$, $y$ là các số dương thỏa mãn $x^3 + y^3 = x - y$.

Chứng minh rằng $x^2 + y^2 < 1$.

*(Đề thi vào lớp 10 chuyên, TP. Hồ Chí Minh, 2006-2007)*

**Lời giải.**

Ta có

$1 - x^2 - y^2 = (1 - x^2 - y^2) + (x^3 + y^3 - x + y)$

$= (x^3 - x^2 - x + 1) + (y^3 - y^2 + y)$

$= (x-1)(x^2-1) + y(y^2 - y + 1)$

$$= (x+1)(x-1)^2 + y\left[\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] > 0$$

(vì $x$, $y$ là các số dương).

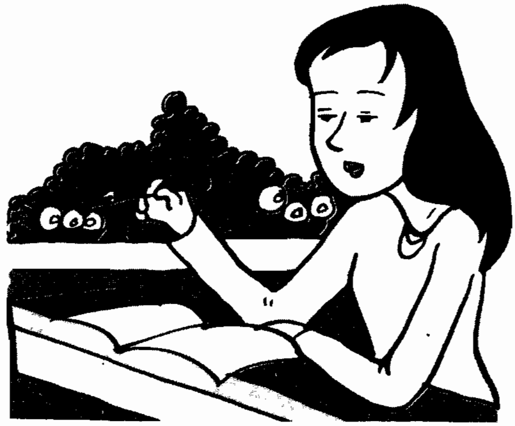
Suy ra $x^2 + y^2 < 1$.

● Các bạn hãy tập sử dụng kĩ thuật đã sử dụng ở trên thông qua việc tự giải các bài tập sau đây :

**Bài tập 1.** Biết rằng $x^2 + y^2 \leq x + y$. Chứng minh rằng $x + y \leq 2$.

**Bài tập 2.** Biết rằng $ab \geq 1$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 \geq a + b$.

**Bài tập 3.** Biết rằng $x^2 + y^2 \leq x$. Chứng minh rằng $y(x+1) \geq -1$.



# Bất đẳng thức Trê-bư-sép với n = 3

NGUYỄN HẢI VIỆT

*(lớp 9E, THCS Lương Thế Vinh, TP. Tuy Hòa, Phú Yên)*

Trên TTT2 số 4 và số 15 đã giới thiệu về bất đẳng thức (BĐT) Trê-bư-sép với $n = 2$ và ứng dụng của phép chứng minh BĐT này trong giải toán. Sau đây xin được giới thiệu BĐT Trê-bư-sép với $n = 3$ và áp dụng nó để chứng minh một kết quả quen thuộc.

***Bất đẳng thức Trê-bư-sép với n = 3 :***

"Nếu $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ ; $b_1 \geq b_2 \geq b_3$ thì

$$3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \geq$$
$$\geq (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3). \qquad (*)$$

***Chứng minh.*** Ta có (*) tương đương với $3a_1b_1 + 3a_2b_2 + 3a_3b_3 \geq a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3$

$\Leftrightarrow 2a_1b_1 + 2a_2b_2 + 2a_3b_3 - a_1b_2 - a_1b_3 - a_2b_1 - a_2b_3 - a_3b_1 - a_3b_2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a_1b_1 - a_1b_2 - a_2b_1 + a_2b_2) + (a_2b_2 - a_2b_3 - a_3b_2 + a_3b_3) + (a_3b_3 - a_3b_1 - a_1b_3 + a_1b_1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) + (a_2 - a_3)(b_2 - b_3) + (a_1 - a_3)(b_1 - b_3) \geq 0.$

Vì $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ và $b_1 \geq b_2 \geq b_3$ suy ra BĐT này đúng. Vậy (*) đúng.

- Ta thấy $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ và $b_1 \leq b_2 \leq b_3$ thì BĐT (*) đổi chiều.

Ta thử vận dụng (*) để giải một số bài toán.

**Ví dụ 1.** Biết các số dương $a, b, c$ thỏa mãn $a + b + c \geq 3$. Chứng minh rằng :

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3.$$

**Lời giải.** Do vai trò bình đẳng của $a, b, c$ nên có thể giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow a^3 \geq b^3 \geq c^3$.

Theo (*) ta có :

$3(a^4 + b^4 + c^4) \geq (a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3)$. (1)

Vì $a, b, c$ dương nên $a^3 + b^3 + c^3 > 0$ ;

Từ $a + b + c \geq 3$ suy ra :

$(a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3) \geq 3(a^3 + b^3 + c^3)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

**Ví dụ 2** *(BĐT Nesbit)*. Cho ba số dương $a, b, c$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

**Lời giải.** Do $a, b, c$ có vai trò như nhau, không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, suy ra $\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$.

Áp dụng BĐT Trê-bư-sép cho hai bộ số trên và BĐT $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$ với $x, y, z$ là các số dương, ta có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq$$
$$\geq \frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \geq$$
$$\geq \frac{1}{3}(a+b+c)\frac{9}{2(a+b+c)} \geq \frac{3}{2}.$$

- Các bạn xem thêm bài viết trang 6 của nhà giáo Nguyễn Đức Tấn. Sau đây là các bài tập áp dụng.

**Bài 1.** Cho $a, b, c$ là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

**Bài 2.** Cho $a, b, c$ là ba số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng :

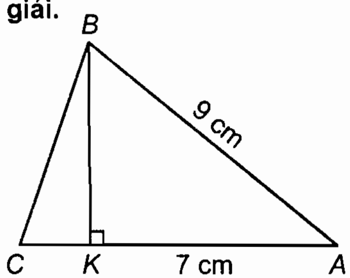
$$\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{1}{2}.$$


# XÉT THIẾU TRƯỜNG HỢP TRONG LỜI GIẢI BÀI TOÁN HÌNH HỌC

**LTS.** Thời gian qua, chuyên mục *"Sai ở đâu ? Sửa cho đúng"* của TTT2 đã nhận được rất nhiều bài của các nhà giáo, phân tích về một sai lầm rất phổ biến của nhiều học sinh khi giải bài toán hình học, đó là việc xét thiếu trường hợp. Để kịp thời phục vụ bạn đọc và nhắc nhở các bạn học sinh phải có thói quen xem xét các trường hợp xảy ra khi giải bài toán hình học, chúng tôi xin được tổng hợp một số bài toán với các lời giải sai và nhận xét của các nhà giáo.

**Ví dụ 1.** Cho tam giác $ABC$ cân tại $A$, đường cao $BK$, $AB = 9$ cm và $AK = 7$ cm. Tính độ dài $BC$.

**Lời giải.**




Ta có $AC = AB = 9$ cm, suy ra

$$KC = AC - AK = 2 \text{ cm}.$$

$\Delta AKB$ vuông tại $K$ nên

$$BK^2 = AB^2 - AK^2 = 32 \text{ cm}.$$

$\Delta AKC$ vuông tại $K$ nên

$$BC = \sqrt{BK^2 + KC^2} = 6 \text{ cm}.$$

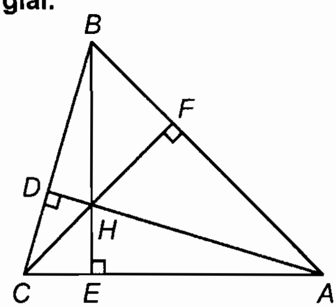
**Nhận xét** *(của nhà giáo Nguyễn Anh Hoàng, THCS Nguyễn Du, Q1, TP. Hồ Chí Minh).* Rất nhiều học sinh khi giải bài toán hình học đã gặp phải tình trạng lời giải tương tự : vẽ hình, bắt tay vào giải và vui mừng với "kết quả đẹp" mình tìm được mà quên mất một việc quan trọng là cần phải xem lại ... bài toán có phụ thuộc vào hình vẽ hay không. Điều này dẫn đến việc xét thiếu trường hợp trong nhiều bài toán, kể cả với những bài toán dễ.

Trong bài toán trên, độ dài $BC$ phụ thuộc vào độ dài của $BK$ và $KC$, trong đó độ dài $KC$ phụ thuộc vào độ dài của $AC$ và $AK$. Tuy nhiên $KC = AC - AK$ hay $KC = AC + AK$ còn phụ thuộc vào $K$ nằm trong hay nằm ngoài $AC$ hay $\widehat{BAC}$ nhọn hay tù (trường hợp $\widehat{BAC} = 90^\circ$, $A$ trùng với $K$ không xảy ra vì $AK \neq 0$). Điều này rất quen thuộc với chúng ta nhưng nhiều bạn vẫn "cố tình" bỏ qua.

Như vậy lời giải trên đã xét thiếu trường hợp $\widehat{BAC}$ tù, khi đó tương tự trường hợp trên ta tính được $BC = \sqrt{288}$ cm.

**Ví dụ 2.** Cho tam giác $ABC$ có trực tâm $H$ và $AH = BC$. Tính $\widehat{BAC}$.

**Lời giải.**




Gọi $D$, $E$, $F$ lần lượt là chân các đường cao xuất phát từ $A$, $B$, $C$ của $\Delta ABC$. Ta có :

$\widehat{EBC} = \widehat{EAH}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$) ;

$\widehat{AEH} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ ; $AH = BC$.

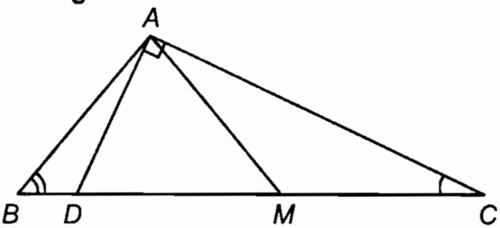
Suy ra $\Delta AEH = \Delta BEC \Rightarrow AE = BE \Rightarrow$ $\Delta AEB$ vuông cân tại $E \Rightarrow \widehat{BAC} = 45^o$.

**Nhận xét** *(của nhà giáo Phan Bích Ngọc, THCS Chu Văn An, Hương Khê, Hà Tĩnh)*. Vì $AH = BC$ có độ dài khác 0 nên đương nhiên $H$ không trùng $A$ và $\widehat{BAC} \neq 90^o$. Tuy vậy, lời giải trên vẫn chỉ đúng cho trường hợp $\widehat{BAC} < 90^o$, khi đó $H$ thuộc miền $\Delta ABC$ và $E$ thuộc đoạn $AE$ nên $\widehat{BAC} = \widehat{BAE} = 45^o$.

Với trường hợp $\widehat{BAC} > 90^o$ thì ngược lại, $H$ không thuộc miền $\Delta ABC$ và $E$ nằm ngoài đoạn $AE$ nên $\widehat{BAC} = 180^o - \widehat{BAE} = 135^o$.

**Ví dụ 3.** Cho tam giác $ABC$. Đường thẳng vuông góc với $AC$ tại $A$ cắt đường thẳng $CB$ tại $D$. Cho biết $CD = 2AB$, tìm một hệ thức liên hệ giữa $\widehat{ABD}$ và $\widehat{ACB}$.

**Lời giải.**




Gọi $M$ là trung điểm của cạnh $DC$. Tam giác $DAC$ vuông tại $A$ suy ra $AM = \frac{1}{2}CD \Rightarrow$ $AM = MC = AB \Rightarrow$ các tam giác $AMC$, $BAM$ là các tam giác cân lần lượt tại $M$, $A \Rightarrow$ $\widehat{ABM} = \widehat{AMB} = 2\widehat{ACM}$ hay $\widehat{ABD} = 2\widehat{ACB}$.

**Nhận xét** *(của nhà giáo Nguyễn Đức Tấn, TP. Hồ Chí Minh)*. Cũng như hai ví dụ trên, mối quan hệ giữa các góc có liên quan sẽ hoàn toàn thay đổi, phụ thuộc vào vị trí tương đối giữa $B$, $C$, $D$ trên một đường thẳng. Như vậy có ba khả năng xảy ra là :

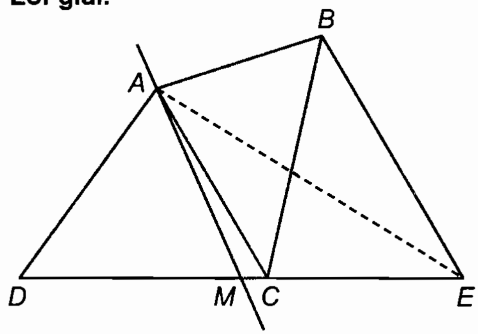
+ $D$ thuộc đoạn $BC$ (trường hợp trên) ;

+ $B$ thuộc đoạn $CD$ ($\widehat{ABD} = 180^o - 2\widehat{ACB}$) ;

+ $C$ thuộc đoạn $BD$ ($\widehat{ABD} = 2\widehat{ACB} - 180^o$).

**Ví dụ 4.** Cho tứ giác lồi $ABCD$. Nêu cách dựng đường thẳng đi qua $A$ chia tứ giác thành hai phần có diện tích bằng nhau.

**Lời giải.**




Từ $B$ kẻ đường thẳng song song với $AC$, cắt đường thẳng $DC$ tại $E$, ta có

$S(BAC) = S(EAC) \Rightarrow S(ABCD) = S(ADE)$.

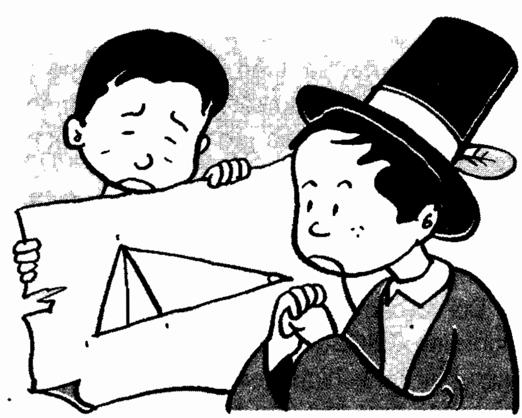
Gọi $M$ là trung điểm của $DE$, ta có

$$S(ADM) = \frac{1}{2}S(ADE) = \frac{1}{2}S(ABCD).$$

Suy ra AM là đường thẳng phải dựng.

**Nhận xét** *(của nhà giáo Nguyễn Đức Trường, THCS Đa Tốn, Gia Lâm, Hà Nội)*. Cách dựng trên chỉ đúng trong trường hợp $S(ADC) \geq S(ABC)$, khi đó $M$ thuộc đoạn $CD$ và $ADM$ là một trong hai phần của tứ giác $ABCD$ được $AM$ chia ra.

Ngược lại thì $AM$ cắt $BC$ tại $N$ và một phần của tứ giác $ABCD$ được $AM$ chia ra sẽ là $ADCN$ ; $S(ADCN) < S(ADE) = \dfrac{S(ABCD)}{2}$.



# CỰC TRỊ HÌNH HỌC VÀ QUỸ TÍCH

TS. NGUYỄN MINH HÀ *(ĐHSP Hà Nội)*

Tình cờ, tôi được một người bạn tặng bốn đề thi học sinh giỏi lớp 9 của TP. Hà Nội. trong bốn năm gần đây. Trong cả bốn đề thi, bài hình học (bài 5) đều là bài toán cực trị hình học (có thể có thêm câu gợi ý) và các ***bài toán cực trị hình học*** này đều ***được thiết kế*** như nhau, bởi cùng một phương pháp là ***thông qua một bài toán quỹ tích***. "Sự kiện" này là sự kết hợp giữa hai thành phần cơ bản :

+ *Thứ nhất :* một bài toán quỹ tích hoặc đơn giản hoặc quen biết (đã được giấu đi).

+ *Thứ hai :* một bài toán cực trị hình học cũng hoặc đơn giản hoặc quen biết liên quan tới bài toán quỹ tích nói trên.

Vì sao hai thành phần cơ bản trên lại phải có cùng một đặc điểm hoặc đơn giản hoặc quen biết ? Bởi lẽ, nếu không như vậy thì mỗi thành phần trên tự nó đã là một bài toán, một bài thi.

***Bởi các đặc điểm nêu trên, ta thấy :***

+ Về nguyên tắc, bài toán cực trị hình học được thiết kế thông qua một bài toán quỹ tích không bao giờ là bài toán thật sự khó.

+ Bài toán cực trị hình học được thiết kế thông qua một bài toán quỹ tích có thể có hình thức đẹp nếu sự kết hợp giữa hai thành phần của nó là khéo léo và tinh tế nhưng không bao giờ có nội dung hay.

Vì vậy, trong các tài liệu toán sơ cấp, trừ một vài ví dụ kinh điển, hầu như không có những bài toán cực trị hình học kiểu này.

Đối với các em học sinh, đặc biệt là các em học sinh THCS, còn ít kinh nghiệm trong việc giải toán hình học, những bài cực trị hình học như vậy vẫn có thể gây cho các em những khó khăn nhất định, nhất là trong các kì thi với khoảng thời gian làm bài bị khống chế.

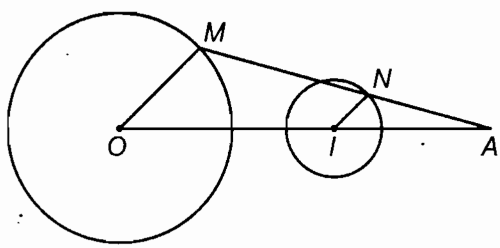
Vì lí do trên, tôi viết bài báo này giới thiệu với các em, bốn bài toán cực trị hình học trong các đề thi nói trên kèm theo lời giải của chúng và những lời bình luận cần thiết, không chỉ liên quan tới lời giải của các bài toán mà còn liên quan tới hình thức cũng như nội dung của chính các bài toán đó. Hi vọng bài báo sẽ đem lại không chỉ đôi chút kinh nghiệm trong việc giải loại bài toán cực trị hình học nói trên mà còn nâng cao mĩ cảm toán học cho các em.

● **Bài toán 1** *(đề thi năm 2002 - 2003, đã sửa chữa)*. Cho hai đường thẳng cắt nhau $\Delta_1$, $\Delta_2$ và đường tròn $(O)$ không có điểm chung với chúng. Điểm $A$ cố định trên $(O)$, điểm $M$ thuộc $(O)$, điểm $N$ thuộc đoạn $AM$ sao cho $AN = \frac{1}{3}AM$. Tìm vị trí của $M$ sao cho tổng khoảng cách từ $N$ tới $\Delta_1$, $\Delta_2$ lớn nhất, nhỏ nhất.

**Lời giải.** Trước hết ta giải 2 bài toán phụ.

***Bài toán 1.1.*** Cho đường tròn $(O)$ và điểm $A$. Điểm $M$ chạy trên $(O)$, điểm $N$ thuộc tia $AM$ sao cho $AN = kAM$, ở đây $k$ là hằng số dương cho trước. Tìm quỹ tích $N$.

***Lời giải bài toán 1.1.***



Gọi $R$ là bán kính của $(O)$.

*Thuận.* Giả sử điểm $N$ thỏa mãn điều kiện đề bài. Lấy điểm $I$ thuộc tia $AO$ sao cho $AI = kAO$. Đương nhiên $I$ cố định.

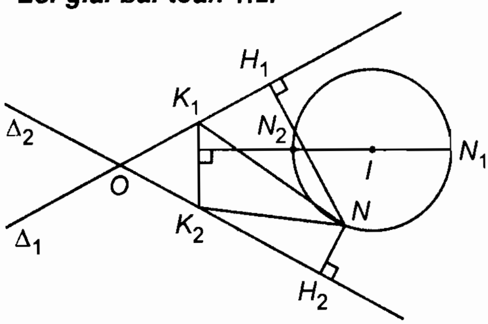
Mặt khác vì $\frac{AI}{AO} = k = \frac{AN}{AM}$ nên theo định lí Ta-lét, ta có $IN = kOM = kR$. Suy ra $N$ thuộc đường tròn $(I, kR)$.

*Đảo.* Các em hãy tự làm.

*Kết luận.* Quỹ tích những điểm $N$ thỏa mãn điều kiện đề bài là đường tròn $(I, kR)$.

***Bài toán 1.2.*** Cho hai đường thẳng cắt nhau $\Delta_1$, $\Delta_2$ và đường tròn $(I)$ không có điểm chung với chúng. Điểm $N$ chạy trên $(I)$. Tìm vị trí của $N$ sao cho tổng khoảng cách từ $N$ tới $\Delta_1$, $\Delta_2$ lớn nhất, nhỏ nhất.

***Lời giải bài toán 1.2.***




Đặt $O = \Delta_1 \cap \Delta_2$. Trên $\Delta_1$, $\Delta_2$ theo thứ tự lấy các điểm $K_1$, $K_2$ sao cho $OK_1 = OK_2$ và $O$, $(I)$ thuộc hai nửa mặt phẳng khác nhau có bờ là $K_1K_2$. Đường thẳng qua $I$ vuông góc với $K_1K_2$ cắt $(I)$ tại $N_1$, $N_2$.

Với mỗi điểm $N$ thuộc $(I)$, gọi $H_1$, $H_2$ theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của $N$ trên $\Delta_1$, $\Delta_2$. Ta thấy, tổng khoảng cách từ $N$ tới $\Delta_1$, $\Delta_2$ lớn nhất $\Leftrightarrow NH_1 + NH_2$ lớn nhất

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}OK_1 \cdot NH_1 + \frac{1}{2}OK_2 \cdot NH_2$ lớn nhất

$\Leftrightarrow S(OK_1N) + S(OK_2N)$ lớn nhất

$\Leftrightarrow S(OK_1NK_2)$ lớn nhất

$\Leftrightarrow S(NK_1K_2)$ lớn nhất

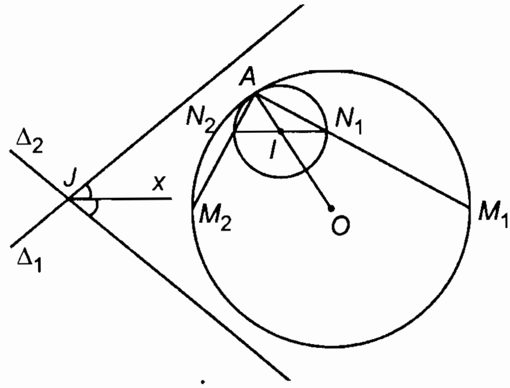
$\Leftrightarrow$ Khoảng cách từ $N$ tới $K_1K_2$ lớn nhất

$\Leftrightarrow N$ trùng với $N_1$ (các em tự kiểm tra).

Tương tự, tổng khoảng cách từ $N$ tới $\Delta_1$, $\Delta_2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow N$ trùng với $N_2$.

**Trở lại việc giải bài toán 1.**

Trên đoạn $AO$ lấy điểm $I$ sao cho $AI = \frac{1}{3}AO$. Theo *bài toán 1.1* thì $N \in (I, IA)$.




Đặt $J = \Delta_1 \cap \Delta_2$. Gọi $Jx$ là tia phân giác của góc đỉnh $J$, các cạnh thuộc $\Delta_1$, $\Delta_2$ và có miền trong chứa $(O)$.

Kẻ đường thẳng qua $I$ song song với $Jx$, theo thứ tự cắt $(I)$ tại $N_1$, $N_2$ ; $AN_1$, $AN_2$ theo thứ tự cắt $(O)$ tại $M_1$, $M_2$. Ta thấy, tổng khoảng cách từ $N$ tới $\Delta_1$, $\Delta_2$ lớn nhất (nhỏ nhất)

$\Leftrightarrow N \equiv N_1$ $(N_2)$ (theo *bài toán 1.2*)

$\Leftrightarrow M \equiv M_1$ $(M_2)$ (theo *bài toán 1.1*).

**Lời bình.**

* *Bài toán 1.1* là bài toán quỹ tích dễ và quen thuộc.

* *Bài toán 1.2* là bài toán cực trị hình học quen thuộc có nguồn gốc từ một bài toán quen thuộc khác, có trong chương trình Hình học 7, xin giới thiệu cùng các em :

***Bài toán 1.3.*** Cho $\Delta ABC$ cân tại $A$. Điểm $M$ chạy trên cạnh $BC$. $H$, $K$ lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ $M$ tới $AB$, $AC$. Chứng minh rằng $MH + MK$ không đổi.

Các em hãy dùng *bài toán 1.3* để tìm cho *bài toán 1.2* một lời giải khác.

* *Bài toán 1* là sự kết hợp cơ học giữa *bài toán 1.1* và *bài toán 1.2.* Sự kết hợp này tuy đơn giản nhưng cũng có một bài toán mới. ☞

☞ * **Bài toán 1.4** *(đề thi năm 2002 - 2003, bài toán gốc)*. Cho $(O, R)$ và dây cố định $AB = \sqrt{3}R$ ; $P$ là trung điểm của cung nhỏ $\overparen{AB}$. Đường thẳng $d$ quay quanh $P$, luôn cắt đoạn $AB$ tại $N$ (khác $A$, $B$) và cắt $(O)$ tại điểm thứ hai là $M$. Gọi $I$ là điểm nằm trên đoạn $BM$ sao cho $BI = \frac{1}{3}BM$.

a) Chứng minh rằng $AP$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác $AMN$.

b) Hãy dựng đường thẳng $d$ sao cho tổng khoảng cách từ điểm $I$ đến hai đường thẳng $AO$ và $AP$ là nhỏ nhất.

Bài toán này có câu a) là câu cơ bản, còn câu b) được "điều chế" từ bài toán 1.

● **Bài toán 2** *(đề thi năm 2003 - 2004, bài toán gốc)*. Cho nửa đường tròn tâm $O$, đường kính $AB = 2R$. Dây $MN = R$ di chuyển trên nửa đường tròn. Đường thẳng qua $M$, song song với $ON$ cắt $AB$ tại $E$. Đường thẳng qua $N$, song song với $OM$ cắt $AB$ tại $F$.

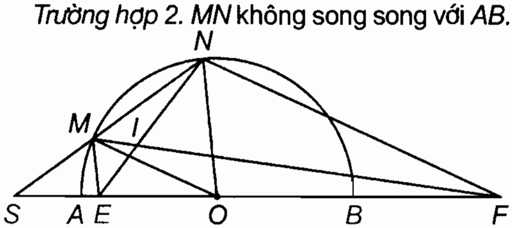
a) Chứng minh rằng hai tam giác $MNE$ và $NFM$ đồng dạng.

b) Gọi $I$ là giao điểm của $EN$ và $FM$. Hãy xác định vị trí của dây $MN$ sao cho tam giác $MIN$ có chu vi lớn nhất.

**Lời giải.**

a) *Trường hợp 1.* $MN$ song song với $AB$. Dễ thấy $\Delta MEN = \Delta NFM$.

*Trường hợp 2.* $MN$ không song song với $AB$.




Đặt $S = MN \cap AB$. Dễ thấy $\Delta MON$ đều.

Theo định lí Ta-lét, ta có $\frac{ME}{MN} = \frac{ME}{NO}$ (vì $MN = NO$) $= \frac{SM}{SN} = \frac{MO}{NF} = \frac{NM}{NF}$ (1)

(vì $ME \parallel NO$, $MO \parallel NF$, $MO = NM$).

Mặt khác : $\widehat{EMN} = \widehat{EMO} + \widehat{OMN}$

$= \widehat{MON} + \widehat{OMN}$ (vì $ME \parallel NO$)

$= 60^\circ + 60^\circ$ (vì $\Delta MON$ đều) $= 120^\circ$ ; (2)

Tương tự : $\widehat{MNF} = \widehat{MNO} + \widehat{ONF}$

$= \widehat{MNO} + \widehat{NOM} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\Delta MEN \backsim \Delta NFM$.

b) Trước hết ta có hai bài toán phụ.

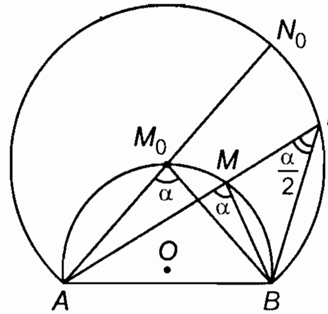
***Bài toán 2.1.*** Cho đoạn thẳng $AB$ và góc $\alpha$ ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$). Tìm quỹ tích những điểm $M$ sao cho $\widehat{AMB} = \alpha$.

*Bài toán 2.1* là bài toán quỹ tích cơ bản có trong chương trình Hình học 9.

Quỹ tích những điểm $M$ sao cho $\widehat{AMB} = \alpha$ là hai cung chứa góc $\alpha$ dựng trên đoạn $AB$.

***Bài toán 2.2.*** Tìm điểm $M$ thuộc cung chứa góc $\alpha$ dựng trên đoạn $AB$ sao cho tam giác $AMB$ có chu vi lớn nhất.

***Lời giải bài toán 2.2.***




Lấy điểm $N$ thuộc tia đối của tia $MA$ sao cho $MN = MB$. Ta có $\Delta MBN$ cân tại $M$ $\Rightarrow \widehat{NMB} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$ $N$ thuộc cung chứa góc $\frac{\alpha}{2}$ dựng trên đoạn $AB$ (theo *bài toán 2.1*).

Gọi $M_0$ là trung điểm cung chứa góc $\alpha$ dựng trên đoạn $AB$ ($M_0$ thuộc trung trực của đoạn $AB$) và $\widehat{AM_0B} = 2.\frac{\alpha}{2} = 2.\widehat{ANB}$ nên $(M_0, M_0A)$ chứa cung chứa góc $\frac{\alpha}{2}$ dựng trên đoạn $AB$.

Vẽ đường kính $AN_0$ của $(M_0, M_0A)$.

Ta thấy, chu vi $\Delta AMB$ lớn nhất

$\Leftrightarrow MA + MB$ lớn nhất $\Leftrightarrow MA + MN$ lớn nhất

$\Leftrightarrow AN$ lớn nhất $\Leftrightarrow N \equiv N_0 \Leftrightarrow M \equiv M_0$.

*Bài toán 2.2* đã được giải quyết.

*(Kì sau đăng tiếp)*

# KHẮC SÂU KIẾN THỨC QUA BÀI TOÁN ĐẢO

HOÀNG VĂN ĐẮC
*(Hiệu phó, THCS Vũ Hữu, Bình Giang, Hải Dương)*

Ngoài việc sẽ phát hiện được nhiều bài toán mới, thói quen xem xét bài toán đảo còn giúp các bạn học sinh ghi nhớ, khắc sâu nội dung của bài toán gốc cũng như biết vận dụng linh hoạt bài toán đó khi giải toán.

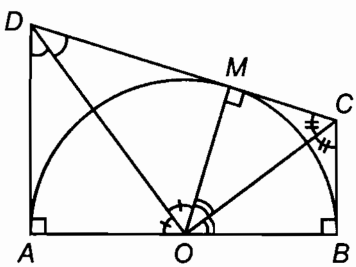
Không phải bất kì bài toán nào cũng có những bài toán đảo của nó. Để dự đoán và đề xuất được bài toán đảo, ta cần nghiên cứu kĩ giả thiết, kết luận, cũng như các lời giải của bài toán gốc. Sau đây là một số ví dụ và bài tập.

**Ví dụ 1.**

***Bài toán gốc.*** Cho hình thang vuông $ABCD$ (vuông tại $A$ và $B$) và điểm $O$ là trung điểm của $AB$. Đường tròn tâm $O$, đường kính $AB$ tiếp xúc với $CD$. Chứng minh rằng $\widehat{COD} = 90^\circ$.

**Chứng minh.**

Gọi $M$ là tiếp điểm của $CD$ và $(O)$.




Ta có $ABCD$ là hình thang vuông tại $A$ suy ra $AD \perp AB \Rightarrow DA$ và $DM$ cùng là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow OD$ là phân giác của $\widehat{AOM}$. Tương tự ta có $OC$ là phân giác của $\widehat{BOM}$. Suy ra $\widehat{COD} = 90^\circ$ (tính chất phân giác của hai góc kề bù).

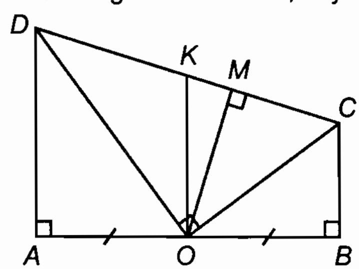
***Nhận xét.*** Ngược lại với quá trình chứng minh trên, nếu hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{COD} = 90^\circ$ mà ta lại chứng minh được $OD$ là phân giác của $\widehat{AOM}$ với $M$ thuộc $CD$ và $OM \perp CD$ thì khi đó $CD$ sẽ là tiếp tuyến của $(O)$ tại $M$.

Hoàn toàn chứng minh được điều này nếu ta để ý thấy rằng $OD$ đồng thời cũng là phân giác của $\widehat{ADM}$. Bài toán đảo được phát biểu và chứng minh như sau :

***Bài toán đảo.*** Cho hình thang vuông $ABCD$ (vuông tại $A$ và $B$), $O$ là trung điểm của $AB$ thỏa mãn điều kiện $\widehat{COD} = 90^\circ$. Chứng minh rằng đường tròn tâm $O$, đường kính $AB$ tiếp xúc với $CD$.

***Chứng minh.***

Gọi $K$ là trung điểm của $CD$, suy ra :




- Vì $\widehat{COD} = 90^\circ$ nên tam giác $COD$ vuông tại O, suy ra $\widehat{KOD} = \widehat{KDO}$ ; (1)

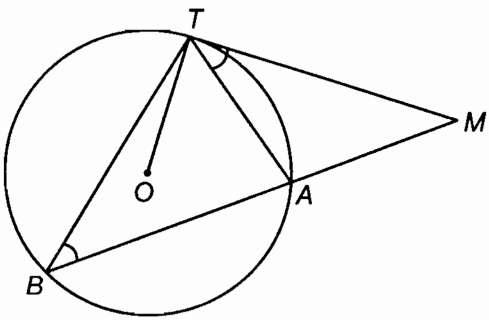
- Vì $O$ là trung điểm của $AB$ nên $OK$ là đường trung bình của hình thang $ABCD$, suy ra $OK // AD \Rightarrow \widehat{KOD} = \widehat{ADO}$ (2) (so le trong).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ADO} = \widehat{KDO} \Rightarrow$ hai tam giác vuông $ADO$ và $MDO$ bằng nhau (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow OM = OA \Rightarrow M$ thuộc $(O) \Rightarrow CD$ tiếp xúc với $(O)$ tại $M$.

**Ví dụ 2.**

***Bài toán gốc.*** Cho điểm $M$ nằm ngoài đường tròn $(O)$, qua $M$ kẻ tiếp tuyến $MT$ và cát tuyến $MAB$ tới đường tròn. Chứng minh rằng $MT^2 = MA \cdot MB$.

***Chứng minh.***




Do $MT$ là tiếp tuyến của $(O)$ nên $\widehat{MTA} = \widehat{TBA}$, suy ra $\Delta MTA \backsim \Delta MBT$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MT}{MB} = \frac{MA}{MT} \Rightarrow MT^2 = MA \cdot MB.$$

***Bài toán đảo.*** Cho $\Delta ABT$ nội tiếp đường tròn $(O)$. Điểm $M$ thuộc tia đối của tia $AB$. Chứng minh rằng nếu $MT^2 = MA \cdot MB$ thì $MT$ là tiếp tuyến của $(O)$.

***Chứng minh.*** Ta có $\Delta MTA \backsim \Delta MBT$ vì $\frac{MT}{MB} = \frac{MA}{MT}$ và góc kẹp giữa hai cặp cạnh này của hai tam giác là góc chung.

Suy ra $\widehat{MTA} = \widehat{TBA} \Rightarrow MT$ là tiếp tuyến của $(O)$ (áp dụng định lí đảo về góc giữa tiếp tuyến và dây cung).

***Nhận xét.*** Hai bài toán gốc trong *ví dụ 1* và *ví dụ 2* đều đơn giản và quen thuộc đối với các bạn học sinh, tuy nhiên các bài toán đảo thì khó hơn. Qua việc xét hai bài toán đảo này, chúng ta đã phát hiện thêm được các dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn.

Các ví dụ tiếp theo sau đây sẽ lại cung cấp cho chúng ta một số số dấu hiệu nhận biết tam giác vuông và tứ giác nội tiếp.

**Ví dụ 3.**

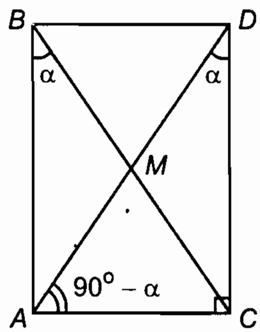
***Bài toán gốc.*** Cho $\Delta ABC$ vuông tại $A$, trung tuyến $AM$. Chứng minh rằng :

$$\widehat{CBA} + \widehat{CAM} = 90^\circ.$$

***Chứng minh.*** Áp dụng tính chất đường trung tuyến thuộc cạnh huyền của tam giác vuông ta có $AM = AC \Rightarrow \Delta AMC$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{CBA} + \widehat{CAM} = \widehat{CBA} + \widehat{CBA} = 90^\circ$.

***Bài toán đảo.*** Cho $\Delta ABC$, $AB \neq AC$, trung tuyến $AM$ thỏa mãn $\widehat{CBA} + \widehat{CAM} = 90^\circ$. Chứng minh rằng $\Delta ABC$ vuông tại $A$.

***Chứng minh.***




Đặt $\widehat{CBA} = \alpha$ ; $\widehat{CAM} = 90^\circ - \alpha$.

Gọi $D$ là giao điểm của tia $AM$ và đường thẳng qua $C$ vuông góc với $AC$, ta có $\widehat{CDA} = \alpha = \widehat{CBA}$ suy ra tứ giác $ABDC$ nội tiếp đường tròn đường kính $AD$.

Như vậy đường tròn trên có đường kính $AD$ đi qua trung điểm $M$ của dây cung $BC$, có hai khả năng xảy ra :

Nếu $BC$ không là đường kính thì $BC \perp AD$ (tại $M$), suy ra $ABC$ là tam giác cân tại $A$, trái với giả thiết $AB \neq AC$ ; Vậy $BC$ cũng là đường kính $\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ \Rightarrow$ đpcm.

***Nhận xét.*** Ở ví dụ này, trong quá trình "lật ngược" bài toán gốc, ta mới phát hiện ra bài toán đảo chỉ đúng khi $AB \neq AC$.

**Ví dụ 4.**

***Bài toán gốc.*** Cho $\Delta ABC$ vuông tại $A$ và nội tiếp đường tròn $(O\,;R)$. Gọi độ dài các cạnh $BC$, $CA$, $AB$ lần lượt là $a$, $b$, $c$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2$.

***Chứng minh.*** Theo giả thiết ta có :

$b^2 + c^2 = a^2 = (2R)^2 = 4R^2$. Suy ra đpcm.

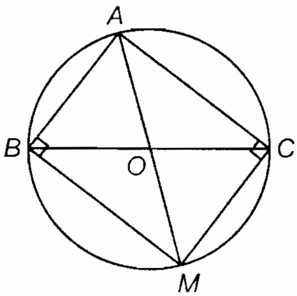
*(Xem tiếp trang 24)*

# KHẮC SÂU ...

*(Tiếp theo trang 3)*

***Bài toán đảo.*** Cho $\Delta ABC$ nội tiếp đường tròn $(O\,;R)$, có độ dài các cạnh $BC$, $CA$, $AB$ lần lượt là $a$, $b$, $c$ thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=8R^2$. Chứng minh rằng $ABC$ là tam giác vuông tại $A$.

***Chứng minh.*** Kẻ đường kính $AM$, ta có :




$AM^2=(2R)^2=AB^2+BM^2=AC^2+CM^2$ hay $4R^2=c^2+BM^2=b^2+CM^2$, suy ra

$a^2+b^2+c^2=a^2+4R^2-CM^2+4R^2-BM^2$

$\Rightarrow 8R^2=BC^2+8R^2-BM^2-CM^2$

$\Rightarrow BC^2=BM^2+CM^2$

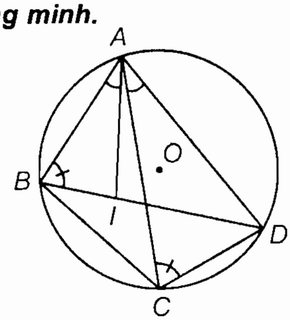
$\Rightarrow BMC$ là tam giác vuông tại $M$

$\Rightarrow MB$ là đường kính của (O) $\Rightarrow$ đpcm.

**Ví dụ 5.**

***Bài toán gốc** (Định lí Ptô-lê-mê).* Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn. Chứng minh rằng $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$.

***Chứng minh.***




Trên $BD$ lấy điểm $I$ sao cho $\widehat{IAB}=\widehat{CAD}$, suy ra $\Delta IAB \backsim \Delta DAC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BI}{CD}$

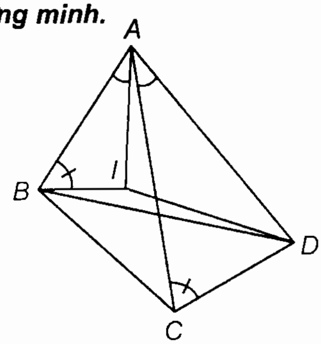
$\Rightarrow AB\cdot CD=AC\cdot BI.$ (1)

Tương tự ta có $\Delta IAD \backsim \Delta CAB$, suy ra $AD\cdot BC=AC\cdot DI.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

***Bài toán đảo.*** Cho tứ giác $ABCD$ thỏa mãn $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$. Chứng minh rằng tứ giác nội tiếp đường tròn.

***Chứng minh.***




Lấy điểm $I$ nằm trong $\widehat{BAD}$ sao cho $\widehat{IAB}=\widehat{CAD}$ và $\widehat{IBA}=\widehat{ACD}$ (luôn dựng được), ta có $\Delta IAB \backsim \Delta DAC$ (g.g) suy ra

$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BI}{CD}\Rightarrow AB\cdot CD=AC\cdot BI\,;$ (1)

Từ $\widehat{IBA}=\widehat{ACD}$ suy ra $\widehat{BAC}=\widehat{IAD}$, kết hợp với $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BI}{CD}\Rightarrow \Delta BAC \backsim \Delta IAD$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AC}=\dfrac{ID}{BC}\Rightarrow AD\cdot BC=AC\cdot ID\,;$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra :

$AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC$

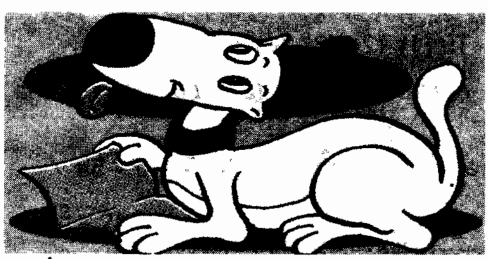
$=AC\cdot BI+AC\cdot ID=AC\cdot(BI+ID)$

$\Rightarrow BD=BI+ID\Rightarrow$ $B$, $I$, $D$ thẳng hàng

$\Rightarrow \widehat{ABD}=\widehat{IBA}=\widehat{ACD}$

$\Rightarrow$ tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn.

Các bạn hãy thử phát biểu dưới dạng điều kiện cần và đủ cho cả kết quả bài toán gốc kết hợp với kết quả bài toán đảo.



# NGHIỆM CHUNG CỦA HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

NGUYỄN THANH HÀI
*(Phó Hiệu trưởng, THCS Nam Cường, Nam Trực, Nam Định)*

Một dạng toán liên quan đến nghiệm của phương trình bậc hai, khá phổ biến trong các kì thi cuối cấp, sẽ được giới thiệu sau đây, đó là dạng toán tìm điều kiện để hai phương trình bậc hai có nghiệm chung.

● **Bài toán tổng quát.**

Cho hai phương trình bậc hai :

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0 \; ; \quad (*)$$
$$a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0. \quad (**)$$

Trong đó các hệ số $a_1$, $b_1$, $c_1$, $a_2$, $b_2$, $c_2$ là các biểu thức chứa tham số. Hãy xác định giác trị của tham số để hai phương trình trên có nghiệm chung.

● **Phương pháp giải.**

*Điều kiện cần.* Giả sử hai phương trình có nghiệm chung là $x_0$, khi đó ta có hệ :

$$\begin{cases} a_1x_0^2 + b_1x_0 + c_1 = 0 \\ a_2x_0^2 + b_2x_0 + c_2 = 0. \end{cases}$$

Từ hệ phương trình trên, ta đi xác định giá trị của tham số.

*Điều kiện đủ.* Thay giá trị của tham số tìm được ở trên vào hai phương trình (*) và (**) để để tìm nghiệm chung, kết luận.

● **Ví dụ.**

***Bài toán 1.*** Tìm giá trị của tham số $m$ để hai phương trình sau có nghiệm chung :

$$x^2 - (m + 4)x + m + 5 = 0 \; ; \quad (1)$$
$$x^2 - (m + 2)x + m + 1 = 0. \quad (2)$$

***Lời giải.***

*Điều kiện cần.* Giả sử hai phương trình có nghiệm chung là $x_0$, ta có hệ :

$$\begin{cases} x_0^2 - (m+4)x_0 + m + 5 = 0 \\ x_0^2 - (m+2)x_0 + m + 1 = 0. \end{cases}$$

Trừ theo từng vế của hai phương trình trên ta có $-2x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$. Thay vào hệ phương trình trên ta có $m = 1$.

*Điều kiện đủ.* Thay $m = 1$ vào các phương trình ban đầu, ta tính được nghiệm của (1) là 2 và 3 ; nghiệm của (2) là 2 và 1. Hai phương trinhg có nghiệm chung là 2.

Vậy giá trị tìm được là : $m = 1$.

***Bài toán 2*** *(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định).* Cho hai phương trình :

$$x^2 - (2m - 3)x + 6 = 0 \; ;$$
$$2x^2 + x + m - 5 = 0.$$

Tìm giá trị của tham số $m$ để hai phương trình có duy nhất một nghiệm chung.

***Lời giải.***

*Điều kiện cần.* Giả sử hai phương trình có nghiệm chung là $x_0$, ta có hệ :

$$\begin{cases} x_0^2 - (2m-3)x_0 + 6 = 0 \; (3) \\ 2x_0^2 + x_0 + m - 5 = 0. \quad (4) \end{cases}$$

Từ (4) suy ra $m = -2x_0^2 - x_0 + 5, \qquad (5)$ thay vào (3) ta có :

$$4x_0^3+3x_0^2-7x_0+6=0$$
$$\Leftrightarrow (x_0+2)(4x_0-5x_0+3)=0$$
$$\Leftrightarrow x_0+2=0 \Leftrightarrow x_0=-2,$$
thay vào (5), suy ra $m=-1$.

*Điều kiện đủ.* Với $m=-1$, thay vào hai phương trình ban đầu ta thấy chúng có nghiệm chung duy nhất là $-2$.

Vậy giá trị cần tìm là : $m=-1$.

***Bài toán 3.*** Cho hai phương trình :
$x^2+mx+1=0$ (6) ; $x^2+x+m=0$ (7).

a) Tìm giá trị của tham số $m$ để hai phương trình có nghiệm chung ;

b) Tìm giá trị của tham số $m$ để hai phương trình tương đương.

***Lời giải.***

a) *Điều kiện cần.*

Giả sử hai phương trình có nghiệm chung là $x_0$, ta có hệ $\begin{cases} x_0^2+mx_0+1=0 \\ x_0^2+x_0+m=0. \end{cases}$

Trừ theo từng vế của hai phương trình trên ta có $(m-1)x_0+1-m=0$
$\Leftrightarrow (m-1)(x_0-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ x_0=1. \end{array}\right.$

Thay $x_0=1$ vào hệ phương trình trên ta có $m=-2$.

*Điều kiện đủ.*

Với $m=1$, thay vào (6) và (7) ta thấy chúng đều vô nghiệm.

Với $m=-2$, thay vào (6) và (7) ta thấy chúng có nghiệm chung là 1.

Vậy giá trị tìm được là : $m=-2$.

b) Gọi $N_6$ là tập nghiệm của (6) ;
$N_7$ là tập nghiệm của (7).

Ta có (6) và (7) là hai phương trình tương đương khi và chỉ khi $N_6=N_7$.

*Trường hợp 1.* $N_6=N_7=\varnothing$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_6<0 \\ \Delta_7<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ 1-4m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4}<m<2.$$

*Trường hợp 2.* $N_6=N_7\neq\varnothing$.

Gọi $x_0\in N_6=N_7$, suy ra :
$x_0^2+mx_0+1=0$ ; $x_0^2+x_0+m=0$,
trừ theo từng vế ta có $(m-1)x_0+1-m=0$
$\Rightarrow (m-1)(x_0-1)=0$.

Nếu $m=1$ thì hai phương trình (6) và (7) cùng có dạng $x_0^2+x_0+1=0$, phương trình vô nghiệm, mâu thuẫn với $N_6=N_7\neq\varnothing$.

Nếu $x_0=1$ thì $m=-2$, khi đó $N_6=\{1\}$ còn $N_7=\{1\ ;\ 2\}$ suy ra $N_6\neq N_7$, mâu thuẫn.

Suy ra không có giá trị nào của $m$ thỏa mãn trường hợp $N_6=N_7\neq\varnothing$.

Vậy các giá trị của tham số $m$ để hai phương trình tương đương là : $\frac{1}{4}<m<2$.

***Bài toán 4.*** Cho a và b là hai tham số khác nhau trong hai phương trình sau :
$x^2+ax+2b=0$ (8) ; $x^2+bx+2a=0$ (9).

Chứng minh rằng nếu hai phương trình trên có duy nhất một nghiệm chung thì các nghiệm còn lại của hai phương trình này là nghiệm của phương trình $x^2+2x+ab=0$.

***Lời giải.***

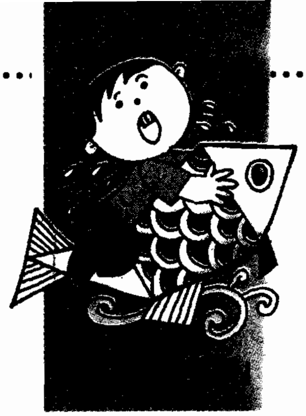
Gọi $x_0$ là nghiệm chung duy nhất của hai phương trình (8) và (9), ta có hệ :

$$\begin{cases} x_0^2+ax_0+2b=0 \\ x_0^2+bx_0+2a=0 \end{cases}$$

suy ra $(a-b)x_0=2(a-b)\Rightarrow x_0=2$ (vì $a\neq b$)
thay vào (8) ta có : $4+2a+2b=0$
$\Rightarrow a+b=-2\Rightarrow a=-b-2$
$\Rightarrow x^2-(b+2)x+2b=0\Rightarrow x_0=2$ và $x_1=b$.

Thay vào (9), tương tự ta có $x_0=2$ và $x_2=a$.

Suy ra $(x_1+x_2)=a+b$ và $x_1\cdot x_2=ab$
$\Rightarrow x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của phương trình $x^2-(a+b)x+ab=0$ hay phương trình $x^2+2x+ab=0$, vì $a+b=-2$ (đpcm).



# BỔ SUNG MỘT PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

NGUYỄN ĐỨC TẤN
*(TP. Hồ Chí Minh)*

Trên hai số 45, 46 của tạp chí TTT2 đã đưa ra 6 phương pháp cơ bản, thường gặp để chứng minh ba điểm thẳng hàng, đó là :

**1.** *Phương pháp sử dụng góc bù.*

**2.** *Phương pháp sử dụng tính chất của hình bình hành.*

**3.** *Phương pháp sử dụng tiên đề về đường thẳng song song.*

**4.** *Phương pháp sử dụng tính chất của đường tròn.*

**5.** *Phương pháp sử dụng hai tia trùng nhau hoặc đối nhau.*

**6.** *Phương pháp sử dụng định lí Mê-nê-la-uýt.*

Sau đây tôi xin bổ sung thêm một phương pháp khác.

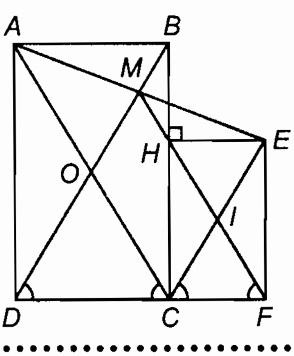
**7. Phương pháp thêm điểm.**

Để chứng minh ba điểm $A$, $B$, $C$ thẳng hàng, nếu có thể, bạn hãy xác định một điểm $D$ khác $A$, $B$, $C$ mà chúng ta chứng minh được hai trong ba bộ ba điểm $A$, $B$, $D$ ; $A$, $C$, $D$ ; $B$, $C$, $D$ thẳng hàng, từ đó suy ra $A$, $B$, $C$, $D$ thẳng hàng.

Sau đây là một số ví dụ.

**Ví dụ 1.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $O$, điểm $M$ nằm trên đoạn $OB$, điểm $E$ đối xứng với điểm $A$ qua $M$, điểm $H$ là chân đường vuông góc kẻ từ $E$ tới $BC$. Vẽ hình chữ nhật $EHCF$.

Chứng minh rằng $M$, $H$, $F$ thẳng hàng.




**Lời giải.** Gọi $I$ là giao điểm của $HF$ và $CE$, suy ra $H$, $I$, $F$ thẳng hàng. (1)

Ta sẽ chứng minh $M$, $I$, $F$ thẳng hàng. Trước hết, vì $H$t huộc $BC$ nên ta có $\widehat{BCD}+\widehat{HCF}=180^\circ$ suy ra $D$, $C$, $F$ thẳng hàng. Mà $O$, $M$ lần lượt là trung điểm của $AC$, $AE$ nên $OM \parallel CE$, suy ra $\widehat{ODC}=\widehat{ICF}$ (hai góc đồng vị). (2)

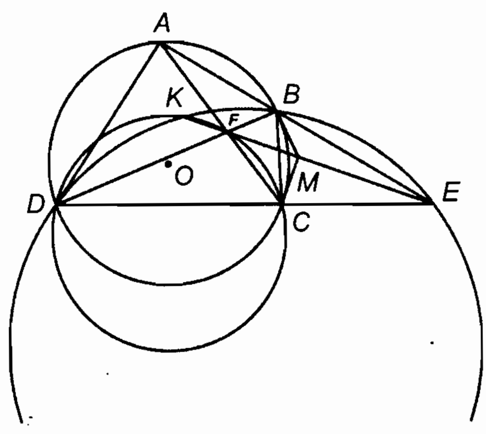
Các tam giác $ODC$ và $ICF$ lần lượt cân tại $C$ và $I \Rightarrow \widehat{OCD}=\widehat{ODC}$ ; $\widehat{ICF}=\widehat{IFC}$. (3)

Từ (2), (3) suy ra $\widehat{OCD}=\widehat{IFC} \Rightarrow IF \parallel AC$. Mặt khác, $I$, $M$ lần lượt là trung điểm của $EC$, $EA$ nên $MI \parallel AC$, suy ra $M$, $I$, $F$ thẳng hàng. (4)

Từ (3), (4) suy ra $M$, $H$, $I$, $F$ thẳng hàng $\Rightarrow M$, $H$, $F$ thẳng hàng.

**Ví dụ 2.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O)$. Gọi $E$ là giao điểm của $AB$, $CD$ ; $F$ là giao điểm của $AC$, $BD$. Các tiếp tuyến với $(O)$ tại $B$, $C$ cắt nhau tại $M$.

Chứng minh rằng $E$, $M$, $F$ thẳng hàng.



**Lời giải.** Gọi $K$ là giao điểm của đường tròn qua $B$, $D$, $E$ và đường tròn qua $F$, $D$, $C$ ($K$ khác $D$). Ta sẽ chứng minh $K$, $E$, $M$ thẳng hàng và $K$, $F$, $M$ thẳng hàng. Ta có :

$$\widehat{BKC} = \widehat{BKD} - \widehat{DKC} = 180^o - \widehat{AED} - \widehat{DFC}$$

(vì hai tứ giác $BKDE$, $DKFC$ nội tiếp).

Mặt khác, $sđ\overset{\frown}{AED} + sđ\overset{\frown}{DFC} =$

$= \dfrac{1}{2}(sđ\overset{\frown}{AD} - sđ\overset{\frown}{BC}) + \dfrac{1}{2}(sđ\overset{\frown}{AB} + sđ\overset{\frown}{CD})$

$= \dfrac{1}{2}(sđ\overset{\frown}{BADC} - sđ\overset{\frown}{BC}) = sđ\overset{\frown}{BMC}$, suy ra

$\widehat{AED} + \widehat{DFC} = \widehat{BMC} \Rightarrow \widehat{BKC} + \widehat{BMC} = 180^o$

$\Rightarrow$ tứ giác $BKCM$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BKM} = \widehat{BCM}$.

Ta lại có :

$\widehat{BCM} = \widehat{BDE}$ (tính chất của góc giữa tiếp tuyến và dây cung) ;

$\widehat{BDE} = \widehat{BKE}$ (vì tứ giác $BKDE$ nội tiếp).

Suy ra $\widehat{BKM} = \widehat{BKE} \Rightarrow$ hai tia $KE$, $KM$ trùng nhau $\Rightarrow K$, $E$, $M$ thẳng hàng.

Tương tự, ta có $\widehat{CKF} = \widehat{CKM}$ suy ra hai tia $KF$, $KM$ trùng nhau $\Rightarrow K$, $F$, $M$ thẳng hàng.

Từ đó suy ra đpcm.

**Bài tập áp dụng.**

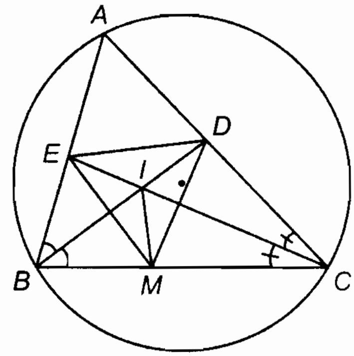
**Bài 1.** Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB // CD$), gọi $O$ là giao điểm của các cạnh $AC$ và $BD$ ; $M$, $N$, $P$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB$, $BC$, $AD$. Gọi $E$ là trung điểm của đoạn $PN$. Chứng minh rằng $M$, $O$, $E$ thẳng hàng.

**Bài 2.** Cho đường tròn $(O)$ nội tiếp tam giác $ABC$. Gọi $D$, $E$ lần lượt là các tiếp điểm của $(O)$ với $BC$, $CA$. Đường thẳng qua $B$ vuông góc với $AO$ tại F. Chứng minh rằng $D$, $E$, $F$ thẳng hàng.

**Bài 3.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O_1)$ và ngoại tiếp đường tròn $(O_2)$. Điểm $O$ là giao điểm của $AC$ và $BD$. Chứng minh rằng $O$, $O_1$, $O_2$ thẳng hàng.

# Hướng dẫn giải ...

*(Tiếp theo trang 10)*




Tuy nhiên, $\widehat{EBM} < 90^o$ và $\widehat{EDM} = 60^o$ suy ra $\widehat{EBM} + \widehat{EDM} < 150^o$

$\Rightarrow \widehat{BED} + \widehat{BMD} > 210^o \Rightarrow \widehat{BED} = \widehat{BMD}$

$\Rightarrow \Delta BED = \Delta BMD \Rightarrow BE = BM \Rightarrow IE = IM$.

Tương tự, $ID = IM$, suy ra $I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp của $\Delta DME \Rightarrow \widehat{BIC} = 120^o$

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 60^o \Rightarrow AH = OH$.

**Bài 5.**

• $a + b + c = 6 \Rightarrow a + b = 6 - c$

$\Rightarrow 9 = ab + bc + ca = ab + c(a + b)$

$= ab + c(6 - c) \Rightarrow (c - 3)^2 = ab \geq 0$ ;

tương tự : $(b - 3)^2 = ca \geq 0$ ;

$(a - 3)^2 = bc \geq 0$.

• $a + b + c = 6 > 0 \Rightarrow a, b, c$ không thể cùng âm hoặc bằng 0 $\Rightarrow c > 0$ ; $a = 0$ thì $b = c = 3$, trái giả thiết $\Rightarrow 0 < a < b < c$.

• $ab < \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \Rightarrow 4(c-3)^2 < (6-c)^2$

$\Rightarrow c^2 - 4c < 0 \Rightarrow c(c - 4) < 0 \Rightarrow 0 < c < 4$ ;

Nếu $c \leq 2$ thì $6 = a + b + c < 3c \leq 6$, vô lí ;

Nếu $c > 2$ thì $-1 < c - 3 < 1$

$\Rightarrow ab = (c-3)^2 < 1 \Rightarrow a < 1$, mà $(a - 3)^2 = bc \Rightarrow bc > 4$, mà $c < 4 \Rightarrow b > 1$.

• Nếu $b \geq 3$ thì $a + b + c > b + c > 2b \geq 6$, vô lí $\Rightarrow b < 3$.

• $(a - 3)(b - 3)(c - 3) = abc - 3(ab + bc + ca) + 9(a + b + c) - 27 = abc > 0$ ; $c - 3 > 0$ $\Rightarrow c > 3 \Rightarrow 0 < a < 1 < b < 3 < c < 4$.

# PHƯƠNG PHÁP DỒN BIẾN ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC THUẦN NHẤT

ThS. NGUYỄN VĂN THÔNG *(tổ trưởng tổ Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng)*

Hàm số $F(a\,;b\,;c)$ với các biến $a$, $b$, $c$ được gọi là hàm thuần nhất bậc $\alpha$ nếu với mọi số thực $t$, ta có : $F(ta\,;tb\,;tc) = t^{\alpha}\cdot F(a\,;b\,;c)$.

Bất đẳng thức có dạng $F(a\,;b\,;c) \geq 0$ với F là một hàm thuần nhất bậc $\alpha$ được gọi là bất đẳng thức thuần nhất bậc $\alpha$.

Phương pháp dồn biến là phương pháp làm giảm số biến của hàm số, đưa hàm số về dạng đơn giản hơn. Ta sẽ sử dụng phương pháp này để chứng minh bất đẳng thức thuần nhất.

Thay vì phải chứng minh trực tiếp bất đẳng thức $F(a\,;b\,;c) \geq 0$, ta sẽ chứng minh các bất đẳng thức trung gian với số biến ít hơn.

*Sau đây là một số ví dụ minh họa.*

**Ví dụ 1.** Cho $a\,;b\,;c \in \left[\frac{1}{3}\,;3\right]$.

Chứng minh : $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a} \geq \dfrac{7}{5}$.

**Lời giải.**

Đặt $F(a\,;b\,;c) = \dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}$.

Với vai trò như nhau, không làm mất tính tổng quát, giả sử $a = \max\{a\,;b\,;c\}$, ta có :

$$F(a\,;b\,;\sqrt{ab}) = \frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}+a}$$

$$= \frac{a}{a+b}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

suy ra $F(a\,;b\,;c) - F(a\,;b\,;\sqrt{ab}) =$

$$= \frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}-\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{ab}-c)^2}{(b+c)(c+a)(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \geq 0$$

$$\Rightarrow F(a\,;b\,;c) \geq F(a\,;b\,;\sqrt{ab}). \qquad (1)$$

Đặt $x = \sqrt{\dfrac{a}{b}} \leq 3 \left(\text{vì } a\,;b\,;c \in \left[\dfrac{1}{3}\,;3\right]\right)$, ta có

$$F(a\,;b\,;\sqrt{ab}) - \frac{7}{5} = \frac{a}{a+b}-\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{7}{5}$$

$$= \frac{x^2}{x^2+1}+\frac{2}{x+1}-\frac{7}{5} = \frac{3-7x+8x^2-2x^3}{5(x^2+1)(x+1)}$$

$$= \frac{(3-x)[x^2+(1-x)^2]}{5(x^2+1)(x+1)} \geq 0. \qquad (2)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (a\,;b\,;c) = \left(3\,;\dfrac{1}{3}\,;1\right)$ và các hoán vị của nó.

Từ (1), (2) suy ra điều phải chứng minh.

**Ví dụ 2.** Cho $a\,;b\,;c$ là các số không âm và không có hai số nào cùng bằng không. Chứng minh :

$$\frac{ab+bc+ca}{b^2-bc+c^2}+\frac{ab+bc+ca}{c^2-ca+a^2}+\frac{ab+bc+ca}{a^2-ab+b^2} \geq 3.$$

**Lời giải.** Đặt $F(a\,;b\,;c) =$

$$= \frac{ab+bc+ca}{b^2-bc+c^2}+\frac{ab+bc+ca}{c^2-ca+a^2}+\frac{ab+bc+ca}{a^2-ab+b^2}$$

Với vai trò như nhau, không làm mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c$, ta có :

$$F(a\,;b\,;c) - F(0\,;b\,;c) = \frac{a(b+c)}{b^2-bc+c^2}+$$

$$+\frac{a(c^2+2bc-ab)}{c^2-ac+a^2}+\frac{a(b^2+2bc-ac)}{a^2-ab+b^2}$$

$$\geq \frac{a(b+c)}{b^2-bc+c^2}+\frac{a(bc-ab)}{c^2-ac+a^2}+\frac{a(bc-ac)}{a^2-ab+b^2} \geq 0$$

suy ra $F(a\,;b\,;c) \geq F(0\,;b\,;c)$. (1)

Ta lại có $F(0\,;b\,;c)-3=$

$$=\frac{bc}{b^2-bc+c^2}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-3$$

$$=\frac{(b-c)^4}{bc(b^2-bc+c^2)} \geq 0. \qquad (2)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (a\,;b\,;c)=(0\,;1\,;1)$ và các hoán vị của nó.

Từ (1), (2) suy ra điều phải chứng minh.

**Ví dụ 3.** Cho $a$ ; $b$ ; $c$ là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh :

$(a + b)(b + c)(c + a) + 7 \geq 5(a + b + c)$.

**Lời giải.** Không làm mất tính tổng quát, giả sử $a = \max\{a\,;b\,;c\}$ và đặt $x = b + c$.

Ta có $a \geq 1$ ; $x \geq 2\sqrt{bc}=\frac{2}{\sqrt{a}}>0$. (1)

Xét $F(a\,;b\,;c)=$

$= (a + b)(b + c)(c + a) + 7 - 5(a + b + c)$

$= x(ax + a^2 + bc) + 7 - 5a - 5x$

$= ax^2 + (a^2 + bc - 5)x + 7 - 5a$ (2)

$$=a\left(x+\frac{a^2+bc-5}{2a}\right)^2-\left(\frac{a^2+bc-5}{2a}\right)^2+7-5a. \qquad (3)$$

Từ (1) suy ra :

$$x+\frac{a^2+bc-5}{2a} \geq \frac{2}{\sqrt{a}}+\frac{a^2+bc-5}{2a} \geq$$

$$\geq \frac{2}{a}+\frac{a^2+\frac{1}{a}-5}{2a}=\frac{1}{2a}\left(a^2+\frac{1}{a}-1\right)>0. \qquad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra :

$$F(a\,;b\,;c)=ax^2+(a^2+bc-5)x+7-5a \geq$$

$$\geq a\left(\frac{2}{\sqrt{a}}\right)^2+(a^2+bc-5)\frac{2}{\sqrt{a}}+7-5a$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a}}(a^2+\frac{1}{a}-5)+11-5a.$$

Đặt $t=\sqrt{a} \geq 1$, ta có : $F(a\,;b\,;c) \geq$

$$\geq \frac{2}{\sqrt{a}}(a^2+\frac{1}{a}-5)+11-5a$$

$$=\frac{2t^6-5t^5+11t^3-10t^2+2}{t^3}$$

$$=\frac{(t-1)^2(2t^4-t^3-4t^2+4t+2)}{t^3}$$

$$\geq \frac{(t-1)^2(2t^4-t^3-4t^2+3t+t)}{t^3}$$

$$=\frac{(t-1)^4(2t+3)}{t^2} \geq 0 \text{ (đpcm)}$$

(đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$).

**Bài tập vận dụng.**

**Bài 1.** Cho $a$ ; $b$ ; $c$ là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{5\sqrt{2}-4}{2}.$$

**Bài 2.** Cho $a$ ; $b$ ; $c$ là là các số thực dương, thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Chứng minh : $5(a+b+c)+\frac{3}{abc} \geq 18$.

**Bài 3.** Cho $a$ ; $b$ ; $c$ là là các số thực không âm. Chứng minh : $\frac{1}{12}(a+b+c)^5 \geq$

$$\geq a^4(b + c) + b^4(c + a) + c^4(a + b).$$

**Bài 4.** Cho $a\,;b\,;c \in \left[\frac{1}{2}\,;2\right]$.

Chứng minh rằng :

$$8\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \geq 5\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)+9.$$

**Bài 5.** Cho $a\,;b\,;c \geq \frac{2}{3}$, thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng :

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq ab + bc + ca.$$

**Bài 6.** Cho $a$ ; $b$ ; $c$ ; $d$ là các số thực dương, thỏa mãn $a + b + c + d = 4$. Chứng minh : $3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4abcd \geq 16$.

# MỘT KẾT QUẢ CÓ NHIỀU ỨNG DỤNG

LÊ BÁ HOÀNG
*(Phòng GD-ĐT Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)*

● *Để có một tư duy giải toán tốt thì việc tìm tòi sáng tạo trong khi học toán là hết sức cần thiết. Qua bài viết này tôi xin trao đổi cùng các bạn về một bài toán có thể ứng dụng để giải nhiều bài toán khác.*

**Bài toán (*).** Cho $a, b, c$ là những số thực bất kì và $x, y, z$ là những số thực dương. Khi đó ta luôn có các bất đẳng thức sau :

a) $$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y};\qquad (1)$$

b) $$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.\qquad (2)$$

**Lời giải.**

a) Do $x, y$ là các số thực dương nên bất đẳng thức (1) tương đương với

$$(a^2y+b^2x)\cdot(x+y)\geq(a+b)^2\cdot xy$$

$$\Leftrightarrow a^2xy+b^2xy+a^2y^2+b^2x^2\geq$$

$$\geq a^2xy+b^2xy+2abxy$$

$$\Leftrightarrow a^2y^2+b^2x^2-2abxy\geq 0\Leftrightarrow(ay-bx)^2\geq 0$$

Bất đẳng thức này luôn đúng với mọi $a, b, x, y$, suy ra (1) được chứng minh.

b) Áp dụng hai lần liên tiếp câu a) ta có :

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

suy ra (2) được chứng minh.

**Nhận xét.**

- Đẳng thức xảy ra ở (1) $\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}$;

đẳng thức xảy ra ở (2) $\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$.

- Qua các chứng minh trên, ta có thể dễ dàng phát biểu và chứng minh được bất đẳng thức tổng quát của (1) và (2) cho $n$ số thực bất kì $a_1, a_2, ..., a_n$ và $n$ số thực dương $b_1, b_2, ..., b_n$.

● *Sau đây là một số bài toán mà lời giải của chúng được áp dụng bài toán (*).*

**Bài toán 1.** Cho ba số thực dương $a, b, c$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2}.$$

**Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức (2) ta có

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{b+c+c+a+a+b}$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2}\text{ (đpcm).}$$

**Bài toán 2.** Cho ba số thực dương $a, b, c$ thỏa mãn $a+b+c\leq 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\geq 9.$$

*(Đề thi vào chuyên toán ĐHTH Hà Nội, năm học 1992-1993)*

**Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức (2) ta có

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}$$

$$\geq\frac{(1+1+1)^2}{a^2+2bc+b^2+2ca+c^2+2ab}$$

$$=\frac{9}{(a+b+c)^2}\geq\frac{9}{1^2}=9.$$

**Bài toán 3.** Tìm giá trị lớn nhất của tổng

$$P=\frac{1}{xa+yb+zc}+\frac{1}{xb+yc+za}+\frac{1}{xc+ya+zb}$$

theo các hằng số dương $x, y, z$, trong đó $a, b, c$ là các số dương thỏa mãn đẳng thức

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1.$

**Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức (2) ta có

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{x^2}{ax}+\frac{y^2}{by}+\frac{z^2}{cz}\geq\frac{(x+y+z)^2}{ax+by+cz}.$$

Đặt $s = x + y + z$, suy ra

$$\frac{1}{xa+yb+zc}\leq\frac{1}{s^2}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right);$$

Tương tự ta có

$$\frac{1}{xb+yc+za}\leq\frac{1}{s^2}\left(\frac{x}{b}+\frac{y}{c}+\frac{z}{a}\right);$$

$$\frac{1}{xc+ya+zb}\leq\frac{1}{s^2}\left(\frac{x}{c}+\frac{y}{a}+\frac{z}{b}\right).$$

Cộng theo từng vế của ba bất đẳng thức trên ta được $P\leq\frac{s}{s^2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{s}.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 3$.

Vậy $P$ đạt giá trị lớn nhất là $\frac{1}{x+y+z}$.

**Bài toán 4.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{2}{1-x}+\frac{1}{x}$ với $0 < x < 1$.

**Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có

$$y=\frac{2}{1-x}+\frac{1}{x}\geq\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{1-x+x}=3+2\sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{\sqrt{2}}{1-x}=\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{2}+1}{1-x+x}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}-1\in(0\ ;\ 1).$$

Vậy hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất là $3+2\sqrt{2}$.

**Bài toán 5.** Cho ba số dương $x$, $y$, $z$ thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng :

$$A=\frac{3}{xy+yz+zx}+\frac{2}{x^2+y^2+z^2}>14.$$

**Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có

$$A=\frac{(\sqrt{6})^2}{2xy+2yz+2zx}+\frac{(\sqrt{2})^2}{x^2+y^2+z^2}\geq$$

$$\geq\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{2xy+2yz+2zx+x^2+y^2+z^2}=$$

$$=\frac{8+4\sqrt{3}}{(x+y+z)^2}=8+4\sqrt{3}>14 \text{ (đpcm).}$$

**Bài toán 6.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\frac{1}{1-2(ab+bc+ca)}+\frac{1}{abc}$, biết $a$, $b$, $c$ là ba số thực dương có tổng bằng 1.

**Lời giải.** Ta có $(a + b + c)^2 = 1$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 1$

$\Leftrightarrow 1 - 2(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2.$

Do đó : $M=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{abc}$

$$=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{a+b+c}{abc}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức (2) ta có

$$\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\geq\frac{(1+1+1)^2}{bc+ca+ab}=\frac{9}{bc+ca+ab}$$

$$\Rightarrow M\geq\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{bc+ca+ab}\geq$$

$$\geq\frac{(1+1+1)^2}{a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab}+$$

$$+\frac{7}{bc+ca+ab}=\frac{9}{(a+b+c)^2}+\frac{7}{bc+ca+ab}$$

$$=9+\frac{7}{bc+ca+ab}.$$

Ta lại chứng minh được :

$0<ab+bc+ca\leq\frac{(a+b+c)^2}{3}=\frac{1}{3}$, suy ra

$$\frac{7}{bc+ca+ab}\geq 21\Rightarrow M\geq 9+21=30.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Vậy $M$ đạt giá trị nhỏ nhất là 30.

*(Xem tiếp trang 21)*

# SỬ DỤNG KĨ THUẬT "ĐIỂM RƠI" VÀ BẤT ĐẲNG THỨC CÔ-SI

CAO MINH QUANG

*(THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long)*

Bất đẳng thức Cô-si có rất nhiều ứng dụng. Bài viết này xin trình bày phương pháp sử dụng kĩ thuật "điểm rơi" (giá trị của biến để xảy ra đẳng thức) kết hợp với bất đẳng thức Cô-si trong các bài toán chứng minh bất đẳng thức.

**Bất đẳng thức Cô-si.**

Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số không âm thì

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Việc xác định điều kiện của biến để xảy ra đẳng thức trong bài toán bất đẳng thức là rất quan trọng, nó sẽ giúp ta rất nhiều trong việc định hướng giải quyết bài toán. Ví dụ đầu tiên là một bất đẳng thức đơn giản.

**Bài toán 1.** Cho $0 < a \leq \frac{1}{2}$.

Chứng minh rằng $a + \frac{1}{a^2} \geq \frac{9}{2}$. (*)

**Lời giải.** Vì $0 < a \leq \frac{1}{2}$ nên $\frac{1}{a^2} \geq 4$.

Mặt khác, khi $a = \frac{1}{2}$ thì đẳng thức xảy ra ở (*) và $\frac{a}{2} = \frac{1}{16a^2}$. Do đó, áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta nhận được :

$$a + \frac{1}{a^2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{1}{16a^2} + \frac{15}{16a^2} \geq$$

$$\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{16a^2}} + \frac{15}{16a^2} \geq \frac{3}{4} + \frac{15}{4} = \frac{9}{2}.$$

**Nhận xét.** Ta có thể chứng minh bất đẳng thức trên bằng cách khác, nhưng rõ ràng lời giải trên khá gọn gàng và đẹp mắt, sau khi ta xác định được "điểm rơi" là $a = \frac{1}{2}$.

**Bài toán 2.** *[Japan, 2005]* Cho $a$, $b$, $c$ là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng :

$$a\sqrt[3]{1+b-c} + b\sqrt[3]{1+c-a} + c\sqrt[3]{1+a-b} \leq 1.$$

**Lời giải.** Ta nhận thấy, nếu $a = b = c = \frac{1}{3}$ thì đẳng thức xảy ra ở bất đẳng thức trên.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$a \cdot \sqrt[3]{1+b-c} = a \cdot \sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot (1+b-c)} \leq$$

$$\leq a \cdot \frac{1+1+(1+b-c)}{3} = \frac{1}{3}(3a+ab-ac)$$

suy ra $a \cdot \sqrt[3]{1+b-c} \leq \frac{1}{3}(3a+ab-ac)$

Chứng minh tương tự, ta có :

$$b \cdot \sqrt[3]{1+c-a} \leq \frac{1}{3}(3b+bc-ba);$$

$$c \cdot \sqrt[3]{1+a-b} \leq \frac{1}{3}(3c+ca-cb).$$

Cộng theo từng vế ba bất đẳng thức trên, ta suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

**Bài toán 3.** *[IMO, 1995]* Cho $a$, $b$, $c$ là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$.

Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}.$$

**Lời giải.**

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. Khi đó $\frac{1}{a^3(b+c)}=\frac{b+c}{4bc}$.

Vì vậy, áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có :

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{b+c}{4bc}\ge 2\cdot\sqrt{\frac{1}{a^3(b+c)}\cdot\frac{b+c}{4bc}}=\frac{1}{a}$$

suy ra $\frac{1}{a^3(b+c)}\ge\frac{1}{a}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$;

Chứng minh tương tự, ta có :

$$\frac{1}{b^3(c+a)}\ge\frac{1}{b}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right);$$

$$\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{1}{c}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Cộng theo từng vế ba bất đẳng thức trên và áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge$$

$$\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge\frac{1}{2}\cdot3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=\frac{3}{2}.$$

Ví dụ tiếp theo là một "điển hình" cho việc sử dụng kĩ thuật này.

**Bài toán 4.** *[Poland, 1995]* Cho ba số thực *a*, *b*, *c* đều không nhỏ hơn $-\frac{3}{4}$, thỏa mãn a + b + c = 1. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\le\frac{9}{10}.$$

**Lời giải.** Ta để ý rằng

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\le$$

$$\le\frac{|a|}{a^2+1}+\frac{|b|}{b^2+1}+\frac{|c|}{c^2+1}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với điều kiện a, b, c đều không âm và a + b + c = 1. Chú ý, đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$. Khi đó $a^2=b^2=c^2=\frac{1}{9}$, áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 10 số gồm $a^2$ và 9 số $\frac{1}{9}$ ta có :

$$a^2+1=a^2+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{9}\ge10\cdot\sqrt[10]{\frac{a^2}{9^9}}=\frac{10}{9}\cdot\sqrt[5]{3a}$$

suy ra $\frac{a}{a^2+1}\le\frac{a}{\frac{10}{9}\cdot\sqrt[5]{3a}}=\frac{9}{10}\cdot\sqrt[5]{\frac{a^4}{3}}\le$

$$\le\frac{9}{10}\cdot\frac{a+a+a+a+\frac{1}{3}}{5}=\frac{9}{50}\left(4a+\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{a}{a^2+1}\le\frac{9}{50}\left(4a+\frac{1}{3}\right);$$

Chứng minh tương tự, ta có :

$$\frac{b}{b^2+1}\le\frac{9}{50}\left(4b+\frac{1}{3}\right);\ \frac{c}{c^2+1}\le\frac{9}{50}\left(4c+\frac{1}{3}\right).$$

Cộng theo từng vế ba bất đẳng thức trên, ta suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Cũng với kĩ thuật chọn "điểm rơi", ta còn có một cách chứng minh khác, áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$a^2+1=a^2+\frac{1}{9}+\frac{8}{9}\ge2\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{9}}+\frac{8}{9}=\frac{6a+8}{9}$$

suy ra $\frac{a}{a^2+1}\le\frac{9a}{6a+8}=\frac{3}{2}-\frac{6}{3a+4}$;

Chứng minh tương tự, ta có :

$$\frac{b}{b^2+1}\le\frac{3}{2}-\frac{6}{3b+4};\ \frac{c}{c^2+1}\le\frac{3}{2}-\frac{6}{3c+4}.$$

Cộng theo từng vế ba bất đẳng thức trên, ta nhận được : $\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\le$

*(Xem tiếp trang 25)*

# MỘT BÀI TOÁN THÚ VỊ

NGUYỄN TIẾN LÂM
*(Lớp 12 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)*

Bài toán mà tôi nói đến là một bài toán trong kì thi HSG Toán lớp 9, TP. Hồ Chí Minh, năm học 1999-2000 :

**Bài toán.** Cho $a$, $b$, $c$ là ba số thực không âm. Chứng minh rằng :

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \le abc.$$

**Lời giải.**

Ta nhận thấy tổng của hai trong ba số hạng $a+b-c$ ; $b+c-a$ ; $c+a-b$ đều không âm nên chỉ có nhiều nhất một số âm trong ba số hạng trên.

Nếu trong ba số hạng trên có một số âm thì bất đẳng thức cần chứng minh hiển nhiên đúng.

Nếu cả ba số hạng trên đều không âm, ta có

$$a^2 \ge a^2-(b-c)^2 = (a+b-c)(c+a-b) \ge 0$$

tương tự, ta có

$$a^2 \ge (a+b-c)(c+a-b)\ ;$$
$$b^2 \ge (a+b-c)(b+c-a)\ ;$$
$$c^2 \ge (b+c-a)(c+a-b).$$

Nhân theo từng vế ba bất đẳng thức trên suy ra :

$$a^2b^2c^2 \ge (a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2$$
$$\Rightarrow (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \le abc.$$

● Phép chứng minh bất đẳng thức trên khá đơn giản và quen thuộc với nhiều bạn, nhưng bất đẳng thức này lại được ứng dụng để giải nhiều bài toán khó.

**Ví dụ 1** *(đề thi IMO năm 2000)*. Cho $a$, $b$, $c$ là ba số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng :

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \le 1.$$

**Lời giải.** Áp dụng bài toán trên cho ba số dương là $a\ ;1\ ;\frac{1}{b}$ ta có :

$$\left(a+1-\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{b}-a\right)\left(\frac{1}{b}+a-1\right) \le \frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow \left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(a+1-\frac{1}{b}\right)b\left(1+\frac{1}{b}-a\right)\frac{1}{a} \le 1$$

$$\Leftrightarrow \left(a-1+\frac{1}{b}\right)(ab+b-1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{ab}-1\right) \le 1$$

$$\Leftrightarrow \left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \le 1.$$

**Ví dụ 2.** Cho $a$, $b$, $c$ là ba số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng :

$$a^3+b^3+c^3+\frac{15}{4}abc \ge \frac{1}{4}.$$

**Lời giải.** Áp dụng bài toán trên ta có :

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \le abc$$

$$\Leftrightarrow (1-2c)(1-2a)(1-2b) \le abc$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}-3(ab+bc+ca)+\frac{27}{4}abc \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3-3(ab+bc+ca)(a+b+c)+ +\frac{27}{4}abc \ge \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+ +\frac{27}{4}abc \ge \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+\frac{15}{4}abc \ge \frac{1}{4}.$$

● Đề nghị các bạn làm hai bài tập sau.

**Bài 1.** Cho $a$, $b$, $c$ là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 3. Chứng minh rằng $3a^2+3b^2+3c^2+4abc \ge 13$.

**Bài 2.** Cho $x$, $y$, $z$ là ba số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng :

$$0 \le xy+yz+zx-2xyz \le \frac{7}{27}.$$


# MỞ RỘNG DẠNG TOÁN NGHIỆM CHUNG CỦA HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

NGUYỄN NGỌC PHIÊN
*(lớp 10 Toán-Tin, THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi)*

Trên TTT2 số 52, nhà giáo *Nguyễn Thanh Hài* đã giới thiệu dạng toán tìm điều kiện để hai phương trình bậc hai có nghiệm chung. Qua bài viết này, tôi muốn tiếp tục giới thiệu những mở rộng của dạng toán đó thông qua các bài toán sau.

**Bài toán 1.** Hai phương trình bậc hai :

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0\ ;\ a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$$

có một nghiệm chung. Chứng minh rằng :

$(a_1c_2 - a_2c_1)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1)$. (*)

*(trích đề thi tuyển sinh THPT tỉnh Quảng Ngãi, năm học 2006-2007)*

**Lời giải.** Gọi $x_0$ là nghiệm chung của hai phương trình đã cho, khi đó ta có

$$\begin{cases} a_1x_0^2 + b_1x_0 + c_1 = 0\ ; & (1) \\ a_2x_0^2 + b_2x_0 + c_2 = 0. & (2) \end{cases}$$

Nhân hai vế của (1) với $a_2$ ; của (2) với $a_1$ rồi trừ theo từng vế của hai đẳng thức mới, ta có $(a_2b_1 - a_1b_2)x_0 + a_2c_1 - a_1c_2 = 0$. (3)

Nhân hai vế của (1) với $b_2$ ; của (2) với $b_1$ rồi trừ theo từng vế của hai đẳng thức mới, ta có $(a_1b_2 - a_2b_1)x_0^2 + b_2c_1 - b_1c_2 = 0$. (4)

+ Nếu $a_2b_1 - a_1b_2 = 0$ thì từ (3) suy ra $a_2c_1 - a_1c_2 = 0 \Rightarrow$ (*) đúng.

+ Nếu $a_2b_1 - a_1b_2 \neq 0$ thì từ (3) và (4) suy ra $x_0 = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_2b_1 - a_1b_2}$ ; $x_0^2 = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$.

$$\Rightarrow \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \left(\frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_2b_1 - a_1b_2}\right)^2$$

$$\Rightarrow (a_1c_2 - a_2c_1)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1).$$

Vậy bài toán được chứng minh.

**Bài toán 2.** Hai phương trình :

$$x^2 + ax + 6 = 0\ ;\ x^2 + bx + 12 = 0$$

có một nghiệm chung. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|a| + |b|$.

**Lời giải.** Gọi $x_0$ là nghiệm chung của hai phương trình đã cho, khi đó ta có

$$\begin{cases} x_0^2 + ax_0 + 6 = 0\ ; & (1) \\ x_0^2 + bx_0 + 12 = 0. & (2) \end{cases}$$

Cộng theo từng vế của (1) và (2) ta có

$$2x_0^2 + (a+b)x_0 + 18 = 0. \quad (3)$$

Tồn tại $x_0 \Leftrightarrow$ phương trình (3) phải có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow (a + b)^2 - 144 \geq 0$ $\Leftrightarrow (a + b)^2 \geq 144 \Leftrightarrow |a| + |b| \geq 12$.

Suy ra $|a| + |b| \geq |a + b| \geq 12$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} ab \geq 0\ ; \\ |a+b| = 12. \end{cases}$

+ Nếu $a + b = 12$ thì từ (3) suy ra

$$2x_0^2 + 12x_0 + 18 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + 6x_0 + 9 = 0$$

$\Leftrightarrow (x_0 + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -3$,

thay vào (1) và (2) suy ra $a = 5$ ; $b = 7$.

+ Nếu $a + b = -12$ thì từ (3) suy ra

$$2x_0^2 - 12x_0 + 18 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 3,$$

thay vào (1) và (2) suy ra $a = -5$ ; $b = -7$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|a| + |b|$ là 12, đạt được khi $(a ; b)$ bằng $(5 ; 7)$ hoặc $(-5 ; -7)$.

**Bài toán 3.** Hai phương trình :

$$x^2 + ax + b = 0 \ ; \ x^2 + cx + d = 0$$

có một nghiệm chung. Chứng minh rằng :

$$(b - d)^2 + (a - c)(ad - bc) = 0. \ (^{**})$$

**Lời giải.** Gọi $x_0$ là nghiệm chung của hai phương trình đã cho, khi đó ta có

$$\begin{cases} x_0^2 + ax_0 + b = 0 \ ; & (1) \\ x_0^2 + cx_0 + d = 0. & (2) \end{cases}$$

Trừ theo từng vế của (1) và (2) ta có

$$(a - c)x_0 + b - d = 0. \qquad (3)$$

+ Nếu $a - c = 0$ thì $a = c$, suy ra $b = d$ khi đó (**) hiển nhiên đúng.

+ Nếu $a - c \neq 0$ thì $a \neq c$, từ (3) suy ra $x_0 = \dfrac{d-b}{a-c}$, thay vào (1) ta có

$$\left(\frac{d-b}{a-c}\right)^2 + a \cdot \frac{d-b}{a-c} + b = 0$$

$$\Leftrightarrow (d-b)^2 + a(d-b)(a-c) + b(a-c)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (d-b)^2 + (a-c)(ad-bc) = 0 \text{ (đpcm).}$$

● ***Bài tập rèn luyện.***

**Bài 1.** Cho hai phương trình :

$$x^2 + mx + n = 0 \ ; \ x^2 + px + q = 0.$$

Biết $(m - p)^2 + (n - q)^2 > 0$. Chứng minh rằng, nếu hai phương trình có đúng một nghiệm chung thì hai nghiệm còn lại là hai số hữu tỉ phân biệt.

*(trích đề thi tuyển sinh THPT tỉnh Quảng Ngãi, năm học 2004-2005)*

**Bài 2.** Cho $a, b, c$ là ba số đôi một khác nhau, $c \neq 0$ và hai phương trình sau có một nghiệm chung :

$$x^2 + ax + bc = 0 \ ; \ x^2 + bx + ca = 0.$$

a) Tìm hai nghiệm còn lại của các phương trình trên ;

b) Chứng minh rằng, hai nghiệm còn lại của các phương trình trên là nghiệm của phương trình $x^2 + cx + ab = 0$.

# MỘT KẾT QUẢ ...

*(Tiếp theo trang 3)*

● *Mong rằng các bạn sẽ tiếp tục tìm thêm được nhiều ứng dụng của bất đẳng thức các đã cho. Để kết thúc bài viết này, đề nghị các bạn làm các bài tập sau đây.*

**Bài 1.** Cho $x, y, z$ là các số thực dương và $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{1+xy} + \dfrac{1}{1+yz} + \dfrac{1}{1+zx}$.

**Bài 2.** Cho $x, y, z$ là các số thực dương thỏa mãn $x + 2y + 3z = 6$. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \geq 1 + \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$.

**Bài 3.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{c}} + \dfrac{c}{\sqrt{a}}$ với $a, b, c$ là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c \geq 3$.

**Bài 4.** Cho $x, y$ là 2 số thực dương thỏa mãn $x + y = \dfrac{2007}{2006}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{2006}{x} + \dfrac{1}{2006y}$.

*(Trích đề thi giáo viên giỏi tỉnh Hà Tĩnh, năm 2006-2007)*

**Lời tòa soạn.** Thực chất các bất đẳng thức (1) và (2) suy ra ngay từ bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki :

$$\left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}\right)(x+y) \geq \left(\frac{a}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{y}} \cdot \sqrt{y}\right)^2 =$$

$$= (a+b)^2 \ ;$$

$$\left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z}\right)(x+y+z) \geq$$

$$\geq \left(\frac{a}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{y}} \cdot \sqrt{y} + \frac{c}{\sqrt{z}} \cdot \sqrt{z}\right)^2 =$$

$$= (a+b+c)^2.$$

# CHỨNG MINH HÌNH HỌC BẰNG NHIỀU CÁCH

NGUYỄN NGỌC THỤY *(THCS Thị Cầu, Bắc Ninh)*

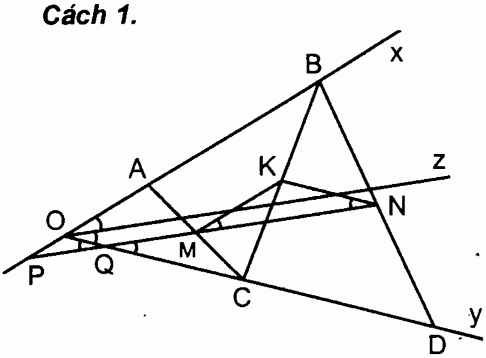
Chúng ta đều biết, nhiều bài toán có thể giải bằng nhiều cách, nhất là các bài toán chứng minh hình học. Việc tìm nhiều cách giải cho mỗi bài toán sẽ giúp bạn ghi nhớ và biết áp dụng triệt để, linh hoạt các kiến thức đã học khi giải toán. Xin nêu một bài toán quen thuộc của lớp 8 làm ví dụ :

***Cho $\widehat{xOy}$ có phân giác Oz. Trên tia Ox lấy hai điểm A, B và trên tia Oy lấy hai điểm C, D sao cho A thuộc đoạn OB, C thuộc đoạn OD và AB = CD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD. Chứng minh rằng MN // Oz.***

Có nhiều dấu hiệu để nhận biết hai đường thẳng song song như : các góc ở vị trí đồng vị, so le trong, so le ngoài bằng nhau ; hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba ; hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba ; phân giác của hai góc bằng nhau có các cạnh tương ứng song song ; tính chất của hình bình hành ; tính chất của các đoạn thẳng tỉ lệ ; ... Từ những dấu hiệu nhận biết đó, ta hi vọng sẽ xác định được các phương hướng chứng minh thành công.

Trên thực tế, dựa vào các dấu hiệu nhận biết nêu trên, ta đã có tối thiểu mười cách chứng minh sau đây.

***Cách 1.***

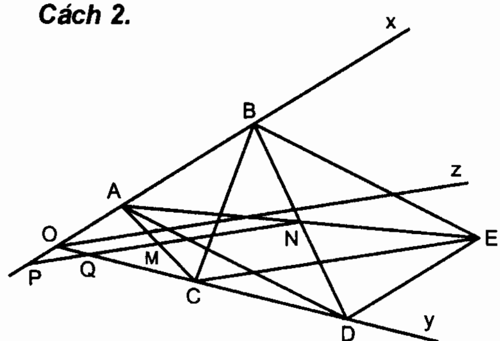



Gọi K là trung điểm của BC.

Từ AB = CD và tính chất đường trung bình trong tam giác, ta có MK // AB ; NK // CD ; MK = NK. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của MN với Ox, Oy. Suy ra tam giác MKN cân tại K và $\widehat{OQP} = \widehat{KNM} = \widehat{KMN} = \widehat{OPQ}$ (tính chất góc đồng vị) $\Rightarrow$ tam giác PQQ cân tại O

$\Rightarrow 2\widehat{xOz} = \widehat{xOy} = 2\widehat{OPQ} \Rightarrow \widehat{xOz} = \widehat{OPQ}$ (là hai góc đồng vị) $\Rightarrow$ Oz // PQ hay Oz // MN.

***Cách 2.***



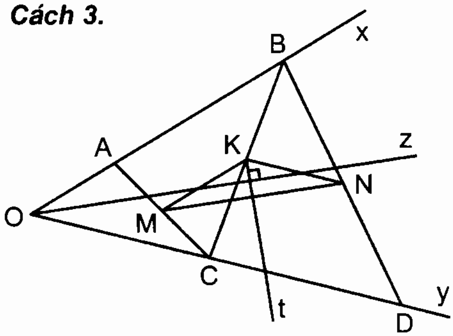

Xác định P, Q như *cách 1* và dựng hình bình hành ABED. Do đó :

DE // AB ; DE = AB = DC suy ra tam giác CDE cân tại D, $\widehat{DCE} = \widehat{DEC}$ ;

N là trung điểm của AE và MN là đường trung bình của tam giác ACE, suy ra MN // CE hay PQ // CE $\Rightarrow \widehat{OQP} = \widehat{DCE}$ (hai góc so le ngoài) và $\widehat{OPQ} = \widehat{DEC}$ (hai góc có cạnh tương ứng song song).

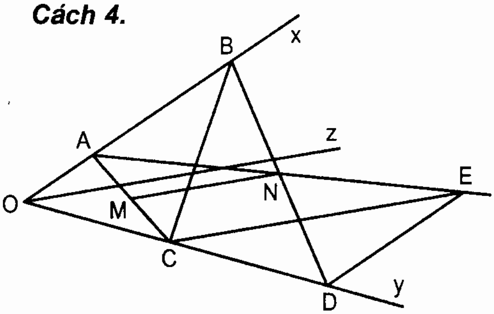
Suy ra $\widehat{OQP} = \widehat{OPQ} \Rightarrow$ tam giác POQ cân tại O $\Rightarrow$ Oz // MN (như *cách 1*).

***Cách 3.***




Với K là trung điểm của BC, theo *cách 1* ta có tam giác MKN cân tại K và $\widehat{xOy}$, $\widehat{MKN}$ là hai góc có cạnh tương ứng song song, có tổng bằng $180^{o}$. Do đó phân giác Kt của $\widehat{MKN}$ đồng thời vuông góc với MN và Oz (dành cho các bạn tự chứng minh), suy ra MN // Oz.

***Cách 4.***




Trên tia đối của tia NA, lấy điểm E sao cho NA = NE. Ta dễ thấy MN // CE ; AB // DE ; CD = AB = DE. Như vậy :

Tam giác CDE cân tại D và $\widehat{EDy} = 2\widehat{ECy}$ ;

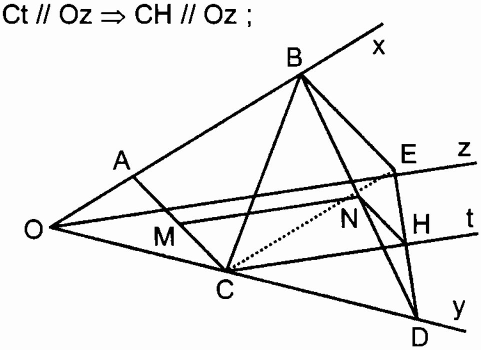
Ox // DE suy ra $\widehat{EDy} = \widehat{xOy} = 2\widehat{zOy}$

$\Rightarrow \widehat{ECy} = \widehat{zOy} \Rightarrow$ Oz // CE $\Rightarrow$ Oz // MN.

***Cách 5.***

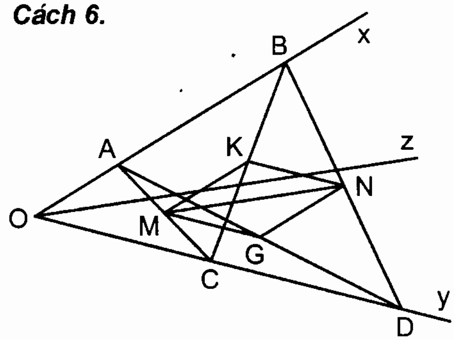
Dựng hình bình hành ABEC, ta có BE // AC, BE = AC = 2MC, CE // AB và CE = AB = CD. Do đó :

Tam giác DCE cân tại C, suy ra phân giác Ct của $\widehat{DCE}$ đi qua trung điểm H của DE ; $\widehat{DCE} = \widehat{xOy}$ (đồng vị), suy ra hai phân giác Ct // Oz $\Rightarrow$ CH // Oz ;




HN là đường trung bình của tam giác CBE suy ra BE // HN và BE = 2HN $\Rightarrow$ HN // MC và HN = MC $\Rightarrow$ HNMC là hình bình hành $\Rightarrow$ MN // CH $\Rightarrow$ MN // Oz.

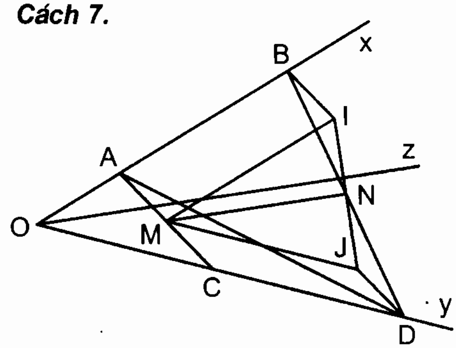
***Cách 6.***




Gọi K, G lần lượt là trung điểm của BC, AD. Ta chứng minh được MK // Ox, MG // Oy và MKNG là hình thoi, suy ra MN là phân giác của $\widehat{KMG}$.

Mặt khác, $\widehat{KMG} = \widehat{xOy}$ có các cạnh tương ứng song song, suy ra MN // Oz.

***Cách 7.***




*(Xem tiếp trang 25)*

# TÌM N[redacted]HỨC ĐỂ PH[redacted]NH NHÂN TỬ

VŨ VĂN DŨNG *(THCS Nam Sơn, Nam Trực, Nam Định)*

Để phân tích đa thức thành nhân tử, Sách giáo khoa Toán 8 đã giới thiệu ba phương pháp là đặt nhân tử chung, dùng hằng đẳng thức, nhóm hạng tử. Phải chăng, muốn phân tích một đa thức thành nhân tử, ta phải tìm được tất cả các nghiệm của đa thức đó ? Bài viết này xin được giới thiệu phương pháp tìm nghiệm của đa thức để phân tích đa thức thành nhân tử, qua đó bạn đọc phần nào trả lời được câu hỏi trên.

Trước hết ta nhắc lại một số kiến thức cơ bản sau.

1) Đa thức với các hệ số nguyên

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x^1 + a_n$$

$(a_0 \neq 0)$ có nghiệm hữu tỉ $\frac{p}{q}$ thì p là ước của $a_n$, q là ước dương của $a_0$.

*Hệ quả.* Nếu x = a là nghiệm nguyên của của đa thức f(x) thì a là ước của $a_n$.

2) Nếu đa thức f(x) có nghiệm x = a thì x – a là nhân tử của đa thức.

Sau đây là một số dạng cơ bản.

**1. Đa thức bậc hai**

❑ Phương pháp để phân tích đa thức bậc hai là tìm nghiệm rồi viết thành nhân tử.

**Ví dụ 1.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $3x^2 - 8x + 4$.

**Lời giải.** Phương trình $3x^2 - 8x + 4 = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 2$ ; $x_2 = \frac{2}{3}$ nên đa thức đã cho được phân tích thành :

$$3(x-2)\left(x-\frac{2}{3}\right) = (x-2)(3x-2).$$

**2. Đa thức bậc cao**

• Đa thức có nghiệm nguyên

**Ví dụ 2.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $x^3 - x^2 - 4$.

**Lời giải.** Ta có f(2) = 0 nên đa thức có nghiệm x = 2. Vì $\frac{x^3 - x^2 - 4}{x-2} = x^2 + x + 2$ mà phương trình $x^2 + x + 2 = 0$ vô nghiệm (do Δ = – 7 < 0) nên :

$$x^3 - x^2 - 4 = (x-2)(x^2 + x + 2).$$

• Đa thức có nghiệm hữu tỉ

**Ví dụ 3.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $3x^3 - 7x^2 + 17x - 5$.

**Lời giải.** Thử $x \in \left\{\pm 1 ;\ \pm 5 ;\ \pm\frac{1}{3} ;\ \pm\frac{5}{3}\right\}$ được $x = \frac{1}{3}$ là nghiệm của đa thức. Ta có :

$$\frac{3x^3 - 7x^2 + 17x - 5}{3x-1} = x^2 - 2x + 5.$$

Phương trình $x^2 - 2x + 5 = 0$ vô nghiệm (do Δ' = – 4 < 0) nên :

$$3x^3 - 7x^2 + 17x - 5 = (3x-1)(x^2 - 2x + 5).$$

❑ Phương hướng chung để phân tích những đa thức bậc cao thành nhân tử là phân tích nó thành tích các đơn thức và đa thức bậc hai, sau đó tìm nghiệm của các nhân tử bậc hai này. Xin đưa ra năm cách sau đây.

**2.1. Biến đổi đa thức bậc cao**

**Ví dụ 4.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử : x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128.

**Lời giải.** Ta có :

$x(x+4)(x+6)(x+10)+128$
$= (x^2+10x)(x^2+10x+24)+128$
$= (x^2+10x+12)^2-12^2+128$
$= (x^2+10x+12)^2-4^2$
$= (x^2+10x+16)(x^2+10x+8)$.

Phương trình $x^2+10x+8=0$ có hai nghiệm $x_1=-5+\sqrt{17}$ ; $x_2=-5-\sqrt{17}$.

Phương trình $x^2+10x+16=0$ có hai nghiệm $x_3=-2$ ; $x_4=-8$.

Vậy $x(x+4)(x+6)(x+10)+128=$
$=(x+2)(x+8)(x+5-\sqrt{17})(x+5+\sqrt{17})$.

**2.2. Sử dụng phương pháp hệ số bất định**

**Ví dụ 5.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $x^4-6x^3+12x^2-14x+3$.

**Lời giải.** Đa thức đã cho không nhận $\pm1$, $\pm3$ là nghiệm nên không có nghiệm hữu tỉ, nếu nó phân tích được thì phải có dạng :

$(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=x^4+(a+c)x^3+$
$+(ac+b+d)x^2+(ad+bc)x+bd$.

Từ $bd=3$, nếu chọn $b=3$ thì $d=1$, ta có $a+c=-6$ ; $ac=8$ và $a+3c=-14$, suy ra $a=-2$ ; $c=-4$.

Giải hai phương trình $x^2-2x+3=0$ và $x^2-4x+1=0$, ta suy ra :

$x^4-6x^3+12x^2-14x+3=$
$=(x^2-2x+3)(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})$.

**2.3. Sử dụng cách giải của phương trình hồi quy**

**Ví dụ 6.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $x^4+7x^3-6x^2+7x+1$.

**Lời giải.** Xét phương trình :

$$x^4+7x^3-6x^2+7x+1=0. \qquad (*)$$

Vì $x=0$ không thỏa mãn (*) nên chia cả hai vế cho $x^2$, (*) trở thành :

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+7\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0.$$

Đặt $t=x+\frac{1}{x}\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$, ta có :

$$t^2+7t-8=0 \Leftrightarrow t_1=1\ ;\ t_2=-8.$$

Từ đó, giải hai phương trình $x^2-x+1=0$ và $x^2+8x+1=0$, ta suy ra :

$x^4+7x^3-6x^2+7x+1=$
$=(x^2-x+1)(x+4+\sqrt{15})(x+4-\sqrt{15})$.

**2.4. Dùng cách giải của phương trình dạng $(x+a)^4+(x+b)^4=c$**

**Ví dụ 7.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $(x+1)^4+(x+3)^4-2$.

**Lời giải.** Đặt $y=x+\frac{1+3}{2}=x+2$, đa thức được viết lại là : $(y-1)^4+(y+1)^4-2$
$=2y^4+12y^2=2y^2(y^2+6)$
$=2(x+2)^2[(x+2)^2+6]$
$=2(x+2)^2(x^2+4x+10)$.

**2.5. Đổi tham số thành biến số**

**Ví dụ 8.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $(x^2-a)^2-6x^2+4x+2a$.

**Lời giải.** Xét phương trình :

$(x^2-a)^2-6x^2+4x+2a=0$
$\Leftrightarrow a^2-2(x^2-1)a+x^4-6x^2+4x=0$.

Coi đây là phương trình bậc hai với ẩn a, ta tìm được $a=x^2-1\pm(2x-1)$. Từ đó $x^2+2x-a-2=0$ và $x^2-2x-a=0$.

So sánh hệ số của $x^4$ của hai đa thức, ta được : $(x^2-a)^2-6x^2+4x+2a=$
$=(x^2+2x-a-2)(x^2-2x-a)$.

**Nhận xét.** Các ví dụ trên ta thấy sự linh hoạt, đa dạng và hữu hiệu của *phương pháp tìm nghiệm của đa thức trong bài toán phân tích đa thức thành nhân tử*. Xem như bài tập, hãy phân tích các đa thức sau đây thành nhân tử.

a) $2x^2+x-6$ ;

b) $4x^3-3x+1$ ;

c) $x^5-4x^4+3x^3+3x^2-4x+1$ ;

d) $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$ ;

e) $x^4+4x^3+7x^2+6x-4$ ;

f) $2x^4+3x^3-4x^2-3x+2$ ;

g) $(x-3)^4+(x+1)^4-82$.

# MỘT BỔ ĐỀ THÚ VỊ!

DƯƠNG ĐỨC LÂM
*(Lớp K51 XD9, Đại học Xây dựng Hà Nội)*

Trong quá trình giải toán, tôi đã phát hiện được khá nhiều bổ đề có thể áp dụng để giải nhiều bài toán khác. Bổ đề sau là một trong số đó.

**Bổ đề.** Với x, y là các số dương ta có :

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\geq\frac{8}{(x+y)^2}. \qquad (*)$$

**Chứng minh.** Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho các số dương ta có :

$$(x+y)^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\geq 4xy\cdot\frac{2}{\sqrt{x^2y^2}}=8.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Sau đây là một số bài toán áp dụng bổ đề (*).

**Bài toán 1.** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca \leq abc$. Chứng minh rằng $\frac{8}{a+b}+\frac{8}{b+c}+\frac{8}{c+a}\leq$

$$\leq\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2}+2.$$

**Lời giải.** Sử dụng bổ đề (*) ta có :

$$\frac{8}{a+b}+\frac{8}{b+c}+\frac{8}{c+a}\leq(a+b)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+$$

$$+(b+c)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+(c+a)\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right).$$

Rút gọn vế phải ta được

$$\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2}+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Từ đó kết hợp giả thiết $\Rightarrow$ đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 3$.

**Bài toán 2.** Cho các số a, b, c thỏa mãn $a > b > c$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2+c^2}{2}+\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}\geq ac+4.$$

**Lời giải.** Áp dụng bổ đề (*) với $x = a - b > 0$ và $y = b - c > 0$, ta có :

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}\geq\frac{8}{(a-c)^2}. \qquad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta được :

$$\frac{(a-c)^2}{2}+\frac{8}{(a-c)^2}\geq 4. \qquad (2)$$

Cộng theo vế của (1) và (2) rồi rút gọn ta được đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi có đẳng thức ở cả (1) và (2)

$\Leftrightarrow a - b = b - c$ và $(a - c)^4 = 16$

$\Leftrightarrow a = c + 2$ và $b = c + 1$ ($c \in \mathbb{R}$).

● Hi vọng các bạn sẽ tìm thấy nhiều điều thú vị nữa xung quanh bổ đề (*). Sau đây là một số bài luyện tập.

**Bài toán 3.** Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq$

$$\geq\left(\frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}\right)^2.$$

**Bài toán 4.** Cho a, b, c là các số dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\geq$$

$$\geq\left(\frac{2}{1+a}\right)^2+\left(\frac{2}{1+b}\right)^2+\left(\frac{2}{1+c}\right)^2.$$

**Bài toán 5.** Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng :

$$\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$


# BÀI TOÁN GIẢI TAM GIÁC

ĐẶNG VĂN BIỂU
*(THCS Đông Dư, Gia Lâm, Hà Nội)*

Chúng ta đều biết chương I - SGK Hình học 9 đề cập đến *Hệ thức lượng trong tam giác vuông*, trong đó có bài toán *Giải tam giác vuông*. Mở rộng hơn, chúng ta áp dụng các phương pháp giải tam giác vuông để giải tam giác bất kì. Nói chung để giải được một tam giác ta phải biết trước hai cạnh và một góc hoặc hai góc và một cạnh của nó. Sau đây là một số ví dụ minh họa.

**Ví dụ 1.** Cho tam giác ABC vuông ở A. Biết rằng AB = 6 cm, AC = 8 cm.

Tính BC, $\hat{B}$, $\hat{C}$.

**Lời giải.** (Bạn đọc tự vẽ hình)

Áp dụng định lí Py-ta-go, ta có :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2$

$\Rightarrow BC = 10$ cm.

Ta có $tgB = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \hat{B} \approx 53^o$

$\Rightarrow \hat{C} = 90^o - \hat{B} \approx 37^o$.

**Ví dụ 2.** Cho tam giác ABC, trong đó BC = 11 cm, $\widehat{ABC} = 38^o$, $\widehat{ACB} = 30^o$. Gọi N là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống cạnh BC. Tính AN, AC.

*(Bài 30 - SGK Hình 9, tập I)*

**Lời giải.** (Bạn đọc tự vẽ hình)

Vì $\hat{B}$, $\hat{C}$ là các góc nhọn nên N nằm trên cạnh BC $\Rightarrow$ NB + NC = BC = 11 cm. (1)

Mặt khác :

$$\frac{NB}{NC} = \frac{AN \cdot cotgB}{AN \cdot cotgC} = \frac{cotg38^o}{cotg30^o} \approx 0,379. \qquad (2)$$

Giải hệ (1) và (2) ta được :

NB ≈ 4,675 cm ; NC ≈ 6,325 cm.

Từ đó ta có :

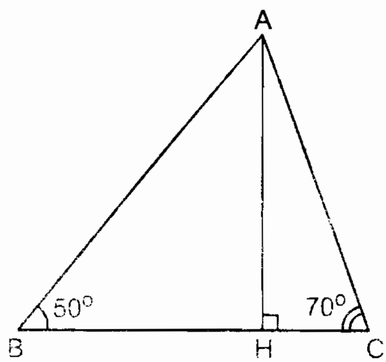
$AN = BN \cdot tgB \approx 4,675 \cdot tg38^o \approx 3,65$ cm ;

$$AC = \frac{NC}{\cos C} \approx \frac{6,325}{\cos 30^o} \approx 7,3 \text{ cm.}$$

**Ví dụ 3.** Cho tam giác ABC, trong đó $\widehat{ABC} = 50^o$, $\widehat{ACB} = 70^o$ và AB = 10 cm.

Tính AC, BC.

**Hướng dẫn.** Dựng đường cao AH của tam giác ABC.




Bài toán được giải theo các bước sau :

+ Tính HA, HB ;

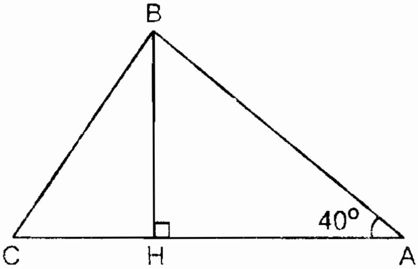
+ Tính AC, HC, BC.

(Việc tính toán cụ thể dành cho bạn đọc).

**Ví dụ 4.** Cho tam giác ABC có AB = 10 cm, AC = 12 cm, $\widehat{BAC} = 40^o$.

Tính BC, $\hat{B}$, $\hat{C}$.

**Lời giải.** Kẻ đường cao BH của tam giác ABC thì H nằm trên tia AC (vì $\hat{A} < 90^o$).




Xét tam giác vuông ABH, ta có :

$BH = AB \cdot \sin A = 10 \cdot \sin 40^{\circ} \approx 6{,}428$ cm ;

$AH = AB \cdot \cos A = 10 \cdot \cos 40^{\circ} \approx 7{,}66$ cm

$\Rightarrow CH = AC - AH \approx 12 - 7{,}66 \approx 4{,}34$ cm.

Xét tam giác vuông BHC, ta có :

$$\operatorname{tg} C = \frac{BH}{CH} = \frac{6{,}428}{4{,}34} \approx 1{,}481 \Rightarrow \hat{C} \approx 56^{\circ};$$

$$BC = \frac{BH}{\sin C} = \frac{6{,}428}{\sin 56^{\circ}} \approx 7{,}76 \text{ cm}.$$

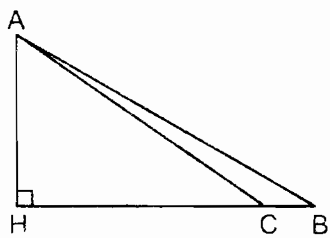
Từ đó suy ra $\hat{B} = 180^{\circ} - \hat{A} - \hat{C} \approx 84^{\circ}$.

**Ví dụ 5.** Giải tam giác ABC biết :

$AB = 8$ cm, $AC = 7$ cm và $\widehat{ABC} = 30^{\circ}$.

**Lời giải.** Dựng đường cao AH của tam giác ABC.

Nếu $\hat{C} \geq 90^{\circ}$ thì H thuộc tia đối của tia CB.




Xét tam giác vuông AHB, ta có :

$AH = AB \cdot \sin B = 8 \cdot \sin 30^{\circ} = 4$ cm.

$BH = AB \cdot \cos B = 8 \cdot \cos 30^{\circ} \approx 6{,}928$ cm.

Xét tam giác vuông AHC, ta có :

$$\sin \widehat{ACH} = \frac{AH}{AC} = \frac{4}{7} \approx 0{,}571 \Rightarrow \widehat{ACH} \approx 35^{\circ}.$$

Suy ra : $CH = AC \cdot \cos \widehat{ACH} = 7 \cdot \cos 35^{\circ} \approx$ $\approx 5{,}374$ cm.

Từ đó ta tính được :

$\widehat{ACB} = 180^{\circ} - \widehat{ACH} \approx 145^{\circ}$ ;

$\widehat{BAC} = 180^{\circ} - \widehat{ABC} - \widehat{ACB} \approx 5^{\circ}$ ;

$BC \approx 6{,}928 - 5{,}374 = 1{,}554$ cm.

Nếu $\hat{C} \leq 90^{\circ}$ thì H nằm trên cạnh BC.

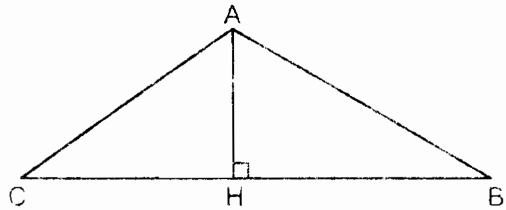
Bài toán được giải theo các bước sau :

+ Tính AH, BH ;

+ Tính $\widehat{ACB}$ và CH ;

+ Tính $\widehat{BAC}$ và CB.

(Việc tính toán cụ thể dành cho bạn đọc).




Như vậy, với việc dựng thêm đường cao để xuất hiện tam giác vuông, các bạn có thể giải được tam giác bất kì khi biết ba yếu tố : hai cạnh và một góc hoặc hai góc và một cạnh của nó. Bây giờ, ta giải tam giác khi biết độ dài ba cạnh của nó.

**Ví dụ 6.** Cho tam giác ABC. Biết $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm, $CA = 4$ cm.

Tính số đo các góc của tam giác ấy.

**Lời giải.** Dựng đường cao AH của tam giác ABC. (Bạn đọc tự vẽ hình)

Vì $BC > AC$ và $BC > AB$ nên $\hat{A} > \hat{B}$ và $\hat{A} > \hat{C}$. Do đó B, C là các góc nhọn nên H thuộc cạnh BC. Suy ra :

$$BH + CH = BC = 6. \qquad (1)$$

Áp dụng định lí Py-ta-go, ta có :

$AB^2 = AH^2 + BH^2$ ; $AC^2 = AH^2 + CH^2$.

Suy ra :

$BH^2 - CH^2 = AB^2 - AC^2 = 25 - 16 = 9$

$\Leftrightarrow (BH + CH)(BH - CH) = 9$

$\Leftrightarrow BH - CH = 1{,}5. \qquad (2)$

Giải hệ (1) và (2), ta được :

$BH = 3{,}75$ cm ; $CH = 2{,}25$ cm.

Ta có :

$$\cos B = \frac{BH}{AB} = \frac{3{,}75}{5} = 0{,}75 \Rightarrow \hat{B} \approx 41^{\circ};$$

$$\cos C = \frac{CH}{AC} = \frac{2{,}25}{4} = 0{,}5625 \Rightarrow \hat{C} \approx 56^{\circ}.$$

Từ đó ta có : $\hat{A} = 180^{\circ} - \hat{B} - \hat{C} \approx 83^{\circ}$.

# PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP

NGUYỄN ANH DŨNG *(Hà Nội)*

Sử dụng phương pháp quy nạp rất hiệu quả với các bài toán phụ thuộc số tự nhiên n. Chúng ta đã rất quen thuộc với việc chứng minh một bài toán bằng phương pháp quy nạp theo các bước :

- Chứng tỏ bài toán đúng với n = i ($i \in \{0 ; 1 ; ...\}$ là giá trị nhỏ nhất của n có thể nhận được) ;

- Giả sử bài toán đúng với n = k và chứng minh bài toán cũng đúng với n = k + 1. Từ đó theo nguyên lí quy nạp, kết luận bài toán đúng với mọi số tự nhiên $n \geq i$.

Tuy nhiên không phải lúc nào ta cũng làm được theo trình tự đó. Hơn nữa ngoài các bài toán chứng minh, phương pháp quy nạp còn được áp dụng cho nhiều loại toán khác. Bài viết mong muốn phần nào giúp các bạn hiểu thêm về sự đa dạng của phương pháp này. Do khuôn khổ của bài viết có hạn nên một số phần chúng tôi để độc giả tự giải quyết.

## 1. QUY NẠP TUẦN TỰ

**Thí dụ 1.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n > 1, ta có $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$. (1)

**Lời giải.** Với n = 2, bất đẳng thức (1) trở thành $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$, là bất đẳng thức đúng.

Giả sử (1) đúng với n = k, nghĩa là

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}. \quad (2)$$

Ta chứng minh (1) đúng với n = k + 1.

Thật vậy, từ (2) suy ra :

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Vì $\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k(k+1)}+1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$

nên $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$,

nghĩa là bất đẳng thức (1) đúng với n = k + 1.

Theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số tự nhiên n > 1 (đpcm).

## 2. QUY NẠP THEO CÔNG THỨC TRUY HỒI

**Thí dụ 2.** Giả sử $a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$; $b = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, chứng minh rằng $a^n + b^n$ là số nguyên với mọi số tự nhiên n > 0.

**Lời giải.** Dễ thấy a + b = 3 ; $ab = \frac{9-5}{4} = 1$.

Kí hiệu $S_n = a^n + b^n$ ($n \in \{1 ; 2 ; ...\}$).

Ta có $S_1 = a + b = 3$ ; $S_2 = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 7$ là các số nguyên.

Giả sử $S_{k-1}$ và $S_k$ là các số nguyên (k > 1).

Ta có $S_{k+1} = a^{k+1} + b^{k+1} = (a^k + b^k)(a + b) - ab(a^{k-1} + b^{k-1}) = 3S_k - S_{k-1}$ cũng là số nguyên.

Vì $S_1$ và $S_2$ là các số nguyên và nếu hai số hạng liên tiếp $S_{k-1}$ và $S_k$ là các số nguyên thì số hạng tiếp theo $S_{k+1}$ cũng là số nguyên nên $S_n = a^n + b^n$ là số nguyên với mọi số tự nhiên n > 0 (đpcm).

*Lưu ý.* Công thức $S_{k+1} = 3S_k - S_{k-1}$ cho phép ta tính mỗi số hạng $S_n$ theo các số hạng trước đó. Một công thức như vậy gọi là công thức truy hồi (hoặc truy toán). Vì trọng vế phải của nó có hai số hạng liên tiếp $S_{k-1}$, $S_k$ nên ban đầu ta phải chứng minh bài toán đúng với hai số n = 1 và n = 2.

### 3. QUY NẠP KHÔNG TUẦN TỰ

**Thí dụ 3** (Bất đẳng thức Cô-si). Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số không âm, chứng minh rằng $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$. (3)

**Lời giải.** Bài toán đúng với $n = 1$ ; $n = 2$ (bạn đọc tự kiểm tra).

Giả sử (3) đúng với $n = k$ ($k > 1$), nghĩa là $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k} \ge \sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}$.

Ta chứng minh (3) cũng đúng với $n = 2k$. Thật vậy, với 2k số không âm, theo giả thiết quy nạp (sử dụng bất đẳng thức với k số $\dfrac{a_1+a_2}{2}, \dfrac{a_3+a_4}{2}, \ldots, \dfrac{a_{2k-1}+a_{2k}}{2}$), ta có :

$$\frac{\dfrac{a_1+a_2}{2}+\dfrac{a_3+a_4}{2}+\ldots+\dfrac{a_{2k-1}+a_{2k}}{2}}{k} \ge$$

$$\ge \sqrt[k]{\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}\cdots\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{2}}$$

$$\ge \sqrt[k]{\sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_3a_4}\cdots\sqrt{a_{2k-1}a_{2k}}} = \sqrt[2k]{a_1a_2\ldots a_{2k}},$$

nghĩa là $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_{2k}}{2k} \ge \sqrt[2k]{a_1a_2\ldots a_{2k}}$,

suy ra (3) đúng với $n = 2k$.

Theo nguyên lí quy nạp, (3) đúng với mọi số tự nhiên $n \in \{1 ; 2 ; 2^2 ; 2^3 ; \ldots\}$.

Bây giờ ta xét n là số tự nhiên bất kì, không phải là lũy thừa của 2.

Giả sử q là số tự nhiên sao cho $n < 2^q$. Đặt $m = 2^q$, xét m số gồm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $m - n$ số $s = \dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$.

Theo chứng minh trên, ta có :

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+(m-n)s}{m} \ge \sqrt[m]{a_1a_2\ldots a_n.s^{m-n}}.$$

Để ý rằng vế trái bằng $\dfrac{ns+(m-n)s}{m} = s$,

suy ra $s^m \ge a_1a_2\ldots a_n.s^{m-n} \Rightarrow s^n \ge a_1a_2\ldots a_n$

hay $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$.

Vậy (3) được chứng minh hoàn toàn.

*Lưu ý.* Trong bài này ta đã chứng minh theo trình tự :

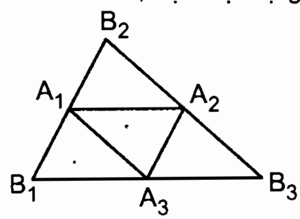
- Kiểm tra (3) đúng với $n = 1$ ; $n = 2$.
- Chứng minh nếu (3) đúng với $n = k$ thì cũng đúng với $n = 2k$, khi đó (3) đúng với mọi số tự nhiên n là lũy thừa của 2.
- Chứng minh (3) đúng với n không phải là luỹ thừa của 2.

Cách làm này thường dùng để chứng minh các bất đẳng thức về các đại lượng trung bình của các số không âm (trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình điều hòa, trung bình bậc 2, ...).

### 4. DỰNG HÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP

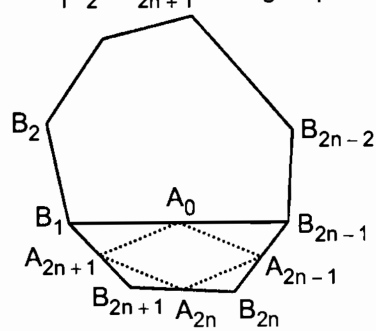
**Thí dụ 4.** Trên mặt phẳng cho $2n + 1$ điểm, hãy dựng đa giác có $2n + 1$ cạnh mà trung điểm các cạnh là các điểm đã cho.

**Lời giải.** Với $n = 1$, bạn đọc tự giải.




Giả sử bài toán đã được giải quyết với $2n - 1$ điểm ($n > 1$).

Bây giờ cho $2n + 1$ điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ và giả sử $B_1B_2\ldots B_{2n+1}$ là đa giác phải dựng.




Gọi $A_0$ là trung điểm cạnh $B_1B_{2n-1}$, ta có tứ giác $A_0A_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1}$ là hình bình hành nên $A_0$ dựng được. Theo giả thiết quy nạp, ta dựng đa giác $2n - 1$ cạnh $B_1B_2\ldots B_{2n-1}$ với các trung điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{2n-2}, A_0$. Đỉnh $B_{2n}$ là điểm đối xứng của $B_{2n-1}$ qua $A_{2n-1}$ ; đỉnh $B_{2n+1}$ là điểm đối xứng của $B_{2n}$ qua $A_{2n}$. Khi đó dễ thấy $A_{2n+1}$ là trung điểm của cạnh $B_{2n+1}B_1$.


# HÃY TIẾP TỤC PHÁT HIỆN

HOÀNG LÊ TRƯỜNG
*(K47A1T, Đại học Khoa học Tự nhiên Hà Nội)*

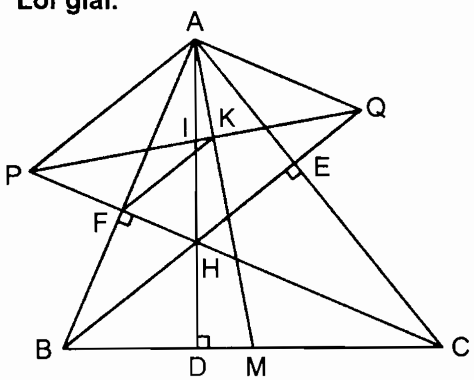
Học toán không thuần túy là giải toán mà bao hàm quá trình tìm tòi, phân tích các khía cạnh khác nhau của bài toán, qua đó củng cố kiến thức, phát triển tư duy cho người giải. Quá trình đó thông thường là :

- Giải một bài toán
- Rồi một phát hiện nho nhỏ
- Tiếp tục phát hiện ...

Vì khuôn khổ bài báo nên đề nghị bạn đọc tự chứng minh một số kết quả và tự vẽ một số hình. Dưới đây, chúng ta bàn tới bài toán T4(4) đăng trên TTT2.

**Bài toán 1.** Cho $\Delta ABC$ nhọn có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Qua A vẽ các đường thẳng song song với BE, CF lần lượt cắt các đường thẳng CF, BE tại P và Q. Chứng minh rằng PQ vuông góc với trung tuyến AM của $\Delta ABC$.

**Lời giải.**




Vì $\Delta ABC$ nhọn nên H nằm trong $\Delta ABC$. Gọi I, K lần lượt là giao điểm của PQ với AD và AM.

Từ giả thiết suy ra tứ giác APHQ là hình bình hành và $AP \perp AC$ ; $PH \perp AB$, nên $\widehat{APH} = \widehat{BAC}$. Mà $\widehat{AHP} = \widehat{ABC}$ (vì BDHF là tứ giác nội tiếp, do $\widehat{BDH} = \widehat{BFH} = 90^o$), suy ra $\Delta ABC \backsim \Delta PHA$ (g-g).

Chú ý M, I lần lượt là trung điểm BC và HA, suy ra $\Delta ABM \backsim \Delta PHI \Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{IPH}$
$\Rightarrow$ tứ giác AKFP nội tiếp
$\Rightarrow \widehat{AKP} = \widehat{AFP} = 90^o$. Vậy $PQ \perp AM$.

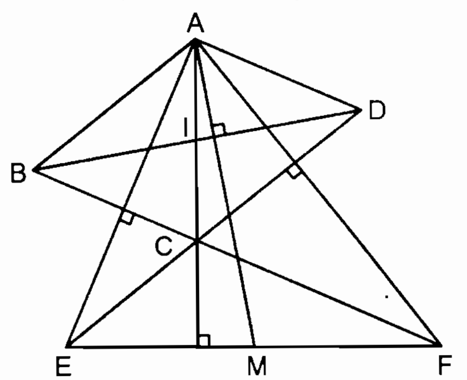
**Nhận xét.** Ta có thể phát biểu *bài toán 1* theo cách khác, như sau.

**Bài toán 2.** Cho hình bình hành ABCD có góc A tù. Từ A, dựng các đường thẳng vuông góc với BC, CD cắt CD, BC tương ứng tại E và F. Chứng minh rằng BD vuông góc với trung tuyến AM của $\Delta AEF$.

**Nhận xét.** Lời giải *bài toán 2* hoàn toàn tương tự như lời giải *bài toán 1*.

Thay kết luận của bài toán 2 bằng kết luận sau : "Chứng minh rằng nếu điểm M trên EF thỏa mãn $AM \perp BD$ thì M là trung điểm của EF", ta có *bài toán 3*.

**Lời giải.** (cho *bài toán 3*)



Từ giả thiết suy ra C là trực tâm $\Delta AEF$ nên $AC \perp EF$. Kết hợp với $BD \perp AM$ và $ED \perp AF$, suy ra hai tam giác ICD và MFA có các cạnh tương ứng vuông góc nên các góc cũng tương ứng bằng nhau.

Vậy $\Delta ICD \backsim \Delta MFA$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{IC}{ID} = \dfrac{MF}{MA}$. (1)

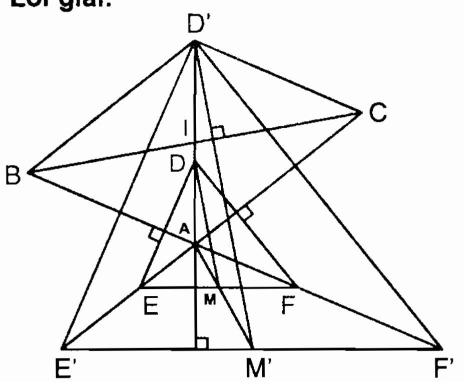
Tương tự, $\Delta ICB \backsim \Delta MEA \Rightarrow \dfrac{IC}{IB} = \dfrac{ME}{MA}$. (2)

Từ (1), (2) và kết hợp với giả thiết ID = IB, suy ra ME = MF (đpcm).

**Nhận xét.** Lời giải trên không dùng đến giả thiết tứ giác ABCD là hình bình hành. Ta chỉ sử dụng các cặp đường thẳng vuông góc để suy ra hệ thức : $\dfrac{IB}{ID} = \dfrac{MF}{ME}$ rồi dùng giả thiết IB = ID. Vậy ta có bài toán sau.

**Bài toán 4.** Cho $\Delta ABC$ có góc A tù và I là trung điểm của BC. Từ điểm D bất kì trên AI, dựng các đường thẳng vuông góc với AB, AC cắt AC, AB tương ứng tại E và F. Chứng minh rằng nếu điểm M trên EF thỏa mãn $DM \perp BC$ thì M là trung điểm của EF.

**Lời giải.**




Gọi D' là điểm đối xứng của A qua I. Từ D' ta dựng các điểm E', F', M' tương tự như cách dựng các điểm E, F, M. Thế thì D'M' // DM (vì D'M', DM cùng vuông góc với BC).

Từ giả thiết suy ra DE // D'E' và DF // D'F' nên $\dfrac{AE}{AE'} = \dfrac{AD}{AD'} = \dfrac{AF}{AF'} \Rightarrow EF \,//\, E'F'$.

Gọi M" là giao điểm của AM' và DM. Ta có $\dfrac{AM''}{AM'} = \dfrac{AD}{AD'} = \dfrac{AE}{AE'} \Rightarrow EM'' \,//\, E'M'$, nên M" thuộc EF. Vậy M" trùng M.

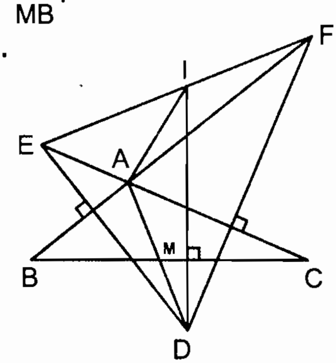
Do đó $\dfrac{ME}{M'E'} = \dfrac{AM}{AM'} = \dfrac{MF}{M'F'}$.

Theo *bài toán 3* thì M'E' = M'F', nên ME = MF (đpcm).

**Nhận xét.** Điểm D tuy chạy trên AI nhưng ta muốn D chạy trên khắp góc BAC.

**Bài toán 5.** Cho $\Delta ABC$ có góc A tù và D là điểm bất kì nằm trong góc BAC. Từ D dựng các đường thẳng vuông góc với AB, AC cắt AC, AB tương ứng tại E và F. Gọi M là giao điểm của AD với BC. Đường thẳng qua D vuông góc với BC cắt EF tại I. Chứng minh rằng : $\dfrac{IE}{IF} = \dfrac{MC}{MB}$.

**Lời giải.**



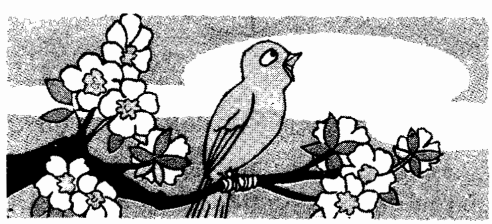

Tương tự bài toán 3, ta có :

$\Delta DIE \backsim \Delta BMA$ (g-g) $\Rightarrow \dfrac{ID}{IE} = \dfrac{MB}{MA}$

và $\Delta DIF \backsim \Delta CMA \Rightarrow \dfrac{ID}{IF} = \dfrac{MC}{MA}$.

Suy ra $\dfrac{IE}{IF} = \dfrac{MC}{MB}$ (đpcm).

(*Kì sau đăng tiếp*)




# TÍNH SỐ ĐO GÓC NHỜ SỰ ĐỒNG QUY CỦA CÁC ĐƯỜNG PHÂN GIÁC TRONG TAM GIÁC

TRẦN HÀ *(THCS Tam Đa, Vĩnh Bảo, Hải Phòng)*

Để giải bài toán tính số đo góc thường ta phải vẽ thêm hình phụ như tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông, tam giác vuông cân, đường vuông góc, đường phân giác, đường trung trực, đường trung tuyến...

Trong bài viết này, xin trao đổi cùng quý độc giả, đặc biệt là các bạn học sinh lớp 7, một số bài toán tính số đo góc có liên quan đến *sự đồng quy của các đường phân giác trong một tam giác.*

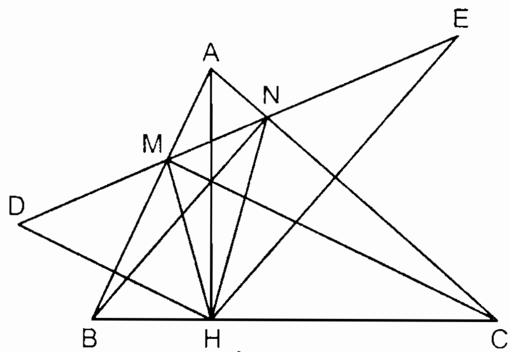
Xin được nhắc lại các kết quả quen thuộc.

1. Hai đường phân giác của một góc luôn vuông góc với nhau.

2. Ba đường phân giác trong của một tam giác luôn cắt nhau tại một điểm.

3. Hai đường phân giác ngoài của một tam giác và đường phân giác trong của góc thứ ba luôn cắt nhau tại một điểm.

**Bài 1.** Cho $\Delta$ABC không vuông có B, C là các góc nhọn. Vẽ đường cao AH và hai điểm D, E sao cho AB, AC thứ tự là đường trung trực của đoạn HD, HE. Gọi M, N thứ tự là giao điểm của DE với AB, AC. Tính số đo góc AMC và góc ANB.



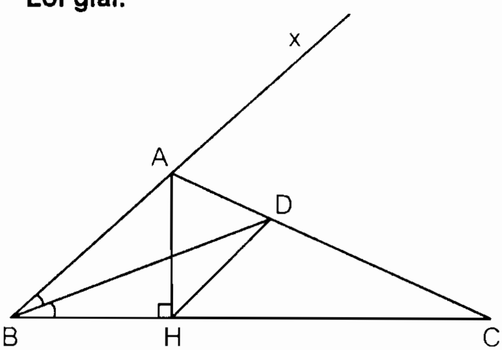

**Lời giải.** Xét tam giác HMN. Từ cách dựng hai điểm D, E ta suy ra MB, NC là hai đường phân giác ngoài tương ứng của góc M và N nên HA là đường phân giác trong của góc H. Lại có HC $\perp$ HA nên HC là đường phân giác ngoài của góc H. Mà NC là đường phân giác ngoài của góc N nên MC là đường phân giác trong của góc M.

Kết hợp với MB là phân giác góc ngoài của góc M $\Rightarrow$ MC $\perp$ MB hay $\widehat{AMC} = 90^o$.

Tương tự ta cũng có $\widehat{ANB} = 90^o$.

**Bài 2.** Cho $\Delta$ABC có AH là đường cao (H nằm giữa B và C), BD là đường phân giác và $\widehat{AHD} = 45^o$. Tính $\widehat{ADB}$.

**Lời giải.**




Xét tam giác ABH có BD là đường phân giác trong của góc B và HD là đường phân giác ngoài của góc H nên AD là đường phân giác ngoài của góc A.

Gọi Ax là tia đối của tia AB thì theo tính chất góc ngoài của tam giác, ta có :

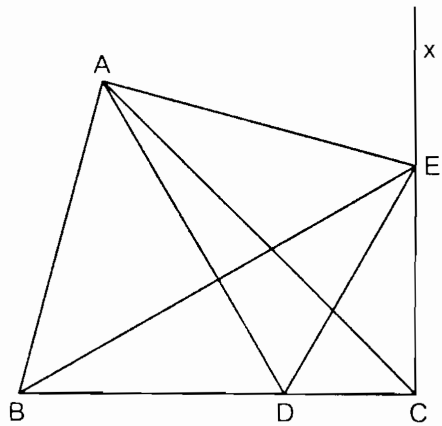
$$\widehat{ADB} + \widehat{ABD} = \widehat{xAD}\,; \qquad (1)$$

$$\widehat{AHB} + \widehat{ABH} = \widehat{xAH}. \qquad (2)$$

Xét (2) $\Leftrightarrow 90^o + 2\cdot\widehat{ABD} = 2\cdot\widehat{xAD}$, so sánh với (1) ta được : $\widehat{ADB} = 45^o$.

**Bài 3.** Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 75^o$ và $\hat{C} = 45^o$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $\widehat{BAD} = 45^o$. Đường thẳng vuông góc với BC tại C cắt đường phân giác góc ADC tại E. Tính $\widehat{CBE}$.

**Lời giải.**




Theo tính chất góc ngoài của tam giác, ta có $\widehat{ADC} = \widehat{ABD} + \widehat{BAD} = 75^o + 45^o = 120^o$ nên $\widehat{ADB} = \widehat{ADE} = \widehat{CDE} = 60^o$.

Xét tam giác DCE có DA là đường phân giác ngoài của góc D và CA là đường phân giác trong của góc C nên EA là đường phân giác ngoài của góc E. Từ đó ta có :

$$\widehat{AED} = \frac{1}{2}\widehat{xED} = \frac{1}{2}(\widehat{ECD} + \widehat{EDC}) =$$

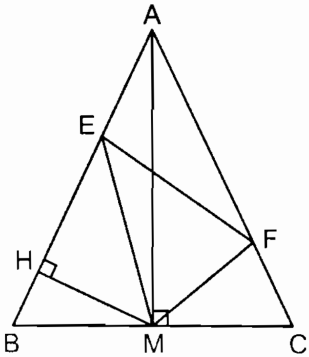
$$= \frac{1}{2}(90^o + 60^o) = 75^o.$$

Từ đó suy ra $\Delta ADB = \Delta ADE$ (g.c.g) nên DB = DE. Vậy tam giác DBE cân tại D. Mà $\widehat{BDE} = 120^o$ nên suy ra $\widehat{CBE} = 30^o$.

**Bài 4.** Cho tam giác ABC cân tại A (với $\hat{A} = m^o$) có M là trung điểm BC, H là hình chiếu vuông góc của M lên AB, E là một điểm nằm giữa hai điểm A và H. Trên cạnh AC có điểm F sao cho :

$\widehat{AEF} = 2 \cdot \widehat{EMH} = 2n^o$. Tính $\widehat{EFM}$.

**Lời giải.**




Xét tam giác AEF có AM là đường phân giác trong của góc A. (1)

Vì $\widehat{MEH} = 90^o - \widehat{EMH} = 90^o - n^o$ nên :

$$\widehat{MEF} = 180^o - \widehat{MEH} - \widehat{AEF}$$

$$= 180^o - (90^o - n^o) - 2n^o = 90^o - n^o.$$

Suy ra $\widehat{MEH} = \widehat{MEF}$, nên EM là đường phân giác ngoài của góc E của tam giác AEF. (2)

Từ (1) và (2) suy ra FM là đường phân giác ngoài của góc AFE. Vậy :

$$\widehat{EFM} = \frac{1}{2}\widehat{EFC} = \frac{1}{2}(\widehat{FEA} + \widehat{FAE}) = \left(n + \frac{m}{2}\right)^o.$$

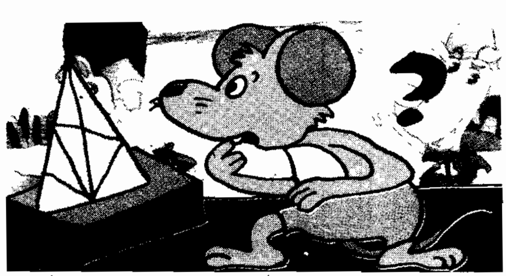
Để kết thúc bài viết này, mời bạn đọc tự giải bài tập sau.

**Bài 5.** Cho tam giác ABC có các đường phân giác AD, BE, CF và $\hat{A} = 120^o$.

a) Tính $\widehat{BED}$.

b) Tính $\widehat{EDF}$.

c) Đường phân giác ngoài của góc C cắt tia đối của tia AB ở K. Gọi M là giao điểm của DK với AC. Tính $\widehat{BMD}$.



# TÌNH CỜ... SUY NGẪM... PHƯƠNG PHÁP

VÕ VĂN THÀNH
*(Lớp 11 toán, khối Chuyên THPT, ĐHKH Huế)*

Trên TTT2 số 25, bạn Nguyễn Thúc Vũ Hoàng đã đưa ra một bài toán mở rộng cho bài 3(47) rất hay với lời giải ấn tượng và một phương pháp độc đáo - phương pháp đưa về tổng các bình phương.

Sau lời giải của Hoàng, tôi "tình cờ" gặp được hai lời giải rất độc đáo cho bài toán trên. Tuy nhiên, lời giải mà làm tôi ấn tượng, suy ngẫm là cách đưa về tổng các bình phương với bài toán mạnh hơn sau.

**Bài toán 1.**

Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c thì : $(a^2+b^2+c^2)^2 \ge 3(a^3b+b^3c+c^3a)$. (1)

**Lời giải.** Khai triển ra, ta viết lại bất đẳng thức như sau :

$$\Big(\sum_{cyc} a^4 - \sum_{cyc} a^2b^2\Big) + 3\Big(\sum_{cyc} a^2b^2 - \sum_{cyc} a^2bc\Big) + 3\Big(\sum_{cyc} a^2bc - \sum_{cyc} a^3b\Big) \ge 0. \qquad (2)$$

Ta có các hằng đẳng thức sau đây :

i) $2\Big(\sum_{cyc} a^4 - \sum_{cyc} a^2b^2\Big) = \sum_{cyc}(a^2-b^2)^2$;

ii) $6\Big(\sum_{cyc} a^2b^2 - \sum_{cyc} a^2bc\Big) = \sum_{cyc}(ab+ac-2bc)^2$;

iii) $3\Big(\sum_{cyc} a^3b - \sum_{cyc} a^2bc\Big) = \sum_{cyc}(a^2-b^2)(ab+ac-2bc)$.

Suy ra vế trái của (2) là :

$$\frac{1}{2}\sum_{cyc}(a^2-b^2-ab-ac+2bc)^2$$

ta có đpcm.

**Bài toán 2.** Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c thì : $\sqrt{3}(a^3b+b^3c+c^3a) \le$

$$\le a^4+b^4+c^4+(\sqrt{3}-1)abc(a+b+c). \quad (3)$$

**Lời giải.** Khai triển (3) rồi áp dụng các hằng đẳng thức i), ii), iii), ta được : (3) $\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}\sum_{cyc}\left(a^2-b^2-\frac{1}{\sqrt{3}}(ab+ac-2bc)\right)^2 \ge 0.$$

Suy ra đpcm.

Lời giải hai bài toán trên rất đẹp và qua đó ta cũng hình dung được phương pháp này. Mấu chốt của phương pháp này là ta áp dụng các hằng đẳng thức i), ii), iii) đối với các đa thức bậc bốn có ba biến. Vậy với các đa thức bậc khác thì tồn tại các hằng đẳng thức tương tự như thế nào ? Câu trả lời xin dành cho bạn đọc.

Hi vọng các bạn sẽ có nhiều phát hiện mới để phương pháp này được sử dụng có hiệu quả hơn và qua đó thấy được vẻ đẹp "tiềm ẩn", chất phác của phương pháp chứng minh bất đẳng thức bằng cách đưa về tổng các bình phương. Để kết thúc, mời các bạn giải bài toán sau đây.

**Bài toán 3.** Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c ta có : $\frac{8}{27}(a+b+c)^4 \le$

$$\le a(a+b)^3+b(b+c)^3+c(c+a)^3.$$

# ỨNG DỤNG SỰ ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ ĐỂ GIẢI TOÁN

VŨ VĂN DŨNG

*(Lớp K50 Sư phạm Toán, Khoa Toán - Cơ - Tin, ĐHKHTN Hà Nội)*

Tính đơn điệu của hàm số có rất nhiều ứng dụng để giải toán. Chẳng hạn như tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một hàm số ; giải phương trình, hệ phương trình ; tìm số nghiệm của một phương trình, hệ phương trình... Bài viết này xin đưa ra một số ứng dụng đó. Trước hết xin được nhắc lại lí thuyết.

*Cho hàm số f(x) xác định trên tập D (với $D \subset \mathbb{R}$).*

**1.** *f(x) được gọi là đồng biến (tăng) trên D nếu với mọi $x_1, x_2 \in D$ mà $x_1 > x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.*

**2.** *f(x) được gọi là nghịch biến (giảm) trên D nếu với mọi $x_1, x_2 \in D$ mà $x_1 > x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.*

*Hàm số gọi là đơn điệu trên D nếu nó đồng biến hoặc nghịch biến trên D.*

**Tính chất.**

- *f(x) đồng biến trên D nếu với mọi $x_1, x_2 \in D$ mà $x_1 \neq x_2$ thì $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$.*
- *f(x) nghịch biến trên D nếu với mọi $x_1, x_2 \in D$ mà $x_1 \neq x_2$ thì $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$.*

Sau đây là một số bài tập áp dụng.

**Bài toán 1.** Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn x + y = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $A = xy + \dfrac{1}{xy}$.

**Lời giải.** Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương x, y ta có :

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy \leq \frac{1}{4}.$$

Đặt t = xy thì $t \in (0\ ;\ \frac{1}{4}]$ và $A = t + \frac{1}{t}$.

Xét hàm số $f(t) = t + \frac{1}{t}$ với $t \in (0\ ;\ \frac{1}{4}]$.

Với mọi $t_1, t_2 \in (0\ ;\ \frac{1}{4}]$ mà $t_1 \neq t_2$ thì $\dfrac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} = 1 - \dfrac{1}{t_1 t_2} < 0$, nên f(t) là hàm số nghịch biến trên $(0\ ;\ \frac{1}{4}]$.

Suy ra $f(t) \geq f(\frac{1}{4}) = \frac{17}{4}$ với mọi $t \in (0\ ;\ \frac{1}{4}]$.

Vậy $A_{min} = \dfrac{17}{4} \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{2}$.

**Bài toán 2.** Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$B = (x^2 + y^2)\left(1 + \frac{1}{x^2 y^2}\right).$$

**Lời giải.**

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki, ta được : $\left(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}\right)^2 \leq$

$$\leq (x^2 + y^2)(2 - x^2 - y^2)$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2)^2 \leq (x^2 + y^2)(2 - x^2 - y^2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 2 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$x^2+y^2 \geq 2xy \Rightarrow \frac{1}{xy} \geq \frac{2}{x^2+y^2}.$$

Do đó : $B \geq (x^2+y^2)\left(1+\frac{4}{(x^2+y^2)^2}\right)$.

Đặt $t = x^2+y^2$ thì $B \geq t\left(1+\frac{4}{t^2}\right)$. Xét hàm số $f(t) = t\left(1+\frac{4}{t^2}\right) = t + \frac{4}{t}$ với $t \in (0\ ;\ 1]$.

Tương tự bài toán 1, ta được :

$B_{min} = 5 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$ ; $x^2+y^2 = 1$ ; $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

**Bài toán 3.** Giải phương trình :

$$\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}+\sqrt{5x-1} = 5. \qquad (1)$$

**Lời giải.** Điều kiện : $x \geq \frac{1}{2}$.

Đặt $f(x) = \sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}+\sqrt{5x-1}$ thì $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $[\frac{1}{2}\ ;\ +\infty)$. Mà $f(1) = 5$ nên $\begin{cases} f(x) > 5, \text{ với mọi } x > 1; \\ f(x) < 5, \text{ với mọi } x < 1. \end{cases}$

Vậy (1) $\Leftrightarrow x = 1$.

**Bài toán 4.** Giải phương trình :

$$2x-1 = \sqrt{x^2+24} - \sqrt{x^2+15}. \qquad (2)$$

**Lời giải.** Ta có :

$$(2) \Leftrightarrow (2x-1)\left(\sqrt{x^2+24}+\sqrt{x^2+15}\right) = 9.$$

*Nhận xét.* Nếu x là nghiệm của (2) thì $x > \frac{1}{2}$. Đặt vế trái của phương trình trên là $f(x)$ thì $f(x)$ đồng biến trên $(\frac{1}{2}\ ;\ +\infty)$. Mà $f(1) = 9$ nên $\begin{cases} f(x) > 9, \text{ với mọi } x > 1; \\ f(x) < 9, \text{ với mọi } x < 1. \end{cases}$

Vậy (2) $\Leftrightarrow x = 1$.

**Bài toán 5.** Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3+x^2+x-2 = y \\ y^3+y^2+y-2 = z \\ z^3+z^2+z-2 = x. \end{cases} \qquad (3)$$

**Lời giải.** Đặt $f(t) = t^3+t^2+t-2$, $t \in \mathbb{R}$, thì (3) $\Leftrightarrow f(x) = y$ ; $f(y) = z$ ; $f(z) = x$.

Với mọi $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ mà $t_1 \neq t_2$, ta có :

$$\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2} = t_1^2+t_2^2+t_1t_2+t_1+t_2+1 =$$
$$= \frac{1}{2}(t_1+t_2)^2+\frac{1}{2}(t_1+1)^2+\frac{1}{2}(t_2+1)^2 > 0.$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- Nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y) \Rightarrow y < z \Rightarrow f(y) < f(z)$ $\Rightarrow z < x$. Do đó $x < y < z < x$ : vô lí.

- Nếu $x > y$ thì $f(x) > f(y) \Rightarrow y > z \Rightarrow f(y) > f(z)$ $\Rightarrow z > x$. Do đó $x > y > z > x$ : vô lí.

Vậy $x = y = z$. Suy ra :

$x^3+x^2+x-2 = x \Leftrightarrow x^3+x^2-2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+2x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

(vì $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

Do đó (3) $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

**Bài toán 6.** Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{x+2}+\sqrt{y-1} = 3 \\ \sqrt{y+2}+\sqrt{x-1} = 3. \end{cases} \qquad (4)$$

**Lời giải.** Điều kiện : $x \geq 1$ ; $y \geq 1$.

Từ (4) suy ra

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{y-1} = \sqrt{y+2}+\sqrt{x-1}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}-\sqrt{x-1} = \sqrt{y+2}-\sqrt{y-1}.$$

Đặt $f(t) = \sqrt{t+2}-\sqrt{t-1}$, với $t \geq 1$ thì phương trình trên trở thành : $f(x) = f(y)$.

Vì $f(t) = \frac{3}{\sqrt{t+2}+\sqrt{t-1}}$ là hàm số giảm trên $[1\ ;\ +\infty)$ nên $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$. Từ đó ta có : $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow x = 2$ (giải tương tự bài toán 3).

Vậy (4) $\Leftrightarrow x = y = 2$.

*(Xem tiếp trang 23)*


# MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN PHẦN LẺ CỦA MỘT SỐ THỰC

NGUYỄN TIẾN LÂM
(*Lớp K50 Sư phạm Toán, Khoa Toán-Cơ-Tin, ĐHKHTN Hà Nội*)

Chắc hẳn nhiều bạn yêu toán đều biết đến khái niệm phần nguyên của một số thực. Bài viết này muốn trao đổi với các bạn một khái niệm có thể coi là họ hàng với phần nguyên, đó là phần lẻ.

**1. Định nghĩa**

Phần lẻ của một số thực x, kí hiệu là $\{x\}$, là một số thực được xác định theo công thức :

$$\{x\} = x - [x]$$

trong đó kí hiệu $[x]$ là chỉ phần nguyên của x, tức là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

*Ví dụ.* $\{2,1\} = 0,1$ ; $\{-1,2\} = 0,8$.

Sau đây là một số tính chất và hệ quả của hàm số phần lẻ (phần chứng minh dành cho bạn đọc).

**2. Tính chất**

**i)** $0 \le \{x\} < 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

*Hệ quả.*

$\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.

$\{x\} = x \Leftrightarrow 0 \le x < 1$.

**ii)** Nếu $x \in \mathbb{Z}$ thì $\{x\} + \{-x\} = 0$.

Nếu $x \notin \mathbb{Z}$ thì $\{x\} + \{-x\} = 1$.

*Hệ quả.* Nếu $x \notin \mathbb{Z}$ thì

$\{x\} = \{-x\} \Leftrightarrow x = k + 0,5$ (với $k \in \mathbb{Z}$).

**iii)** $\{x + m\} = \{x\}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $m \in \mathbb{Z}$.

*Hệ quả.* Hàm số $y = \{x\}$ là hàm tuần hoàn với chu kì cơ sở là 1.

**iv)** $\{x + y\} \le \{x\} + \{y\}, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\{x\} + \{y\} < 1$.

*Hệ quả.*

$\{x - y\} \ge \{x\} - \{y\}, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

$\{x_1 + x_2 + \ldots + x_n\} \le \{x_1\} + \{x_2\} + \ldots + \{x_n\}$, $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ (đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\{x_1\} + \{x_2\} + \ldots + \{x_n\} < 1$).

**v)** Hàm số $y = \{x\}$ là hàm đơn điệu tăng trên từng khoảng $[k ; k + 1)$, với $k \in \mathbb{Z}$.

Ta áp dụng các tính chất và hệ quả của hàm số phần lẻ ở trên để giải một số bài toán. Sau đây là một số ví dụ.

**3. Bài tập**.

**Bài toán 1.** Giải phương trình :

$$[x^3] + [x] = \{x\} + 2.$$

**Lời giải.** Từ phương trình suy ra $\{x\} \in \mathbb{Z}$ nên $\{x\} = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$. Từ đó suy ra :

$x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 2) = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn).

**Bài toán 2.** Tính tổng sau (với $n \in \mathbb{N}$) :

$$S_n = \left\{\frac{1}{3}\right\} + \left\{\frac{4}{3}\right\} + \left\{\frac{7}{3}\right\} + \ldots + \left\{\frac{3n+1}{3}\right\}.$$

**Lời giải.** Ta có :

$$\left\{\frac{3k+1}{3}\right\} = \left\{k + \frac{1}{3}\right\} = \left\{\frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Vậy $S_n = \dfrac{n+1}{3}$.

**Bài toán 3.** Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $$\frac{1}{\{x\}} + \frac{1}{\{-x\}} \ge \frac{4}{\{x\} + \{-x\}} \ge 4, \forall x \notin \mathbb{Z}.$$

b) $$\{x_1 + x_2 + \ldots + x_n\} + n - 1 \ge \ge \{x_1\} + \{x_2\} + \ldots + \{x_n\} \quad (*)$$
$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

**Lời giải.**

a) Vì $x \notin \mathbb{Z}$ nên $\{x\} > 0$, $\{-x\} > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ (với $a, b > 0$), ta có : $\frac{1}{\{x\}}+\frac{1}{\{-x\}}\ge\frac{4}{\{x\}+\{-x\}}=4.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$\{x\}=\{-x\} \Leftrightarrow x = k + 0,5$ (với $k \in \mathbb{Z}$).

b) Xét các trường hợp :

- Tồn tại $i \in \{1 ; 2 ;... ; n\}$ để $x_i \in \mathbb{Z}$.

Giả sử $x_n \in \mathbb{Z}$ thì $\{x_n\} = 0$. Khi đó, theo tính chất $0 \le \{x\} < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có :

$$n - 1 > \{x_1\} + \{x_2\} + ... + \{x_n\} ;$$

$$\{x_1 + x_2 + ... + x_n\} \ge 0.$$

suy ra đpcm.

- Xét $x_i \notin \mathbb{Z}$, $\forall i \in \{1 ; 2 ;... ; n\}$.

+ Nếu $x_1 + x_2 + ... + x_n \in \mathbb{Z}$ thì :

$$\{x_1 + x_2 + ... + x_n\} = 0.$$

Ta có : $\{x_1\} + \{x_2\} + ... + \{x_n\} < n$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + ... + x_n - ([x_1] + [x_2] + ... + [x_n]) < n.$

Vì hai vế của bất đẳng thức trên là các số nguyên nên :

$x_1 + x_2 + ... + x_n - ([x_1] + [x_2] + ... + [x_n]) \le n - 1$

$\Rightarrow \{x_1\} + \{x_2\} + ... + \{x_n\} \le n - 1 \Rightarrow$ đpcm.

+ Nếu $x_1 + x_2 + ... + x_n \notin \mathbb{Z}$.

Ta có : $\{x_i\} = 1 - \{-x_i\}$, $\forall i \in \{1 ; 2 ;... ; n\}$ và

$\{x_1 + x_2 + ... + x_n\} = 1 - \{-(x_1 + x_2 + ... + x_n)\}$.

Vậy $\{x_1\} + \{x_2\} + ... + \{x_n\} = n - (\{-x_1\} + \{-x_2\} + + ... + \{-x_n\}) \le n - \{-(x_1 + x_2 + ... + x_n)\}$

$= \{x_1 + x_2 + ... + x_n\} + n - 1 \Rightarrow$ đpcm.

Vậy $\{x_1 + x_2 + ... + x_n\} + n - 1 \ge$

$\ge \{x_1\} + \{x_2\} + ... + \{x_n\}$, $\forall x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$.

**Bài toán 4.** Cho dãy số thực $(u_n)$ được xác định bởi : $u_n = \sqrt{n^2 + 4n + 5}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Tìm số thực r lớn nhất để $\{u_n\} > r$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (*)

**Lời giải.** Với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có :

$$n^2 + 4n + 4 < n^2 + 4n + 5 < n^2 + 6n + 9$$

$\Leftrightarrow n + 2 < u_n < n + 3 \Rightarrow [u_n] = n + 2$

$\Rightarrow \{u_n\} = u_n - (n + 2) = \sqrt{n^2 + 4n + 5} - (n + 2)$

$= \frac{1}{\sqrt{n^2 + 4n + 5} + n + 2}.$

Ta có $\{u_n\} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ta sẽ chứng minh nếu r là số thực lớn nhất để $\{u_n\} > r$, $\forall n \in \mathbb{N}$ thì $r = 0$.

Thực vậy, dễ thấy khi $r = 0$ thì (*) thỏa mãn.

Nếu $r > 0$ thì :

$$\{u_n\} > r \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2 + 4n + 5} + n + 2} > r$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 4n + 5} + n + 2 < \frac{1}{r}.$$

Bất đẳng thức này sai khi chọn $n = \left[\frac{1}{r}\right]$.

Vậy giá trị lớn nhất của r cần tìm là 0.

● Để kết thúc bài viết, tôi xin đưa ra 3 bài tập để các bạn tự luyện.

**Bài toán 1.** Cho $x, y, z \notin \mathbb{Z}$ và $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng : $\{x\} + \{y\} + \{z\} \ge 1$.

**Bài toán 2.** Giải hệ phương trình sau :

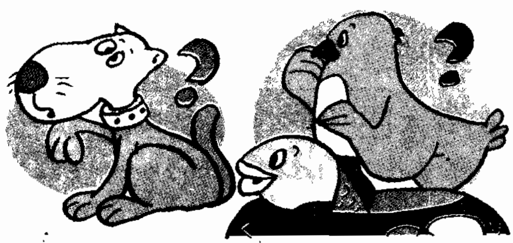
$$\begin{cases} x^2 + \{y\} = 1 \\ y^2 + \{x\} = 1. \end{cases}$$

**Bài toán 3.** a) Chứng minh hệ thức sau :

$$\{x\} + \frac{1}{2} = \left\{\frac{x}{2}\right\} + \left\{\frac{x+1}{2}\right\}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Tính tổng sau (với $n \in \mathbb{N}$) :

$$T = \left\{\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{x}{2^2} + \frac{1}{2}\right\} + ... + \left\{\frac{x}{2^n} + \frac{1}{2}\right\}.$$




# ĐƯA BẤT ĐẲNG THỨC LỆCH BẬC VỀ ĐỒNG BẬC

NGUYỄN THÚC VŨ HOÀNG
*(Lớp 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đông Hà, Quảng Trị)*

Trong quá trình giải bài toán chứng minh bất đẳng thức, có thể ta sẽ gặp những đa thức nằm trong các phân thức đại số mà các đa thức này là tổng của các đơn thức có bậc khác nhau. Điều này tạo ra không ít khó khăn cho người giải. Bài toán thách đấu của bạn Phạm Kim Hùng trên TTT2 số 52 là một ví dụ. Lời giải bài toán đã được đăng trên TTT2 số 54. Sau lời giải này, tôi vẫn vẫn cố gắng đi tìm những lời khác mà các đa thức có được sau khi biến đổi sẽ cùng bậc với nhau. Bởi tôi tin rằng làm như thế lời giải bài toán có thể sẽ sáng sủa hơn. Hơn nữa, việc đưa về bài toán chứng minh bất đẳng thức mà các đa thức có cùng bậc thường dễ dàng hơn. Sau đây là bài toán (đã được sửa lại đề bài cho hợp lí) của bạn Hùng.

**Bài toán.** Cho a, b, c là các số không âm, trong đó có ít nhất hai số dương và tổng của ba số bằng 3. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2}\ge\frac{3}{2}. \qquad (*)$$

**Lời giải.**

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki, ta có :

$$\frac{a^2}{a+b^2}+\frac{b^2}{b+c^2}+\frac{c^2}{c+a^2}=$$

$$=\frac{a^4}{a^3+a^2b^2}+\frac{b^4}{b^3+b^2c^2}+\frac{c^4}{c^3+c^2a^2}\ge$$

$$\ge\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^3+b^3+c^3+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

Ta sẽ chứng minh :

$$2(a^2+b^2+c^2)^2\ge$$
$$\ge 3(a^3+b^3+c^3+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

$$\Leftrightarrow 2(a^4+b^4+c^4)+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge$$
$$\ge 3(a^3+b^3+c^3)$$

$$\Leftrightarrow 2(a^4+b^4+c^4)+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2a^2\ge$$
$$\ge (a+b+c)(a^3+b^3+c^3)$$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge$$
$$\ge ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2). \text{ (i)}$$

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$(a^4+a^2b^2)+(b^4+a^2b^2)\ge$$
$$\ge 2(\sqrt{a^6b^2}+\sqrt{a^2b^6})=2(a^3b+ab^3)=$$
$$=2ab(a^2+b^2).$$

Tương tự :

$$(b^4+b^2c^2)+(c^4+b^2c^2)\ge 2bc(b^2+c^2)\ ;$$
$$(c^4+c^2a^2)+(a^4+c^2a^2)\ge 2ca(c^2+a^2).$$

Từ đó suy ra (i), ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

**Bình luận.** Khi chứng minh (*), biến đổi đến bước :

$$2(a^4+b^4+c^4)+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge$$
$$\ge 3(a^3+b^3+c^3)$$

ta thấy vế trái là đa thức bậc bốn, còn vế phải là đa thức bậc ba, tức là hai đa thức hơn nhau một bậc. Với giả thiết $a+b+c=3$, ta nhân vế phải với đa thức bậc nhất $\frac{a+b+c}{3}$ để được hai vế cùng bậc. Trong trường hợp tổng quát, nếu hai đa thức (trong cùng vế hay khác vế) của một bất đẳng thức hơn kém nhau n bậc thì ta chỉ việc nhân đa thức có bậc thấp hơn với $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n$, ta sẽ được hai đa thức cùng bậc. Đây là một kĩ thuật có thể áp dụng cho việc chứng minh nhiều bất đẳng thức lệch bậc khác.

# NHỮNG CÁCH NHÌN KHÁC NHAU CỦA BÀI TOÁN

PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN *(Đại Học Vinh)*

Những cách nhìn khác nhau về các đối tượng có mặt trong một bài toán hay lời giải của một bài toán sẽ gợi ý cho chúng ta phát hiện những bài toán mới, từ đó sẽ tạo nguồn hứng thú học toán và tập dượt nghiên cứu khoa học sau này.

Xét bài toán quen thuộc sau đây.

**Bài toán 1.** Cho hai điểm cố định A và B nằm cùng phía với đường thẳng xy. Tìm điểm M trên xy sao cho MA + MB đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải bài toán này khá đơn giản. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua xy (bạn đọc tự vẽ hình). Khi đó $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$ nên điểm M cần tìm là giao điểm của A'B với đường thẳng xy.

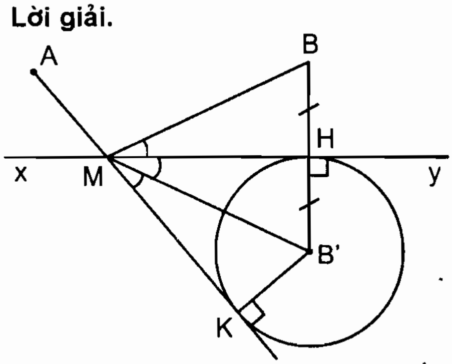
Từ lời giải trên, ta thấy $\widehat{AMx} = \widehat{BMy}$. Do đó *bài toán 1* có thể phát biểu như sau.

**Bài toán 2.** Cho hai điểm A và B nằm cùng phía với đường thẳng xy. Tìm điểm M trên đường thẳng xy sao cho $\widehat{AMx} = \widehat{BMy}$.

Cũng như *bài toán 1*, lời giải *bài toán 2* rất đơn giản vì *tính chất bình đẳng* của hai điểm A và B. Tính chất bình đẳng đó bị phá vỡ sẽ tạo ra bài toán với lời giải khó hơn như sau.

**Bài toán 3.** Cho hai điểm A và B nằm cùng phía với đường thẳng xy (hình vẽ). Tìm M trên xy sao cho $\widehat{AMx} = 2 \cdot \widehat{BMy}$.

**Lời giải.**




Gọi B' là điểm đối xứng của B qua xy và H là giao điểm của BB' với xy. Dựng đường tròn (C) tâm B', bán kính B'H. Tiếp tuyến (không cắt đoạn thẳng BH) kẻ từ A tới đường tròn (C) cắt xy tại điểm M cần tìm.

Thật vậy, ta có

$$\widehat{AMx} = \widehat{KMy} = 2 \cdot \widehat{B'My} = 2 \cdot \widehat{BMy}.$$

Một cách nhìn khác là *xem các điểm như những đường tròn có bán kính bằng không*. Khi đó, từ *bài toán 1*, ta có thể phát biểu một số bài toán mà lời giải của chúng hoàn toàn tương tự, tuy có khó hơn ít nhiều.

**Bài toán 4.** Cho hai đường tròn nằm cùng một nửa mặt phẳng với bờ là đường thẳng xy. Tìm điểm M trên xy sao cho các tiếp tuyến kẻ từ M tới hai đường tròn tạo với xy những góc bằng nhau.

**Bài toán 5.** Cho điểm A và một đường tròn (O) nằm cùng một nửa mặt phẳng với bờ là đường thẳng xy. Tìm điểm M trên xy sao cho tiếp tuyến kẻ từ M tới đường tròn (O) tạo với xy một góc bằng $\widehat{AMx}$.

Bây giờ ta hãy phân tích lời giải *bài toán 1* dưới một cách nhìn khác. Phải chăng, lời giải *bài toán 1* tương đối dễ vì *số điểm (A và B) quá ít*. Điều đó hoàn toàn không phải như vậy. Xét bài toán sau.

**Bài toán 6.** Tìm điểm M trong tứ giác ABCD cho trước sao cho MA + MB + MC + MD đạt giá trị nhỏ nhất.

Ở đây *số điểm được tăng gấp đôi* nhưng lời giải lại dễ hơn nhiều.

Ta có $MA + MC \geq AC$ và $MB + MD \geq BD$.

Suy ra $MA + MB + MC + MD \geq AC + BD$.

Do đó MA + MB + MC + MD đạt giá trị

nhỏ nhất bằng AC + BD, đạt được khi và chỉ khi M là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

Ở đây, có một *nghịch lí* là số điểm ít hơn có thể dẫn tới bài toán khó hơn. Ta xét bài toán sau.

**Bài toán 7.** Tìm điểm M trong tam giác ABC cho trước sao cho MA + MB + MC đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài toán này mang tên *bài toán To-ri-xen-li* nổi tiếng. Điểm M tồn tại khi và chỉ khi tam giác ABC không có góc nào lớn hơn $120^o$.

Nếu $\widehat{A} = 120^o$ chẳng hạn, thì M trùng với A là điểm cần tìm. Nếu ba góc A, B, C đều nhỏ hơn $120^o$ thì điểm M cần tìm là giao điểm của ba cung chứa góc $120^o$ dựng trên các đoạn thẳng AB, BC và CA (nằm về phía trong tam giác ABC).

Bây giờ, ta sẽ xét *bài toán 1* trên một cách nhìn khác. Phải chăng lời giải *bài toán 1* quá dễ vì *số mũ của MA và MB quá nhỏ*. Hãy xét bài toán sau.

**Bài toán 8.** Cho đường thẳng xy và hai điểm A, B cố định. Tìm điểm M sao cho $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài toán này thoạt nhìn có vẻ khó hơn *bài toán 1*, nhưng thật ra nếu bạn nào biết *công thức tính đường trung tuyến* của tam giác theo ba cạnh của nó thì lời giải *bài toán 8* khá đơn giản.

Gọi I là trung điểm AB.

Khi đó $2(MA^2 + MB^2) = 4MI^2 + AB^2$ nên $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $MI^2$ nhỏ nhất, nghĩa là khi và chỉ khi M là chân đường vuông góc hạ từ I xuống đường thẳng xy.

*Bài toán 8* sẽ trở nên khó hơn nếu ta nhìn nó theo cách nhìn của *bài toán 3* hoặc *bài toán 6*. Ta có các bài toán sau.

**Bài toán 9.** Cho đường thẳng xy và hai điểm A, B cố định. Tìm điểm M trên xy sao cho $MA^2 + 2MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**Bài toán 10.** Tìm điểm M trong tam giác ABC cho trước sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

*Bài toán 10* được gọi là *bài toán Đề-các.* Lời giải của nó không khó nếu ta sử dụng công thức tính trung tuyến của một tam giác để đi tới *công thức Lai-bơ-nít* là

$3(MA^2 + MB^2 + MC^2) = 9MG^2 + AB^2 + BC^2 + CA^2$, trong đó G là trọng tâm tam giác ABC. Từ công thức đó suy ra $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M trùng với trọng tâm tam giác ABC.

Những cách nhìn khác nhau ẩn dưới các bài tập sau đây và việc giải chúng sẽ rất bổ ích cho các bạn.

**Bài 1.** Tìm điểm M trong tam giác ABC cho trước sao cho $MH^2 + MK^2 + MI^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, trong đó H, I, K thứ tự là chân các đường vuông góc hạ từ M xuống ba cạnh của tam giác ABC.

**Bài 2.** Cho hai điểm A, B cố định nằm cùng phía với đường thẳng xy. Tìm điểm M trên xy sao cho $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

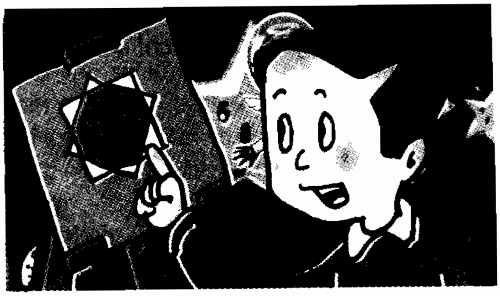
**Bài 3.** Cho tam giác ABC. Tìm M, N, P tương ứng nằm trên 3 cạnh của tam giác ABC sao cho chu vi của tam giác MNP đạt giá trị nhỏ nhất.

**Bài 4.** Cho tứ giác ABCD. Tìm điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

**Bài 5.** Cho hai đường tròn nằm khác phía với đường thẳng a. Dựng hình vuông ABCD có hai đỉnh A, C nằm trên a và hai đỉnh B, D tương ứng nằm trên hai đường tròn đã cho.

**Bài 6.** Cho tứ giác ABCD. Dựng hình vuông MNPQ sao cho mỗi đỉnh của tứ giác ABCD nằm trên một cạnh của hình vuông MNPQ.

Chúc các bạn thành công !



# BÀN TH[redacted]ẲNG THỨC [redacted]

ĐẶNG HỮU HÙNG *(Bình An, Lộc Hà, Hà Tĩnh)*

TTT2 số 52 đã giới thiệu *Phương pháp dồn biến để chứng minh bất đẳng thức thuần nhất*. Chúng ta hãy cùng tìm hiểu thêm về phương pháp này.

1. Để chứng minh $f(a\ ;\ b\ ;\ c) \ge 0$, ta cần tìm x, y, z biểu diễn theo a, b, c để $f(a\ ;\ b\ ;\ c) \ge f(x\ ;\ y\ ;\ z)$, rồi chứng minh $f(x\ ;\ y\ ;\ z) \ge 0$.

2. Xác định đúng cách lựa chọn biến mới một cách phù hợp.

Với các bài toán mà các biến không có điều kiện ràng buộc thì ta có thể chọn một trong các dạng trung bình sau : trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình điều hòa hay trung bình bình phương. Với các bài toán mà biến bị ràng buộc bởi điều kiện nào đó thì việc lựa chọn một trong các dạng trên là rõ ràng hơn, chẳng hạn, nếu $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$ thì ta chọn trung bình cộng để giải.

3. Tùy vào từng hàm f đã cho trong bất đẳng thức để khai thác tính chất của nó một cách thích hợp, với f đối xứng thì ta có thể :

- Sắp xếp trật tự các biến theo thứ tự tăng hoặc giảm *(Hàm f(a ; b ; c) gọi là đối xứng nếu f(a ; b ; c) = f(x ; y ; z), với (x ; y ; z) là hoán vị bất kì của (a ; b ; c))*. Chẳng hạn, nếu hàm f(a ; b ; c) đối xứng thì có thể giả sử $a \le b \le c$.

- Hoặc ta có thể giả sử $a = \max\{a\ ;\ b\ ;\ c\}$ hoặc $a = \min\{a\ ;\ b\ ;\ c\}$.

Ta xét một số ví dụ sau.

**Ví dụ 1.** Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \ge 2(ab + bc + ca).$$

**Lời giải.** Do tính chất đối xứng giữa các biến nên giả sử $a \ge b \ge c$.

Đặt $f(a\ ;\ b\ ;\ c) = a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 - 2(ab + bc + ca)$.

Xét $f(a\ ;\ b\ ;\ c) - f(\sqrt{ab}\ ;\ \sqrt{ab}\ ;\ c) =$

$$= a^2 + b^2 - 2ab - 2c\,(a + b - 2\sqrt{ab})$$

$$= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2(a + b + 2\sqrt{ab} - 2c) \ge 0.$$

Suy ra $f(a\ ;\ b\ ;\ c) \ge f(\sqrt{ab}\ ;\ \sqrt{ab}\ ;\ c) = f(t\ ;\ t\ ;\ c)$.

Ta chỉ cần chứng minh với $t, c > 0$ thì $f(t\ ;\ t\ ;\ c) \ge 0$ hay

$$2t^2 + c^2 + 2t^2c - 2(t^2 + 2tc) + 1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow c^2 + 2t^2c - 4tc + 1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (c^2 - 2c + 1) + 2c\,(t^2 - 2t + 1) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (c - 1)^2 + 2c\,(t - 1)^2 \ge 0 \text{ : hiển nhiên.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

**Chú ý.** Bài toán có thể giải bằng những cách khác như dùng phương pháp tam thức bậc hai hoặc sử dụng bất đẳng thức

$$abc \ge 8\,(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b).$$

**Ví dụ 2.** Cho các số a, b, c, d dương thỏa mãn $a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng

$$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4abcd - 16 \ge 0. \quad (*)$$

**Lời giải.** Ta thấy với $a = b = c = d = 1$ thì (*) xảy ra đẳng thức.

Với giả thiết $a + b + c + d = 4$, ta sẽ dồn biến bằng cách sử dụng trung bình cộng như sau. Đặt vế trái của (*) là $f(a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d)$.

Vì f đối xứng nên giả sử $a \ge b \ge c \ge d$.

Xét hiệu

$$f(a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d) - f\left(\frac{a+c}{2}\ ;\ b\ ;\ \frac{a+c}{2}\ ;\ d\right)$$

$$= 3\left(a^2 + c^2 - \frac{(a+c)^2}{2}\right) + 4bd\left(ac - \frac{(a+c)^2}{4}\right)$$

$$= (a - c)^2\left(\frac{3}{2} - bd\right).$$

Vì $a \ge b \ge c \ge d$ nên $a + c \ge b + d$.

Do đó $b + d \le \frac{1}{2}(a+b+c+d) = 2$.

Suy ra $bd \le \left(\frac{b+d}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{3}{2} - bd > 0$.

Vậy $f(a\,;b\,;c\,;d) \ge f\left(\frac{a+c}{2}\,;b\,;\frac{a+c}{2}\,;d\right)$.

Do đó ta chỉ cần chứng minh (*) khi a = c. Mà $a \ge b \ge c$ nên khi đó a = b = c.

Ta sẽ chứng minh $f(t\,;t\,;t\,;d) \ge 0$ hay $3(3t^2 + d^2) + 4t^3d - 16 \ge 0$, với $3t + d = 4$.

Thật vậy, thay $d = 4 - 3t$ vào bất đẳng thức trên, ta được

$$-12t^4 + 16t^3 + 36t^2 - 72t + 32 \ge 0$$

$\Leftrightarrow (t-1)^2(3t^2 + 2t - 8) \le 0$

$\Leftrightarrow (t-1)^2(3t-4)(t+2) \le 0$.

Vì $d = 4 - 3t > 0$ nên bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d = 1$.

● Ta cùng xem ví dụ sau đây (là ví dụ 2 trong bài viết của thầy Nguyễn Văn Thông đăng trên TTT2 số 52).

Cho a, b, c là các số không âm và không có hai số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2-ab+b^2} + \frac{ab+bc+ca}{b^2-bc+c^2} + \frac{ab+bc+ca}{c^2-ca+a^2} \ge 3.$$

Đặt vế trái là $f(a\,;b\,;c)$.

Giả sử $a = \min\{a\,;b\,;c\}$.

Bằng cách xét $f(a\,;b\,;c) - f(0\,;b\,;c)$ ta suy ra $f(a\,;b\,;c) \ge f(0\,;b\,;c)$. Sau đó chứng minh $f(0\,;b\,;c) \ge 3$, suy ra đpcm.

Ta xét bài toán sau với cách giải tương tự bài toán trên.

**Ví dụ 3.** Cho $x, y, z \ge 0$. Chứng minh rằng

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \ge 4(x-y)(y-z)(z-x). \quad (1)$$

**Lời giải.** Ta có

$$(1) \Leftrightarrow (x+y+z)((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2) - 8(x-y)(y-z)(z-x) \ge 0.$$

Đặt vế trái là $f(x\,;y\,;z)$ thì f đối xứng.

Giả sử $z = \min\{x\,;y\,;z\}$.

Xét hiệu $f(x\,;y\,;z) - f(x-z\,;y-z\,;0) =$

$$= 3z((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2) \ge 0.$$

Suy ra $f(x\,;y\,;z) \ge f(x-z\,;y-z\,;0)$.

Do đó ta chỉ cần chứng minh (1) trong trường hợp z = 0 và $x, y \ge 0$.

Khi đó bất đẳng thức (1) trở thành

$$x^3 + y^3 + 4xy(x-y) \ge 0. \quad (1')$$

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$y^2 + 4x^2 \ge 4xy \Rightarrow y^3 + 4x^2y \ge 4xy^2.$$

Kết hợp với $x \ge 0$, suy ra (1').

Vậy (1) được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

**Nhận xét.** Cách dồn biến như *ví dụ 3* gọi là cách dồn biến toàn miền.

Sau đây là một số bài toán vận dụng.

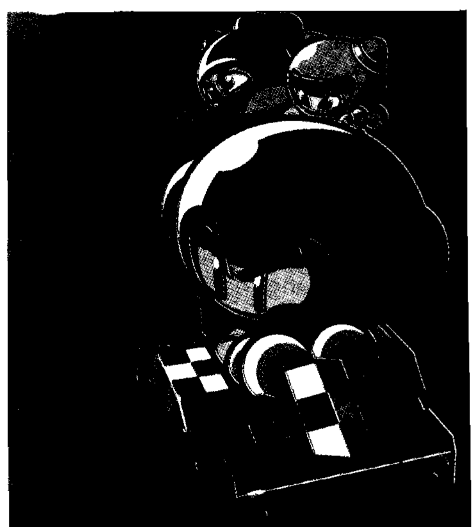
**Bài 1.** (BĐT Nét-sơ-bít) Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$.

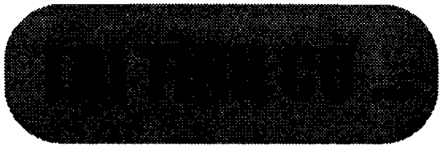
**Bài 2.** Cho x, y, z > 0 thỏa mãn x + y + z = 3. Chứng minh rằng

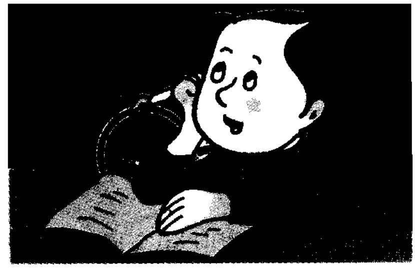
$$2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 3 \le 3(x^2 + y^2 + z^2).$$

**Bài 3.** Cho $x, y, z, t \ge 0$. Chứng minh rằng

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 - 4xyzt \ge 2(x-y)(y-z)(z-t)(t-x).$$







NGUYỄN MẠNH DŨNG
*(11A$_2$ Toán, ĐHKHTN-ĐHQGHN)*

Sau khi đọc bài viết của bạn Võ Văn Thành trên TTT2 số 59, tôi thật sự ấn tượng với phương pháp phân tích thành tổng các bình phương của bạn. Và tôi tự hỏi là còn cách phân tích bình phương nào khác nữa không ? Thật tình cờ, tôi đã tìm ra một cách khác cũng thật đẹp.

Xin được nhắc lại bài toán của bạn Thành.

**Bài toán 1.** Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c thì

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(a^3b+b^3c+c^3a).$$

Đây là một bài toán khá nổi tiếng và nhiều ứng dụng của tác giả Vasile Cirtoaje.

**Lời giải.** Bằng cách phân tích :

$$6(a^2+b^2+c^2)^2 - 18(a^3b+b^3c+c^3a)$$
$$=\sum_{cyc}(2a^2-b^2-c^2-3ab+3bc)^2 \geq 0.$$

Ta có đpcm.

Ta cùng tiếp tục đến bài toán tổng quát sau.

**Bài toán 2.** Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c, r thì

$$a^4+b^4+c^4+\left(\frac{r^2}{3}-1\right)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$
$$+\frac{3r-r^2}{3}abc(a+b+c)$$
$$\geq r(a^3b+b^3c+c^3a). \qquad (1)$$

**Lời giải.** Biến đổi bất đẳng thức (1) về dạng $\sum_{cyc}(2a^2-b^2-c^2-rab+rbc)^2 \geq 0.$

Suy ra đpcm.

**Nhận xét.**

+ Trong (1), thay r = 3, ta được *bài toán 1*, thay $r=\sqrt{3}$ ta được *bài toán 2* của bạn Thành.

+ Bất đẳng thức (1) còn một cách phân tích nữa tương tự như bạn Thành là đưa về dạng $\sum_{cyc}(a^2-b^2-rab+2rbc-rca)^2 \geq 0.$

Một câu hỏi được đặt ra nữa là còn cách giải nào khác cho *bài toán 1* hay không ? Và lại tình cờ, tôi biết đến một lời giải như sau.

Đặt $X=(a^2+b^2+c^2)^2-3(a^3b+b^3c+c^3a)$ ;

$Y=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ ;

$A=a^3+b^3+c^3$ ; $B=a^2b+b^2c+c^2a$ ;

$C=ab^2+bc^2+ca^2$ ; $D=3abc$.

Ta có $4XY=(A-5B+4C)^2+$
$+3(A-B-2C+2D)^2 \geq 0.$

Với chú ý $Y \geq 0$. Khi $Y=0$ thì $a=b=c$ nên $X=0$. Khi $Y>0$ thì $X \geq 0$.

Đến đây chắc các bạn tự hỏi rằng tại sao lại có phân tích trên và ngoài cách phân tích thành tổng các bình phương còn cách giải nào khác nữa không ? Rất mong được trao đổi của các bạn về vấn đề này.

# SỬ DỤNG PHẦN TỬ CỰC HẠN ĐỂ GIẢI TOÁN

ThS. NGUYỄN ANH DŨNG *(Hà Nội)*

Ta biết rằng một tập hợp khác rỗng gồm hữu hạn các số thực luôn tồn tại số lớn nhất và số nhỏ nhất.

Nhận xét trên tuy đơn giản nhưng sẽ là ý tưởng khá hay và độc đáo giúp ta sử dụng phần tử cực hạn (phần tử có giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của một tập hợp) để giải một số bài toán.

Sau đây là một số ví dụ.

**Bài toán về số nguyên**

**Bài toán 1.** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 1$, tổng $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$ không phải là một số nguyên.

**Lời giải.** Với mỗi số tự nhiên $n > 1$, gọi $k$ là số tự nhiên lớn nhất thỏa mãn $2^k \le n$.

Thế thì $2^{k+1} > n$. Do đó ngoài phần tử $2^k$ thì trong dãy 2, 3, 4, ... , n không còn số nào khác là bội của $2^k$. Gọi p là tích của tất cả các số lẻ không lớn hơn n và đặt $q = p \cdot 2^{k-1}$ thì ngoài số $2^k$, q là bội của tất cả các số còn lại trong dãy 2, 3, 4, ... , n.

Ta có $qS = \frac{q}{2} + \frac{q}{3} + \frac{q}{4} + \ldots + \frac{q}{2^k} + \ldots + \frac{q}{n}$.

Trong vế phải của đẳng thức trên chỉ có số hạng $\frac{q}{2^k} \notin \mathbb{Z}$, còn lại tất cả các số hạng đều là số nguyên. Do đó $qS \notin \mathbb{Z}$ nên S không phải là số nguyên. Ta có đpcm.

**Bài toán 2.** Chứng minh rằng phương trình $x^2 + y^2 = 3z^2$ không có nghiệm nguyên dương.

**Lời giải.** Nhận xét rằng, nếu $n \,\vdots\, 3$ thì $n^2 \,\vdots\, 3$ và nếu n không chia hết cho 3 thì $n^2$ chia 3 dư 1.

Giả sử phương trình trên có nghiệm nguyên dương và $(x_0 ; y_0 ; z_0)$ là một nghiệm của phương trình sao cho $z_0$ là số nguyên dương nhỏ nhất trong các giá trị của z thỏa mãn $x^2 + y^2 = 3z^2$. (*)

Thế thì $x_0^2 + y_0^2 \,\vdots\, 3$ nên từ nhận xét trên ta suy ra $x_0 \,\vdots\, 3$ và $y_0 \,\vdots\, 3$. Do đó $x_0^2 + y_0^2 \,\vdots\, 9$ nên $3z_0^2 \,\vdots\, 9$. Do đó $z_0 \,\vdots\, 3$.

Đặt $x_0 = 3x_1$ ; $y_0 = 3y_1$ ; $z_0 = 3z_1$.

Thay vào phương trình (*) rồi chia cả hai vế cho 9, ta được $x_1^2 + y_1^2 = 3z_1^2$.

Như vậy $(x_1 ; y_1 ; z_1)$ cũng là một nghiệm của (*) mà $z_1 < z_0$, trái với giả thiết.

Vậy phương trình (*) không có nghiệm nguyên dương.

**Lưu ý.** Ta giả sử $z_0$ có giá trị nhỏ nhất, sau đó lại chỉ ra $z_1 < z_0$ nên mâu thuẫn. Cách làm này thường gặp trong chứng minh bài toán bằng phản chứng.

**Bài toán về hệ phương trình**

**Bài toán 3.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 = 2y - 1 & (1) \\ y^3 = 2z - 1 & (2) \\ z^3 = 2x - 1 & (3). \end{cases}$$

**Lời giải.** Vì đây là hệ phương trình hoán vị vòng quanh theo nên không mất tính tổng quát, giả sử $x = \max\{x ; y ; z\}$.

Vì $x \ge y$ nên từ (1), (2) suy ra $y \ge z$.

Từ (2), (3) suy ra $z \ge x$. Do đó $x = y = z$.

Thay vào (1), ta được $x^3 - 2x + 1 = 0$.

Từ đó dễ dàng tìm được nghiệm của hệ là

$x = y = z = 1$ hoặc $x = y = z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

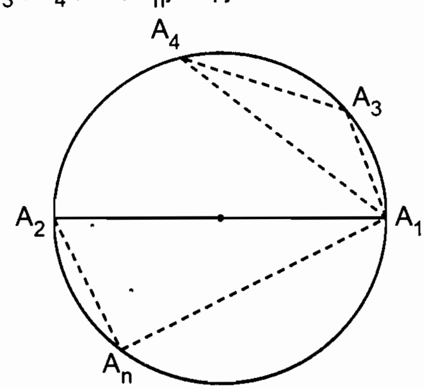
**Bài toán hình học**

**Bài toán 4.** Tìm số tự nhiên n (với $n > 3$) lớn nhất sao cho trên mặt phẳng có n điểm phân biệt mà ba điểm bất kì trong chúng là các đỉnh của một tam giác vuông.

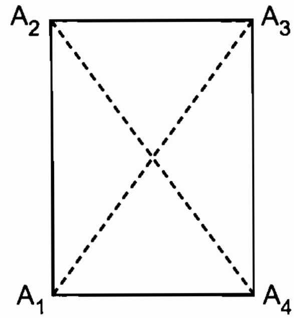
**Lời giải.** Giả sử có n điểm phân biệt $A_1$, $A_2$, ... , $A_n$, với $n > 3$, thỏa mãn điều kiện bài toán. Vì số các đoạn thẳng nối các điểm trên là hữu hạn và vai trò các điểm như nhau nên giả sử $A_1A_2 = \max\{A_iA_j\}$, với $i, j \in \overline{1,n}$.

Thế thì $A_1A_2A_i$ là các tam giác vuông với cạnh huyền là $A_1A_2$, $\forall\ i \in \overline{3,n}$. Nói cách khác, các điểm $A_1$, $A_2$, ... , $A_n$ nằm trên đường tròn đường kính $A_1A_2$. Nếu trong các điểm $A_3$, $A_4$, ... , $A_n$ có hai điểm cùng nằm trên nửa đường tròn đường kính $A_1A_2$, chẳng hạn là $A_3$ và $A_4$ thì dễ thấy tam giác $A_1A_3A_4$ là tam giác tù : vô lí.

Suy ra trên mỗi nửa đường tròn đường kính $A_1A_2$ có nhiều nhất một điểm thuộc $\{A_3 ; A_4 ; ... ; A_n\}$. Vậy $n \le 4$.




Đảo lại, dễ thấy khi $n = 4$ thì hình chữ nhật $A_1A_2A_3A_4$ thỏa mãn điều kiện bài toán.




Vậy số n lớn nhất phải tìm là 4.

**Bài toán tổ hợp**

**Bài toán 5.** Trong cuộc thi đấu cờ có n người tham gia ($n > 3$). Biết rằng hai người bất kì đều đấu với nhau đúng một ván và không có ván nào hòa. Chứng minh rằng có thể xếp n người đó thành một hàng dọc sao cho mỗi người, kể từ người đứng đầu, đều thắng người đứng kề sau mình.

**Lời giải.** Vì không có ván đấu nào hòa nên từ các người chơi, luôn có thể xếp được thành một số các hàng dọc (có thể không đủ n người) sao cho trong mỗi hàng thì mỗi người, kể từ người đứng đầu, đều thắng người đứng kề sau mình (mỗi hàng có thể có 2, 3, ... người).

Trong các hàng dọc có thể xếp được, xét hàng có số người nhiều nhất. Giả sử hàng đó (kí hiệu là hàng 1) gồm m người và được xếp thành hàng theo thứ tự là $A_1$, $A_2$, ... , $A_m$.

Nếu $m = n$, ta có đpcm.

Xét $m < n$. Giả sử B là một người không thuộc hàng 1.

Nếu B thắng $A_1$ thì hàng B, $A_1$, $A_2$, ... , $A_m$ có nhiều người hơn hàng 1 : vô lí.

Do đó B thua $A_1$.

Nếu B thắng $A_2$ thì hàng $A_1$, B, $A_2$, ... , $A_m$ có nhiều người hơn hàng 1 : vô lí.

Vậy B thua $A_2$.

*(Xem tiếp trang 21)*

# SỬ DỤNG PHẦN TỬ ...

(Tiếp theo trang 23)

Cứ tiếp tục lí luận như thế, ta được B không thể thắng bất cứ người nào trong hàng 1. Nghĩa là hàng $A_1, A_2, \ldots, A_m$, B có nhiều người hơn hàng 1 : vô lí.

Vậy m = n và hàng 1 có đủ n người, bài toán được chứng minh.

**Lưu ý**. Về phương pháp, ta sử dụng hàng có nhiều người nhất rồi chứng minh không còn ai đứng ngoài hàng đó.

Qua các thí dụ trên, ta thấy phần tử cực hạn có một vai trò đặc biệt. Nó vừa có thuộc tính chung của một tập hợp vừa có tính chất riêng của phần tử ở vị trí biên của tập hợp đó. Trong nhiều trường hợp, việc quan tâm đến phần tử cực hạn sẽ giúp ta tìm ra hướng giải quyết bài toán.

*Bài tập làm thêm*

**Bài 1.** Giả sử trên mặt phẳng có n điểm phân biệt (n > 2) sao cho nếu một đường thẳng đi qua hai điểm bất kì trong chúng thì đường thẳng đó còn đi qua ít nhất một điểm thứ ba nữa. Hãy chứng minh rằng n điểm đó cùng nằm trên một đường thẳng.

**Bài 2.** Giả sử có n số thực được viết vòng quanh một đường tròn sao cho mỗi số bằng trung bình cộng của hai số bên cạnh nó. Chứng minh rằng n số trên bằng nhau.

**Bài 3.** Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 3y^3 = 9z^3$ không có nghiệm nguyên dương.

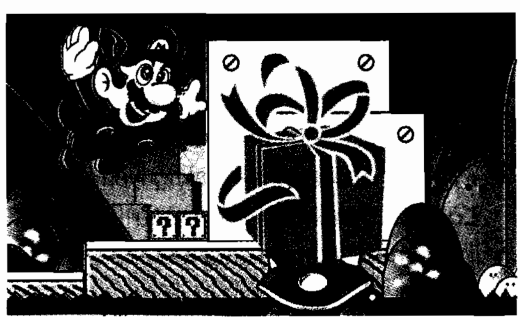
# *Kết quả* TRẬN ĐẤU ...

(Tiếp theo trang 19)

Từ đó suy ra : Nếu M là trọng tâm tam giác A'B'C' thì M nhất thiết phải là điểm chung của ba cung tròn $\overset{\frown}{BHC}$, $\overset{\frown}{CHA}$ và $\overset{\frown}{AHB}$, vì vậy M trùng với trực tâm H của $\Delta ABC$. Điều ngược lại cũng đúng.

2) Có sáu võ sĩ tham gia trận thách đấu thứ 52. Tuy nhiên đáng tiếc có đến ba võ sĩ sau khi thiết lập điều kiện cần (là điều kiện 1 trong đáp án nêu trên) lại phát biểu ngược lại thành điều kiện đủ : Nếu M là trực tâm $\Delta ABC$ thì M là trọng tâm $\Delta A'B'C'$ ! Ngoài ra hai võ sĩ *Nguyễn Ngọc Long*, 9A, THCS Vũ Kiệt, Thuận Thành, **Bắc Ninh** và *Hoàng Minh Lập*, 9E, THCS Quang Trung, Kiến Xương, **Thái Bình** cho lời giải đúng nhưng phải sử dụng định lí hàm số sin thuộc chương trình Toán lớp 10 THPT. Đáng tiếc có hai võ sĩ không đọc kĩ đề bài toán (hoặc không nắm vững khái niệm tia) nên dựng A', B' và C' không đúng do hiểu sai tia MA thành tia AM, v.v... !!! Bởi vậy chỉ có một võ sĩ cho lời giải đúng và tương đối ngắn gọn theo hướng đáp án đã nêu. Đó là võ sĩ *Nguyễn Mạnh Quân*, 9C, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**, rất xứng đáng được đăng quang trong trận thách đấu thứ 52 này.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT




# PHÁT TRIỂN VÀ MỞ RỘNG MỘT BÀI TOÁN

HOÀNG VĂN CHUNG
*(GV. THCS Cẩm Vũ, Cẩm Giàng, Hải Dương)*

Ta biết rằng một số bài toán có thể được phát biểu tóm tắt dưới dạng *nếu A thì B*. Vậy để phát triển và mở rộng một bài toán ở dạng trên thì vấn đề đặt ra là :

i) Ngoài B ra thì còn có thể thu được kết quả nào khác nữa không ?

ii) Đảo lại, nếu có B thì có A không ?

iii) Thay đổi một số dữ kiện của giả thiết A thì kết quả bài toán thu được có gì mới không ?

Đó là một số hướng để phát triển và mở rộng một bài toán. Sau đây là một số ví dụ.

**Bài toán 1.** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB có các tiếp tuyến Ax, By nằm cùng phía với AB. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A, B), kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn cắt Ax, By theo thứ tự ở C, D. Kí hiệu giả thiết đã cho là (1). Chứng minh rằng :

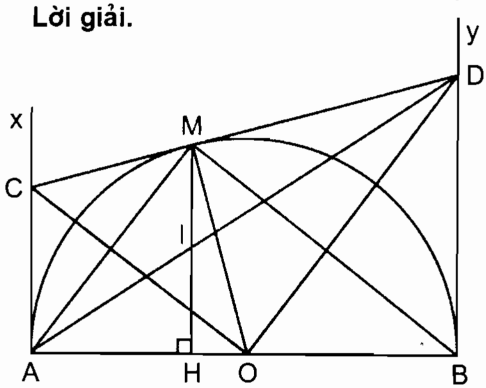
a) $\widehat{COD} = 90^\circ$.

b) CD = AC + BD.

c) Tích AC·BD không đổi khi M di chuyển trên nửa đường tròn (O).

*(SGK Toán 9, tập 1)*

**Lời giải.**




*(Hình vẽ này được dùng chung cho một số bài toán khác có liên quan)*

a) Theo tính chất tiếp tuyến của đường tròn, ta có $\widehat{COD} = \widehat{COM} + \widehat{DOM} =$

$$= \frac{1}{2}\widehat{AOM} + \frac{1}{2}\widehat{BOM} = \frac{1}{2}\cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

b) Ta có CD = CM + MD = CA + BD.

c) Áp dụng hệ thức lượng cho $\Delta COD$ vuông tại O với đường cao OM, ta có

$$MC \cdot MD = MO^2.$$

Suy ra $AC \cdot BD = MO^2$, không đổi.

**Bài toán 2.** Với giả thiết (1). Kẻ $MH \perp AB$ ($H \in AB$). Chứng minh rằng MH, AD và BC đồng quy.

**Lời giải.** Gọi I, I' theo thứ tự là giao điểm của MH với AD, BC. Theo định lí Ta-lét, ta có

$$\frac{IM}{AC} = \frac{DM}{DC} \Rightarrow IM = \frac{AC \cdot DM}{DC} = \frac{MC \cdot DM}{DC}.$$

Tương tự : $I'M = \dfrac{MC \cdot DM}{DC}$ nên IM = I'M.

Vậy $I \equiv I'$ nên MH, AD và BC đồng quy.

**Bài toán 3.** Với giả thiết (1). Gọi E, F là giao điểm của AM, BM tương ứng với By, Ax.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $S_{CDEF}$ khi M di chuyển trên nửa đường tròn (O).

b) Chứng minh rằng khi M không phải là điểm giữa của cung AB thì EF, CD và AB đồng quy, ta có đpcm.

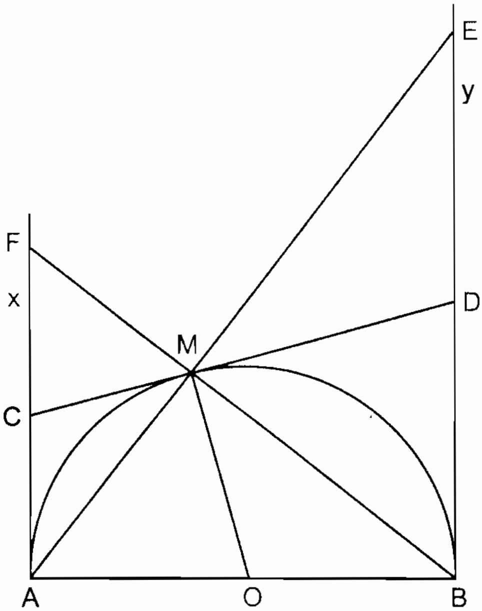
**Lời giải.** a) Vì CM = CA nên $\Delta CAM$ cân tại C. Suy ra $\widehat{CAM} = \widehat{CMA} \Rightarrow \widehat{CFM} = \widehat{CMF}$.

Do đó $\Delta CFM$ cân tại C, nên CF = CM.

Tương tự : DE = DM. Suy ra

$$S_{CDEF} = \frac{1}{2}(CF + DE)AB = \frac{1}{2}(CM + DM)AB$$
$$= \frac{1}{2}CD \cdot AB \geq \frac{1}{2}AB^2.$$

Vậy GTNN của $S_{CDEF}$ là $\frac{1}{2}AB^2$, đạt được khi và chỉ khi M là điểm giữa của cung AB.




b) Gọi K là giao điểm của CD với AB, E' là giao điểm của KF với By (bạn đọc tự vẽ hình). Theo định lí Ta-lét, ta có

$$\frac{CF}{DE'} = \frac{KC}{KD} = \frac{CA}{DB}.$$

Mà CF = CA nên DE' = DB. Mà DB = DE nên DE' = DE. Suy ra E' ≡ E. Vậy EF, CD và AB đồng quy tại K, ta có đpcm.

**Nhận xét.** Ta xét bài toán ngược của *câu c)* của *bài toán 1*, như sau.

**Bài toán 4.** Cho đường tròn tâm O đường kính AB = 2R có các tiếp tuyến Ax, By nằm cùng phía với AB. Gọi C, D lần lượt là các điểm trên Ax, By sao cho $AC \cdot BD = R^2$. Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của đường tròn (O).

**Lời giải.** Từ C, dựng tiếp tuyến của (O) cắt By tại D'. Theo chứng minh của *bài toán 1* thì $AC \cdot BD' = R^2$. Mà $AC \cdot BD = R^2$ nên BD' = BD. Suy ra D' ≡ D, ta có đpcm.

**Nhận xét.** Dễ thấy $\Delta AMB \backsim \Delta COD$. Do đó, nếu biết diện tích $\Delta COD$ thì tính được diện tích $\Delta AMB$. Ta có bài toán mở rộng sau.

**Bài toán 5.** Với giả thiết (1). Biết MC = 4 cm, MD = 9 cm. Tính diện tích $\Delta AMB$.

**Lời giải.** Ta có CD = MC + MD = 13 (cm) ; $MO^2 = MC.MD = 36 \Rightarrow MO = 6$ (cm).

Vì $\widehat{OMC} = \widehat{OAC} = 90^o$ nên tứ giác OMCA nội tiếp. Suy ra $\widehat{OCM} = \widehat{OAM}$.

Tương tự : $\widehat{ODM} = \widehat{OBM}$.

Suy ra $\Delta AMB \backsim \Delta COD$ (g-g).

$$\text{Do đó } S_{AMB} = S_{COD} \cdot \left(\frac{AB}{CD}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot CD \cdot OM \cdot \frac{4 \cdot OM^2}{CD^2} = \frac{2 \cdot OM^3}{CD} =$$
$$= \frac{2 \cdot 6^3}{13} = \frac{432}{13}(cm^2) \approx 33{,}23(cm^2).$$

**Nhận xét.** Ta có thể tính được bán kính r của đường tròn nội tiếp $\Delta COD$ khi biết độ dài của hai cạnh OC, OD. Ta có bài toán mới sau.

**Bài toán 6.** Với giả thiết (1). Biết MC = 4 cm, MD = 9 cm. Tính bán kính của đường tròn nội tiếp $\Delta COD$.

**Lời giải.** Áp dụng định lí Py-ta-go, ta có
$$OC = \sqrt{OM^2 + MC^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13};$$
$$OD = \sqrt{OM^2 + MD^2} = \sqrt{6^2 + 9^2} = 3\sqrt{13}.$$

Với một tam giác bất kì, ta có công thức S = pr, trong đó S, p, r thứ tự là diện tích, nửa chu vi và bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác đó. Từ đó ta tính được bán kính đường tròn nội tiếp $\Delta COD$ là

$$r = \frac{5\sqrt{13} - 13}{2} \text{ cm}.$$

**Nhận xét.** Ta có thể chứng minh kết quả bài toán quen thuộc sau.

**Bài toán 7.** Với giả thiết (1). Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp $\Delta COD$. Chứng minh rằng 2r = CO + DO − CD.

*(Xem tiếp trang 21)*

# PHÁT TRIỂN VÀ MỞ RỘNG ...

*(Tiếp theo trang 3)*

**Nhận xét.** Sử dụng kết quả *bài toán 7*, ta có bài toán mở rộng như sau.

**Bài toán 8.** Với giả thiết (1). Gọi $r$, $r_1$ và $r_2$ lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp của các tam giác COD, COM và DOM. Chứng minh rằng :

a) $r + r_1 + r_2$ không đổi khi M di chuyển trên nửa đường tròn (O).

b) $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.

**Lời giải.** Áp dụng kết quả *bài toán 7*, ta có $2(r + r_1 + r_2) = CO + DO - CD + CM + OM - CO + DM + OM - OD = 2OM$.

Suy ra $r + r_1 + r_2 = OM$, không đổi.

b) Dễ thấy các tam giác COD, CMO, OMD đồng dạng. Suy ra $\frac{r}{CD} = \frac{r_1}{CO} = \frac{r_2}{OD}$

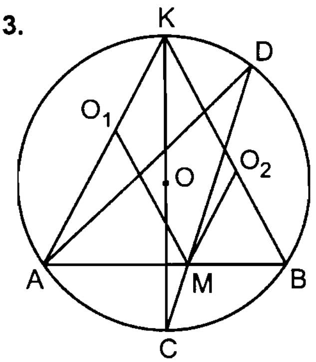
$$\Rightarrow \frac{r^2}{CD^2} = \frac{r_1^2}{CO^2} = \frac{r_2^2}{OD^2} = \frac{r_1^2 + r_2^2}{CO^2 + OD^2}.$$

Mà $CD^2 = OC^2 + OD^2$ nên $r^2 = r_1^2 + r_2^2$, ta có đpcm.

Cứ tiếp tục phát triển và mở rộng bài toán như trên, ta sẽ thu được các kết quả khác. Chúc các bạn thành công.

## Hướng dẫn giải đề kì trước ... *(Tiếp theo trang 10)*

**Câu 3.**




1) Vì $\widehat{CAM} = \frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{BC} = \frac{1}{2}sđ\overset{\frown}{AC} = \widehat{CDA}$ nên $\Delta CAM \backsim \Delta CDA$.

Suy ra $CA^2 = CM \cdot CA$, ta có đpcm.

2) Gọi $O_1$, $O_2$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ADM$ và $\Delta BDM$. Ta có

$\widehat{AO_1M} = 2 \cdot \widehat{ADM} = \widehat{ADB} = 2 \cdot \widehat{BDM} = \widehat{BO_2D}$.

Mà $\Delta O_1AM$ cân tại $O_1$ và $\Delta O_2BM$ cân tại $O_2$ nên $\widehat{O_1AM} = \widehat{O_2BM} = \widehat{O_1MA} = \widehat{O_2MB}$.

Do đó tứ giác $MO_1KO_2$ là hình bình hành, với $K = AO_1 \cap BO_2$.

Suy ra K nằm trên đường tròn (O) và là điểm chính giữa của cung AB chứa điểm D nên K cố định. Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ADM$ nằm trên đường thẳng AK cố định.

3) Ta có $KO_1 = MO_2 = R_2$ và $AO_1 = R_1$.

Suy ra $R_1 + R_2 = AK$, không đổi.

**Câu 4.** Gọi D(5 ; 0) thì AODC là hình thang. Ta có $S_{AODC} = \frac{75}{8}$ ; $S_{BCD} = \frac{3}{8}$

$\Rightarrow S_{AOBC} = S_{AODC} - S_{BCD} = 9$ (đvdt).

Lấy M(3 ; 0) thì $S_{AOM} = \frac{9}{2} = \frac{1}{2}S_{AOBC}$.

Vậy đường thẳng AM có PT : $y = -x + 3$.

**Câu 5.** Đặt $\frac{a}{b} = x^3$; $\frac{b}{c} = y^3$ ; $\frac{c}{a} = z^3$ thì $xyz = 1$.

Suy ra $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$, hay

$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$.

+ Nếu $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$ thì $x = y = z = 1$. Suy ra $a = b = c$, nên $abc = a^3$.

+ Xét $x + y + z = 0$. Ta chứng minh được

$$abc = \left(\frac{bc - ab}{a - b}\right)^3.$$

Vì abc nguyên nên vế phải là lập phương của một số nguyên.


# MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG MẪU MỰC

NGUYỄN VĂN HUYỆN
*(Lớp 10A$_2$, THPT Nguyễn Trung Trực, Tri Tôn, An Giang)*

Chúng ta đã biết, mỗi hệ phương trình đối xứng loại I, hệ phương trình đối xứng loại II, hệ phương trình đẳng cấp và hệ phương trình hoán vị vòng quanh đều có một số phương pháp chung để giải. Bài viết này sẽ giới thiệu một số phương pháp để giải một số hệ phương trình không mẫu mực.

**Bài toán 1.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\left(1-\dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{x}=2\\[2mm] \left(1+\dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{y}=6\end{cases}.$$

**Lời giải.** Dễ thấy $xy \neq 0$.

Điều kiện $x > 0$ ; $y > 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}1-\dfrac{12}{y+3x}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}\\[2mm] 1+\dfrac{12}{y+3x}=\dfrac{6}{\sqrt{y}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{\sqrt{y}}=1\ (1)\\[2mm] -\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{\sqrt{y}}=\dfrac{12}{y+3x}\end{cases}.$$

Suy ra $\dfrac{9}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{12}{y+3x}$

$$\Leftrightarrow y^2+6xy-27x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=3x\\ y=-9x\ (\text{loại})\end{array}\right..$$

Thế $y = 3x$ vào (1), ta được $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}=1.$

Suy ra nghiệm của hệ là $\begin{cases}x=4+2\sqrt{3}\\ y=12+6\sqrt{3}\end{cases}.$

**Bài toán 2.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x+y+z=1 & (1)\\ x^2+y^2+z^2=1. & (2)\\ x^3+y^3+z^3=1 & (3)\end{cases}$$

**Lời giải.**

*Cách 1.* Từ (1), (3) và áp dụng hằng đẳng thức quen thuộc $(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = 3(a + b)(b + c)(c + a)$, ta suy ra $3(x + y)(y + z)(z + x) = 0$.

Nếu $x + y = 0$ thì hệ có nghiệm là $(0 ; 0 ; 1)$.

Nếu $y + z = 0$ thì hệ có nghiệm là $(1 ; 0 ; 0)$.

Nếu $z + x = 0$ thì hệ có nghiệm là $(0 ; 1 ; 0)$.

*Cách 2.* Từ (2) và (3) suy ra

$$x^2(1-x)+y^2(1-y)+z^2(1-y)=0. \quad (4)$$

Từ (2) suy ra $x^2, y^2, z^2 \le 1$ nên $x, y, z \le 1$.

Suy ra $x^2(1-x) \ge 0$ ; $y^2(1-y) \ge 0$ ; $z^2(1-y) \ge 0$.

Vậy (4) $\Leftrightarrow x^2(1-x)=y^2(1-y)=z^2(1-z)=0$.

Suy ra nghiệm của hệ là $(0 ; 0 ; 1)$ và các hoán vị.

*Cách 3.* Từ (1), (2) suy ra

$$\begin{cases}x+y=1-z\\ xy=\dfrac{1}{2}\left((1-z)^2-(1-z^2)\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=1-z\\ xy=z^2-z\end{cases}.$$

Thay vào (3), ta được

$$(1-z)^3-3(1-z)(z^2-z)+z^3=1$$

$\Leftrightarrow z^3 - z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$ hoặc $z = 1$.

Từ đó suy ra nghiệm của hệ.

**Bài toán 3.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - \dfrac{1}{y} = 1 & (1) \\ y - \dfrac{1}{z} = 1. & (2) \\ z - \dfrac{1}{x} = 1 & (3) \end{cases}$$

**Lời giải.** Điều kiện $x, y, z \neq 0$.

*Cách 1.* Từ (3) suy ra $z = \dfrac{x+1}{x}$, nên $x \neq -1$.

Thay vào (2), ta được

$$y - \frac{x}{x+1} = 1 \Rightarrow xy - 1 = 2x - y.$$

Mặt khác, từ (1) suy ra $xy - 1 = y$.

Do đó $2x - y = y$ nên $x = y$.

Tương tự, ta có $y = z$ nên $x = y = z$.

Vậy (1) $\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Vậy hệ có hai nghiệm $(x ; y ; z)$ là

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} ; \frac{1+\sqrt{5}}{2} ; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right);$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} ; \frac{1-\sqrt{5}}{2} ; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

*Cách 2.* Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} xy - 1 = y & (4) \\ yz - 1 = z. & (5) \\ xz - 1 = x & (6) \end{cases}$$

Từ (4) suy ra $xyz = z + yz$.

Cộng theo vế với (5), ta được $xyz = 2z + 1$.

Tương tự : $xyz = 2x + 1$ ; $xyz = 2y + 1$.

Suy ra $x = y = z$ .

Từ đó suy ra nghiệm của hệ.

Để kết thúc bài này tôi xin giới thiệu một số bài tập được trích từ đề thi vào lớp 10 chuyên toán và Olympic toán của một số tỉnh, thành phố để bạn đọc tự giải.

• Giải các hệ phương trình sau :

**Bài 1.** $\begin{cases} 2x^3 - 7x^2 - 8x - 2 = y \\ 2y^3 - 7y^2 - 8y - 2 = z. \\ 2z^3 - 7z^2 - 8z - 2 = x \end{cases}$

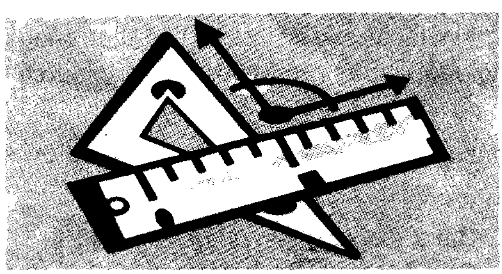
**Bài 2.** $\begin{cases} x + y + z + t = 22 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{7}{12} \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{t} = \dfrac{5}{18} \\ xyzt = 648 \end{cases}$.

**Bài 3.** $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+5} = \\ \qquad = \sqrt{y-1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{y-5}. \\ x^2 + y^2 + x + y = 80 \end{cases}$

**Bài 4.** $\begin{cases} (x+y+z)^3 = 12t \\ (y+z+t)^3 = 12x \\ (z+t+x)^3 = 12y \\ (t+x+y)^3 = 12z \end{cases}$.

**Bài 5.** $\begin{cases} ux^3 + vy^3 = 14 \\ ux^2 + vy^2 = 5 \\ ux + vy = 2 \\ u + v = 1 \end{cases}$.

**Bài 6.** $\begin{cases} x^3 + y^3 + x^2(y+z) = xyz + 14 \\ y^3 + z^3 + y^2(z+x) = xyz - 21. \\ z^3 + x^3 + z^2(x+y) = xyz + 7 \end{cases}$



# TƯ TƯỞNG CỦA ĐỀ-CÁC QUA LỜI GIẢI CỦA MỘT BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC

TS. NGUYỄN MINH HÀ *(ĐHSP Hà Nội)*

Trong TTT2 số 13, tôi đã giới thiệu lời giải đại số của bài toán sau (là bài toán thách đấu của trận đấu thứ ba).

**Bài toán 1.** Trong các tam giác nội tiếp đường tròn (O ; R) cho trước, hãy tìm tam giác có diện tích lớn nhất.

Vừa qua, trong TTT2 số 56, với bài "Nhận xét bị lãng quên", tôi đã giới thiệu với bạn đọc giải lời giải thuần túy hình học cho *bài toán 1*. Không những thế, để khẳng định tính ưu việt của kĩ thuật hình học, tôi còn sử dụng nó để giải bài toán tương tự đối với chu vi như sau.

**Bài toán 2.** Trong các tam giác nội tiếp đường tròn (O ; R) cho trước, hãy tìm tam giác có chu vi lớn nhất.

Sau khi TTT2 số 56 được phát hành, tôi nhận được một bức thư của em *Nguyễn Khánh Linh*, $9A_8$, THCS Lô-mô-nô-xốp, **Hà Nội**, cùng với câu hỏi và lời đề nghị khá hay : "Thưa TS. Nguyễn Minh Hà, có hay không một lời giải đại số của *bài toán 2* như lời giải của *bài toán 1* mà TS đã giới thiệu trong TTT2 số 13 ? Nếu có thì mong TS hãy giới thiệu lời giải đó để chúng em và bạn đọc của TTT2 được biết".

*Bài toán 2* có nhiều lời giải đại số. Sau đây, tôi sẽ giới thiệu một trong các lời giải đó. Hơn nữa, qua lời giải này, tôi còn muốn giới thiệu với các em một tư tưởng lớn của toán học : *đại số hóa hình học bằng phương pháp tọa độ.*

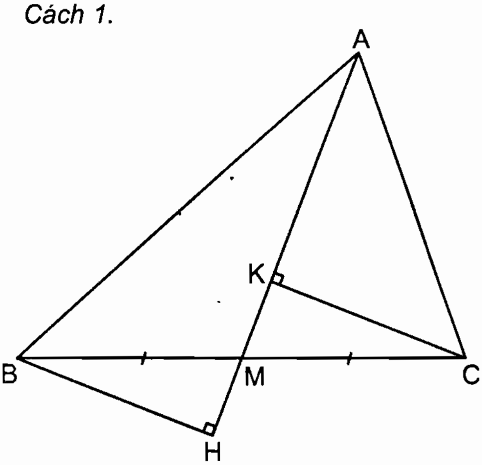
Trước hết, ta hãy chứng minh bổ đề sau.

Cho tam giác ABC với trung tuyến AM. Chứng minh rằng

$$AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}.$$

Bổ đề trên có thể được chứng minh bằng nhiều cách. Dưới đây là hai cách chứng minh khá điển hình của nó.

*Cách 1.*




Không mất tổng quát, giả sử, $AB \geq AC$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C xuống AM thì H thuộc tia đối của tia MA, K thuộc tia MA.

Ta có $\Delta BMH = \Delta CMK$ (g-c-g).

Suy ra BH = CK và MH = MK.

Áp dụng định lí Py-ta-go, ta có

$$\begin{aligned}
&2(AB^2 + AC^2) - BC^2\\
&= 2(AH^2 + BH^2 + AK^2 + CK^2) - BC^2\\
&= 2((AM + MH)^2 + (AM - MH)^2 + 2BH^2) - BC^2\\
&= 2(2AM^2 + 2MH^2 + 2BH^2) - BC^2\\
&= 4AM^2 + 4BM^2 - BC^2 = 4AM^2.
\end{aligned}$$

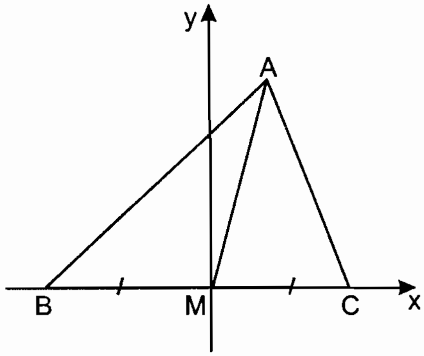
Do đó $AM^2 = \dfrac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$.

*Cách 2.* Đặt BC = a.

Chọn hệ tọa độ Đề-các vuông góc Oxy

sao cho $M(0 ; 0)$, $B(-\frac{a}{2} ; 0)$, $C(\frac{a}{2} ; 0)$.

Giả sử $A(a_1 ; a_2)$ với $a_2 \neq 0$.




Theo công thức tính khoảng cách giữa hai điểm, ta có :

$AM^2 = a_1^2 + a_2^2$;

$AB^2 = \left(a_1 + \frac{a}{2}\right)^2 + a_2^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_1a + \frac{a^2}{4}$;

$AC^2 = \left(a_1 - \frac{a}{2}\right)^2 + a_2^2 = a_1^2 + a_2^2 - a_1a + \frac{a^2}{4}$.

Do đó $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$, bổ đề được chứng minh.

Trở lại việc chứng minh *bài toán 2.*

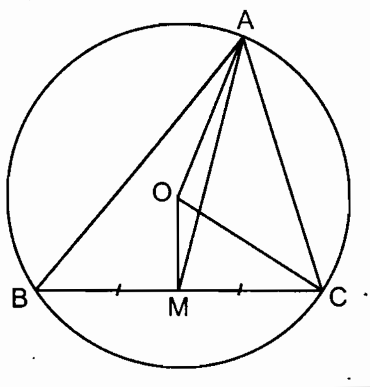
Gọi M là trung điểm của BC.

Từ bổ đề, suy ra

$2(AB^2 + AC^2) - BC^2 = 4AM^2$

$\Leftrightarrow 2(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4AM^2 + 3BC^2$.

Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc




$(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$, ta suy ra

$$(AB + BC + CA)^2 \leq \frac{3}{2}(4AM^2 + 3BC^2). \quad (1)$$

Vì $AM \leq AO + OM$ nên

$4AM^2 + 3BC^2 = 4AM^2 + 12MC^2 \leq$

$\leq 4(AO + OM)^2 + 12(CO^2 - OM^2)$

$= 4(R + OM)^2 + 12(R^2 - OM^2)$

$= 4(R + OM)(R + OM + 3R - 3OM)$

$= 8(R + OM)(2R - OM)$

$\leq 2(R + OM + 2R - OM)^2 = 18R^2 \quad (2)$

(ở đây ta áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $R + OM$ và $2R - OM$).

Từ (1) và (2), suy ra

$$AB + BC + CA \leq 3\sqrt{3}R.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\Delta ABC$ đều.

Tóm lại, trong các tam giác nội tiếp đường tròn $(O ; R)$ cho trước, tam giác đều có chu vi lớn nhất và giá trị lớn nhất đó bằng $3\sqrt{3}R$.

**Nhận xét.** Từ lời giải đại số đến lời giải hình học của *bài toán 1*, từ lời giải hình học đến lời giải đại số của *bài toán 2*, ta thấy hình học và đại số quan hệ mật thiết với nhau.

Từ thuở xa xưa, mối quan hệ giữa Hình học và Đại số đã được loài người quan tâm tìm hiểu. Trước thời Ta-lét và Py-ta-go, người ta cho rằng Hình học và Đại số là hai môn học riêng biệt, không có quan hệ gì với nhau. Từ thời Ta-lét và Py-ta-go, trong Hình học đã có Đại số và Đại số đã thâm nhập rất sâu sắc vào Hình học. Nhưng chỉ từ thời Đề-các, mối quan hệ giữa Hình học và Đại số mới trở nên rõ ràng hơn bao giờ hết. Bằng phương pháp tọa độ tuyệt vời của mình, Đề-các đã chỉ ra rằng mọi bài toán hình học xét cho cùng đều là một bài toán đại số. Cách chứng minh thứ hai của bổ đề mà tôi giới thiệu ở trên là một ví dụ đơn giản nhưng tương đối điển hình, minh họa khá rõ nét tư tưởng đại số hóa hình học của của Đề-các. Với tư tưởng trên, Đề-các đã trở thành một trong những nhà toán học lớn nhất của nhân loại.


# LÃI KÉP

VŨ KIM THỦY

Một người vay \$1000 trong 2 năm với lãi kép 8% mỗi năm. Tiền lãi kép được tính như sau :

Cuối năm đầu tiên, 8% lãi của \$1000 là \$80 được cộng vào phần chính (tiền gốc) để trở thành khoản vay cho năm thứ hai. Khoản vay của năm thứ hai sẽ là \$1080.

Cuối năm thứ hai tiền lãi của \$1080 với 8% một năm sẽ là \$86,40. Tổng tiền lãi gọi là lãi kép là \$80 + \$86,40 = \$166,40.

Lãi kép còn gọi là lãi gộp.

**Ví dụ.** Tìm tiền lãi kép của khoản vay \$5000 sau 3 năm với lãi suất 4% mỗi năm.

**Lời giải.**

Phần chính của năm thứ nhất = \$5000.

Tiền lãi 4% (năm thứ nhất) =

$$= \frac{4}{100} \times \$5000 = \$200.$$

Phần chính của năm thứ hai = \$5200.

Tiền lãi 4% (năm thứ hai) =

$$= \frac{4}{100} \times \$5200 = \$208.$$

Phần chính của năm thứ ba = \$5408.

Tiền lãi 4% (năm thứ ba) =

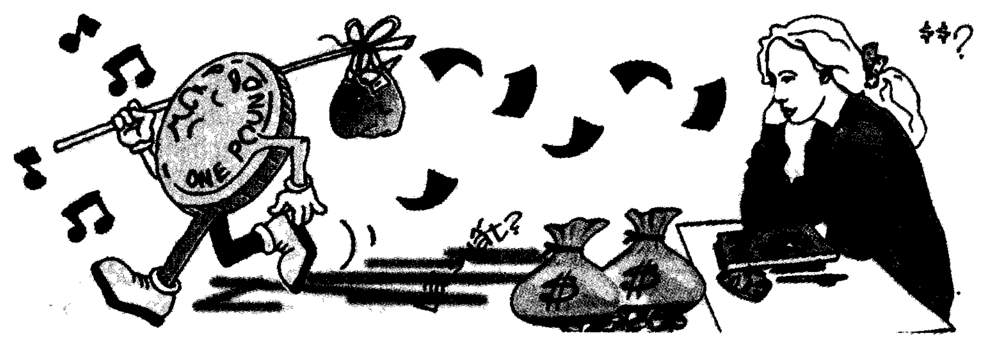
$$= \frac{4}{100} \times \$5408 = \$216,32.$$

Lãi kép = \$200 + \$208 + \$216,32 = = \$624,32.

**Từ ngữ tiếng Anh thường gặp :**

- *compound interest :* lãi kép, lãi gộp
- *per annum :* mỗi năm
- *p.a. :* mỗi năm (viết tắt)
- *borrow :* vay, mượn tiền
- *period :* khoảng thời gian
- *quarterly :* một quý
- *lend :* cho vay lãi
- *invest :* đầu tư
- *duration :* thời gian
- *debt :* nợ
- *repay :* hoàn trả lại, thanh toán lại
- *owing :* còn phải trả, còn nợ
- *merchant :* người bán hàng, thương nhân
- *dealer :* người buôn
- *departmental store :* cửa hàng kiốt
- *salesman :* người bán hàng, người chào hàng (Mỹ)
- *trader :* nhà buôn, thương nhân

**Bài tập.** A man borrowed \$3000 at 8% per annum compound interest compound annually. How much must he repay in all at the end of 3 years ? Give your answer correct to the nearest dollar.



# TÌM MỐI LIÊN HỆ GIỮA CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC

ThS. LÊ THỊ NGỌC THÚY *(GV. CĐSP Nghệ An)*

Bài toán sau đây tuy đơn giản nhưng chứa đựng trong nó nhiều ý tưởng khá sâu sắc cần được khám phá.

**Bài toán 1.** Gọi O và I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Tính $\widehat{BAC}$ biết bốn điểm B, C, O và I nằm trên một đường tròn.

Lời giải *bài toán 1* dựa trên một bổ đề rất quen thuộc và sẽ được sử dụng để giải các bài toán trong bài viết này.

**Bổ đề.** Giả sử I là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$. Thế thì $\widehat{BIC} = 90^o + \frac{\widehat{BAC}}{2}$ (bạn đọc tự chứng minh bổ đề này).

Khi giải bài toán này, học sinh thường chỉ xét trường hợp $\widehat{BAC}$ nhọn. Khi đó O và I thuộc cùng một nửa mặt phẳng với bờ là đường thẳng BC nên B, C, O và I nằm trên một đường tròn khi và chỉ khi $\widehat{BOC} = \widehat{BIC}$

$\Leftrightarrow 2 \cdot \widehat{BAC} = 90^o + \frac{\widehat{BAC}}{2} \Leftrightarrow \widehat{BAC} = 60^o.$

Ở đây ta không loại trừ trường hợp $O \equiv I$, tức là khi ABC là một tam giác đều.

Thật ra để lời giải chặt chẽ, ta còn phải xét thêm hai trường hợp :

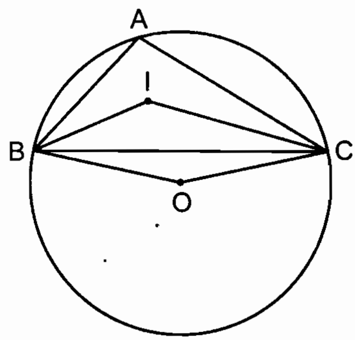
+ Nếu $\widehat{BAC} = 90^o$ thì O là trung điểm BC nên B, C, O và I không nằm trên một đường tròn : loại.

+ Nếu $\widehat{BAC} > 90^o$ thì O và I ở về hai nửa mặt phẳng với bờ là đường thẳng BC nên B, C, O và I nằm trên một đường tròn khi và chỉ khi tứ giác BOCI nội tiếp

$\Leftrightarrow \widehat{BIC} + \widehat{BOC} = 180^o$

$\Leftrightarrow 90^o + \frac{\widehat{BAC}}{2} + 2 \cdot (180^o - \widehat{BAC}) = 180^o$

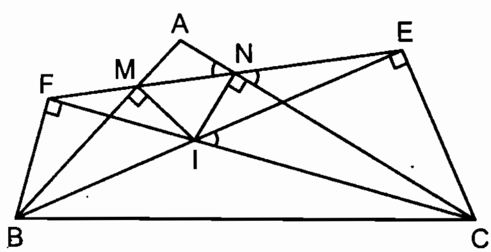
$\Leftrightarrow \widehat{BAC} = 180^o$ : loại.




Vậy bốn điểm B, C, O và I nằm trên một đường tròn khi và chỉ khi $\widehat{BAC} = 60^o$.

**Bài toán 2.** Cho đường tròn tâm I, bán kính r tiếp xúc với hai cạnh AB và AC của $\Delta ABC$ tương ứng tại M và N. Các đường thẳng BI và CI cắt đường thẳng MN tại E và F. Chứng minh rằng các điểm B, C, E và F cùng thuộc một đường tròn (Đề thi vào lớp chuyên toán của Bộ Giáo dục, năm 1975).

**Lời giải.** Vì (I ; r) tiếp xúc với AB và AC tại M và N nên $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$. Xét E và F cùng nằm ngoài đoạn thẳng MN (các trường hợp khác bạn đọc tự chứng minh). Khi đó $\widehat{CNE} = \widehat{ANM} = 90^o - \frac{\widehat{A}}{2}$ và $\widehat{BIC} = 90^o + \frac{\widehat{A}}{2}$.



Suy ra

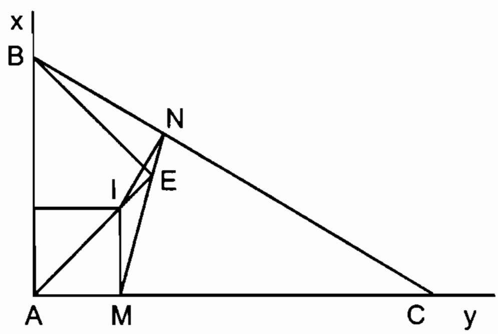
$$\widehat{CIE} = 180^\circ - \left(90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}\right) = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} = \widehat{CNE}.$$

Do đó tứ giác CINE nội tiếp, suy ra $\widehat{IEC} = \widehat{INC} = 90^\circ$ hay $\widehat{BEC} = 90^\circ$.

Tương tự $\widehat{BFC} = 90^\circ$ nên tứ giác BCEF nội tiếp đường tròn đường kính BC, ta có đpcm.

**Bài toán 3.** Cho góc vuông xAy. Trên tia Ax lấy một điểm B cố định và trên tia Ay có một điểm C di động. Đường tròn tâm I nội tiếp $\Delta ABC$ tiếp xúc với AC và BC tương ứng tại M và N. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định khi C di chuyển trên tia Ay.

**Lời giải.** Gọi E là giao điểm của AI với MN. Theo lời giải *bài toán 2*, ta có $\widehat{AEB} = 90^\circ$. Mặt khác $\widehat{BAE} = \widehat{BAI} = 45^\circ$ nên $\Delta AEB$ vuông cân tại E. Vì A, B cố định nên đường thẳng MN luôn đi qua điểm E cố định.

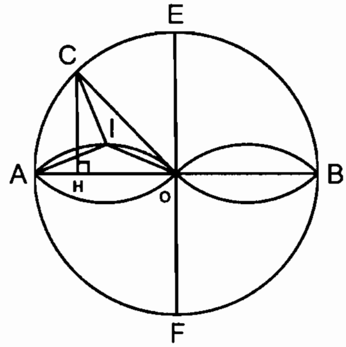



Bây giờ ta hãy xét bài toán sau đây với lời giải suy ra trực tiếp từ bổ đề trên nhưng có một điểm mà bạn đọc cần lưu ý khi dự đoán quỹ tích.

**Bài toán 4.** Cho đường tròn tâm O đường kính AB cố định và một điểm C chuyển động trên đường tròn đó (C khác A và B). Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ C xuống AB. Tìm tập hợp điểm I là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta HCO$.

**Lời giải.** Kẻ đường kính EF vuông góc với AB. Do tính đối xứng nên ta xét trường hợp C nằm trên cung nhỏ AE. Khi đó áp dụng bổ đề cho $\Delta ABC$, ta có

$$\widehat{OIC} = 90^\circ + \frac{\widehat{OHC}}{2} = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ.$$




Mà $\Delta IOA = \Delta IOC$ (c.g.c) nên $\widehat{AIO} = \widehat{CIO} = 135^\circ$. Vậy I nằm trên cung chứa góc $135^\circ$ dựng trên đoạn AO. Vì $\widehat{AFO} = 45^\circ = 180^\circ - \widehat{AIO}$ nên I thuộc đường tròn ngoại tiếp $\Delta AOF$. Đường tròn này nhận AF làm một đường kính của nó.

Lập luận tương tự đối với các trường hợp còn lại, ta thấy tập hợp cần tìm là bốn cung chứa góc $135^\circ$ dựng trên các đoạn AO và OB (trừ các điểm A, B và O).

Chú ý rằng nếu khi dự đoán tập hợp điểm I, ta chọn điểm C nằm trên ba trong bốn cung AE, EB, AF và FB thì ta dễ đoán nhầm tập hợp điểm cần tìm với các dạng quỹ tích quen thuộc như một đoạn thẳng hay một cung tròn.

**Bài toán 5.** Cho AB là dây cung cố định của đường tròn tâm O bán kính R và C là một điểm chuyển động trên đường tròn đó. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$. Tìm giá trị lớn nhất của chu vi $\Delta ABI$.

**Lời giải.** Xét trường hợp C nằm trên cung nhỏ AB. Đặt $\widehat{ACB} = \alpha$ thì $\widehat{AIB} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

Kéo dài AI một đoạn IM = IB.

Ta có $\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AIB}}{2} = 45^\circ + \frac{\alpha}{4}$.

Gọi EF là đường kính vuông góc với AB của (O) (E thuộc cung ACB). Trên EF lấy điểm J sao cho JF = FA.

*(Xem tiếp trang 7)*

## [illegible] MÙA HÈ THÚ VỊ

Cuộc thi dành cho tất cả các độc giả của TTT2. Đề thi được đăng trên hai số [illegible] và 65 của TTT2. Đáp án và danh sách các bạn đạt giải sẽ đăng trên TTT2 số 67, tháng 9 - 2008.

**Câu 1.** Không dùng máy tính, bạn hãy tìm phần dư của phép tính $\underbrace{999999...9}_{2008 \text{ chữ số } 9} : 54$.

**Câu 2.** Cho số thực x thỏa mãn $0 \le x \le 12$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = |x-1| + |x-2| + ... + |x-10|.$$

**Câu 3.** Cho các số tự nhiên $a, b, c \ge 1$ thỏa mãn $a + b + c = 2008$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = abc$.

Ngoài phong bì ghi : Dự thi Mùa hè thú vị.

Các bạn hãy nhanh tay gửi bài giải về Tòa soạn để nhận quà.

BAN TỔ CHỨC

# *Cuộc thi*

## DỰ ĐOÁN ĐỘI VÔ ĐỊCH EURO 2008

**Câu hỏi dự thi :**

1) Đội nào vô địch Euro 2008 ?

2) Có bao nhiêu người trả lời giống bạn ?

**Đối tượng dự thi :** Tất cả các độc giả của TTT2.

**Thời hạn dự thi :**

● Nếu bạn gửi bài dự thi bằng thư thường thì trước ngày 26 - 6 - 2008 (tính theo dấu bưu điện). Bài dự thi gửi về địa chỉ : Tạp chí Toán Tuổi thơ, nhà 22/16 ngõ 61 Trần Duy Hưng, Q. Cầu Giấy, Hà Nội. Ngoài phong bì ghi rõ : Tham dự cuộc thi Dự đoán đội vô địch Euro 2008 của TTT2.

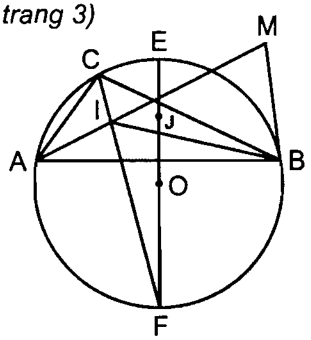
● Nếu bạn gửi bài dự thi bằng e-mail thì trước 0 giờ ngày 26 - 6 - 2008 (giờ Việt Nam). Bài dự thi gửi về địa chỉ :

*toantt@fpt.vn*

Kết quả trúng thưởng sẽ được công bố trên TTT2 số 65, tháng 7 - 2008.

## TÌM MỐI LIÊN HỆ ...

*(Tiếp theo trang 3)*




Khi đó $\widehat{AFJ} = \dfrac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$ nên

$\widehat{AJB} = 2 \cdot \widehat{AJF} = 180^\circ - \left(90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right) =$

$= 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2} = 2 \cdot \widehat{AMB}.$

Mà JA = JB nên J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB.

Suy ra $IA + IB = AM \le 2JA$.

Vậy $IA + IB + AB \le 2JA + AB$.

Tương tự, nếu C nằm trên cung AFB thì chu vi tam giác ABI $\le 2KA + AB$, trong đó K là một điểm nằm trên EF sao cho EK = EA.

Vì $\alpha \ge 90^\circ$ nên $180^\circ - \dfrac{\alpha}{2} \le 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$.

Suy ra $90^\circ - \dfrac{\alpha}{4} \le 45^\circ + \dfrac{\alpha}{4}$,

hay $\widehat{AKJ} \le \widehat{AJK} \Rightarrow AJ \le AK$.

Do đó chu vi $\Delta ABI$ lớn nhất là $2KA + AB$, đạt được khi và chỉ khi C trùng với F.

**Bài tập áp dụng**

**Bài 1.** Cho đường tròn tâm O, bán kính R và một dây AB cố định (AB < 2R). Gọi C là một điểm chuyển động trên cung nhỏ AB và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng đường phân giác của $\widehat{AIB}$ luôn đi qua một điểm cố định.

**Bài 2.** Chứng minh rằng trong các hình chữ nhật cùng nội tiếp một đường tròn cho trước, hình vuông có đồng thời cả chu vi và diện tích lớn nhất.

# MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN HAI ẨN

TRỊNH THÚY HẰNG *(GV. THCS Trưng Vương, Hà Nội)*

Giải phương trình nghiệm nguyên không phải là việc dễ dàng đối với hầu hết các bạn học sinh. Bài viết này xin giới thiệu một số ví dụ, qua đó ta học được một số phương pháp giải cụ thể của dạng toán này.

**Ví dụ 1.** Tìm nghiệm nguyên của phương trình $3(x^2 + xy + y^2) = x + 8y$. (1)

**Lời giải.** Ta có

(1) $\Leftrightarrow 3x^2 + (3y - 1)x + 3y^2 - 8y = 0$. (2)

Vì $\Delta = (3y - 1)^2 - 12(3y^2 - 8y)$ nên $\Delta \geq 0$ $\Leftrightarrow 27y^2 - 90y - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 3(3y - 5)^2 \leq 76$.

Vì $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$.

Suy ra nghiệm của (1) là :

$$(x ; y) \in \{(0 ; 0) ; (1 ; 1)\}.$$

**Ví dụ 2.** Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x + y + xy = x^2 + y^2$. (1)

**Lời giải.** Ta có

(1) $\Leftrightarrow x^2 - (y + 1)x + (y^2 - y) = 0$. (2)

Vì $\Delta = (y + 1)^2 - 4(y^2 - y)$ nên $\Delta \geq 0$ $\Leftrightarrow 3y^2 - 6y + 1 \leq 0 \Leftrightarrow 3(y - 1)^2 \leq 4$.

Vì $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{0 ; 1 ; 2\}$.

Suy ra nghiệm nguyên của phương trình (1) là :

$(x ; y) \in \{(0 ; 0) ; (0 ; 1) ; (1 ; 0) ; (1 ; 2) ; (2 ; 1) ; (2 ; 2)\}$.

**Ví dụ 3.** Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 2xy + 5y^2 = y + 1$. (1)

**Lời giải.**

*Cách 1.* Giống như hai ví dụ trên, ta đưa (1) về phương trình ẩn x

$$x^2 - 2yx + (5y^2 - y - 1) = 0,$$

rồi tìm được điều kiện để phương trình có nghiệm là $y = 0$ và suy ra nghiệm của (1) là

$$(x ; y) \in \{(1 ; 0) ; (-1 ; 0)\}.$$

*Cách 2.* Biến đổi (1) trở thành $y + 1 = (x - y)^2 + 4y^2$, rồi suy ra $y + 1 \geq 4y^2$.

Vì $y \in \mathbb{Z}$ nên $y^2 \geq y$.

Suy ra $y^2 + 1 \geq y + 1 \geq 4y^2 \Rightarrow 1 \geq 3y^2$.

Từ đó tìm được $y = 0$ và ta tính được x.

**Ví dụ 4.** Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $5(x^2 + xy + y^2) = 7(x + 2y)$. (1)

**Lời giải.** Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $5(x^2 + xy + y^2) \vdots 5$ và $7(x + 2y) \vdots 7$. Do đó tồn tại $m \in \mathbb{Z}$ để

$$\begin{cases} x + 2y = 5m \\ x^2 + xy + y^2 = 7m. \end{cases}$$

Từ $x + 2y = 5m$, suy ra $x = 5m - 2y$. Thay vào phương trình $x^2 + xy + y^2 = 7m$ và rút gọn, ta được $3y^2 - 15my + (25m^2 - 7m) = 0$. (2)

Phương trình (2) ẩn y có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta > 0$ $\Leftrightarrow 0 \leq m \leq \dfrac{28}{25}$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0 ; 1\}$.

Từ đó tìm được nghiệm nguyên của phương trình (1) là : $(x ; y) \in \{(0 ; 0) ; (1 ; 2) ; (-1 ; 3)\}$.

**Bài tập áp dụng**

**Bài 1.** Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2x^6 - 2x^3y + y^2 = 64$.

**Bài 2.** Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2y^2 - x^2 - 8y^2 = 2xy$.

**Bài 3.** Cho phương trình

$$x^2 - 2mxy^2 + m(y^3 - 1) = 0$$

($m$ là tham số, $m \in \mathbb{N}^*$).

Chứng minh rằng phương trình có nghiệm nguyên $(x ; y)$ thỏa mãn $x > 0$ ; $y > 1$ khi và chỉ khi m là một số chính phương.

# TỔNG QUÁT TỪ MỘT BÀI TOÁN

CAO NGỌC TOẢN
*(GV. THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên - Huế)*

Tổng quát hóa một bài toán là một công việc không dễ dàng. Sau đây, tôi xin giới thiệu với bạn đọc một cách tổng quát từ bài toán của tác giả Phan Thị Mùi đăng ở TTT2 số 58 như sau.

**Bài toán.** Cho các số thực không âm a, b và c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2).$$

**Lời giải.**

Ta có $P = a(b^2 + c^2 + a^2) + b(c^2 + a^2 + b^2) + c(a^2 + b^2 + c^2) - a^3 - b^3 - c^3 =$
$= (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) - a^3 - b^3 - c^3 =$
$= a^2 + b^2 + c^2 - a^3 - b^3 - c^3$ (vì $a + b + c = 1$)
$= a^2(1 - a) + b^2(1 - b) + c^2(1 - c).$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số, ta có

$$P \le a\left[\frac{a+(1-a)}{2}\right]^2 + b\left[\frac{b+(1-b)}{2}\right]^2 + c^2(1-c) = \frac{a+b}{4} + c^2(1-c) =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{c}{4} + c^2(1-c) = \frac{1}{4} - c\left(c - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}.$$

P đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ khi và chỉ khi trong ba số a, b và c có hai số bằng $\frac{1}{2}$, số còn lại bằng 0.

Với cách giải này, ta mở rộng bài toán với bốn số như sau :

**Bài toán 1.**

Cho các số thực không âm a, b, c và d thỏa mãn $a + b + c + d = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = a(b^2 + c^2 + d^2) + b(c^2 + d^2 + a^2) + c(d^2 + a^2 + b^2) + d(a^2 + b^2 + c^2).$$

**Lời giải.**

Giải tương tự bài toán trên, ta được

$$P = a^2(1 - a) + b^2(1 - b) + c^2(1 - c) + d^2(1 - d)$$

$$\le a\left[\frac{a+(1-a)}{2}\right]^2 + b\left[\frac{b+(1-b)}{2}\right]^2 + c^2(1-c)$$

$$+ d^2(1-d) = \frac{1}{4} - c\left(c - \frac{1}{2}\right)^2 - d\left(d - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}.$$

P đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ khi và chỉ khi trong bốn số a, b, c và d có hai số bằng $\frac{1}{2}$, hai số còn lại bằng 0.

Từ hướng giải trên ta có bài toán tổng quát như sau.

**Bài toán 2.** Cho n số thực không âm $a_1$, $a_2$, ... , $a_n$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = a_1(a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2) +$$
$$+ a_2(a_3^2 + a_4^2 + ... + a_n^2 + a_1^2) + ... +$$
$$+ a_n(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{n-1}^2).$$

K

# TOÁN TRÒ CHƠI, BẤT BIẾN

ThS. NGUYỄN SƠN HÀ *(GV. Khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)*

Trong chương trình toán THCS thì toán trò chơi là một nội dung khó. Thực tế, trong một số bài toán trò chơi, tại mọi thời điểm ta thực hiện thao tác (khi tình huống thay đổi) thì vẫn có những đại lượng không đổi (bất biến). Ta phải tìm ra đại lượng bất biến để giải quyết yêu cầu của bài toán khi tình huống thay đổi. Ta gọi đó là *Dĩ bất biến, ứng vạn biến.*

**A. Một số ví dụ**

**Ví dụ 1.** Trên một cái bảng, người ta viết 2008 dấu (+) và 2009 dấu (–). Giả sử mỗi lần ta thực hiện thao tác : hai dấu bất kì trong bảng bị xóa đi và được viết thay bởi một dấu (+) nếu chúng giống nhau hoặc thay bằng một dấu (–) nếu chúng khác nhau. Sau khi thực hiện 4016 lần như vậy, dấu nào sẽ còn lại trên bảng.

**Lời giải.** Ban đầu, số dấu có trên bảng là 2008 + 2009 = 4017. Mỗi lần thực hiện thao tác thì số dấu trên bảng giảm đi một. Do đó sau 4016 thao tác thì trên bảng còn lại đúng một dấu.

*Cách 1.* Sau mỗi lần xóa, số các dấu (–) trong bảng được giữ nguyên hoặc giảm đi 2. Vì thế, tính chẵn lẻ của số dấu (–) trên bảng không thay đổi. Ban đầu, số dấu trừ là số lẻ nên cuối cùng dấu còn lại trên bảng là dấu (–).

*Cách 2.* Thay mỗi dấu (+) bởi số 1, thay mỗi dấu (–) bởi số –1. Khi đó mỗi lần thực hiện thao tác có thể mô tả dưới dạng khác như sau : hai số bất kì trong bảng được xóa đi và thay bằng tích của chúng. Vì vậy tại mọi thời điểm thực hiện thao tác thì tích tất cả các số trên bảng không thay đổi. Ban đầu, tích các số trên bảng là –1 nên cuối cùng tích các số trên bảng cũng là –1.

Vậy dấu còn lại trên bảng là dấu (–).

*Cách 3.* Thay mỗi dấu (+) bởi số 0, thay mỗi dấu (–) bởi số 1. Khi đó, tổng hai số bị xóa đi cùng tính chẵn lẻ với số được viết thay chúng nên tổng các số trên bảng không thay đổi tính chẵn lẻ. Vì tổng các số lúc đầu bằng 2009, là số lẻ nên số còn lại cuối cùng là số lẻ. Do đó dấu còn lại trên bảng là dấu (–).

**Chú ý.** Trong *cách 1*, đại lượng bất biến là tính chẵn lẻ của số dấu (–) trên bảng. Trong *cách 2*, đại lượng bất biến là tích tất cả các số trên bảng. Trong *cách 3*, đại lượng bất biến là tính chẵn lẻ của tổng các số trên bảng.

**Ví dụ 2.** Trong dãy 199985..., mỗi chữ số đứng sau, bắt đầu từ chữ số thứ năm bằng chữ số hàng đơn vị của tổng bốn chữ số đứng ngay trước nó. Hỏi trong dãy này có chứa các dãy 1234 và 5687 không ?

**Lời giải.** Ta thay mỗi chữ số của dãy đã cho bằng số 0 nếu nó là chẵn và bằng số 1 nếu nó là lẻ. Khi đó, ta nhận được dãy số 111101111011110 ... , trong đó cứ sau bốn chữ số 1 có một chữ số 0 và cứ sau một chữ số 0 có bốn chữ số 1. Các dãy 1234 và 5687 ứng với các dãy bốn chữ số là 1010 và 1001 nên không thể có mặt trong dãy số đã cho

**Chú ý.** Việc mô tả tình huống rất quan trọng vì nó giúp ta dễ phát hiện đại lượng bất biến.

**Ví dụ 3.** Một cái nền nhà dạng hình chữ nhật được lát kín bằng những viên gạch men kích thước $2\cdot2$ và $1\cdot4$. Khi sửa nền nhà, người ta phải dỡ tất cả các viên gạch men đã lát, nhưng không may bị vỡ mất một viên gạch kích thước $2\cdot2$. Người ta đã thay viên bị vỡ này bởi một viên có kích thước $1\cdot4$. Chứng minh rằng bây giờ nền nhà không thể lát kín được bởi các viên gạch ấy.

**Lời giải.** Ta chia nền nhà thành các ô kích thước $1\cdot1$ rồi tô đen các ô đứng ở dòng lẻ và cột lẻ. Ta thấy mỗi viên gạch $1\cdot4$ chứa một số chẵn các ô đen, còn các viên gạch $2\cdot2$ chứa đúng một ô đen. Lúc đầu tất cả gạch lát kín nền nhà nên số viên gạch $2\cdot2$ có cùng tính chẵn lẻ với số các ô đen. Vì vậy, nếu số các viên gạch $2\cdot2$ bớt đi một đơn vị, tức là tính chẵn lẻ bị thay đổi, khác tính chẵn lẻ với số các ô đen ban đầu.

Vậy nền nhà không được lát kín.

**B. Bài tập tham khảo**

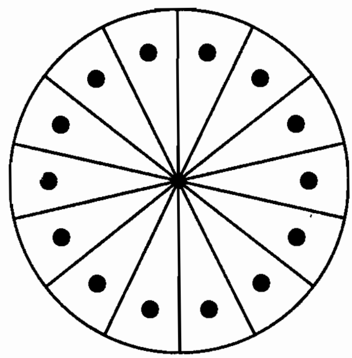
**Bài 1.** Có 2009 tách uống trà đặt trên một bàn. Lúc đầu tất cả các tách đều được đặt ngửa lên. Giả sử mỗi lần người ta làm cho 208 tách trong chúng lật ngược lại. Hỏi sau một số lần như vậy, có thể làm cho tất cả các tách đều úp xuống được không ? Trả lời câu hỏi này trong trường hợp chỉ có 2008 tách.

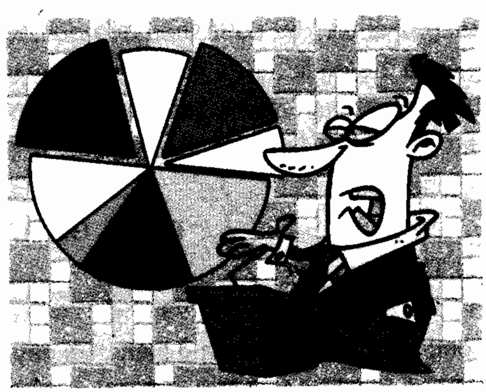
**Bài 2.** *(Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, 2004-2005)*

Có 2005 đồng xu, mỗi đồng xu có hai mặt, một mặt màu xanh và một mặt màu đỏ. Ban đầu ta xếp các đồng xu đó lên mặt bàn sao cho các mặt màu xanh ngửa lên trên. Ta thực hiện trò chơi như sau : mỗi lần ta đổi mặt của bốn đồng xu tùy ý. Hỏi có thể nhận được kết quả mà tất cả các đồng xu đều có mặt đỏ ngửa lên trên được không ?

**Bài 3.** *(Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên ĐHKHTN Hà Nội, 1996-1997)*

Chia một hình tròn thành 14 hình quạt bằng nhau. Trong mỗi hình quạt đặt một viên bi (xem hình vẽ). Mỗi lần thực hiện thao tác, ta lấy hai hình quạt bất kì có bi và chuyển từ mỗi hình quạt đó một viên bi sang hình quạt liền kề nhưng theo hai chiều ngược nhau (ví dụ, nếu viên bi ở một hình quạt này được chuyển theo chiều kim đồng hồ thì viên bi ở hình quạt kia được chuyển theo ngược chiều kim đồng hồ). Hỏi sau một số hữu hạn bước thực hiện thao tác trên, ta có thể chuyển được tất cả các viên bi vào một hình quạt được không ?






# MỘT SỐ TÍNH CHẤT VÀ ỨNG DỤNG CỦA ĐA THỨC CÓ HỆ SỐ NGUYÊN

*ThS.* HOÀNG ĐỨC NGUYÊN *(GV. Khối THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)*

TTT2 số 58 đăng bài viết của nhà giáo Vũ Văn Dũng về ứng dụng của việc tìm nghiệm hữu tỉ của đa thức có hệ số nguyên để phân tích đa thức thành nhân tử. Bài viết này xin được giới thiệu tiếp một số tính chất và ứng dụng của đa thức có hệ số nguyên.

Trước hết, xin được nhắc lại lí thuyết.

**1. Định nghĩa**

a) Đa thức biến x bậc n ($n \geq 0$) là một biểu thức có dạng $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ trong đó $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là các hằng số cho trước, $a_n \neq 0$ và $a_n$ được gọi là hệ số bậc cao nhất của đa thức P(x).

Đa thức 0 là đa thức không có bậc.

b) Nếu $a_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; n\}$ thì P(x) được gọi là đa thức có hệ số nguyên.

Kí hiệu Z[x] là tập hợp tất cả các đa thức có hệ số nguyên.

**2. Tính chất**

Cho đa thức $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \in Z[x]$ ($n > 0$).

a) Nếu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n > 0$) là các nghiệm nguyên phân biệt của P(x) thì $P(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_n)^{k_n}Q(x)$, với $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}^*$ và $Q(x) \in Z[x]$.

b) Nếu $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq b$ thì

$$(P(a) - P(b)) \vdots (a - b).$$

Sau đây là một số ứng dụng.

**Bài toán 1.** Chứng minh rằng nếu đa thức $P(x) \in Z[x]$ nhận giá trị lẻ khi $x = 0$ và $x = 1$ thì P(x) không có nghiệm nguyên.

**Lời giải.** Giả sử P(x) có nghiệm nguyên $x = c$. Khi đó tồn tại đa thức $Q(x) \in Z[x]$ thỏa mãn $P(x) = (x - c)Q(x)$.

Ta có $P(0) = -c \cdot Q(0)$ và $P(1) = (1 - c)Q(1)$.

Vì $-c$ và $1 - c$ là hai số nguyên liên tiếp nên có một số chẵn. Do đó P(0) và P(1) không thể cùng là số lẻ, vô lí, suy ra đpcm.

**Nhận xét.** Ta có bài toán tổng quát sau.

**Bài toán 2.** Cho đa thức $P(x) \in Z[x]$. Chứng minh rằng nếu các số $P(0), P(1), \ldots, P(m - 1)$ đều không chia hết cho m ($m \in \mathbb{N}$ cho trước, $m \geq 2$) thì P(x) không có nghiệm nguyên. *(Put Nam, 1940)*

**Bài toán 3.** Cho đa thức $P(x) \in Z[x]$. Biết rằng P(x) nhận giá trị bằng 7 với bốn giá trị nguyên khác nhau của x. Chứng minh rằng $P(x) \neq 14, \forall x \in \mathbb{Z}$.

**Lời giải.** Giả sử $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 7$ trong đó a, b, c và d là bốn số nguyên đôi một khác nhau. Ta có

$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)Q(x) + 7$, với $Q(x) \in Z[x]$.

Giả sử tồn tại $x_0 \in \mathbb{Z}$ mà $P(x_0) = 14$. Suy ra $(x_0 - a)(x_0 - b)(x_0 - c)(x_0 - d)Q(x_0) = 7$.

Tức là 7 được phân tích thành tích của ít nhất 4 số nguyên đôi một khác nhau, vô lí, suy ra đpcm.

**Bài toán 4.** Cho đa thức $P(x) \in Z[x]$ có 13 nghiệm nguyên khác nhau. Chứng minh rằng nếu $n \in \mathbb{Z}$ không là nghiệm của P(x) thì $|P(n)| \geq 7(6!)^2$. *(Hy Lạp, 1997)*

**Lời giải.** Gọi $x_1, x_2, \ldots, x_{13}$ là 13 nghiệm nguyên khác nhau của P(x).

Ta có $P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{13})Q(x)$, với $Q(x) \in Z[x]$. Suy ra

$P(n) = (n - x_1)(n - x_2) \ldots (n - x_{13})Q(n)$.

Vì $n - x_1, n - x_2, \ldots, n - x_{13}$ là 13 số nguyên phân biệt khác 0 và $Q(n) \in \mathbb{Z}$, $Q(n) \neq 0$ nên

$$|P(n)| \geq |1(-1)2(-2) \ldots 6(-6).7| = 7(6!)^2.$$

**Bài toán 5.** Chứng minh rằng không tồn tại đa thức $P(x) \in Z[x]$ thỏa mãn

$$P(2007) = 2008 \; ; \; P(2009) = 2007.$$

**Lời giải.** Giả sử tồn tại đa thức $P(x)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ta có $(P(2007) - P(2009)) \vdots (2007 - 2009)$ hay $(2008 - 2007) \vdots 2$ : vô lí, ta có đpcm.

**Bài toán 6.** Cho đa thức $P(x) \in Z[x]$ ; a và b là hai số nguyên và nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng nếu $P(a) \vdots b$ và $P(b) \vdots a$ thì $P(a + b) \vdots ab$.

**Lời giải.** Vì $(P(a + b) - P(a)) \vdots (a + b - a)$ nên $(P(a + b) - P(a)) \vdots b$. Mà $P(a) \vdots b$ nên $P(a + b) \vdots b$.

Tương tự $P(a + b) \vdots a$. Vì a và b nguyên tố cùng nhau nên $P(a + b) \vdots ab$.

**Nhận xét.** Ta có bài toán tương tự sau.

**Bài toán 7.** Cho đa thức $P(x) \in Z[x]$. Chứng minh rằng không tồn tại 3 số nguyên phân biệt a, b và c sao cho $P(a) = b$, $P(b) = c$ và $P(c) = a$. *(USA MO, 1974)*

**Bài toán 8.** Xác định xem các số a, b được cho như sau là số hữu tỉ hay vô tỉ ?

a) $a = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

b) $b = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}$.

**Lời giải.** a) Vì $a = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ nên

$$a^3 = 6 + 6(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) = 6 + 6a.$$

Suy ra $a^3 - 6a - 6 = 0$.

Do đó a là nghiệm của đa thức

$$P(x) = x^3 - 6x - 6.$$

Ta thấy nếu $x_0$ là nghiệm hữu tỉ của $P(x)$ thì $x_0 \in \{\pm 1 \; ; \pm 2 \; ; \pm 3 \; ; \pm 6\}$. Bằng phép thử trực tiếp ta thấy các số này đều không phải là nghiệm của $P(x)$.

Do đó a là số vô tỉ.

b) Tương tự b là nghiệm của đa thức $Q(x) = x^3 - 3x - 18 = (x - 3)(x^2 + 3x + 6)$.

Suy ra b = 3 nên b là số hữu tỉ.

**Bài toán 9.** Cho đa thức $P(x) \in Z[x]$ bậc m. Gọi n là tổng số các nghiệm nguyên phân biệt của hai phương trình $P(x) = 1$ (1) và $P(x) = -1$ (2).

Chứng minh rằng $n \leq m + 2$. *(IMO 1974)*

**Lời giải.** Dễ thấy số nghiệm (nếu có) của mỗi phương trình (1) hoặc (2) đều không vượt quá m và khi (1), (2) cùng có nghiệm thì chúng không có nghiệm chung.

+ Nếu (1) hoặc (2) không có nghiệm nguyên thì $n \leq m$, ta có đpcm.

+ Nếu (1) và (2) đều có nghiệm nguyên thì gọi r, s thứ tự là nghiệm nguyên bất kì của (1) và (2). Ta có $(P(r) - P(s)) \vdots (r - s)$ hay $2 \vdots (r - s)$. (3)

Kí hiệu $r^*$ là nghiệm nguyên nhỏ nhất trong tất cả các nghiệm nguyên của (1) và (2). Không mất tổng quát, giả sử $r^*$ là nghiệm của (1). Từ (3) suy ra (2) chỉ có thể có hai nghiệm là $r^* + 1$ và $r^* + 2$.

Suy ra $n \leq m + 2$, ta có đpcm.

**Nhận xét.** Ta có bài toán tương tự sau.

**Bài toán 10.** Cho đa thức $P(x) \in Z[x]$ có bậc là 1991. Xét đa thức $Q(x) = P^2(x) - 9$. Chứng minh rằng số nghiệm nguyên của đa thức $P(x)$ không vượt quá 1995.

*(Dự tuyển IMO, 1991)*

Cuối cùng tôi xin giới thiệu một số bài tập để các bạn tự giải.

**Bài 1.** Cho đa thức $P(x) \in Z[x]$ ; $x_1$, $x_2$ và $x_3$ thứ tự là nghiệm nguyên của các phương trình $P(x) = 1$, $P(x) = 2$ và $P(x) = 3$. Chứng minh rằng $x_1$, $x_2$ và $x_3$ là nghiệm duy nhất của mỗi phương trình trên.

**Bài 2.** Cho đa thức $P(x) \in Z[x]$ ; $a, b \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a < b$ và $P(a) = P(b) = 1$ ; $c, d \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $c < d$ và $P(c) = P(d) = -1$. Giả sử $a < c$. Chứng minh rằng a, b, c và d là bốn số nguyên liên tiếp.

**Bài 3.** Cho các đa thức $P(x), Q(x) \in Z[x]$ thỏa mãn $(P(x^3) + xQ(x^3)) \vdots (x^2 + x + 1)$.

Gọi $d = (P(2009), Q(2009))$.

Chứng minh rằng $d \vdots 2008$.

**Bài 4.** Nghiệm nhỏ nhất của đa thức $P(x) = x^7 - 2x^6 + 2x^5 - x^4 - 5x^3 - 6x^2 - 6x + 1$ là số vô tỉ hay hữu tỉ ?

# MỘT CÁCH CHỨNG MINH BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG

TẠ MINH HIẾU *(GV. THCS Yên Lạc, Yên Lạc, Vĩnh Phúc)*

Một trong số những cách để chứng minh một bài toán bằng phương pháp phản chứng là ta giả sử kết luận của bài toán sai rồi lập luận để có một kết luận trái với giả thiết của bài toán, từ đó khẳng định được kết luận đúng của bài toán đó. Sau đây là một số ví dụ.

**Ví dụ 1.** Chứng minh rằng trong tập hợp các số nguyên tố $\mathscr{P}$ không có số nguyên tố lớn nhất.

**Lời giải.** Vì $2 \in \mathscr{P}$ nên $\mathscr{P} \neq \varnothing$. Giả sử $p_n$ là số nguyên tố lớn nhất trong $\mathscr{P}$. Gọi p là tích của n số nguyên tố đã biết, tức là $p = p_1p_2p_3 \cdots p_n$.

Đặt $A = p + 1$ thì $A > p_n$ nên A là một hợp số. Suy ra A có ít nhất một ước số nguyên tố d, với $d \le p_n$. Suy ra $p \vdots d$ nên $1 \vdots d$, vô lí, ta có đpcm.

**Ví dụ 2.** Cho $2^m - 1$ là một số nguyên tố. Chứng minh rằng m là một số nguyên tố.

**Lời giải.** Giả sử m là hợp số thì $m = p \cdot q$ ($p, q \in \mathbb{N}$ và $p, q > 1$).

Vì $2^m - 1 = 2^{pq} - 1 = ((2^p)^q - 1) \vdots (2^p - 1)$ mà $1 < 2^p - 1 < 2^m - 1$ nên $2^m - 1$ là một hợp số, vô lí. Vậy m là một số nguyên tố.

**Ví dụ 3.** Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên

$$15x^2 - 7y^2 = 9. \qquad (1)$$

**Lời giải.** Giả sử (1) có nghiệm nguyên.

Dễ thấy $y \vdots 3$.

Đặt $y = 3z$ ($z \in \mathbb{Z}$) thì $5x^2 - 21z^2 = 3$.

Suy ra $x \vdots 3$.

Đặt $x = 3t$ ($t \in \mathbb{Z}$) thì $15t^2 - 7z^2 = 1$:

Hay $5(t^2 - z^2) = 2z^2 + 1. \qquad (2)$

Vì $z^2$ chia 5 dư 0, 1 hoặc 4 nên $2z^2 + 1$ chia 5 dư 1, 3 hoặc 4. Do đó $2z^2 + 1$ không chia hết cho 5.

Vậy (2) vô nghiệm nên (1) vô nghiệm.

**Ví dụ 4.** Chứng minh rằng nếu $\overline{abc}$ là một số nguyên tố thì $b^2 - 4ac$ không phải là một số chính phương.

**Lời giải.** Giả sử $b^2 - 4ac = k^2$ ($k \in \mathbb{Z}^+$).

Ta có $4a \cdot \overline{abc} = 400a^2 + 40ab + 4ac$
$= 400a^2 + 40ab + b^2 - (b^2 - 4ac)$
$= (20a + b)^2 - k^2$
$\Rightarrow 4a \cdot \overline{abc} = (20a + b + k)(20a + b - k). \quad (1)$

Dễ thấy $b > k > 0$, suy ra

$$20a + b + k > 20a + b - k > 4a.$$

Mà $(20a + b + k)(20a + b - k) \vdots 4a$ nên từ (1) suy ra $\overline{abc}$ là hợp số, vô lí.

Vậy $b^2 - 4ac$ không phải là số chính phương.

● Bài tập tự luyện

**Bài 1.** Chứng minh rằng nếu a, b và c là độ dài các cạnh của một tam giác thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 > 5c^2$ thì $c \le a$ và $c \le b$.

**Bài 2.** Chứng minh rằng nếu $2^n + 1$ là một số nguyên tố thì n là một lũy thừa của 2.

**Bài 3.** Chứng minh rằng $n^2 + 3n + 5$ không chia hết cho 121, $\forall n \in \mathbb{N}$.

**Bài 4.** Cho d là ước số chung lớn nhất của a và b. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên m, n sao cho $am + bn = d$.

# CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC SCHUR BẰNG NHIỀU CÁCH

CAO VĂN DŨNG
*(SV. K50A1S, Khoa Sư phạm, ĐHQG Hà Nội)*

Bất đẳng thức Schur là một bất đẳng thức chặt chẽ và đẹp mắt có nhiều ứng dụng để giải toán. Bài viết này xin giới thiệu một số cách để chứng minh bất đẳng thức này.

**Bất đẳng thức Schur.** Với các số thực không âm a, b và c ta có

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+ \\ +c(c-a)(c-b)\ge 0. \qquad (*)$$

**Chứng minh.** Do vai trò của a, b và c như nhau nên giả sử $a \ge b \ge c$.

*Cách 1.* Đặt $x = a - b$ ; $y = b - c$ $(x, y \ge 0)$ thì $b = y + c$ ; $a = x + y + c$.

Khi đó (*) trở thành

$(x+y+c)x(x+y) - (y+c)yx + c(x+y)y \ge 0$ $\Leftrightarrow c(x^2 + xy + y^2) + x^2(x + 2y) \ge 0$ : luôn đúng do x, y và c là các số không âm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc trong ba số a, b, c có một số bằng 0, hai số còn lại bằng nhau.

*Cách 2.*

+ Nếu $a = b$ hoặc $b = c$ thì (*) hiển nhiên đúng.

+ Xét trường hợp $a > b > c$. Chia hai vế của (*) cho $(a-b)(b-c)(a-c) > 0$, ta được

$$\frac{a}{b-c} - \frac{b}{a-c} + \frac{c}{a-b} \ge 0.$$

Bất đẳng thức này đúng vì

$$\begin{cases} a > b > 0 \\ a - c > b - c > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b-c} > \frac{b}{a-c}.$$

*Cách 3.* Ta có $c(c-a)(c-b) \ge 0$.

Xét $a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) =$
$= (a-b)(a^2 - ac - b^2 + bc) =$
$= (a-b)^2(a+b-c) \ge 0.$

Suy ra đpcm.

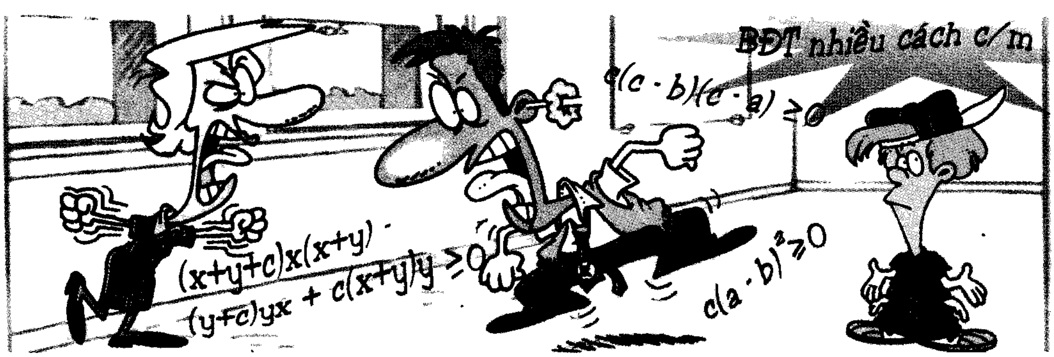
*Cách 4.* Đặt vế trái của (*) là f(a ; b ; c).

Ta có $f(a\,;b\,;c) - f\left(\frac{a+b}{2};\frac{a+b}{2};c\right) =$

$$= \left(a + b - \frac{5c}{4}\right)(a-b)^2 \ge 0.$$

Suy ra $f(a\,;b\,;c) \ge f\left(\frac{a+b}{2};\frac{a+b}{2};c\right)$.

Vậy để chứng minh (*) ta chỉ cần chứng minh $f(x\,;x\,;c) \ge 0$, với $x \ge 0$. Tức là chứng minh $c(x-c)^2 \ge 0$ : hiển nhiên, ta có đpcm.



# ĐỊNH LÍ PY-TA-GO NGỠ QUEN MÀ LẠ

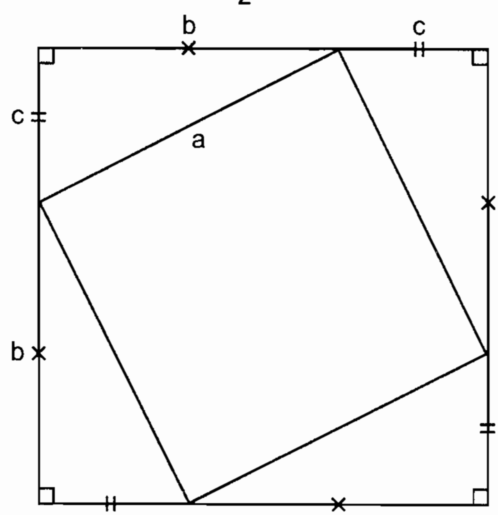
*PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN *(Khoa Toán, ĐH Vinh)*

**1. Vài nét về lịch sử**

Định lí Py-ta-go được loài người biết đến rất sớm. Trên những bức vẽ trong các kim tự tháp ở Ai Cập (xây dựng khoảng 3000 năm trước công nguyên) cho thấy người Ai Cập cổ đại đã biết rằng nếu một tam giác có độ dài ba cạnh là 3, 4, 5 thì góc đối diện với cạnh bằng 5 là góc vuông. Vì vậy, tam giác có số đo ba cạnh là 3, 4, 5 được gọi là *tam giác Ai Cập* (chú ý rằng $3^2 + 4^2 = 5^2$). Trên các bảng đất sét đào được ở Ba-bi-lon (khoảng 1000 năm trước công nguyên) có liệt kê rất nhiều bộ ba số nguyên dương là số đo ba cạnh của một tam giác vuông như (3 ; 4 ; 5), (5 ; 12 ; 13), ... Nhìn chung, người Ai Cập và người sống ở lưu vực Lưỡng hà cổ đại hay sử dụng *định lí Py-ta-go đảo,* trong khi đó người Trung Hoa cổ đại (khoảng 500 năm trước công nguyên) lại thường sử dụng *định lí Py-ta-go thuận* để tính chiều cao của một cái cây, đường chéo của một đám đất hình chữ nhật ... Theo truyền thống, người ta cho rằng nhà toán học Hy Lạp cổ đại Py-ta-go (khoảng 580 - 500 trước công nguyên) là người đầu tiên đã chứng minh được định lí : "Trong một tam giác vuông, bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông" một cách chặt chẽ (bằng suy luận lôgic), từ đó suy ra *sự tồn tại của các số vô tỉ.* Để tưởng nhớ công lao to lớn của ông đối với toán học, người đời sau đã gọi định lí trên là *định lí Py-ta-go.*

Sau Py-ta-go, có rất nhiều người tìm cách chứng minh định lí đó bằng những phương pháp khác. Theo thống kê chưa đầy đủ thì tính đến nay có khoảng 370 cách chứng minh định lí Py-ta-go khác nhau, hầu hết đều dựa vào phương pháp ghép hình để quy về tính diện tích các hình hình học quen thuộc, hoặc dựa vào tam giác đồng dạng để suy ra các hệ thức cần thiết. Hình vẽ dưới cho ta một cách chứng minh định lí Py-ta-go khá đơn giản :

$$a^2 = (b+c)^2 - 4\cdot\frac{1}{2}bc \text{ hay } a^2 = b^2 + c^2.$$




**2. Từ định lí Py-ta-go đến phương trình Py-ta-go**

Từ định lí Py-ta-go nảy sinh bài toán khá tự nhiên sau.

**Bài toán 1.** Tìm tất cả bộ ba số nguyên dương x, y, z thỏa mãn phương trình

$$x^2 + y^2 = z^2. \qquad (1)$$

Hơn nữa, trong tất cả các bộ ba nguyên dương ấy, tìm bộ ba $(x ; y ; z)$ sao cho $z$ nhỏ nhất có thể.

Nếu thay điều kiện $(x ; y ; z)$ là bộ ba các số nguyên thì phương trình (1) là một trong những phương trình Đi-ô-phăng bậc hai được loài người quan tâm nghiên cứu sớm nhất.

Ta gọi (1) là phương trình Py-ta-go.

Để giải (1), trước hết ta hãy quan tâm đến bài toán sau.

***Bài toán 1a.*** Tìm tất cả các bộ ba số nguyên không đồng thời bằng 0 thỏa mãn phương trình $x^2 + y^2 = z^2$.

Để giải *bài toán 1a*, ta cần đến kết quả của bài toán sau.

***Bài toán 1b.*** Tìm bộ ba số nguyên dương x, y, z thỏa mãn phương trình

$$xy = z^2. \qquad (2)$$

**Lời giải.** Giả sử d là ước chung lớn nhất của x và z, $d = (x, z)$. Khi đó tồn tại các số nguyên dương a, b thỏa mãn điều kiện $x = da$, $z = db$ và $(a, b) = 1$.

Thay vào (2) ta có $day = d^2b^2$. Từ đó $ay = db^2$ nên $a \mid db^2$. Vì $(a, b) = 1$ nên $(a, b^2) = 1$. Do đó $a \mid d$, suy ra $d = at$ $(t \in \mathbb{Z}^+)$. Thế thì $x = ta^2$, $z = tab$ và $y = tb^2$.

Đảo lại, nếu $(x ; y ; z) = (ta^2 ; tb^2 ; tab)$ với $a, b, t \in \mathbb{Z}^+$, $(a, b) = 1$ thì x, y, z thỏa mãn (2). Vậy tập hợp tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình (2) là $\{(ta^2 ; tb^2 ; tab) \mid t, a, b \in \mathbb{Z}^+, (a, b) = 1\}$.

Bây giờ, ta xét *bài toán 1a*. Dễ thấy nếu $d = (x, y)$ thì d cũng là ước của z. Do đó trước hết ta xét trường hợp $(x, y) = 1$.

Khi đó vì $x^2 + y^2 = z^2$ và $(x, y) = 1$ nên tính chẵn lẻ của x, y phải khác nhau (vì nếu x, y cùng lẻ thì $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 4$ nên $z^2 \equiv 2 \pmod 4$ là điều không thể xảy ra).

Giả sử x chẵn, y lẻ. Đặt $x = 2X$ $(X \in \mathbb{Z})$ thì $z^2 - y^2 = (2X)^2$ nên $\frac{z+y}{2} \times \frac{z-y}{2} = X^2$.

Vì y, z cùng lẻ nên theo kết quả *bài toán 1b* ta có

$$\frac{z+y}{2} = ta^2,\ \frac{z-y}{2} = tb^2 \text{ và } X = tab.$$

Do đó $z = t(a^2 + b^2)$, $y = t(a^2 - b^2)$, $x = 2tab$. Vì $(x, y) = 1$ nên $t = 1$.

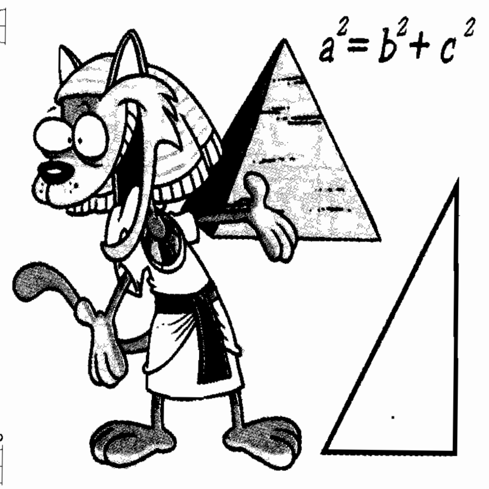
Như vậy nếu $(x ; y ; z)$ là bộ ba số nguyên dương thỏa mãn (1) với $(x, y) = 1$, x chẵn thì $x = 2ab$, $y = a^2 - b^2$, $z = a^2 + b^2$ trong đó $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $(a, b) = 1$ và $a > b$.

Cặp số $(a ; b)$ nhỏ nhất có thể chọn là $(a ; b) = (2 ; 1)$ và khi đó $x = 4$, $y = 3$, $z = 5$.

Trong trường hợp tổng quát, nghiệm nguyên không đồng thời bằng 0 của phương trình $x^2 + y^2 = z^2$ (*bài toán 1a*) là $x = 2mab$, $y = m(a^2 - b^2)$, $z = m(a^2 + b^2)$ hoặc $x = m(a^2 - b^2)$, $y = 2mab$, $z = m(a^2 + b^2)$ với $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ ; $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $(a, b) = 1$.

Trong trường hợp điều kiện của x, y, z là các số nguyên dương (*bài toán 1*) thì phải bổ sung thêm điều kiện $m > 0$ và $a > b$.

***(Kì sau đăng tiếp)***



# CÁC HẰNG SỐ ĐẸP TRONG ĐA GIÁC ĐỀU

VŨ QUỐC LƯƠNG *(GV. THCS Chu Văn An, Hà Nội)*

Trong sách giáo khoa Toán 8, ngoài định nghĩa đa giác đều, sách chỉ giới thiệu một số tính chất đơn giản của đa giác đều. Thực ra đa giác đều có khá nhiều tính chất đặc sắc. Bài viết này sẽ giới thiệu một số hằng số đẹp trong đa giác đều.

Để các bạn tiện theo dõi, tôi sẽ phát biểu các tính chất của tam giác đều. Bạn đọc có thể phát biểu các kết quả tương tự cho các đa giác đều có số cạnh $n \geq 4$.

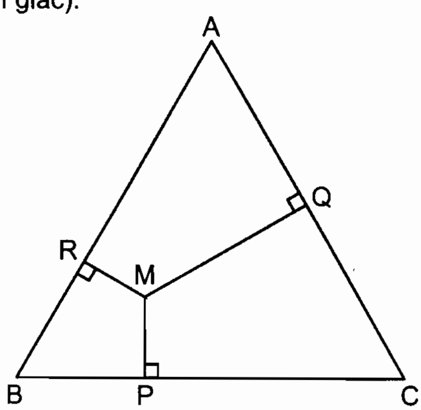
**A. Tính chất của tam giác đều**

**1. Tính chất 1 (các hằng số một và hai)**

Cho tam giác đều ABC, M là một điểm tùy ý trong tam giác. Gọi P, Q, R thứ tự là hình chiếu vuông góc của M lên các cạnh BC, CA, AB. Ta có

a) $MP + MQ + MR = k_1$ ($k_1 = h$ là đường cao tam giác) ;

b) $BP + CQ + AR = k_2$ ($k_2$ bằng $\frac{1}{2}$ chu vi tam giác).

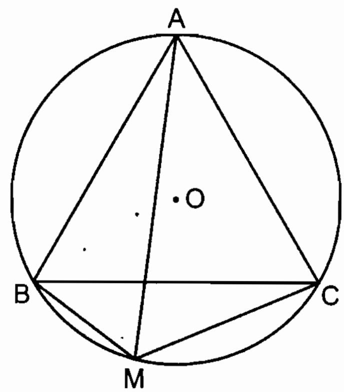



**2. Tính chất 2 (các hằng số ba và bốn)**

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O ; R), M là một điểm tùy ý thuộc (O ; R). Ta có

a) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k_3$ ($k_3 = 6R^2$) ;

b) $MA^4 + MB^4 + MC^4 = k_4$ ($k_4 = 18R^4$).




**3. Tính chất 3 (các hằng số năm và sáu)**

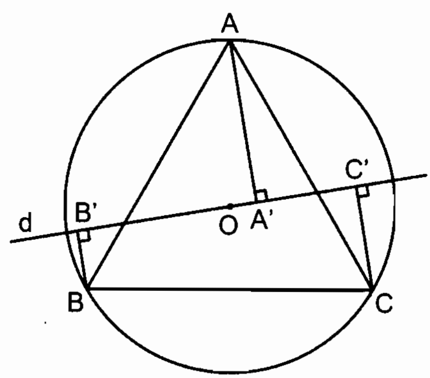
Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O ; R), d là một đường thẳng tùy ý đi qua tâm O. Gọi A', B', C' thứ tự là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên d. Ta có

a) $AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 = k_5$ $\left(k_5 = \frac{3}{2}R^2\right)$ ;

b) $OA'^2 + OB'^2 + OC'^2 = k_5$ ;

c) $AA'^4 + BB'^4 + CC'^4 = k_6$ $\left(k_6 = \frac{9}{8}R^4\right)$ ;

d) $OA'^4 + OB'^4 + OC'^4 = k_6$.



• **Nhận xét.** Bằng kiến thức ở bậc THCS chúng ta đều có thể chứng minh được các tính chất trên. Bây giờ tác giả sẽ mở rộng hằng số thứ nhất sang các đa giác không đều.

**B. Đa giác hằng số**

Trong *tính chất 1a,* ta thấy

$$S_{ABC} = S_{BMC} + S_{CMA} + S_{AMB}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2} \cdot h = \frac{a}{2}(MP + MQ + MR)$$

$$\Leftrightarrow MP + MQ + MR = h$$

trong đó a, h thứ tự là cạnh và đường cao của tam giác đều BAC.

Lời giải bài toán không khó, nhưng một băn khoăn đến với chúng ta là : liệu có đa giác nào có tính chất tương tự như vậy không ? Để có thể nghiên cứu bài toán tổng quát ta đưa ra định nghĩa sau.

**Định nghĩa.** Đa giác lồi $A_1A_2\dots A_n$ $(n \geq 3)$ gọi là một *đa giác hằng số* nếu như tổng các khoảng cách từ một điểm M ở miền trong của đa giác tới các cạnh của nó là một hằng số, không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

Vấn đề đặt ra là ta phải chỉ ra dấu hiệu để nhận biết một đa giác cho trước có phải là *đa giác hằng số* hay không ?

Phân tích cách chứng minh ở trên ta thấy cách giải đó có thể áp dụng để chứng minh cho những đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau. Nói cách khác đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau (đương nhiên cả đa giác đều) là *đa giác hằng số.* Đến đây ta có thể đưa ra giả thuyết : phải chăng các *đa giác hằng số* là những đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau hoặc tất cả các góc bằng nhau ? Thế nhưng hình bình hành là một tứ giác hằng số (các bạn có thể dễ dàng kiểm tra lại) nhưng khi nó không phải là hình thoi hoặc hình chữ nhật thì không thỏa mãn điều kiện nào trong cả hai điều kiện đó. Vậy vấn đề cơ bản là ở chỗ nào ?

Tác giả đề nghị các bạn hãy chứng minh các kết quả sau để thấy rõ được dấu hiệu cơ bản.

**Định lí 1.** Nếu hai đa giác có các cạnh tương ứng song song thì chúng cùng là *đa giác hằng số* hoặc không.

**Định lí 2.** Nếu hai đa giác có các góc tương ứng bằng nhau thì chúng cùng là *đa giác hằng số* hoặc không.

**Định lí 3.** Điều kiện cần và đủ để một đa giác là *đa giác hằng số* là có ba điểm không thẳng hàng ở miền trong đa giác mà tổng các khoảng cách từ mỗi điểm tới các cạnh của đa giác là bằng nhau.

*Định lí 3* phản ánh mối liên hệ sâu sắc giữa toàn bộ các điểm thuộc miền trong của đa giác với 3 điểm không thẳng hàng cho trước có tính chất đặc biệt trong đa giác, đồng thời cho ta một phương pháp kiểm tra xem một đa giác cho trước có phải là đa giác hằng số hay không.

Đến đây, các bạn có thể tiếp tục tìm thêm các hằng số khác của đa giác đều, cũng như mở rộng các hằng số của đa giác đều cho các đa giác không đều. Chúc các bạn thành công trong học tập, tìm tòi và sáng tạo trong toán học.

# HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI 1

NGUYỄN ANH DŨNG *(Hà Nội)*

Hệ phương trình (PT) hai ẩn x, y được gọi là hệ PT đối xứng loại 1 nếu như khi ta đổi chỗ x cho y ở mỗi PT của hệ thì đều thu được PT tương đương với nó. Trong chương trình toán phổ thông, ta thường gặp nhiều bài toán liên quan đến hệ PT đối xứng loại 1.

Bài viết này sẽ giúp các bạn hệ thống các dạng toán thường gặp liên quan đến hệ PT đối xứng loại 1.

Nhắc lại định lí Vi-ét đảo :

Nếu $S^2 - 4P \geq 0$ và $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$ thì x, y là nghiệm của PT bậc hai (ẩn t) $t^2 - St + P = 0$.

**1. Giải hệ PT**

**Ví dụ 1.** Giải hệ PT $\begin{cases} \sqrt{x+3} + \sqrt{y+3} = 4 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 2. \end{cases}$

**Lời giải.** Điều kiện (ĐK) : $x \geq -3$, $y \geq -3$, $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Hệ PT đã cho có thể biến đổi thành

$$\begin{cases} x + y + 2\sqrt{xy + 3x + 3y + 9} = 10 \\ x + y = 2xy. \end{cases}$$

Đặt $S = x + y$ ; $P = xy$. Ta có

$$\begin{cases} S + 2\sqrt{P + 3S + 9} = 10 & (1) \\ S = 2P. & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được

$$\sqrt{7P + 9} = 5 - P.$$

Bình phương hai vế và rút gọn, ta tìm được $P = 1$. Suy ra $S = 2$.

Do đó $\begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ là $(x ; y) = (1 ; 1)$.

**Lưu ý.** Cách giải thường dùng với hệ PT đối xứng loại 1 là : biến đổi hệ làm xuất hiện tổng và tích của hai ẩn ; đặt tổng và tích đó tương ứng bằng S, P (ĐK : $S^2 - 4P \geq 0$) ; tìm S, P ; suy ra nghiệm của hệ.

**2. Giải PT bằng cách quy về hệ PT**

**Ví dụ 2.** Giải PT $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{5 - x^2}} = \dfrac{3}{2}$.

**Lời giải.** ĐK : $x \neq 0$ ; $5 - x^2 > 0$.

Đặt $y = \sqrt{5 - x^2}$ (ĐK : $0 < y < \sqrt{5}$).

Ta được hệ

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2} \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x + y) = 3xy \\ (x + y)^2 - 2xy = 5. \end{cases}$$

Đặt $S = x + y$ ; $P = xy$. Suy ra

$$\begin{cases} 2S = 3P & (1) \\ S^2 - 2P = 5. & (2) \end{cases}$$

Từ (1) có $P = \dfrac{2S}{3}$. Thay vào (2) và biến đổi, ta được $3S^2 - 4S - 15 = 0 \Leftrightarrow S \in \left\{3; -\dfrac{5}{3}\right\}$.

• TH1. $S = 3 \Rightarrow P = 2 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2. \end{cases}$

Ta có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$

• TH2. $S = -\dfrac{5}{3} \Rightarrow P = -\dfrac{10}{9}$. Do đó

$$\begin{cases} x+y=-\dfrac{5}{3} \\ xy=-\dfrac{10}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-5-\sqrt{65}}{6} \\ y=\dfrac{-5+\sqrt{65}}{6}. \end{cases}$$

Vậy PT có ba nghiệm là $x = 1$, $x = 2$ và $x=\dfrac{-5-\sqrt{65}}{6}$.

**Lưu ý.** Nếu giải bài toán trên bằng cách biến đổi, ta sẽ được một PT bậc bốn và giải tương đối phức tạp.

**3. Hệ PT có chứa tham số**

**Ví dụ 3.** Cho $(x ; y)$ là nghiệm của hệ PT (với m là tham số)

$$\begin{cases} x+y=m & (1) \\ x^2+y^2=2m. & (2) \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $A = xy$.

**Lời giải.** Ta có $(2) \Leftrightarrow (x+y)^2-2xy=2m$.

Suy ra $xy=\dfrac{m^2-2m}{2}$.

Ta có $(x+y)^2 \ge 4xy \Leftrightarrow m^2 \ge 2(m^2-2m)$ $\Leftrightarrow m^2-4m \le 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le 4$ (đây cũng là ĐK để hệ PT đã cho có nghiệm).

Vì $0 \le m \le 4$ nên $-1 \le m-1 \le 3$

$\Rightarrow 0 \le (m-1)^2 \le 9 \Leftrightarrow -1 \le m^2-2m \le 8$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \le A \le 4.$

Ta được $\min A=-\dfrac{1}{2}$ khi $m = 1$ ;

$\max A = 4$ khi $m = 4$.

Các bạn tự tìm nghiệm $(x ; y)$ của hệ PT trong mỗi trường hợp trên.

**Lưu ý.** Ta thường gặp bài toán :

Cho $(x ; y)$ là nghiệm của một hệ PT với tham số m. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $A = f(x, y)$.

**Cách giải :**

- Tìm m để hệ PT đã cho có nghiệm.
- Tính biểu thức A theo m, giả sử $A = g(m)$.
- Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $A = g(m)$ với ĐK mà ta tìm ra ở trên.

**4. Chứng minh bất đẳng thức**

**Ví dụ 4.** Giả sử $(x ; y ; z)$ thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} xy+yz+zx=1 \\ x^2+y^2+z^2=2. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $-\dfrac{4}{3} \le x, y, z \le \dfrac{4}{3}$.

**Lời giải.** Hệ điều kiện trên tương đương với

$$\begin{cases} xy+z(x+y)=1 \\ (x+y)^2-2xy+z^2=2. \end{cases}$$

Đặt $S = x + y$ ; $P = xy$ (ĐK : $S^2-4P \ge 0$).

Ta được hệ

$$\begin{cases} P+zS=1 & (1) \\ S^2-2P+z^2=2. & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $P = 1 - zS$.

Thay vào (2) và biến đổi, ta được

$$(S+z)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S=-z+2 \\ S=-z-2. \end{array}\right.$$

- TH1. $S = -z + 2 \Rightarrow P = z^2 - 2z + 1$.

Ta có $S^2-4P \ge 0 \Leftrightarrow 3z^2-4z \le 0$ $\Leftrightarrow 0 \le z \le \dfrac{4}{3}$.

- TH2. $S = -z - 2 \Rightarrow P = z^2 + 2z + 1$.

Ta có $S^2-4P \ge 0$

$\Leftrightarrow (-z-2)^2-4(z^2+2z+1) \ge 0$

$\Leftrightarrow 3z^2+4z \le 0 \Leftrightarrow -\dfrac{4}{3} \le z \le 0.$

Hợp kết quả hai trường hợp, ta được

$$-\frac{4}{3} \le z \le \frac{4}{3}.$$

Vì vai trò của x, y, z trong hệ PT là như nhau nên $-\dfrac{4}{3} \le x, y, z \le \dfrac{4}{3}$, ta có đpcm.

**Lưu ý.** Ta thường gặp bài toán :

Giả sử $(x ; y ; z)$ thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$$

*(Xem tiếp trang 20)*


# THE ORIGINS OF TRIGONOMETRY

*(Xem từ số 63)*

TRƯƠNG CÔNG THÀNH *(sưu tầm)*

Trigonometry has its roots in geometry and in the practical application of surveying. Surveying is the technique of locating points on or near the surface of the earth. The Egyptians are credited with being the first to do surveying. The annual flooding of the Nile and its constant destruction of property markers led the Egyptians to the principles of serveying. The first recorded measurement to determine the size of the earth were also made when Eratosthenes measured a meridian arc in 230 B.C.

Eratosthenes

# HỆ PHƯƠNG TRÌNH ...

*(Tiếp theo trang 7)*

Chứng minh mỗi số x, y, z thỏa mãn một bất đẳng thức cho trước.

**Cách giải :** Coi z là tham số và tìm ĐK của z để hệ PT đã cho có nghiệm đối với ẩn số x, y. Từ đó suy ra bất đẳng thức phải chứng minh đối với z.

Việc chứng minh bất đẳng thức đối với x hoặc y cũng làm tương tự.

Các bạn có thể tự tìm thêm các dạng toán có liên quan đến hệ PT loại này. Đây cũng là việc làm rất thú vị và bổ ích.

**Bài tập làm thêm.**

**Bài 1.** Giải hệ PT $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 \\ xy(x+y)=12. \end{cases}$

**Bài 2.** Cho x, y là hai số thay đổi, khác 0 thỏa mãn $xy(x+y)=x^2+y^2-xy$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}.$$

**Bài 3.** Cho (x ; y) là nghiệm của hệ PT (với m là tham số)

$$\begin{cases} x+y=m \\ x^2+y^2=m. \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $A=x^3+y^3$.

**Bài 4.** Giả sử (x ; y ; z) thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=2. \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của mỗi số x, y, z.

# MỘT BẤT NGỜ !

TRẦN VIỆT DŨNG
*(HS. 11A$_1$, THPT chuyên Thái Bình)*

Hè này, sau khi ôn lại bài cũ, tôi vô tình phát hiện một bài toán khá đặc biệt.

**Bài toán 1.** Giả sử các số thực dương a, b và c thỏa mãn

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 > 2(a^4 + b^4 + c^4). \qquad (1)$$

Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có độ dài ba cạnh là a, b và c.

**Lời giải.** Biến đổi (1) trở thành

$$(a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) > 0.$$

Vì a, b, c dương nên $a + b + c > 0$.

Do vai trò bình đẳng của a, b, c nên ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó $c + a - b > 0$ và $a + b - c > 0$. Suy ra $b + c - a > 0$.

Vậy $b + c > a$ ; $c + a > b$ ; $a + b > c$, suy ra đpcm.

Trong vở ghi của tôi, ngay bên dưới lại có bài toán mở rộng sau.

**Bài toán 2.** Giả sử các số thực dương a, b, c và d thỏa mãn

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 > 3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4).$$

Chứng minh rằng tồn tại các tam giác có độ dài ba cạnh là ba số bất kì trong bốn số a, b, c và d.

Tôi cũng đã rất thành công khi tìm được lời giải của bài toán này ngay sau đó. Một suy nghĩ lóe lên trong tôi, liệu có tồn tại bài toán tổng quát cho các bài toán này hay không ? Và thật bất ngờ, nó đã xuất hiện !

**Bài toán 3.** Cho các số thực dương $a_1$, $a_2$, ... , $a_n$ ($n \geq 3$) thỏa mãn

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4 + ... + a_n^4).$$

Chứng minh rằng tồn tại các tam giác có độ dài ba cạnh là ba số bất kì trong n số $a_1$, $a_2$, ... , $a_n$.

**Lời giải.** Với $n = 3$, bài toán đúng theo kết quả *bài toán 1*.

Ta chứng minh bài toán khi $n \geq 4$.

Đầu tiên ta chứng minh tồn tại một tam giác có độ dài ba cạnh là $a_1$, $a_2$, $a_3$.

Thật vậy, đặt $2b^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki, ta được $(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)^2 =$

$$= (1 \cdot b^2 + 1 \cdot b^2 + 1 \cdot a_4^2 + 1 \cdot a_5^2 + ... + 1 \cdot a_n^2)^2 \leq$$

$$\leq (n-1)(2b^4 + a_4^4 + a_5^4 + ... + a_n^4).$$

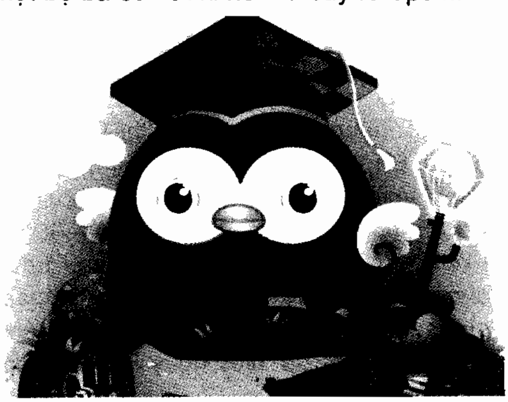
Kết hợp với giả thiết

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + ... + a_n^4)$$

ta suy ra $a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 < 2b^4$

$$\Leftrightarrow 2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4) < (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2.$$

Do kết quả *bài toán 1* và $\{a_1 ; a_2 ; a_3\}$ là một bộ ba số bất kì nên ta suy ra đpcm.




# NHIỀU CÁCH GIẢI THÚ VỊ CHO MỘT BÀI TOÁN

TẠ HOÀNG THÔNG *(GV. Trung tâm Thăng Long, TP. Hồ Chí Minh)*

Đối với mỗi người làm toán thì việc giải được một bài toán khó đã là khá thú vị rồi. Còn nếu như ta có thể tìm được nhiều lời giải khác nhau của bài toán đó thì sẽ thú vị hơn. Ta hãy xem bài toán sau đây.

**Bài toán.** Cho a, b > 0 và a + b = 2. Đặt $A = \dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}}$. Chứng minh rằng $A \geq 2$.

❑ **Nhận xét.** 1) Ta có bất đẳng thức (BĐT) sau.

**BĐT Cô-si :** Với các số thực không âm x, y, z ta có

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}\ ; \qquad (1)$$

$$x + y + z \geq 3 \cdot \sqrt[3]{xyz}. \qquad (2)$$

Đẳng thức xảy ra ở (1) khi và chỉ khi x = y. Đẳng thức xảy ra ở (2) khi và chỉ khi x = y = z.

2) Từ giả thiết và áp dụng các BĐT trên ta có các kết quả sau đây :

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 1\ ;$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)} = 2\ ;$$

$$a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} = 2.$$

Ta sẽ sử dụng các kết quả trên để chứng minh $A \geq 2$.

**Lời giải.** Giả sử $a \geq b$. Khi đó $a \geq 1 \geq b$.

*Cách 1.* Có $A = \dfrac{a-1}{\sqrt{b}} + \dfrac{b-1}{\sqrt{a}} + \dfrac{1}{\sqrt{a}} + \dfrac{1}{\sqrt{b}} =$

$$= \frac{a-1}{\sqrt{b}} + \frac{1-a}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{(a-1)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{2}{\sqrt{\sqrt{ab}}} \geq 2,$$ ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = 1.

**Nhận xét.** Ta có thể chứng minh $A \geq 2$ theo một số hướng biến đổi khác như sau.

- $A = \dfrac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{ab}} =$

$$= \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)}{\sqrt{ab}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})((a + b + (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2)}{2\sqrt{ab}} \geq$$

$$\geq \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a+b)}{2\sqrt{ab}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}.$$

- $A = \left(\dfrac{1}{\sqrt{a}} + \dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)(2 - \sqrt{ab}).$

- $A = \dfrac{(a-1)(a^2 - b^2 + a\sqrt{a} - b\sqrt{b})}{(a+\sqrt{a})(b+\sqrt{b})} + 2.$

- $A = \dfrac{(a-1)(\sqrt{a}-\sqrt{b})(2\sqrt{a} + \sqrt{ab} + 2\sqrt{b} + 2)}{(a+\sqrt{a})(b+\sqrt{b})} + 2.$

- $A = \dfrac{a+b}{\sqrt{b}} + \dfrac{a+b}{\sqrt{a}} - \sqrt{a} - \sqrt{b} =$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right) - (\sqrt{a} + \sqrt{b}).$$

*Cách 2.* Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương ta có

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + a\sqrt{b} \geq 2a\ ; \quad \frac{b}{\sqrt{a}} + b\sqrt{a} \geq 2b.$$

Suy ra $A \geq 4 - \sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \geq 2.$

**Nhận xét.** Áp dụng BĐT Cô-si ta cũng có

- $A \geq \dfrac{2a}{b+1} + \dfrac{2b}{a+1} = \dfrac{2(a^2 + b^2 + a + b)}{(a+1)(b+1)} \geq$

$\geq \dfrac{8}{3+ab} \geq \dfrac{8}{4} = 2.$

- $2A = \left(\dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{a}{\sqrt{b}} + ab\right) + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}} + ab\right) -$

$- 2ab \geq 3a + 3b - 2ab \geq 4.$

- $2A = \dfrac{2a}{\sqrt{b}} + (a^2b + 1) + \dfrac{2b}{\sqrt{a}} + (ab^2 + 1) -$

$- 2ab - 2 \geq$

$\geq \left(\dfrac{2a}{\sqrt{b}} + 2a\sqrt{b}\right) + \left(\dfrac{2b}{\sqrt{a}} + 2b\sqrt{a}\right) - 4 \geq$

$\geq 4a + 4b - 4 = 4.$

- $A^2 = \dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{a} + 2\sqrt{ab} =$

$= \dfrac{(a+b)^3 - 3ab(a+b)}{ab} + 2\sqrt{ab} =$

$= \dfrac{8 - 6ab}{ab} + 2\sqrt{ab} =$

$= \left(\dfrac{1}{ab} + \sqrt{ab} + \sqrt{ab}\right) + \dfrac{7}{ab} - 6 \geq$

$\geq 3 + 7 - 6 = 4 \Rightarrow A \geq 2.$

- $A^2 = \dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{a} + 2\sqrt{ab} = \left(\dfrac{a^2}{b} + \sqrt{ab} + \sqrt{ab}\right) +$

$+ \left(\dfrac{b^2}{a} + \sqrt{ab} + \sqrt{ab}\right) - 2\sqrt{ab} \geq$

$\geq 3a + 3b - 2ab = 6 - 2ab \geq 4 \Rightarrow A \geq 2.$

*Cách 3.* Vì $a \geq b$ nên $\dfrac{a}{\sqrt{b}} \geq \dfrac{b}{\sqrt{a}}$ và $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$.

Suy ra $\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}} - \dfrac{b}{\sqrt{a}}\right)(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \geq a + b$

$\Leftrightarrow \dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + b + a + \dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \geq 2(a+b)$

$\Leftrightarrow \sqrt{a}\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}}\right) + \sqrt{b}\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}}\right) \geq 2(a+b)$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}}\right)(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \geq 2(a+b)$

$\Rightarrow A \geq \dfrac{4}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \geq 2.$

Để kết thúc bài viết này, xin giới thiệu bốn bài toán sau để các bạn tự giải. Đây cũng là những bài toán có nhiều cách giải khác nhau.

**Bài 1.** Cho a, b, c $\geq 0$. Chứng minh rằng

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

**Bài 2.** Cho a, b, c $\geq 0$ và $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $a + b \geq 16abc$.

**Bài 3.** Cho a, b $\geq 1$. Chứng minh rằng

$$a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab.$$

**Bài 4.** Cho a, b, c > 0 và abc = 1. Chứng minh rằng

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$


# MỘT CÁCH ĐẶT ẨN PHỤ ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

LÊ XUÂN ĐẠI *(GV. THPT chuyên Vĩnh Phúc)*

Ở một số bài toán, việc đặt ẩn phụ sẽ giúp ta đưa bài toán ban đầu về một bài toán đơn giản hơn, dễ giải hơn. Sau đây là một số bài toán chứng minh bất đẳng thức (BĐT) bằng cách đặt ẩn phụ.

**Bài toán 1.** Cho x, y, z > 0 thỏa mãn $xy + yz + zx + 2xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 4(x+y+z). \qquad (1)$$

**Lời giải.** Đặt $a=\frac{1}{x}$; $b=\frac{1}{y}$; $c=\frac{1}{z}$.

Từ giả thiết suy ra $a + b + c + 2 = abc$.

Do đó $(a + 1)(b + 1) + (b + 1)(c + 1) + (c + 1)(a + 1) = (a + 1)(b + 1)(c + 1)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=1.$$

Đặt $m=\frac{1}{a+1}$; $n=\frac{1}{b+1}$; $p=\frac{1}{c+1}$.

Khi đó $m, n, p > 0$ ; $m + n + p = 1$ và

$$x=\frac{1}{a}=\frac{m}{1-m}=\frac{m}{n+p};\ y=\frac{n}{p+m};\ z=\frac{p}{m+n}.$$

Ta có $(1) \Leftrightarrow \frac{m+n}{p}+\frac{n+p}{m}+\frac{p+m}{n} \geq$

$$\geq 4\left(\frac{m}{n+p}+\frac{n}{p+m}+\frac{p}{m+n}\right).$$

Đến đây, ta sử dụng BĐT

$\frac{1}{A}+\frac{1}{B} \geq \frac{4}{A+B}$, $\forall A, B > 0$ để suy ra

$$\frac{m}{n}+\frac{m}{p} \geq \frac{4m}{n+p};\ \frac{n}{p}+\frac{n}{m} \geq \frac{4n}{p+m};\ \frac{p}{m}+\frac{p}{n} \geq \frac{4p}{m+n}.$$

Từ đó cộng theo vế của ba BĐT trên ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x=y=z=\frac{1}{2}.$$

**Bài toán 2.** Cho x, y, z > 0 thỏa mãn $x + y + z + 1 = 4xyz$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 3. \qquad (2)$

**Lời giải.** Từ giả thiết suy ra

$$(2x) + (2y) + (2z) + 2 = (2x)(2y)(2z).$$

Theo lập luận của *bài toán 1* thì tồn tại các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$ và $x=\frac{b+c}{2a}$; $y=\frac{c+a}{2b}$; $z=\frac{a+b}{2c}$.

Khi đó $(2) \Leftrightarrow \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geq \frac{9}{2}.$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho ba số dương ta có

$$a+b+b+c+c+a \geq 3\cdot\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)};$$

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

Suy ra $2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq 9$, ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

**Bài toán 3.** Cho x, y, z > 0 thỏa mãn $xy + yz + zx + xyz = 4$.

Chứng minh rằng

$$x + y + z \geq xy + yz + zx. \qquad (3)$$

**Lời giải.** Từ giả thiết suy ra

$$\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}+\frac{y}{2}\cdot\frac{z}{2}+\frac{z}{2}\cdot\frac{x}{2}+2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}\cdot\frac{z}{2}=1.$$

Theo lập luận của *bài toán 1* thì tồn tại các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$ và $x = \dfrac{2a}{b+c}$; $y = \dfrac{2b}{c+a}$; $z = \dfrac{2c}{a+b}$.

Ta có (4) $\Leftrightarrow \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geq$

$$\geq \frac{2ab}{(b+c)(c+a)} + \frac{2bc}{(c+a)(a+b)} + \frac{2ca}{(a+b)(b+c)}$$

$\Leftrightarrow a(c + a)(a + b) + b(a + b)(b + c) +$
$+ c(b + c)(c + a) \geq$
$\geq 2ab(a + b) + 2bc(b + c) + 2ca(c + a) \geq 0$
$\Leftrightarrow a(a - b)(a - c) + b(b - c)(b - a) +$
$+ c(c - a)(c - b) \geq 0.$ (3')

Do vai trò bình đẳng của a, b và c nên có thể giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó
(3') $\Leftrightarrow (a - b)^2(a + b - c) + c(c - a)(c - b) \geq 0$ : đúng, ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

**Bài tập tự luyện.**

**Bài 1.** Cho $x, y, z > 0$.

Chứng minh rằng $\dfrac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} +$

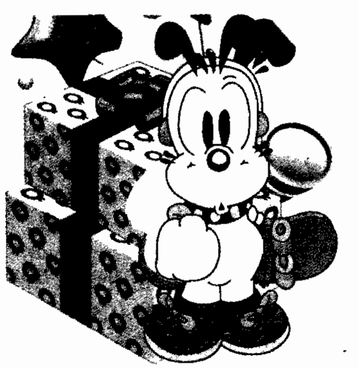
$$+ \frac{(2b+a+c)^2}{2b^2+(a+c)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8.$$

**Bài 2.** Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xyz = x + y + z + 2$. Chứng minh rằng

$$xyz(x - 1)(y - 1)(z - 1) \leq 8.$$

**Bài 3.** Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xyz = x + y + z + 2$. Chứng minh rằng

$$2(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}) \leq x + y + z + 6.$$



# *Các bạn được thưởng kì này*

## Thi giải toán qua thư

*Lê Cao Thăng*, 9A, THCS Phan Chu Trinh, Sông Cầu, **Phú Yên** ; *Đậu Hải Đăng*, 8H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy, **Hà Nội** ; *Nguyễn Văn Thắng*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An** ; *Phùng Mạnh Linh*, $9A_4$, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định, **Nam Định** ; *Nguyễn Ngọc Linh*, 9H ; *Đặng Duy Linh*, 9E, THCS Văn Lang, Việt Trì, **Phú Thọ** ; *Nguyễn* Thị Ngân, 7A, THCS Trung Lộc, Can Lộc ; *Lê Tuấn Dũng*, 9B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh** ; *Nguyễn Thế Bảo*, $8A_1$, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc** ; *Bùi Quang Khương*, 8C, THCS Thụy Ninh, Thái Thụy, **Thái Bình**.

# NÓI LẠI CHO RÕ

- TTT2 số 52 trong bài viết *Điều đó thật tuyệt vời* (trang 18) đăng lời giải một bài toán do Julbert - Mac Donnell sáng tác. Đó là lời giải của bài toán 247 trong cuốn sách *Nâng cao và phát triển Toán 8* (tái bản năm 2006), NXB Giáo dục, của nhà giáo Vũ Hữu Bình chứ không phải của bạn Tuệ.
- Đề thách đấu (Trận đấu thứ năm mươi tám) đăng trên TTT2 số 66 xin sửa lại giả thiết là $S_{MNP} = S_{BMP} = S_{CMN} = 1$.
- TTT2 số 66 trang 25 cột trái dòng 7↑, thay dấu "=" bởi "<".

Thành thật xin lỗi các tác giả và độc giả.

**TTT**


# TỪ MỘT BÀI TOÁN CỰC TRỊ ĐƠN GIẢN

TRỊNH NGỌC TUÂN
*(GV. THCS Cẩm Thăng, Cẩm Xuyên, Hà Tĩnh)*

Từ một bài toán đơn giản ban đầu, ta có thể mở rộng theo nhiều hướng khác nhau. Sau đây là một ví dụ.

**Bài toán 1.** Cho x, y là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn $x + y = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = x^3 + y^3.$$

**Nhận xét.** Khi $x = y = \frac{1}{2}$ thì $A = \frac{1}{4}$, khi $xy = 0$ thì $A = 1$. Từ đó dự đoán A sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = y = \frac{1}{2}$.

**Lời giải.** *Cách 1.* Vì $(x-y)^2 \geq 0$ nên

$$(x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{4}.$$

Do đó $A = x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) =$ $= 1 - 3xy \geq 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$

$$A = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Vậy $A_{min} = \frac{1}{4}$.

*Cách 2.* Với k là một số thực không âm bất kì, ta có

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(x+k) \geq 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)(x+k) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + (k-1)x^2 + \left(\frac{1}{4} - k\right)x + \frac{1}{4}k \geq 0.$$

Chọn $k = 1$ ta suy ra $x^3 \geq \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$.

Tương tự $y^3 \geq \frac{3}{4}y - \frac{1}{4}$.

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được $A = x^3 + y^3 \geq \frac{3}{4}(x+y) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$

**Nhận xét.** Ta có thể mở rộng *bài toán 1* theo một số hướng sau đây.

**Bài toán 2.** Cho trước a là một số thực dương ; x, y là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn $x + y = a$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$B = x^3 + y^3.$$

**Lời giải.** Tương tự như *cách 1* của *bài toán 1* ta chứng minh được :

$$\Leftrightarrow xy \leq \frac{a^2}{4}\,;\, B \geq \frac{a^3}{4}.$$

Từ đó ta có $B_{min} = \frac{a^3}{4}$ tại $x = y = \frac{a}{2}$.

**Bài toán 3.** Cho số tự nhiên $n > 1$ ; $x_1$, $x_2$, ... , $x_n$ là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$C = x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3.$$

**Lời giải.** Với k, x là các số thực không âm bất kì, ta có $\left(x - \frac{1}{n}\right)^2(x+k) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{2}{n}x + \frac{1}{n^2}\right)(x+k) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + \left(k - \frac{2}{n}\right)x^2 + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{2k}{n}\right)x + \frac{k}{n^2} \geq 0.$$

*(Xem tiếp trang 7)*

Vì $78^4$ có hai chữ số tận cùng là 56 và $78^{2009} = (78^4)^{502} \cdot 78$ nên ta chỉ cần tìm hai chữ số tận cùng của $56^{502} \cdot 78$.

Với số tự nhiên $n > 1$, ta có

$56^n - 56 = 56(56^{n-1} - 1)$

$= 56 \cdot 55(56^{n-2} + 56^{n-3} + ... + 1)$

$= 3080(6(y - 2) + 1) = 3080(6y - 11)$

(với y có cùng chữ số tận cùng với n).

Ta có $(56^n - 56) \vdots 100$

$\Leftrightarrow 3080(6y - 11) \vdots 100$

$\Leftrightarrow 8(6y - 11) \vdots 10 \Leftrightarrow (6y - 11) \vdots 5$

$\Leftrightarrow (y - 1) \vdots 5 \Leftrightarrow (n - 1) \vdots 5$.

Suy ra $56^{501}$ có hai chữ số tận cùng là 56.

Mà $56^2 \cdot 78$ có hai chữ số tận cùng là 08 nên hai chữ số tận cùng của $78^{2009}$ và $1978^{2009}$ là 08.

**Bài tập tự luyện.**

**Bài 1.** Tìm hai chữ số tận cùng của các số sau.

a) $137^{2100}$. b) $189^{2009}$.

c) $333^{1945}$. d) $304^{1975}$.

**Bài 2.** Tìm ba chữ số tận cùng của các số sau.

a) $1127^{1997}$. b) $2019^{3112}$.

c) $2933^{2531}$. d) $2316^{3101}$.

# TỪ MỘT BÀI TOÁN ...

*(Tiếp theo trang 2)*

Chọn $k = \frac{2}{n}$ ta suy ra $x^3 \geq \frac{3}{n^2}x - \frac{2}{n^3}$.

Do đó $x_1^3 \geq \frac{3}{n^2}x_1 - \frac{2}{n^3}$.

Viết các bất đẳng thức tương tự cho $x_2$, $x_3$, ... , $x_n$ và cộng theo vế của n bất đẳng thức ta được

$$C \geq \frac{3}{n^2}(x_1 + x_2 + ... + x_n) - \frac{2}{n^2} = \frac{1}{n^2}.$$

$$C = \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n = \frac{1}{n}.$$

Vậy $C_{min} = \frac{1}{n^2}$.

**Nhận xét.** Bằng cách giải tương tự *bài toán 3*, ta có thể giải bài toán sau.

**Bài toán 4.** Cho trước a là một số thực dương ; n là một số tự nhiên, $n > 1$ ; $x_1$, $x_2$, ... , $x_n$ là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn $x_1 + x_2 + ... + x_n = a$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$D = x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3.$$

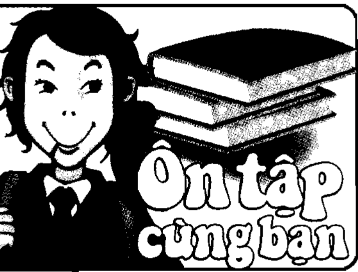
**Nhận xét.** Từ các bài toán trên, ta có bài toán tổng quát sau.

**Bài toán 5.** Cho trước a là một số thực dương ; m, n, t là các số tự nhiên ; $m, n > 1$ ; $m > t > 0$ ; $x_1$, $x_2$, ... , $x_n$ là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn

$$x_1^t + x_2^t + ... + x_n^t = a.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$E = x_1^m + x_2^m + ... + x_n^m.$$




# ỨNG DỤNG CỦA MỘT HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

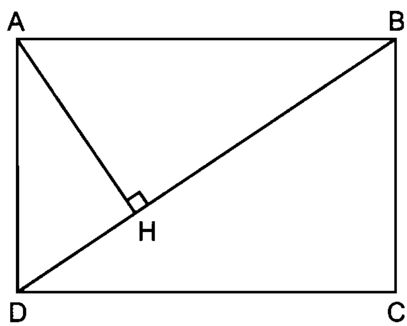
THÁI NHẬT PHƯỢNG
*(GV. THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)*

Một hệ thức lượng trong tam giác vuông ít được đề cập đến trong các bài tập, đó là $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$, trong đó b, c là hai cạnh góc vuông, còn h là đường cao ứng với cạnh huyền của tam giác vuông đó.

Sau đây là một số bài toán đơn giản có sử dụng hệ thức trên.

**Bài toán 1.** Tính diện tích S của hình chữ nhật ABCD biết AD = 9 cm và khoảng cách từ A đến BD là 7,2 cm.

**Lời giải.** Dựng $AH \perp BD$ ($H \in BD$).




Ta có $\frac{1}{AB^2}=\frac{1}{AH^2}-\frac{1}{AD^2}$. Suy ra

$$AB=\frac{AD\cdot AH}{\sqrt{AD^2-AH^2}}=\frac{9\cdot 7{,}2}{\sqrt{9^2-7{,}2^2}}=12\text{ (cm)}.$$

Suy ra $S = AB\cdot AD = 12\cdot 9 = 108$ (cm$^2$).

**Bài toán 2.** Cho hình thang vuông ABCD (các góc A, D vuông) có $AC \perp BD$.

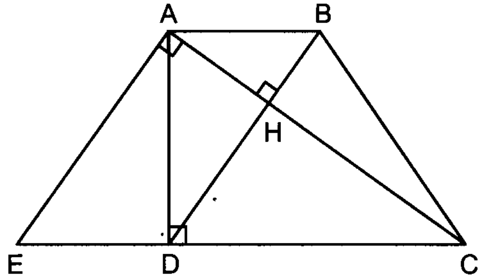
Chứng minh rằng $\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{BD^2}$.

**Lời giải.** Dựng đường thẳng qua A song song với BD cắt CD tại E.

Tứ giác ABDE có hai cặp cạnh đối song song nên là hình bình hành.

Suy ra AE = BD.

Vì AE // BD và $AC \perp BD$ nên $AE \perp AC$.

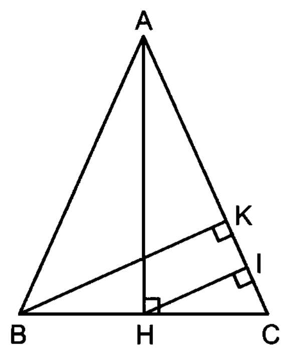



Suy ra $\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{BD^2}$, ta có đpcm.

**Bài toán 3.** Cho tam giác ABC cân tại A có các đường cao AH, BK.

Chứng minh rằng $\frac{1}{BK^2}-\frac{1}{BC^2}=\frac{1}{4AH^2}$.

**Lời giải.** Kẻ $HI \perp AC$ ($I \in AC$).




Vì $BK \perp AC$ nên HI // BK.

Mà H là trung điểm BC (vì $\Delta ABC$ cân tại A) nên I là trung điểm CK.

Ta có $\frac{1}{HI^2}=\frac{1}{HA^2}+\frac{1}{HC^2}$

*(Xem tiếp trang 15)*


**Problem E48.** *(Proposed by Ngo Anh Tuyet, Hanoi Education Publishing House)*

There are n balls in a box, and the balls are numbered 1, 2, 3, ... , n respectively. One of the balls is removed from the box, and it turns out that the sum of the numbers on the remaining balls in the box is 5048. If the number of the balls removed from the box is m, find the value of m.

**Solution E46.** Take one fruit from the "Apples and Oranges" crate.

If it is an apple then that crate is the "Apples" crate since all the crates are labelled incorrectly. This means the crate marked "Apples" must be "Oranges" and the crate marked "Oranges" must be "Apples and Oranges".

Similarly in the case when the taken fruit is an orange.

**Nhận xét.** Nhìn chung, tất cả các bạn gửi bài đều đưa ra cách làm đúng để có thể đặt tên chính xác cho từng thùng. Tuy nhiên trong lập luận thì còn nhiều bài chưa chặt chẽ. Một số bạn còn viết sai ngữ pháp tiếng Anh. Chẳng hạn, có bạn viết câu "If it's an orange is similar".

Tất cả các bạn đều đã rất cố gắng, đặc biệt là các bạn sau : *Ngô Thị Thanh Nga*, 8B, THCS Từ Sơn, Từ Sơn, **Bắc Ninh** ; *Nguyễn Thị Kim Thoa*, 18/167 Nguyễn Thượng Mẫn, P. Bình Hàn, TP. Hải Dương, **Hải Dương** ; *Hà An Huy*, 6H, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ** ; *Trần Thị Bích Ngọc*, 8G, THCS Phan Đình Phùng, TP. Đông Hà, **Quảng Trị** ; *Cao Vũ Quỳnh Anh*, 9B, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**.

NGÔ ÁNH TUYẾT

# ỨNG DỤNG CỦA MỘT ... *(Tiếp theo trang 3)*

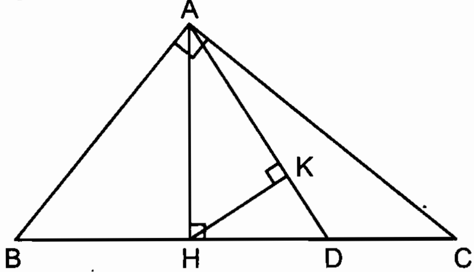
$$\Leftrightarrow \frac{4}{BK^2} = \frac{1}{HA^2} + \frac{4}{BC^2},$$ suy ra đpcm.

**Bài toán 4.** Cho trước các đoạn thẳng a, b, c. Dựng đoạn thẳng x thỏa mãn

$$\frac{1}{x} = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}.$$

**Lời giải.** *Cách dựng*

- Dựng $\Delta ABC$ vuông tại A có AB = a, AC = b.




- Dựng đường cao AH của $\Delta ABC$.
- Dựng D trên tia HC sao cho HD = c.
- Dựng đường cao HK của $\Delta HAD$.

Ta được HK = x là đoạn thẳng cần dựng.

*Chứng minh*

Ta có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HD^2}$

$$= \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{HD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2},$$

ta có đpcm.

**Bài tập tự luyện.**

**Bài 1.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A có đường cao AH. Giả sử AH = 2,4 cm ; BH = 1,8 cm. Tính đường cao HK của $\Delta AHC$.

**Bài 2.** Cho hình thoi ABCD có cạnh là a. Gọi $R_1$, $R_2$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng $\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} = \frac{4}{a^2}$.


# Tìm nhiều chữ số tận cùng bằng phương pháp hồi quy

HOÀNG TRỌNG HẢO

Tìm nhiều chữ số tận cùng của một số tự nhiên là bài toán khó với nhiều bạn. Bài viết này sẽ trình bày sơ lược cách giải của dạng toán này bằng phương pháp hồi quy (Bạn đọc có thể tham khảo thêm về dạng toán này trên TTT2 số 15, 17 và 18 với bài viết ***Tìm chữ số tận cùng*** của tác giả Nguyễn Văn Tăng).

**Nhận xét.** + Nếu a có chữ số tận cùng là 0, 1, 5, 6 thì $a^n$ cũng có chữ số tận cùng tương ứng là 0, 1, 5, 6, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

+ Nếu $n \in \mathbb{N}^*$ thì chữ số tận cùng của $2^{4n}$, $4^{2n}$, $8^{4n}$ là 6.

+ Nếu $n \in \mathbb{N}^*$ thì chữ số tận cùng của $3^{4n}$, $7^{4n}$, $9^{2n}$ là 1.

**Bài toán 1.** Tìm hai chữ số tận của $1981^{2009}$.

**Lời giải.** Hai chữ số tận cùng của $1981^{2009}$ là hai chữ số tận cùng của $81^{2009}$.

Lấy $n \in \mathbb{N}^*$, ta xét

$81^n - 1 = (81^n - 81^{n-1}) + (81^{n-1} - 81^{n-2}) +$
$+ \ldots + (81 - 1)$
$= 80(81^{n-1} + 81^{n-2} + \ldots + 1) = 80x$

(với x, n có cùng chữ số tận cùng).

Ta có $(81^n - 1) \vdots 100 \Leftrightarrow 8x \vdots 10 \Leftrightarrow x \vdots 5$ $\Leftrightarrow n \vdots 5$.

Suy ra $81^{2005}$ có hai chữ số tận cùng là 01.

Mà $81^{2009} = 81^{2005} \cdot 81^4$ và $81^4$ có hai chữ số tận cùng là 21 nên $81^{2009}$ và $1981^{2009}$ có hai chữ số tận cùng là 21.

**Nhận xét.** Bằng cách giải tương tự, ta có kết quả sau : *Hai chữ số tận cùng của* $21^5$, $41^5$, $61^5$, $11^{10}$, $31^{10}$, $71^{10}$, $91^{10}$ *và* $51^2$ *là 01.*

**Bài toán 2.** Tìm ba chữ số tận của $1981^{2009}$.

**Lời giải.** Ba chữ số tận cùng của $1981^{2009}$ là ba chữ số tận cùng của $981^{2009}$.

Ba chữ số tận cùng của $981^5$ là 901.

Mà $981^{2009} = (981^5)^{401} \cdot 981^4$ nên ba chữ số tận cùng của $981^{2009}$ là ba chữ số tận cùng của $901^{401} \cdot 981^4$.

Bằng cách làm tương tự *bài toán 1*, ta tìm được $901^{400}$ có ba chữ số tận cùng là 001.

Mà $901^{401} = 901^{400} \cdot 901$ ; $981^4$, $901 \cdot 321$ có ba chữ số tận cùng tương ứng là 321, 221 nên $981^{2009}$ và $1981^{2009}$ có ba chữ số tận cùng là 221.

**Bài toán 3.** Tìm hai chữ số tận của $1978^{2009}$.

**Lời giải.** Hai chữ số tận cùng của $1978^{2009}$ là hai chữ số tận cùng của $78^{2009}$.

Với mỗi số tự nhiên k > 0 thì chữ số tận cùng của $78^{4k} = (78^4)^k$ là 6.

Vì $78^4$ có hai chữ số tận cùng là 56 và $78^{2009} = (78^4)^{502} \cdot 78$ nên ta chỉ cần tìm hai chữ số tận cùng của $56^{502} \cdot 78$.

Với số tự nhiên $n > 1$, ta có

$56^n - 56 = 56(56^{n-1} - 1)$

$= 56 \cdot 55(56^{n-2} + 56^{n-3} + ... + 1)$

$= 3080(6(y-2)+1) = 3080(6y-11)$

(với y có cùng chữ số tận cùng với n).

Ta có $(56^n - 56) \vdots 100$

$\Leftrightarrow 3080(6y-11) \vdots 100$

$\Leftrightarrow 8(6y-11) \vdots 10 \Leftrightarrow (6y-11) \vdots 5$

$\Leftrightarrow (y-1) \vdots 5 \Leftrightarrow (n-1) \vdots 5$.

Suy ra $56^{501}$ có hai chữ số tận cùng là 56.

Mà $56^2 \cdot 78$ có hai chữ số tận cùng là 08 nên hai chữ số tận cùng của $78^{2009}$ và $1978^{2009}$ là 08.

**Bài tập tự luyện.**

**Bài 1.** Tìm hai chữ số tận cùng của các số sau.

a) $137^{2100}$. b) $189^{2009}$.

c) $333^{1945}$. d) $304^{1975}$.

**Bài 2.** Tìm ba chữ số tận cùng của các số sau.

a) $1127^{1997}$. b) $2019^{3112}$.

c) $2933^{2531}$. d) $2316^{3101}$.

# TỪ MỘT BÀI TOÁN ...

*(Tiếp theo trang 2)*

Chọn $k = \frac{2}{n}$ ta suy ra $x^3 \geq \frac{3}{n^2}x - \frac{2}{n^3}$.

Do đó $x_1^3 \geq \frac{3}{n^2}x_1 - \frac{2}{n^3}$.

Viết các bất đẳng thức tương tự cho $x_2$, $x_3$, ... , $x_n$ và cộng theo vế của n bất đẳng thức ta được

$$C \geq \frac{3}{n^2}(x_1 + x_2 + ... + x_n) - \frac{2}{n^2} = \frac{1}{n^2}.$$

$$C = \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n = \frac{1}{n}.$$

Vậy $C_{min} = \frac{1}{n^2}$.

**Nhận xét.** Bằng cách giải tương tự *bài toán 3*, ta có thể giải bài toán sau.

**Bài toán 4.** Cho trước a là một số thực dương ; n là một số tự nhiên, $n > 1$ ; $x_1$, $x_2$, ... , $x_n$ là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn $x_1 + x_2 + ... + x_n = a$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$D = x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3.$$

**Nhận xét.** Từ các bài toán trên, ta có bài toán tổng quát sau.

**Bài toán 5.** Cho trước a là một số thực dương ; m, n, t là các số tự nhiên ; $m, n > 1$ ; $m > t > 0$ ; $x_1$, $x_2$, ... , $x_n$ là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn

$$x_1^t + x_2^t + ... + x_n^t = a.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$E = x_1^m + x_2^m + ... + x_n^m.$$


# GIẢI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP XÉT TỈ SỐ

VŨ HỮU BÌNH *(Hà Nội)*

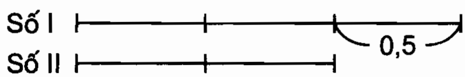
Có những bài toán mà khi mới gặp, ta tưởng chúng rất khó. Nhưng thực ra, chúng xuất phát từ những bài toán rất cơ bản.

Các ví dụ trong bài viết này thuộc loại *Toán chuyển động*, chúng được giải với *kiến thức lớp 6* bằng phương pháp *xét tỉ số của hai đại lượng*, một phương pháp thường dùng khi giải toán chuyển động.

**BÀI TOÁN CƠ BẢN. TÌM HAI SỐ KHI BIẾT HIỆU (TỔNG) VÀ TỈ SỐ**

Chẳng hạn tìm hai số có hiệu bằng 0,5 và tỉ số của chúng bằng 3 : 2.

Lời giải thật đơn giản :




Số I bằng : $0,5 \cdot 3 = 1,5$.

Số II bằng : $0,5 \cdot 2 = 1$.

**BÀI TOÁN 1. BIẾT HIỆU THỜI GIAN VÀ TỈ SỐ THỜI GIAN**

Một người đi từ A đến B với vận tốc 40 km/h. Người thứ hai cũng đi từ A đến B với vận tốc 60 km/h. Biết rằng để đi quãng đường AB, người thứ nhất cần nhiều thời gian hơn người thứ hai là 30 phút. Tính thời gian mỗi người đi từ A đến B và quãng đường AB.

*Hướng dẫn :* Cùng đi một quãng đường AB thì thời gian đi tỉ lệ nghịch với vận tốc đi nên $\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{60}{40} = \frac{3}{2}$.

Biết tỉ số thời gian (là 3 : 2) và hiệu thời gian (là 0,5 giờ), ta tìm được $t_1 = 1,5$ giờ ; $t_2 = 1$ giờ ; $AB = 60 \cdot 1 = 60$ (km).

**NÂNG CAO BÀI TOÁN 1**

***Dạng 1. Thay điều kiện hiệu thời gian bằng điều kiện tương đương***

**Bài toán 1.1.** Như *bài toán 1*. Thay điều kiện "để đi quãng đường AB, người thứ nhất cần nhiều thời gian hơn người thứ hai là 30 phút" bằng điều kiện : "người thứ hai rời A sau người thứ nhất là 20 phút và đến B trước người thứ nhất là 10 phút".

**Bài toán 1.2.** Một người đi từ A đến B. Người đó tính rằng nếu đi với vận tốc 40 km/h thì đến B sau giờ hẹn là 20 phút, còn nếu đi với vận tốc 60 km/h thì đến B trước giờ hẹn là 10 phút. Tính quãng đường AB.

*Đáp số :* 60 km.

**Bài toán 1.3.** Ba người cùng khởi hành một lúc từ A để đến B, vận tốc người thứ nhất là 40 km/h, vận tốc người thứ hai là 60 km/h. Người thứ ba đến B trước người thứ nhất là 18 phút và sau người thứ hai là 12 phút. Tính quãng đường AB và vận tốc người thứ ba.

*Đáp số :* 60 km và 50 km/h.

***Dạng 2. Diễn đạt điều kiện tỉ số thời gian (thông qua tỉ số vận tốc) dưới dạng khác***

**Bài toán 1.4.** Hai người cùng đi từ A về một phía, người thứ nhất khởi hành lúc 7 giờ, người thứ hai khởi hành lúc 7 giờ 30 phút. Hỏi hai người gặp nhau lúc mấy giờ, biết rằng quãng đường người thứ nhất đi trong 30 phút bằng quãng đường người thứ hai đi trong 20 phút ?

*Hướng dẫn :* Gọi B là địa điểm hai người gặp nhau. Tỉ số thời gian đi quãng đường AB của hai người vẫn bằng $\frac{30}{20}$ hay $\frac{3}{2}$.

Ta lại có $t_1 - t_2 = 0,5$ (giờ). Từ đó $t_2 = 1$ giờ.

Hai người gặp nhau lúc :
7 giờ 30 phút + 1 giờ = 8 giờ 30 phút.

*Lưu ý.* a) Giải thích tỉ mỉ $\frac{t_1}{t_2} = \frac{3}{2}$ như sau :

Gọi $v_1$ và $v_2$ là vận tốc của người I và người II. Quãng đường người I đi trong 30 phút bằng quãng đường người II đi trong 20 phút. Trên cùng quãng đường đó, vận tốc tỉ lệ nghịch với thời gian nên $\frac{v_2}{v_1} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$.

Gọi $t_1$ và $t_2$ là thời gian người I và người II đi từ A đến B. Trên cùng quãng đường AB, vận tốc tỉ lệ nghịch với thời gian nên $\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{2}$.

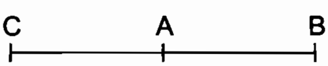
b) Trong *bài toán 1.4*, ta không tính được quãng đường AB.

***Dạng 3. Sự thay đổi vận tốc diễn ra trên một phần của quãng đường (chứ không diễn ra trên cả quãng đường)***

**Bài toán 1.5.** Một người đi từ C đến B với vận tốc 40 km/h. Đi được $\frac{1}{2}$ quãng đường, người đó dừng lại chữa xe trong 30 phút nên để đến B đúng hẹn, người đó đi tiếp trên quãng đường còn lại với vận tốc 60 km/h. Tính quãng đường CB.

*Hướng dẫn :* Gọi A là địa điểm thay đổi vận tốc.

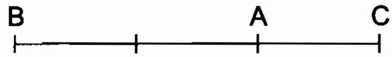
Ta tính được AB = 60 km, CB = 120 km.




**Bài toán 1.6.** Một ô tô đi từ B đến C với vận tốc 40 km/h. Lúc về, sau khi đi được $\frac{1}{3}$ quãng đường với vận tốc cũ, ô tô dừng lại chữa trong 30 phút. Muốn thời gian về bằng thời gian đi, ô tô phải đi tiếp trên quãng đường còn lại với vận tốc 60 km/h. Tính quãng đường BC.

*Hướng dẫn :* Gọi A là địa điểm thay đổi vận tốc lúc về.

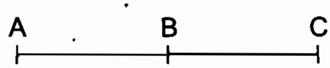
Ta tính được AB = 60 km, BC = 90 km.




***Dạng 4. Sự thay đổi vận tốc diễn ra trên hai quãng đường không bằng nhau***

Trước hết, ta diễn đạt bài toán 1 dưới dạng sau : Một người đi từ A đến B với vận tốc 40 km/h, sau đó đi tiếp từ B đến C với vận tốc 60 km/h. Biết quãng đường BC bằng quãng đường AB, thời gian đi AB nhiều hơn thời gian đi BC là 30 phút. Tính thời gian đi AB, thời gian đi BC và quãng đường AB, BC.

*Đáp số :* 1,5 giờ ; 1 giờ ;
60 km ; 60 km.




**Nhận xét :** Bây giờ, nếu người đó đi tiếp đoạn CD trong 10 phút (vẫn với vận tốc 60 km/h) thì $CD = 60 \cdot \frac{10}{60} = 10$ (km). Ta có bài toán sau :

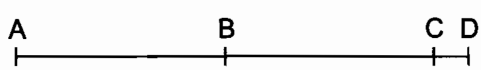
**Bài toán 1.7.** Một người đi từ A đến B với vận tốc 40 km/h, rồi đi tiếp từ B đến D với vận tốc 60 km/h. Quãng đường BD dài hơn quãng đường AB là 10 km. Thời gian đi AB nhiều hơn thời gian đi BD là 20 phút. Tính quãng đường AB, BD.

*Hướng dẫn :* Gọi C là điểm trên quãng đường BD sao cho AB = BC thì CD = 10 km.

Thời gian người đó đi CD là :

$$\frac{10}{60} = \frac{1}{6} \text{ (giờ)} = 10 \text{ (phút)}.$$

Thời gian đi AB nhiều hơn thời gian đi BC là : 20 + 10 = 30 (phút).




Gọi thời gian đi AB là $t_1$, thời gian đi BC là $t_2$ (giờ). Ta tính được $t_1$ = 1,5 giờ ; $t_2$ = 1 giờ ; AB = BC = 60 km ; BD = 70 km.

***(Kì sau đăng tiếp)***

Danh cho cac nha toan hoc nho

# THU GỌN TỔNG

*Th.S.* TRẦN ANH DŨNG *(THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai)*

Trong quá trình học, ta gặp một số bài toán tính một tổng hữu hạn. Để giải dạng toán này, ta thường phải sử dụng một số hằng đẳng thức hoặc phép nhân với biểu thức liên hợp. Khi đó, tổng hữu hạn sẽ được thu gọn. Sau đây là các ví dụ minh họa.

**Bài toán 1.** Tính tổng

$$S=\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+$$
$$+\ldots+\frac{1}{2005\sqrt{2006}+2006\sqrt{2005}}.$$

**Lời giải.** Ta thấy số hạng tổng quát của tổng có dạng $\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$, với n là số tự nhiên và $0<n<2006$.

Nhân với biểu thức liên hợp của mẫu số, ta được số hạng tổng quát bằng

$$\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Suy ra

$$S=\frac{1}{1}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2005}}-\frac{1}{\sqrt{2006}}$$
$$=1-\frac{1}{\sqrt{2006}}.$$

**Bài toán 2.** Tính tổng $A=\sqrt{1+\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}}+$

$$+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2005^2}+\frac{1}{2006^2}}.$$

**Lời giải.** Với mỗi số tự nhiên $n>0$ ta có

$$1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}$$
$$=\frac{(n^2+n)^2+2(n^2+n)+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}.$$

Suy ra $\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}}=\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n}$

$$=1+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Do đó $A=2005+1-\dfrac{1}{2006}=2005\dfrac{2005}{2006}.$

**Bài toán 3.** Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}>24.$$

**Lời giải.** Gọi vế trái của bất đẳng thức trên là M. Đặt

$$N=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{9}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9999}+\sqrt{10001}}.$$

Với mỗi số tự nhiên n ta có

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n+3}}=\frac{\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}}{2}.$$

Suy ra $M+N=\dfrac{\sqrt{10001}-1}{2}>\dfrac{100-1}{2}=\dfrac{99}{2}.$

Mà $M>N$ nên $M>\dfrac{M+N}{2}>\dfrac{99}{4}>24$, ta có đpcm.


# BÀI TOÁN HÌNH HỌC CÓ NHIỀU TRƯỜNG HỢP

NGUYỄN THANH TÙNG
*(GV. THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, Hà Tĩnh)*

*Việc giải một bài toán hình học thường phải dựa vào các hình vẽ cụ thể. Nói chung, ta có thể xét một hình vẽ tổng quát để làm cơ sở lập luận khi giải toán. Tuy nhiên, có một số bài toán hình học cần xét nhiều trường hợp khác nhau, mỗi trường hợp có những hình vẽ và kết quả tương ứng. Sau đây là một số ví dụ.*

**Bài toán 1.** Cho $\Delta ABC$ có các đường phân giác BD và CE cắt nhau tại I và ID = IE. Tìm mối liên hệ giữa $\hat{B}$ và $\hat{C}$.

**Lời giải.** Kẻ $IH \perp AB$, $IK \perp AC$.

Khi $H \equiv E$ thì $K \equiv D$. Ta chứng minh được $\Delta ABC$ đều. Suy ra $\hat{B} = \hat{C} = 60^o$.

Xét trường hợp $H \neq E$, $K \neq D$.

Ta có H nằm giữa B và E $\Leftrightarrow \widehat{HIB} < \widehat{EIB}$

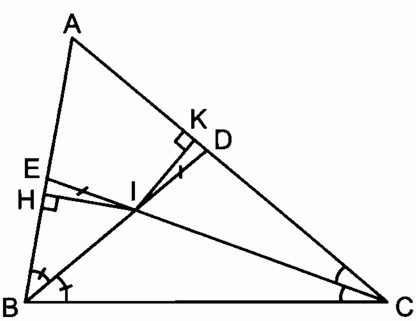
$$\Leftrightarrow 90^o - \frac{\hat{B}}{2} < \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} \Leftrightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} < \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}$$

$\Leftrightarrow \hat{A} < \hat{B}$.

Tương tự H nằm giữa A và E $\Leftrightarrow \hat{A} > \hat{B}$.

Giả sử $\hat{B} \geq \hat{C}$. Ta xét các trường hợp sau.

TH1. $\hat{B} > \hat{A} > \hat{C}$. Khi đó H, K tương ứng thuộc các đoạn thẳng BE, AD.




Vì I là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$ nên IH = IK. Mà IE = ID (gt) nên $\Delta IHE = \Delta IKD$

$$\Rightarrow \widehat{IEH} = \widehat{IDK} \Leftrightarrow \hat{A} + \frac{\hat{C}}{2} = \frac{\hat{B}}{2} + \hat{C}$$

$$\Leftrightarrow 180^o - \hat{B} - \hat{C} = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} \Leftrightarrow \hat{B} + \hat{C} = 120^o.$$

TH2. $\hat{C} > \hat{A}$. Khi đó H, K tương ứng thuộc các đoạn thẳng BE, CD.

Ta chứng minh được

$$\widehat{IEH} = \widehat{IDK} \Leftrightarrow \hat{A} + \frac{\hat{C}}{2} = \hat{A} + \frac{\hat{B}}{2} \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{C}.$$

TH3. $\hat{A} > \hat{B}$. Khi đó H, K tương ứng thuộc các đoạn thẳng AE, AD.

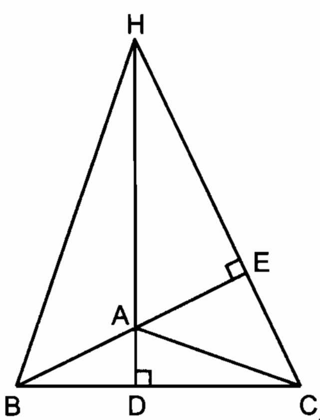
Tương tự ta được $\hat{B} = \hat{C}$.

**Kết luận.** Vậy $\hat{B} = \hat{C}$ hoặc $\hat{B} + \hat{C} = 120^o$.

**Bài toán 2.** Cho $\Delta ABC$ có trực tâm H và HA = BC. Tính góc A.

**Lời giải.** Ta xét các trường hợp sau.

TH1. $\hat{A} > 90^o$.

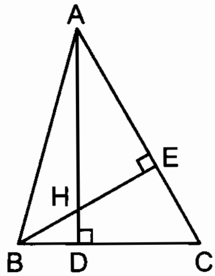


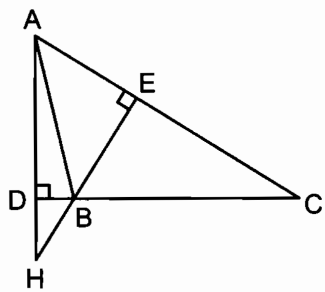

Ta có $\Delta EAH = \Delta ECB \Rightarrow EA = EC$. Do đó $\Delta AEC$ vuông cân tại E.

Suy ra $\widehat{A} = 90^o + \widehat{ACE} = 135^o$.

TH2. $\widehat{A} = 90^o$. Khi đó $H \equiv A$.
Tức là $AH < BC$: loại.

TH3. $\widehat{A} < 90^o$. Đến đây ta xét hai trường hợp là tam giác ABC nhọn hoặc có một góc không nhọn.




Ta có $\Delta EAH = \Delta EBC \Rightarrow EA = EB$.
Do đó $\Delta ABE$ vuông cân tại E.

Suy ra $\widehat{A} = 45^o$.

**Kết luận.** Vậy $\widehat{A} = 135^o$ hoặc $\widehat{A} = 45^o$.

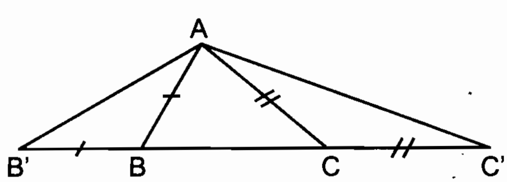
**Bài toán 3.** Cho $\Delta ABC$. Trên đường thẳng BC lấy các điểm B' và C' sao cho BB' = AB và CC' = AC. Biết $\widehat{A} = 80^o$, $\hat{B} = 60^o$. Tính số đo các góc của $\Delta AB'C'$.

**Lời giải.** Ta có $\widehat{C} = 180^o - \widehat{A} - \hat{B} = 40^o$.

Suy ra $\widehat{C} < \hat{B} < \widehat{A}$. Hay $AB < AC < BC$.

Ta xét các trường hợp sau.

TH1. Các điểm B', C' thứ tự thuộc tia đối của các tia BC và CB.




Vì các tam giác ABB' và ACC' cân tương ứng tại B và C nên

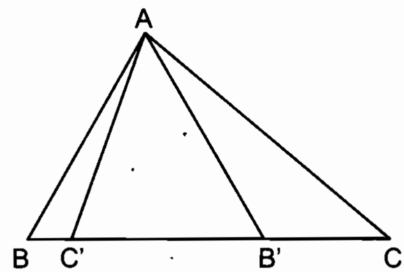
$$\widehat{AB'C'} = \frac{\hat{B}}{2} = 30^o; \widehat{AC'B'} = \frac{\widehat{C}}{2} = 20^o.$$

Suy ra $\widehat{B'AC'} = 180^o - 30^o - 20^o = 130^o$.

TH2. Các điểm B', C' nằm trên cạnh BC. Tương tự như trên ta có

$$\widehat{AB'C'} = \frac{180^o - \hat{B}}{2} = 60^o;$$

$$\widehat{AC'B'} = \frac{180^o - \widehat{C}}{2} = 70^o; \widehat{B'AC'} = 50^o.$$




TH3. B' thuộc tia đối của tia BC, C' thuộc cạnh BC.

Tương tự ta có $\widehat{AB'C'} = 30^o$; $\widehat{AC'C} = 70^o$; $\widehat{AC'B'} = 110^o$; $\widehat{B'AC'} = 40^o$.

TH4. B' thuộc cạnh BC, C' thuộc tia đối của tia CB.

Tương tự ta có $\widehat{AC'B'} = 20^o$; $\widehat{AB'B} = 60^o$; $\widehat{AB'C'} = 120^o$; $\widehat{B'AC'} = 40^o$.

**Bài tập tự luyện.**

**Bài 1.** Cho $\Delta ABC$ vuông tại A, trung tuyến AM, đường cao AH. Qua H vẽ đường thẳng song song với AB cắt AM ở N. Chứng minh rằng BN vuông góc với AM.

**Bài 2.** Tam giác ABC có góc B, C nhọn. Các trung trực của AB và AC cắt nhau ở O và cắt BC theo thứ tự ở E, F. Chứng minh rằng AO là phân giác của góc EAF.

**Bài 3.** Cho $\Delta ABC$ đều nội tiếp đường tròn (O). M là một điểm bất kì trên (O). Tìm mối liên hệ giữa MA, MB và MC.


# Hệ phương trình đối xứng loại 2

ThS. NGUYỄN ANH DŨNG *(Hà Nội)*

*Hệ phương trình (PT) hai ẩn x, y được gọi là hệ PT đối xứng loại 2 nếu như hệ có hai PT và khi ta đổi chỗ của x cho y thì hai PT trong hệ cũng đổi chỗ cho nhau.*

*Cũng như hệ PT đối xứng loại 1 (Bài viết trên TTT2 số 66), trong chương trình toán phổ thông, ta thường gặp nhiều bài toán về hệ PT đối xứng loại 2.*

*Bài viết này giúp các bạn hệ thống phương pháp và một số dạng toán thường gặp về hệ PT đối xứng loại 2.*

**1. Phương pháp thường dùng khi giải hệ PT đối xứng loại 2**

**Ví dụ 1.** Giải hệ PT $\begin{cases} x^2 - 3y + 2 = 0 & (1) \\ y^2 - 3x + 2 = 0. & (2) \end{cases}$

**Lời giải.** Trừ theo vế của (1) cho (2) ta được $x^2 - y^2 + 3(x - y) = 0$

$\Leftrightarrow (x - y)(x + y + 3) = 0.$

TH1. $x = y$. Thay vào (1) ta được

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1 ; 2\}.$$

TH2. $x + y + 3 = 0$. Thay $y = -x - 3$ vào (1) và rút gọn ta được $x^2 + 3x + 11 = 0$: vô nghiệm (vì $\Delta = 3^2 - 44 = -35 < 0$).

Vậy hệ có hai nghiệm là (1 ; 1) và (2 ; 2).

**Ví dụ 2.** Giải hệ PT $\begin{cases} x + \sqrt{y+3} = 3 & (1) \\ y + \sqrt{x+3} = 3. & (2) \end{cases}$

**Lời giải.** Điều kiện $x \geq -3$; $y \geq -3$.

Ta thấy $x = y = -3$ không là nghiệm.

Xét $(x ; y) \neq (-3 ; -3)$.

Trừ theo vế của (1) cho (2) ta được

$$x - y + \sqrt{y+3} - \sqrt{x+3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y + \frac{y - x}{\sqrt{y+3} + \sqrt{x+3}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{y+3} + \sqrt{x+3}}\right) = 0.$$

TH1. $x = y$. Thay vào (1) ta được

$$x + \sqrt{x+3} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 3 - x.$$

Điều kiện $x \leq 3$.

Bình phương hai vế và rút gọn ta được

$$x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = 6: \text{loại.} \end{array}\right.$$

TH2. $\sqrt{y+3} + \sqrt{x+3} = 1.$

Vì $\sqrt{y+3} \geq 0$ nên $\sqrt{x+3} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq -2.$

Thay $\sqrt{y+3} = 1 - \sqrt{x+3}$ vào (1) ta được

$$x + 1 - \sqrt{x+3} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = x - 2.$$

Vì $x \leq -2$ nên PT này vô nghiệm.

Vậy hệ có một nghiệm là (1 ; 1).

**Nhận xét.** Với điều kiện $x, y \leq 3$, ta đưa hệ PT đã cho về dạng

$$\begin{cases} y + 3 = (3 - x)^2 \\ x + 3 = (3 - y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x - y + 6 = 0 \\ y^2 - 6y - x + 6 = 0. \end{cases}$$

Đến đây ta giải tiếp như *ví dụ 1*.

**Ví dụ 3.** Giải hệ PT $\begin{cases} x + \dfrac{2}{y} = \dfrac{3}{x} \\ y + \dfrac{2}{x} = \dfrac{3}{y}. \end{cases}$

**Lời giải.** Điều kiện $x, y \neq 0$.

Khi đó hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2y+2x=3y & (1) \\ y^2x+2y=3x. & (2) \end{cases}$$

Trừ theo vế của (1) cho (2) ta được

$x^2y - y^2x + 5x - 5y = 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(xy+5)=0.$

TH1. $x = y$. Thay vào (1) ta được

$x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x \in \{1\ ;-1\}$ (vì $x \neq 0$).

TH2. $xy = -5$. Thay vào (1) ta được

$-5x + 2x = 3y \Leftrightarrow y = -x.$

Mà $xy = -5$ nên $x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$.

Vậy hệ đã cho có bốn nghiệm là

$(1\ ;1)\ ;(-1\ ;-1)\ ;(\sqrt{5}\ ;-\sqrt{5})\ ;(-\sqrt{5}\ ;\sqrt{5})$.

**2. Khai thác đặc điểm riêng của đầu bài**

**Ví dụ 4.** Giải hệ PT $\begin{cases} \sqrt[3]{3x+5}=y+1 & (1) \\ \sqrt[3]{3y+5}=x+1. & (2) \end{cases}$

**Lời giải.** Trừ theo vế của (1) cho (2) ta suy ra $\sqrt[3]{3x+5}+x=\sqrt[3]{3y+5}+y.$ (3)

Nếu $x > y$ thì VT(3) > VP(3) : loại.

Nếu $x < y$ thì VT(3) < VP(3) : loại.

Do đó $x = y$.

Thay vào (1) ta được $\sqrt[3]{3x+5}=x+1$

$\Leftrightarrow 3x+5=(x+1)^3 \Leftrightarrow x^3+3x^2-4=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)^2=0 \Leftrightarrow x \in \{1\ ;-2\}.$

Vậy hệ có hai nghiệm là

$(1\ ;1)$ và $(-2\ ;-2)$.

**Nhận xét.** Nếu hệ PT có dạng $\begin{cases} f(x)=g(y) \\ f(y)=g(x) \end{cases}$, trong đó f(x) và g(x) là các hàm số cùng tăng hoặc cùng giảm trên tập xác định thì bằng cách tương tự, ta chứng minh được $x = y$.

**Ví dụ 5.** Giải hệ PT

$$\begin{cases} 3x^2y-y^2-2=0 & (1) \\ 3y^2x-x^2-2=0. & (2) \end{cases}$$

**Lời giải.** Từ (1) suy ra $3x^2y = y^2 + 2 > 0$.

Mà $x^2 \geq 0$ nên $y > 0$.

Tương tự $x > 0$.

Trừ theo vế của (1) cho (2) ta được

$3xy(x-y)+(x^2-y^2)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)(3xy+x+y)=0$

$\Leftrightarrow x = y$ (vì $x, y > 0$).

Thay vào (1) ta được $3x^3 - x^2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(3x^2+2x+2)=0 \Leftrightarrow x = 1$ (vì PT $3x^2+2x+2=0$ vô nghiệm do $\Delta' = -5 < 0$).

Vậy hệ có một nghiệm là $(1\ ;1)$.

**Nhận xét.** Nếu không nhận thấy $x, y > 0$ thì ta phải giải thêm trường hợp không đơn giản là $3xy + x + y = 0$.

**3. Giải PT bằng cách quy về giải hệ PT đối xứng loại 2**

**Ví dụ 6.** Giải PT $(x^2-3)^2 - x - 3 = 0$.

**Lời giải.** Đặt $y = x^2 - 3$.

Suy ra $\begin{cases} y^2-x-3=0 \\ x^2-y-3=0. \end{cases}$

Đến đây ta giải hệ trên như *ví dụ 1*, ta được $x \in \left\{1\ ;-2\ ;\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}\right\}$.

**Ví dụ 7.** Giải PT $x^2-2=\sqrt{x+2}$.

**Lời giải.** Điều kiện $x \geq -2$.

Đặt $y=\sqrt{x+2}$ (với $y \geq 0$).

Suy ra $\begin{cases} x^2-y-2=0 \\ y^2-x-2=0. \end{cases}$

Đến đây ta giải hệ trên như *ví dụ 1*, ta được

$$x \in \left\{2\ ;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

**Bài tập tự luyện**

**Bài 1.** Giải hệ PT

a) $\begin{cases} 2x+3\sqrt{5-y}=8 \\ 2y+3\sqrt{5-x}=8. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x^2=y+\dfrac{3}{y} \\ 4y^2=x+\dfrac{3}{x}. \end{cases}$

**Bài 2.** Giải PT

a) $(5-x^2)^2 - x - 5 = 0$.

b) $x^2-4=\sqrt{x+4}$.


# TỪ Ý TƯỞNG HAY ĐẾN BÀI TOÁN ĐẸP

ĐINH TIẾN DŨNG
*(Tam Dương, Vĩnh Phúc)*

*Một bất đẳng thức có thể mang trong nó những vẻ đẹp của toán học. Cũng vậy, một ý tưởng được sử dụng trong việc chứng minh một bất đẳng thức có thể giúp ta khám phá một phương pháp hay để chứng minh nhiều bất đẳng thức khác.*

Ta hãy bắt đầu từ ý tưởng chứng minh của bài toán 4(49) thi giải toán qua thư trên TTT2 (bạn đọc xem lời giải trên số 51): "Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn a + b + c = 1. Chứng minh rằng $\frac{a+bc}{b+c}+\frac{b+ca}{c+a}+\frac{c+ab}{a+b}\geq 2$".

Ý tưởng của lời giải bài toán này trên TTT là: Trong quá trình chứng minh một bất đẳng thức, ta sẽ dựa vào giả thiết của bài toán rồi thay một số bằng một biểu thức thích hợp để việc chứng minh được dễ dàng hơn.

Ta hãy vận dụng ý tưởng này vào việc chứng minh một số bất đẳng thức. Sau đây là một số ví dụ.

**Bài toán 1.** Cho các số thực a, b, c > 0 thỏa mãn ab + bc + ca = 1. Chứng minh rằng

$$M=\frac{3a^2b^2+1}{c^2+1}+\frac{3b^2c^2+1}{a^2+1}+\frac{3c^2a^2+1}{b^2+1}\geq 3.$$

**Lời giải.** Ta chứng minh

$$\frac{3a^2b^2+1}{c^2+1}\geq 3ab. \qquad (1)$$

Thật vậy, ta có

$(1) \Leftrightarrow 3a^2b^2+(ab+bc+ca)^2\geq$
$\geq 3ab(c^2+ab+bc+ca)$
$\Leftrightarrow (ab+bc+ca)^2\geq 3abc(c+b+a)$
$\Leftrightarrow (ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(ca-ab)^2\geq 0$: đúng.

Tương tự $\frac{3b^2c^2+1}{a^2+1}\geq 3bc$; (2)

$$\frac{3c^2a^2+1}{b^2+1}\geq 3ca. \qquad (3)$$

Cộng theo vế của (1), (2) và (3) ta được

$$M\geq 3(ab+bc+ca)=3 \text{ (đpcm)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$ab=bc=ca=\frac{1}{3}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

**Bài toán 2.** Cho các số thực a, b, c > 0 thỏa mãn a + b + c = 3. Chứng minh rằng

$$N=\frac{3+a^2}{b+c}+\frac{3+b^2}{c+a}+\frac{3+c^2}{a+b}\geq 6.$$

**Lời giải.** Với các số thực x, y, z bất kì ta có

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0$
$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$
$\Leftrightarrow (x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$.

Do đó

$3+a^2=\frac{1}{3}(a+b+c)^2+a^2\geq$
$\geq ab+bc+ca+a^2=(a+b)(a+c)$.

Suy ra $\frac{3+a^2}{b+c}\geq\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}$.

Tương tự $\frac{3+b^2}{c+a}\geq\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}$;

$$\frac{3+c^2}{a+b}\geq\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}.$$

☞

# THÁCH ĐẤU! THÁCH ĐẤU ĐÂY!

# TRẬN ĐẤU THỨ SÁU MƯƠI SÁU

**Người thách đấu.** Trần Bá Duy Linh, SV. K34, Đại học Kinh tế TP. Hồ Chí Minh.

**Bài toán thách đấu.** Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu p(n) là tích các chữ số khác 0 của n (chẳng hạn $p(23) = 6$, $p(340) = 12$), với quy ước nếu số chữ số khác 0 chỉ là 1 thì p(n) bằng chính chữ số khác 0 đó.

Đặt $S = p(1) + p(2) + \ldots + p(999)$. Tìm ước số nguyên tố lớn nhất của S.

**Xuất xứ.** Sáng tác.

**Thời hạn.** Trước ngày 15 - 05 - 2009 theo dấu bưu điện.

## *Kết quả* TRẬN ĐẤU THỨ SÁU MƯƠI TƯ (TTT2 số 72)

Vì d là một ước số chung của a, b, c nên d là ước số của a + b + c. Hay $243 \vdots d$.

Vì $243 = 3^5$ nên tồn tại số tự nhiên $n \le 5$ để $d = 3^n$.

Ta chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử $d > 27$. Khi đó $3^n > 27$. Suy ra $n \ge 4$.

Tức là $d \ge 81$. Mà a, b, c là các số nguyên dương chia hết cho d nên $a, b, c \ge 81$.

Suy ra $a + b + c \ge 243$.

Mà $a + b + c = 243$ nên $a = b = c = 81$.

Khi đó $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{c}+\frac{c+1}{a}=\frac{82}{27}$: không phải là một số nguyên, trái giả thiết.

Vậy $d \le 27$, ta có đpcm.

**Nhận xét.** 1) Có rất nhiều võ sĩ đã tham gia thi đấu trận này. Hầu hết các bạn đều giải đúng. Tuy nhiên, hầu hết các bạn đã giải theo cách sau.

Từ giả thiết suy ra $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{c}+\frac{c+1}{a}=$

$$=\frac{a^2c+b^2a+c^2b+ab+bc+ca}{abc}\in\mathbb{Z}.$$

Do đó $a^2c + b^2a + c^2b + ab + bc + ca \vdots abc$.

Vì d là một ước số chung của a, b, c nên $abc \vdots d^3$.

Suy ra $a^2c + b^2a + c^2b + ab + bc + ca \vdots d^3$.

Mà $a^2c$, $b^2a$, $c^2b$ đều chia hết cho $d^3$ nên $ab + bc + ca \vdots d^3$. Suy ra $ab + bc + ca \ge d^3$.

Mặt khác, với các số thực a, b, c bất kì ta có $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \ge 0$.

Hay $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$.

Suy ra $(a + b + c)^2 \ge 3(ab + bc + ca)$.

Do đó $(a + b + c)^2 \ge 3d^3$.

Tức là $3^{10} \ge 3d^3$. Hay $d \le 27$ (đpcm).

Bằng cách này, ta chỉ ra được nếu $d = 27$ thì phải có $a = b = c = 81$: vô lí. Tức là ta đã chứng minh được bất đẳng thức mạnh hơn đề bài là $d < 27$. Nghĩa là $d \le 9$.

2) Võ sĩ đăng quang trong trận đấu này là *Nguyễn Đăng Minh*, 8C, trường Hà Nội - Amsterdam, Ba Đình, **Hà Nội**.

3) Các bạn hãy thử tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn giả thiết của bài toán là $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{c}+\frac{c+1}{a}\in\mathbb{Z}$.

Chúng ta sẽ quay lại bài toán này vào dịp thích hợp.

HOÀNG ANH KIỆT

---

Suy ra $N \ge \frac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}+\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

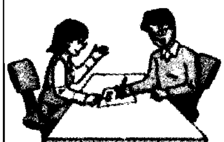
$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}\ge 2(a+b).$$

Viết hai bất đẳng thức tương tự rồi cộng theo vế ta suy ra $N \ge 2(a + b + c) = 6$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$a = b = c = 1$.

Hi vọng các bạn vận dụng tốt ý tưởng trên để giải được nhiều bài toán khác.



**Phụ huynh: Đọc - Viết**

# GIẢI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP XÉT TỈ SỐ

VŨ HỮU BÌNH *(Hà Nội)*

*(Tiếp theo số 72)*

**BÀI TOÁN 2. BIẾT TỔNG QUÃNG ĐƯỜNG VÀ TỈ SỐ QUÃNG ĐƯỜNG**

Hai ô tô cùng khởi hành một lúc, xe thứ nhất đi từ A đến B, xe thứ hai đi từ B đến A. Quãng đường AB dài 150 km, vận tốc xe thứ nhất bằng $\frac{3}{2}$ vận tốc xe thứ hai. Tính quãng đường mỗi xe đi được từ lúc khởi hành đến lúc gặp nhau.

*Hướng dẫn:* Cùng đi một thời gian thì quãng đường đi được tỉ lệ thuận với vận tốc nên $\frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{2}$.

Biết tỉ số quãng đường (là 3 : 2) và tổng quãng đường (là 150 km), ta tính được $s_1 = 90$ km, $s_2 = 60$ km.

**NÂNG CAO BÀI TOÁN 2**

***Dạng 1. Thay tổng quãng đường bằng hiệu quãng đường***

**Bài toán 2.1.** Hai ô tô cùng khởi hành một lúc, xe thứ nhất đi từ A đến B, xe thứ hai đi từ B đến A. Vận tốc xe thứ nhất bằng $\frac{3}{2}$ vận tốc xe thứ hai. Tính quãng đường mỗi xe đi được từ lúc khởi hành đến lúc gặp nhau biết quãng đường xe thứ nhất đi được dài hơn quãng đường xe thứ hai đi được là 30 km.

*Hướng dẫn:* Cùng đi một thời gian thì quãng đường tỉ lệ thuận với vận tốc nên

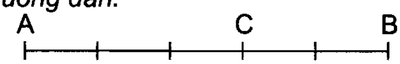
$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{2}.$$

Ta lại có $s_1 - s_2 = 30$ (km). Từ đó tính được $s_1 = 90$ km, $s_2 = 60$ km.

***Dạng 2. Thay điều kiện tỉ số vận tốc bằng điều kiện tương đương***

**Bài toán 2.2.** Hai ô tô cùng khởi hành một lúc, xe thứ nhất đi từ A đến B hết 2 giờ, xe thứ hai đi từ B đến A hết 3 giờ. Đến nơi gặp nhau, quãng đường xe thứ nhất đã đi dài hơn quãng đường xe thứ hai đã đi là 30 km. Tính quãng đường mỗi xe đã đi từ lúc khởi hành đến lúc gặp nhau.

*Hướng dẫn:*




Cùng đi quãng đường AB thì vận tốc tỉ lệ nghịch với thời gian nên $\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{3}{2}$.

Cùng đi một thời gian (từ lúc khởi hành đến lúc gặp nhau tại C) thì quãng đường tỉ lệ thuận với vận tốc nên $\frac{AC}{BC} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{2}$.

Ta lại có AC − BC = 30 (km) nên tính được AC = 90 km, BC = 60 km.

**BÀI TOÁN 3. BIẾT HIỆU VẬN TỐC VÀ TỈ SỐ VẬN TỐC**

Một ca nô xuôi khúc sông từ A đến B hết 6 giờ và ngược khúc sông đó hết 9 giờ. Biết vận tốc xuôi lớn hơn vận tốc ngược là 6 km/h. Tính vận tốc xuôi, vận tốc ngược và chiều dài khúc sông.

*Hướng dẫn:* Cùng đi khúc sông AB, vận tốc tỉ lệ nghịch với thời gian nên

$$\frac{v_x}{v_n} = \frac{t_n}{t_x} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

Biết tỉ số vận tốc (là 3 : 2) và hiệu vận tốc (là 6 km/h), ta tính được $v_x = 18$ km/h, $v_n = 12$ km/h và AB = 18·6 = 108 (km).

**NÂNG CAO BÀI TOÁN 3**

***Dạng 1. Thay điều kiện hiệu vận tốc bằng điều kiện tương đương***

**Nhận xét.** Ta biết rằng $v_x - v_n$ bằng hai lần vận tốc dòng nước. Ta có bài toán sau.

**Bài toán 3.1.** Như bài toán 3. Thay điều kiện "vận tốc xuôi lớn hơn vận tốc ngược là 6 km/h" bằng điều kiện "vận tốc dòng nước là 3 km/h".

***Dạng 2. Không cho vận tốc dòng nước. Yêu cầu tìm tỉ số của vận tốc dòng nước và vận tốc xuôi, từ đó tìm tỉ số của thời gian vật trôi theo dòng nước với thời gian xuôi.***

**Bài toán 3.2.** Một ca nô xuôi khúc sông từ A đến B hết 6 giờ và ngược khúc sông đó hết 9 giờ. Hỏi một chiếc phao trôi theo dòng nước từ A đến B trong bao lâu?

*Hướng dẫn: Ta có* $\frac{v_x}{v_n} = \frac{t_n}{t_x} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$

Coi vận tốc xuôi là 6 phần thì vận tốc ngược là 4 phần và vận tốc dòng nước là

$$(6 - 4) : 2 = 1 \text{ (phần)}.$$

Suy ra thời gian một chiếc phao trôi theo dòng nước từ A đến B là 6·6 = 36 (giờ).

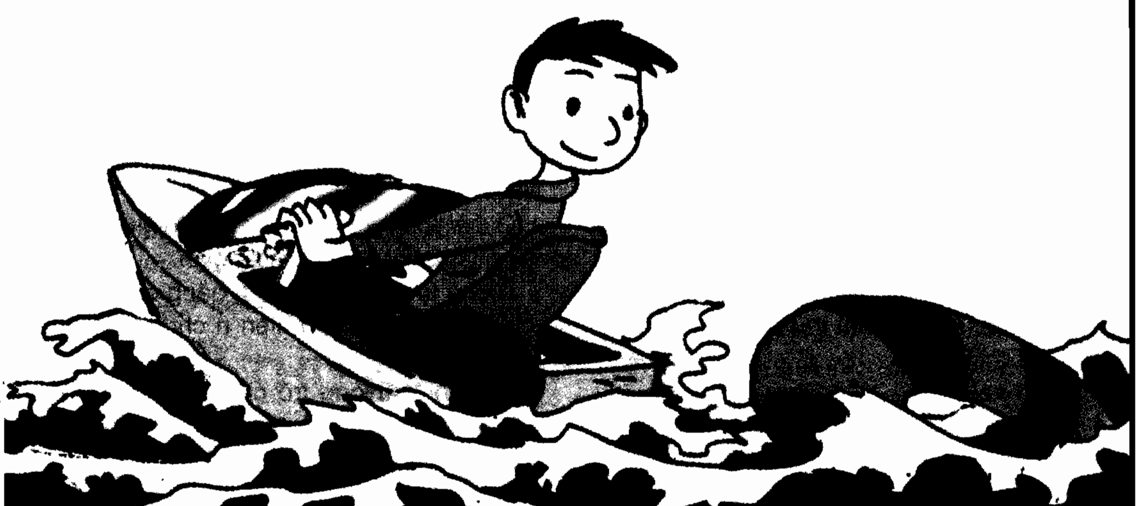
**KẾT LUẬN.** Rõ ràng nếu tách riêng các bài toán 1.7, 2.2, 3.2 thì đó là những bài toán khó, đôi khi ta không biết bắt đầu từ đâu. Nhưng nếu xét kĩ thì chúng đã được biến đổi từ những bài toán rất cơ bản.

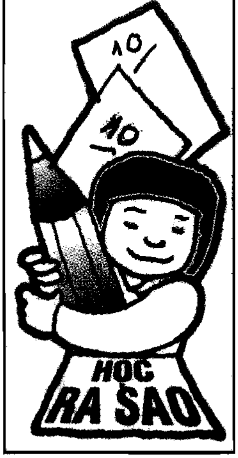
Trong các bài toán chuyển động, ta nên chú ý đến tỉ số của các đại lượng:

- Cùng đi một thời gian thì quãng đường đi được tỉ lệ thuận với vận tốc (*bài toán 2* và các bài toán nâng cao từ bài toán 2).
- Cùng đi một quãng đường thì thời gian đi tỉ lệ nghịch với vận tốc (*bài toán 1*, *bài toán 3* và các bài toán nâng cao từ các bài toán đó).

Nhờ các chú ý trên mà ta xác định được tỉ số hai thời gian (*bài toán 1*), tỉ số hai quãng đường (*bài toán 2*), tỉ số hai vận tốc (*bài toán 3*) và đưa các bài toán nâng cao về bài toán nền móng: Tìm hai số khi biết tổng (hiệu) và tỉ số.

Việc nắm vững các dạng toán cơ bản và biết đưa các bài toán chưa quen thuộc về dạng quen thuộc là một phẩm chất mà người làm toán cần rèn luyện.






# Sáng tạo KHI TỰ HỌC TOÁN

Nguyễn [illegible] (TP Hồ Chí Minh)

**Trong tự học nhiều khi giúp tìm đến những điều thú vị trong toán học. Bài viết này xin được trao đổi cùng bạn đọc về một bài toán mà trong việc tự học toán tôi đã tìm đến những bài toán mới, bài toán tổng quát.**

## Bài toán 1

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{a-b+c}+\frac{1}{-a+b+c}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP Hồ Chí Minh, 1992-1993)

**Hướng dẫn**

*Bài toán phụ : Cho x, y > 0. Chứng minh rằng :* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$

*Lời giải : Vận dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương ta có*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}}=\frac{2}{\sqrt{xy}}\geq\frac{2}{\frac{x+y}{2}}=\frac{4}{x+y}$$

*Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên*
*$a+b-c>0$ ; $a-b+c>0$ ; $-a+b+c>0$.*

*Vận dụng bài toán phụ trên ta có* $\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{a-b+c}\geq\frac{4}{a+b-c+a-b+c}=\frac{4}{2a}=\frac{2}{a}$ *(1)*

*Chứng minh tương tự ta cũng có* $\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{-a+b+c}\geq\frac{2}{b}$ *(2);* $\frac{1}{a-b+c}+\frac{1}{-a+b+c}\geq\frac{2}{c}$ *(3)*

*Cộng từng vế của (1), (2), (3) ta có điều cần chứng minh.*

*Bài toán phụ giúp ta nhận ra rằng nếu $n\in N$ thì*

$$\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}\geq 2\sqrt{\frac{1}{x^n}\cdot\frac{1}{y^n}}=2\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}\right)^n\geq 2\left(\frac{1}{\frac{x+y}{2}}\right)^n=\frac{2^{n+1}}{(x+y)^n}$$

*Từ đó ta đến với bài toán mới, bài toán tổng quát của bài toán 1.*

## Bài toán 2 :

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{(a+b-c)^n}+\frac{1}{(a-b+c)^n}+\frac{1}{(-a+b+c)^n}\geq\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}\text{ với mọi } n\in N.$$

*Vẫn chưa vừa lòng với kết quả nhận được tôi thử tìm cách thay đổi tử của các phân thức ở vế trái của bất đẳng thức trong bài toán 1 và nhận được bài toán mới.*

## Bài toán 3

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng : $\frac{c}{a+b-c}+\frac{b}{a-b+c}+\frac{a}{-a+b+c}\geq 3$

(Đề kiểm tra đội tuyển toán 9, quận Tân Bình, TP Hồ Chí Minh 2000-2001)

*Hướng dẫn : Đặt* $-a+b+c=x$, $a-b+c=y$, $a+b-c=z$

*Ta có* $a=\frac{y+z}{2}$; $b=\frac{x+z}{2}$; $c=\frac{x+y}{2}$ *Do đó*

$$\frac{c}{a+b-c}+\frac{b}{a-b+c}+\frac{a}{-a+b+c}=\frac{x+y}{2z}+\frac{x+z}{2y}+\frac{y+z}{2x}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)\right]\geq\frac{1}{2}(2+2+2)=3$$

*Suy nghĩ ... và suy nghĩ giúp tôi tìm và giải được bài toán 4, bài toán tổng quát của bài toán 1 và bài toán 3.*

## Bài toán 4

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :

$$\frac{c^n}{a+b-c}+\frac{b^n}{a-b+c}+\frac{a^n}{-a+b+c}\geq a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}$$

với mọi $n\in N$.

*Hướng dẫn :*

*Với n = 0 ta có bài toán 1 và với n = 1 ta có bài toán 3.*

*Xét* $n\geq 2$ *ta có* $\left(a^{n-2}-b^{n-2}\right)(a-b)\geq 0\Rightarrow a^{n-1}+b^{n-1}\geq a^{n-2}b+ab^{n-2}$ *(1)*

*Tương tự* $b^{n-1}+c^{n-1}\geq b^{n-2}c+bc^{n-2}$ *(2);* $c^{n-1}+a^{n-1}\geq a^{n-2}c+ac^{n-2}$ *(3)*

*Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương ta có*

$$\frac{a^n}{-a+b+c}+(-a+b+c)a^{n-2}\geq 2\sqrt{\frac{a^n}{-a+b+c}(-a+b+c)a^{n-2}}$$

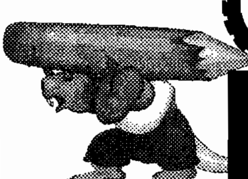
$$\Rightarrow\frac{a^n}{-a+b+c}+a^{n-2}b+a^{n-2}c\geq 3a^{n-1}\ (4)$$

*Chứng minh tương tự ta cũng có*

$$\frac{b^n}{a-b+c}+ab^{n-2}+b^{n-2}c\geq 3b^{n-1}(5);\ \frac{c^n}{-a+b+c}+ac^{n-2}+bc^{n-2}\geq 3c^{n-1}(6)$$

*Từ (1), (2), (3), (4), (5) và (6) ta có*

$$\frac{c^n}{a+b-c}+\frac{b^n}{a-b+c}+\frac{a^n}{-a+b+c}\geq a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}$$



Bài toán 1, chắc chắn còn nhiều điều thú vị nữa nếu chúng ta tiếp tục khai thác tìm tòi. Xin chờ các bạn phát hiện tiếp.


# IQ là gì?

**Nguyễn Đăng Quang**

IQ là từ viết tắt của tiếng Anh Intelligence Quotient, có nghĩa là " chỉ số thông minh"

Mỗi người có một mức độ thông minh khác nhau. Bạn A chỉ nghe thầy giảng qua một lượt là hiểu ngay, toán khó đến mấy cũng làm được. Ta vẫn bảo bạn ấy rất thông minh. Ngược lại, bạn B nghe thầy giảng đi giảng lại vẫn không hiểu, bài tập làm mãi không được, bạn ấy kém thông minh.

**Đo IQ bằng cách nào ?**

Để đo mức độ thông minh của mỗi người, các nhà khoa học nghĩ ra những bộ đề IQ. Có những bộ gồm 20 bài, có bộ 30 bài. Làm đúng nhiều thì được nhiều điểm. Làm nhanh cũng được nhiều điểm. Số điểm thể hiện mức độ thông minh của mỗi người bằng số, gọi là chỉ số thông minh. Chỉ số thông minh càng cao, càng thông minh. Chỉ số thông minh IQ trung bình là100.

Các bạn có IQ từ 85 đến 114 được coi là có IQ loại trung bình.

IQ từ 115 đến 124 : trên trung bình

IQ từ 125 đến 134 : giỏi

IQ từ 135 đến 144 : rất giỏi, "siêu"

IQ từ 145 đến 154 : tài năng lỗi lạc

IQ từ 155 đến 164 : thiên tài

IQ từ 165 đến 179 : thiên tài hiếm có

IQ từ 180 đến 200 : thiên tài siêu việt

IQ trên 200 : trên đời không ai có thể sánh được, IQ không thể đo được

Người ta đã thử đo IQ cho học sinh các bậc khác nhau. Trong khi ở các lớp dưới, IQ của học sinh thường ở mức trung bình (IQ = 85 ~ 114), thì ở cuối bậc phổ thông trung học học sinh thường đạt mức trên trung bình (IQ = 115 ~ 124). Một số nước đo chỉ số IQ của các "ông cử " (người có bằng cử nhân) thấy IQ thường đạt ở mức "giỏi" (IQ = 125 ~ 134). Giáo sư, tiến sĩ thường ở mức cao hơn; còn những người đạt giải Nôben thường ở mức IQ = 155 ~ 164.

**Sau đây là IQ của một số nhân vật nổi tiếng :**

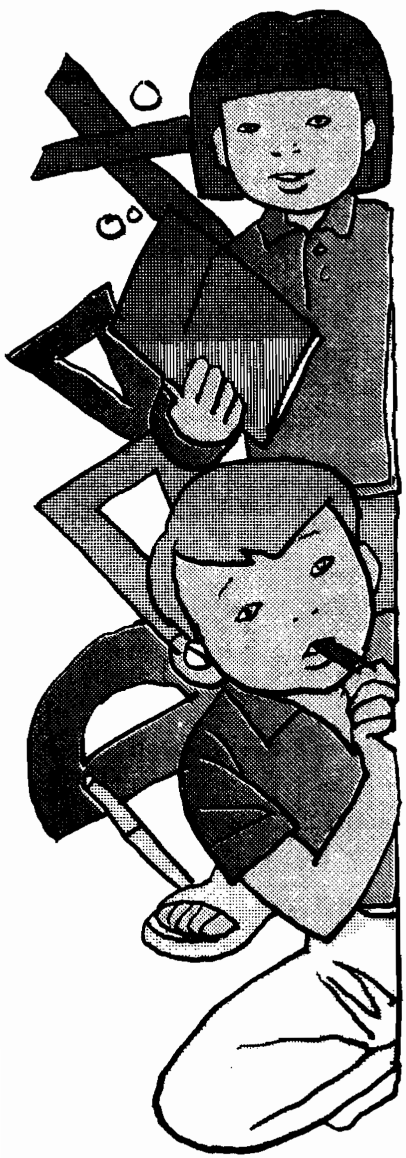
| Tên | Nước | Lĩnh vực | IQ |
|---|---|---|---|
| Rembran | Hà Lan | Họa sĩ | 155 |
| Côpecnic | Ba Lan | Nhà thiên văn học | 160 |
| Môza | Áo | Nhạc sĩ | 165 |
| Đácuyn | Anh | Nhà tự nhiên học | 165 |
| Kovalepskaja | Nga | Nhà toán học | 170 |
| Kan | Đức | Nhà triết học | 175 |
| Đề các | Pháp | Nhà toán học, triết học | 180 |
| Galilê | Ý | Nhà vật lí, thiên văn, triết học | 185 |
| Pascan | Pháp | Nhà vật lí, toán học | 195 |
| Lepnit | Đức | Nhà toán học, triết học | 205 |

*Các bạn hãy chuẩn bị ...tự đo trí thông minh của mình ở những số tạp chí tiếp theo. Chúc các bạn rèn luyện tốt để có chỉ số IQ ngày càng cao !*


# Giải bài toán *bằng cách lập phương trình*

**NGND Nguyễn Nhung**

*(Sở Giáo dục và Đào tạo Bắc Giang)*



Ở các kỳ thi cuối cấp trung học cơ sở, các bạn hay gặp một bài toán "có lời văn" mà các bạn có thể "đại số hóa" để giải quyết.

Muốn giải được bài toán loại này, các bạn cần nắm được :

+ Chọn ẩn cần tìm là đại lượng chưa biết nào ? (có thể đặt hai ẩn !)

+ Từ yêu cầu của bài toán thiết lập phương trình (hoặc hệ phương trình nếu có nhiều phương trình !).

+ Giải phương trình (hoặc giải hệ phương trình).

+ Đối với các bài toán thực tế cần lưu ý sự có nghĩa có giá trị nghiệm tìm được.

**Thí dụ 1 :** Hai người đi xe dạp xuất phát cùng một lúc đi từ A đến B. Vận tốc của họ hơn kém nhau 3 km/h nên họ đến B sớm muộn hơn nhau 30 phút. Tính vận tốc mỗi người, biết rằng quãng đường AB dài 30 km.

**Giải :** Gọi x (km/h) là vận tốc của người đi chậm thì vận tốc người kia là x+3 (km/h), và $x > 0$.

Thời gian từng người đi từ A đến B lần lượt là $\frac{30}{x}$ (h) và $\frac{30}{x+3}$ (h)

Do đó ta có phương trình:

$$\frac{30}{x}-\frac{30}{x+3}=\frac{30}{60}$$

hay $x^2 + 3x - 180 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 12$, $x_2 = -15$. Vì $x > 0$ nên $x_1 = 12$ (km/h) chấp nhận được.

Do đó vận tốc của từng người là 12 km/h và 15 km/h.

**Thí dụ 2 :** Một thửa ruộng hình chữ nhật có chu vi 250 m. Tính diện tích của thửa ruộng, biết rằng nếu chiều dài tăng thêm 15 m và chiều rộng giảm đi 15 m thì diện tích giảm đi 450 $m^2$.

**Giải :** Gọi chiều dài thửa ruộng là x (m) và chiều rộng thửa ruộng là y (m) thì $x > y > 0$. Khi đó:

$2(x+y)=250 \Leftrightarrow x+y = 125$ (1)

Diện tích thửa ruộng hiện tại là xy.

Diện tích thửa ruộng nếu thay đổi các chiều dài, chiều rộng như bài toán là $(x + 15)(y - 15)$.

Do đó ta có phương trình thứ hai:

$xy - (x + 15)(y - 15) = 450$

Đơn giản và rút gọn, ta được:

$x - y = 15$ (2)

Do đó ta có hệ phương trình hai ẩn:

$$\begin{cases} x+y=125 \\ x-y=15 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $x = 70$ và $y = 55$ thỏa mãn điều kiện $x > y > 0$.

Vậy diện tích thửa ruộng là

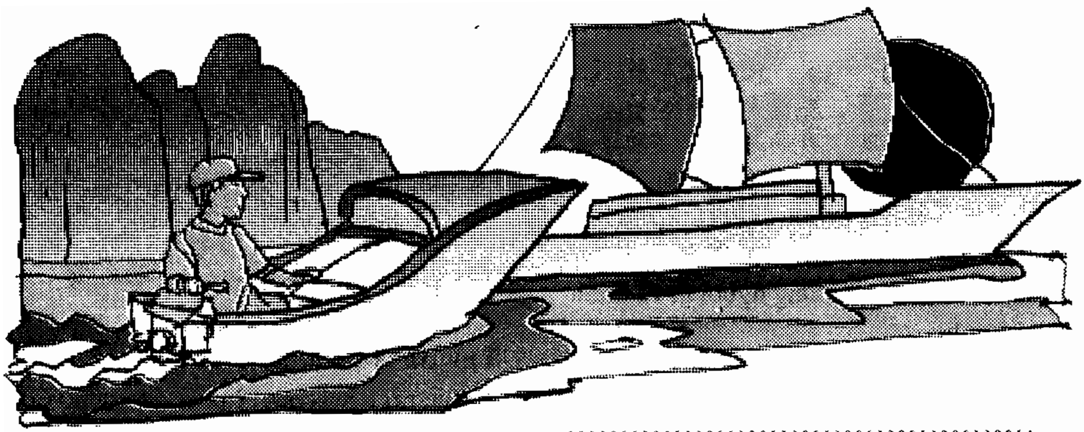
$xy = 70 \times 55 = 3850$ ($m^2$)

**Thí dụ 3 :** Hai người làm chung một công việc thì hết 1 giờ 12 phút. Họ làm với nhau được 30 phút thì một người phải đi làm một việc khác, người còn lại phải làm thêm 45 phút nữa thì xong 75% công việc. Hỏi mỗi người làm một mình thì hết bao nhiêu thời gian?

**Giải :** Ta có 1h 12' = $\frac{6}{5}$ h

Gọi x, y lần lượt là thời gian mà người thứ nhất (người chỉ làm 30') và người thứ hai làm một mình để xong toàn bộ công việc thì x, y > $\frac{6}{5}$ (đơn vị của x,y là h)

Một giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc, người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc,



nên hai người làm chung 1h thì được

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}$ công việc (1)

Người thứ nhất thực làm $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{2x}$ công việc. Người thứ hai làm trong $30' + 45' = 75' = \frac{5}{4}$ h nên làm $\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{y}=\frac{5}{4y}$ công việc. Khi đó, họ hoàn thành 75% công việc nên $\frac{1}{2x}+\frac{5}{4y}=\frac{3}{4}$ (2)

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6} & (1)\\ \frac{1}{2x}+\frac{5}{4y}=\frac{3}{4} & (2)\end{cases}$

Ta được $x=\frac{18}{7}$ ; $y=\frac{9}{4}$ thoả mãn điều kiện $x, y > \frac{6}{5}$ ( Có thể đặt $\frac{1}{x}=X$ ; $\frac{1}{y}=Y$).

Vậy thời gian mà mỗi người làm một mình để xong công việc là :

- Người thứ nhất cần : $\frac{18}{7}$ h

- Người thứ nhất cần : $\frac{9}{4}$ h

Các bạn hãy tự luyện bằng cách giải thêm các bài toán:

**Bài 1 :** Ba vòi nước A, B, C được đặt vào cùng một bể chứa. Để được đầy bể nước người ta thấy có các cách sau đây :

1) Vòi A chảy 2h và vòi B chảy 1h30'.

2) Vòi A chảy 1h và vòi C chảy 4h.

3) Vòi B chảy 3h và vòi C chảy 2h.

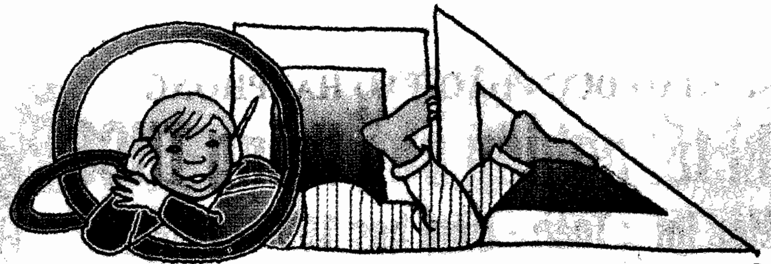
Nếu chỉ sử dụng một vòi thì mỗi vòi phải chảy bao lâu mới đầy bể?

Đáp số : A chảy 3h ; B chảy 4h30' ; C chảy 6h.

**Bài 2 :** Một hình chữ nhật có chiều rộng bằng $\frac{2}{3}$ chiều dài. Nếu bớt mỗi chiều đi 5 m thì diện tích bị giảm đi 16%. Tính các kích thước của hình chữ nhật lúc đầu.

Đáp số : 50 m và 75 m.

**Bài 3 :** Một chiếc thuyền khởi hành từ bến A. Sau 5 giờ 20 phút có một ca nô chạy từ bến A đuổi theo và đuổi kịp thuyền tại địa điểm B cách bến A là 20 km. Biết rằng vận tốc ca nô hơn vận tốc thuyền là 12 km/giờ. Tính vận tốc của thuyền.



# DÀNH CHO CÁC NHÀ TOÁN HỌC NHỎ

# Bài toán Steiner - Leimus

**TS. Nguyễn Minh Hà**
*(ĐHSP Hà Nội)*

## 1. Bắt đầu từ một bức thư

Năm 1840, nhà toán học người Pháp D.Ch.L, Leimus (1780 - 1863) gửi cho nhà hình học nổi tiếng người Thụy Điển J. Steiner (1769 - 1863) một bài toán hay với yêu cầu đưa ra một cách chứng minh thuần túy hình học :

"Cho tam giác ABC có các đường phân giác trong BE, CF bằng nhau. Chứng minh rằng tam giác ABC cân" (Bài toán 1)

Để giải quyết bài toán này, J. Steiner đã chứng minh bổ đề :

"Trong tam giác ABC, với BC = a ; CA = b ; AB = c ; đường phân giác trong AD của tam giác được tính bởi công thức (*)

$$AD = \sqrt{bc\left[1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]}$$

Chỉ cần kiến thức hình học lớp 8, các bạn có thể tự chứng minh điều này.

Áp dụng công thức (*) ta chứng minh bài toán 1 :

Ta có: BE = CF

$$\Leftrightarrow ca\left[1 - \left(\frac{b}{c+a}\right)^2\right] = ab\left[1 - \left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right]$$

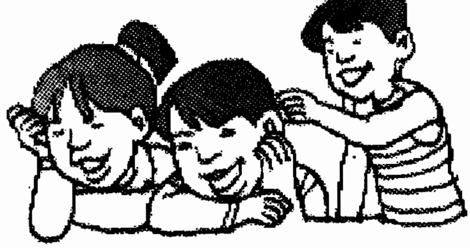
$$\Leftrightarrow c\left[1 - \left(\frac{b}{c+a}\right)^2\right] = b\left[1 - \left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow (b-c) + bc\left[\frac{b}{(c+a)^2} - \frac{c}{(a+b)^2}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-c) + bc.\frac{(b^3-c^3) + a^2(b-c) + 2a(b^2-c^2)}{(c+a)^2(a+b)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-c).\left[1 + bc.\frac{(b^2+bc+c^2) + a^2 + 2a(b+c)}{(c+a)^2(a+b)^2}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-c) = 0 \Leftrightarrow b = c. \text{ (đpcm).}$$



## 2. Khát khao vươn tới cái đẹp

Cách chứng minh trên của J. Steiner đúng nhưng ... chưa đẹp vì chưa thực sự "thuần túy hình học". Bởi thế, sau khi phép chứng minh trên được công bố, rất nhiều người đã lao vào để cố công tìm kiếm một phép chứng minh mới, hay hơn cho bài toán 1. Hơn 150 năm trôi qua ... nhiều phép chứng minh mới đã nối tiếp nhau ra đời. Trong các chứng minh đó, người ta đặc biệt quan tâm tới hai phép chứng minh sau :

**1.** *Phép chứng minh của R. W. Hegy*

Năm 1983, phép chứng minh này được công bố trên tạp chí "The mathematical gazette" của Anh, chỉ cần dùng kiến thức hình học lớp 7.

Nếu $\widehat{B} > \widehat{C}$ thì ta dựng hình bình hành BEDF như hình (*). Kí hiệu các góc như trên hình vẽ, ta thấy :

Nếu $\widehat{B} > \widehat{C} \Rightarrow \widehat{B_2} > \widehat{C_2} \Rightarrow \widehat{D_1} > \widehat{C_2}$ (1)

Mặt khác, vì BE = CF nên DF = CF

$\Rightarrow \widehat{D_1} + \widehat{D_2} > \widehat{C_2} + \widehat{C_3}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Rightarrow \widehat{D_2} < \widehat{C_3}$

$\Rightarrow EC < ED \Rightarrow EC < FB$

Xét các tam giác BCE và CBF, ta thấy : BC chung, BE = CF, BF > CF nên $\widehat{C_1} > \widehat{B_1} \Rightarrow \widehat{C} > \widehat{B}$ . Mâu thuẫn.

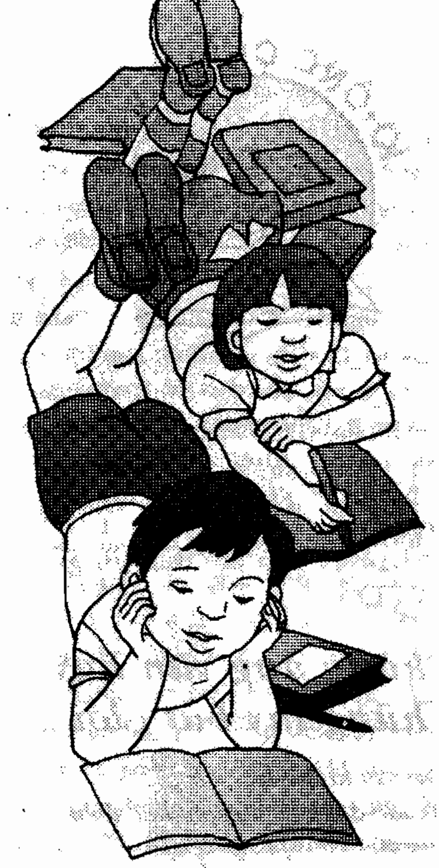
Nếu $\widehat{B} < \widehat{C}$, hoàn toàn tương tự cũng dẫn đến mâu thuẫn.

Chứng tỏ : $\widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow \Delta ABC$ cân đỉnh A (đpcm).

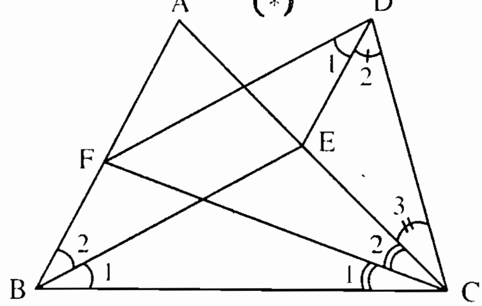
**2.** *Phép chứng minh của G. Julbert và D. Mac Donnell*

Năm 1963, phép chứng minh được công bố trên tạp chí "American Mathematical Monthey" của Mỹ. Phép chứng minh này giải quyết bài toán khác mà bài toán 1 chỉ là hệ quả của nó. Đó là bài toán :

"Cho tam giác ABC có các đường phân giác trong BE, CF. Chứng minh rằng : Nếu $\widehat{B} \geq \widehat{C}$ thì $BE \leq CF$" (Bài toán 2).



(*)




Nào ! Các nhà toán học nhỏ hãy giải quyết bài toán 2 để thử sức mình và gửi gấp về TTT2 nhé !

*Vấn đề chưa dừng lại đâu ... Các bạn thử trăn trở xem có đề xuất được điều gì mới không ? Hẹn gặp lại các bạn ở số tạp chí sau.*

# MỘT PHONG CÁCH HỌC TOÁN

NGUYỄN ĐỨC TẤN *(TP Hồ Chí Minh)*

Khai thác bài toán trong sách giáo khoa nhiều khi đem đến cho chúng ta những điều lí thú và sâu sắc. Tôi tin rằng đây là một phong cách học toán tốt, góp phần tìm kiếm cái mới trong toán học.

Xin được cùng bạn đọc trao đổi về bài toán sau :

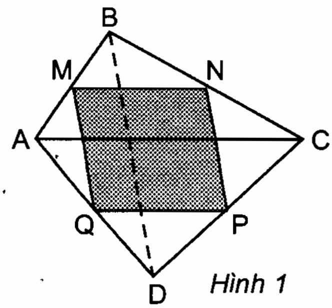
**Bài toán A :** Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là các trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình bình hành. *(Bài 6, trang 24 SGK Hình học 8, NXB Giáo dục 2000)*

*Hướng dẫn*

MN là đường trung bình của tam giác ABC $\Rightarrow$ MN // AC và $MN = \frac{1}{2}AC$

QP là đường trung bình của tam giác ADC $\Rightarrow$ QP // AC và $QP = \frac{1}{2}AC$

Do đó MN // QP và MN = QP $\Rightarrow$ Tứ giác MNPQ là hình bình hành.

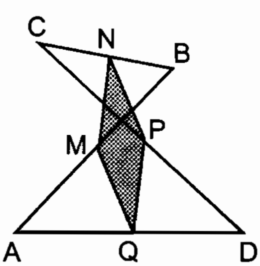



*Hình 1*

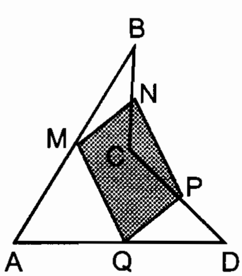
● Câu hỏi được đặt ra : *Liệu tứ giác ABCD không lồi thì tứ giác MNPQ có là hình bình hành không ?*

Dễ thấy hoàn toàn tương tự trên ta chứng minh được tứ giác MNPQ là hình bình hành. Ta có hai bài toán mới.

**Bài toán 1 :** Cho tứ giác ABCD. Gọi M, P lần lượt là trung điểm hai đường chéo AB, DC. N, Q lần lượt là trung điểm các cạnh BC, DA. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình bình hành.




*Hình 2*




*Hình 3*

**Bài toán 2 :** Cho tam giác ABD, C là điểm nằm trong tam giác ABD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Từ bài toán A nhận ra rằng nếu trên các cạnh BC có điểm E, trên cạnh AD có điểm F ($E \neq N$, $F \neq Q$) mà tứ giác MEPF là hình bình hành thì cũng có tứ giác ENFQ là hình bình hành, do vậy giúp ta giải được bài toán hay và khó sau :

**Bài toán 3 :** Cho tứ giác ABCD có M, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD. E và F lần lượt là các điểm thuộc các cạnh BC và DA ($EB \neq EC$, $FA \neq FD$) sao cho tứ giác MEPF là hình bình hành.

Chứng minh rằng BC // AD.

Bài toán A giúp ta giải được bài toán sau :

**Bài toán 4 :** Cho ngũ giác ABCDE, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, DE, AE. H là trung điểm của NQ, K là trung điểm của MP. Chứng minh rằng KH // DC.

Và nếu I, J lần lượt là trung điểm các đường chéo AC, BD, bài toán A và bài toán 1 giúp ta đến với bài toán Giec gôn :

**Bài toán 5 :** Chứng minh rằng đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo và các đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh đối của tứ giác lồi gặp nhau tại một điểm.

Hơn nữa, ta cũng nhận ra rằng ở bài toán A còn có :

$AC \perp BD \Leftrightarrow MN \perp MQ \Leftrightarrow$ MNPQ là hình chữ nhật.

$AC = BD \Leftrightarrow MN = MQ \Leftrightarrow$ MNPQ là hình thoi.

Giúp ta đến với bài toán 6.

**Bài toán 6 :** Gọi M, N, P, Q là các trung điểm các cạnh của tứ giác ABCD. Hai đường chéo AC và BD phải thỏa mãn những điều kiện nào để M, N, P, Q là 4 đỉnh của :

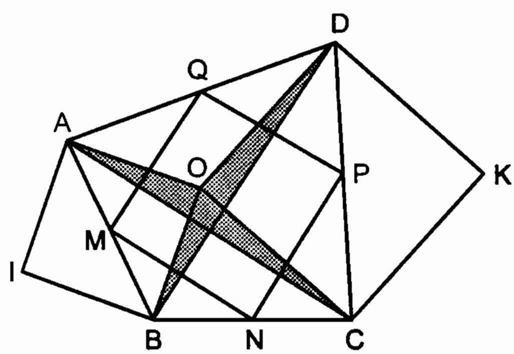
a) Hình chữ nhật ? ; b) Hình thoi ? ; c) Hình vuông ?

(Bài 13, trang 37 SGK Hình học 8, NXB Giáo dục 2000)

Câu c bài toán 6 giúp ta có lời giải bài toán Hay và Khó sau :

**Bài toán 7 :** Cho tam giác OBC. Về phía ngoài tam giác dựng các hình vuông OBIA, OCKD. Gọi M, P lần lượt là tâm của các hình vuông OBIA, OCKD. Và N, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, AD. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình vuông.

Vẽ hình bài toán 7, nhận ra rằng M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác ABCD.




*Hình 4*

Do vậy "chìa khóa vàng" của bài toán là chứng minh $AC = BD$, $AC \perp BD$ điều này có được từ $\Delta OAC = \Delta OBD$ (c - g - c).

Và như vậy từ hình 2 cũng cho ta bài toán mới.

**Bài toán 8 :** Cho tứ giác ABCD, gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AC, CD, BD. Tứ giác ABCD phải thỏa mãn những điều kiện nào để M, N, P, Q là bốn đỉnh của :

a) Hình chữ nhật ? ; b) Hình thoi ? ; c) Hình vuông ?

Tương tự từ hình 3 cũng đến với ta bài toán 9.

**Bài toán 9 :** Cho tam giác ABC, C là điểm nằm trong tam giác ABD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA.

Các điểm A, B, C, D phải thỏa mãn những điều kiện nào để M, N, P, Q là bốn đỉnh của :

a) Hình chữ nhật ? ; b) Hình thoi ? ; c) Hình vuông ?

Và như vậy từ các bài toán : A ; 1 ; 2 ; 6 ; 8 ; 9 có được bài toán tổng quát sau chăng ?

**Bài toán 10 :** Cho bốn điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA.

Các điểm A, B, C, D phải thỏa mãn những điều kiện nào để M, N, P, Q là bốn đỉnh của :

a) Hình chữ nhật ? ; b) Hình thoi ? ; c) Hình vuông ?

Lại nhận ra rằng :

$$S_{MNP} = \frac{1}{2}S_{MNPQ}, S_{MNPQ} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Do vậy $S_{MNP} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$, đến với bài toán Hay và Khó sau :

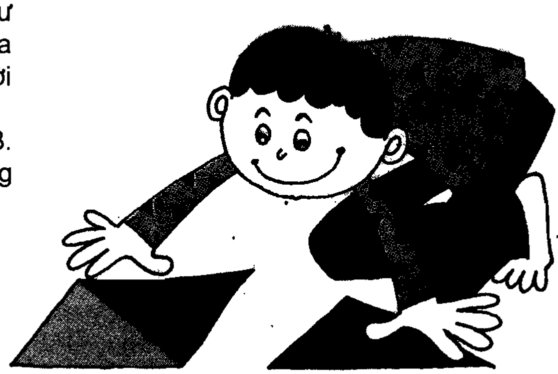
**Bài toán 11 :** Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BD, CD. Chứng minh rằng $S_{MNP} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

Bài toán A chắc chắn còn nhiều điều hấp dẫn và thú vị, nếu ta tiếp tục suy nghĩ và tìm tòi.

# SỬ DỤNG DIỆN TÍCH

## trong chứng minh hình học

NGND. VŨ HỮU BÌNH

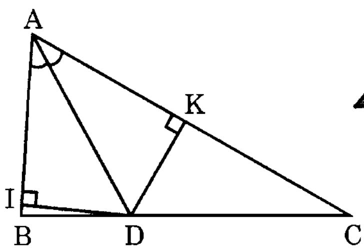


Có nhiều bài toán hình học tưởng như không liên quan đến diện tích, nhưng nếu ta sử dụng diện tích thì lại dễ dàng tìm ra lời giải của bài toán.

**Bài toán 1 :** Tam giác ABC có AC = 2 AB. Tia phân giác của góc A cắt BC ở D. Chứng minh rằng DC = 2 DB.

**Phân tích bài toán** *(h.1)*

Để so sánh DC và DB, có thể so sánh diện tích hai tam giác ADC và ADB có chung đường cao kẻ từ A. Ta so sánh được diện tích hai tam giác này vì chúng có các đường cao kẻ từ D bằng nhau, và AC = 2 AB theo đề bài cho.



*Hình 1*

**Giải :** Kẻ DI ⊥ AB, DK ⊥ AC. Xét ΔADC và ΔADB : các đường cao DI = DK, các đáy AC = 2 AB nên $S_{ADC} = 2\,S_{ADB}$.

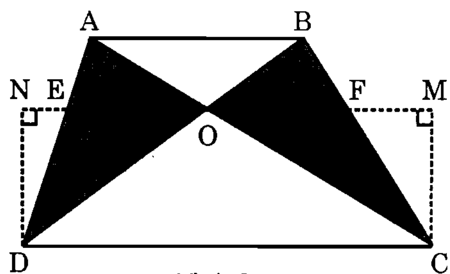
Vẫn xét hai tam giác trên có chung đường cao kẻ từ A đến BC, do $S_{ADC} = 2\,S_{ADB}$ nên DC = 2 DB.

Giải tương tự như trên, ta chứng minh được bài toán tổng quát :

Nếu AD là phân giác của ΔABC thì $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$.

**Bài toán 2 :** Cho hình thang ABCD (AB // CD), các đường chéo cắt nhau tại O. Qua O, kẻ đường thẳng song song với hai đáy, cắt các cạnh bên AD và BC theo thứ tự tại E và F. Chứng minh rằng OE = OF.

**Giải :**



*Hình 2*

***Cách 1 :*** *(h.2)* Kẻ AH, BK, CM, DN vuông góc với EF. Đặt AH = BK = $h_1$, CM = DN = $h_2$.

Ta có :

$$\frac{1}{2}OE.h_1 + \frac{1}{2}OE.h_2 = S_{OEA} + S_{OED} = S_{OAD} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}OF.h_1 + \frac{1}{2}OF.h_2 = S_{OFB} + S_{OFD} = S_{OBC} \quad (2)$$

Ta lại có :

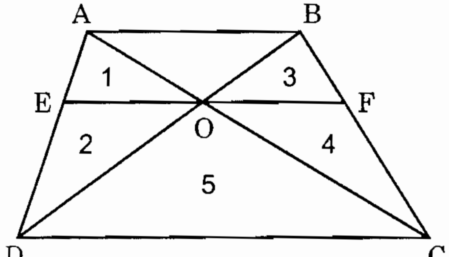
$$S_{ADC} = S_{BDC} \Rightarrow S_{ADC} - S_{ODC} = S_{BDC} - S_{ODC}$$

$$\Rightarrow S_{OAD} = S_{OBC} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}OE.(h_1+h_2)=\frac{1}{2}OF.(h_1+h_2)$$

Do đó OE = OF.

***Cách 2 :*** *(h.3)* Kí hiệu như trên hình vẽ. Ta có $S_{ADC} = S_{BDC}$ .




*Hình 3*

Cùng trừ đi $S_5$ được :

$S_1 + S_2 = S_3 + S_4$ (1)

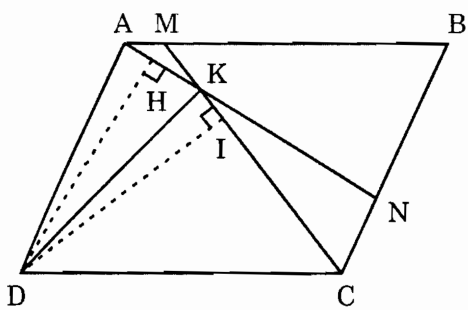
Giả sử OE > OF thì $S_1 > S_3$ và $S_2 > S_4$ nên $S_1 + S_2 > S_3 + S_4$, trái với (1).

Giả sử OE < OF thì $S_1 < S_3$ và $S_2 < S_4$ nên $S_1 + S_2 < S_3 + S_4$, trái với (1).

Vậy OE = OF.

**Bài toán 3 :** Cho hình bình hành ABCD. Các điểm M, N theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC sao cho AN = CM. Gọi K là giao điểm của AN và CM. Chứng minh rằng KD là tia phân giác của góc AKC.

**Giải :** *(h.4)* Kẻ DH ⊥ KA, DI ⊥ KC.




*Hình 4*

Ta có :

DH . AN = 2 $S_{ADN}$ (1)

DI . CM = 2 $S_{CDM}$ (2)

Ta lại có $S_{ADN} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ (tam giác và hình bình hành có chung đáy AD, đường cao tương ứng bằng nhau), $S_{CDM} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

nên $S_{ADN} = S_{CDM}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra DH . AN = DI . CM.

Do AN = CM nên DH = DI. Do đó KI là tia phân giác của góc AKC.

Như vậy khi xét quan hệ giữa độ dài các đoạn thẳng, ta nên xét quan hệ giữa diện tích các tam giác mà cạnh là các đoạn thẳng ấy. Điều đó nhiều khi giúp chúng ta đi đến lời giải của bài toán.

Bạn hãy sử dụng diện tích để giải các bài toán sau :

**1.** Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi M là một điểm bất kì thuộc cạnh đáy BC. Gọi MH, MK theo thứ tự là các đường vuông góc kẻ từ M đến AB, AC. Gọi BI là đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng MH + MK = BI.

*Hướng dẫn :* Hãy chú ý đến

$S_{AMB} + S_{AMC} = S_{ABC}$.

**2.** Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ một điểm M bất kì trong tam giác đều ABC đến ba cạnh của tam giác không phụ thuộc vị trí của M.

*Hướng dẫn :* Hãy chú ý đến

$S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB} = S_{ABC}$.

**3.** Cho tam giác ABC cân tại A. Điểm M thuộc tia đối của tia BC. Chứng minh rằng hiệu các khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng AC và AB bằng đường cao ứng với cạnh bên của tam giác ABC.

*Hướng dẫn :* Hãy chú ý đến

$S_{MAC} - S_{MAB} = S_{ABC}$.

4. Cho hình thang ABCD (AB // CD, AB < CD). Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại O. Gọi F là trung điểm của CD, E là giao điểm của OF và AB. Chứng minh rằng AE = EB.

*Hướng dẫn :* Dùng phương pháp phản chứng.

# TÔI ĐÃ TÌM RA NGƯỜI ANH EM SONG SINH

LƯƠNG THẾ VINH
*(Lớp 10A1, Khối PTCTT, ĐHSPHN)*

Ai cũng biết tính chất của đường phân giác trong của tam giác, thể hiện qua bài toán sau.

**Bài toán 1 :** Cho tam giác ABC, phân giác AD. Chứng minh rằng

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}.$$

Bài toán sau là sự mở rộng của bài toán 1.

**Bài toán 2 :** Cho tam giác ABC. Các điểm M, N thuộc đoạn BC và thỏa mãn điều kiện $\widehat{BAM}=\widehat{CAM}$ . Chứng minh rằng :

$$\frac{MB\,.\,MC}{NB\,.\,NC}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

Có một bài toán khác liên quan đến đường phân giác trong của tam giác và luôn đi cùng với bài toán 1 như hai anh em sinh đôi.

**Bài toán 3 :** Cho tam giác ABC, phân giác AD. Chứng minh rằng :

$$AD^2 = AB\,.\,AC - DB\,.\,DC.$$

Tôi đã biết các bài toán 1, 2, 3 từ thuở học lớp 8 và cũng từ lúc đó tôi đã luôn nghĩ rằng bài toán 2 cũng phải có người anh em sinh đôi của nó. Nhưng cái người anh em ấy của bài toán 2 thì tôi vẫn không hình dung được mặt mũi nó ra sao. Cứ như vậy sau hơn một năm quan tâm và tìm kiếm tôi đã tìm thấy nó, người anh em sinh đôi "thân thiết" của bài toán 2.

**Bài toán 4 :** Cho tam giác ABC, hai điểm M, N thuộc đoạn BC và thỏa mãn điều kiện $\widehat{ABM}=\widehat{ACN}$. Chứng minh rằng :

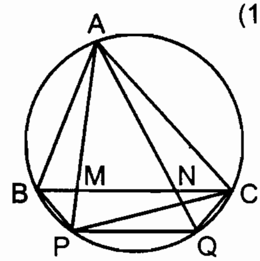
$$AM\,.\,AN = AB\,.\,AC - \sqrt{BM\,.\,BN\,.\,CM\,.\,CN}$$

**Lời giải :** Lấy P, Q là các giao điểm thứ hai

Ta có : $\widehat{BCP}=\widehat{BAP}=\widehat{CAQ}=\widehat{CPQ}$

$\Rightarrow PQ\ //\ BC \Rightarrow \dfrac{AM}{MP}=\dfrac{AN}{NQ}$ (định lí Ta-lét)

$$\Rightarrow \frac{AM}{MP}\cdot\frac{NQ}{AN}=1 \qquad (1)$$




Ta dễ dàng chứng minh một số cặp tam giác đồng dạng và dẫn đến một số đẳng thức như sau :

$\Delta AMC \backsim \Delta BMP \Rightarrow AM\,.\,MP = BM\,.\,CM$ (2)

$\Delta ANB \backsim \Delta CNQ \Rightarrow AN\,.\,NQ = BN\,.\,CN$ (3)

$\Delta AMB \backsim \Delta ACQ \Rightarrow AM\,.\,AQ = AB\,.\,AC$ (4)

Từ đó suy ra :

$\dfrac{AM}{MP}\cdot\dfrac{NQ}{AN}=1$ (theo 1)

$\Rightarrow \dfrac{AM^2}{AM\,.\,MP}\cdot\dfrac{NQ^2}{AN\,.\,NQ}=1$

$\Rightarrow \dfrac{AM^2}{BM.CM}.\dfrac{NQ^2}{BN.CN}=1$ (theo 2, 3)

$\Rightarrow AM\,.\,NQ=\sqrt{BM\,.\,BN\,.\,CM\,.\,CN}$ (5)

$AM\,.\,AN = AM\,.\,AQ - AM\,.\,NQ$

$= AB\,.\,AC - \sqrt{BM\,.\,BN\,.\,CM\,.\,CN}$ (theo 4, 5)

Vậy ta chứng minh xong bài toán.

Mở rộng bài toán : Cho M, N thuộc tia đối của tia BC sao cho $\widehat{BAM}+\widehat{CAN}=180^{\circ}$. Khi đó

$$AM\,.\,AN=\sqrt{BM\,.\,BN\,.\,CM\,.\,CN}-AB\,.\,AC$$

(Lời giải bài toán này gần tương tự như bài toán đầu tiên).

Các bài toán 1, 2, 3, 4 có rất nhiều ứng dụng trong việc giải bài toán khác. Tuy nhiên do khuôn khổ có hạn của bài báo xin

# TỪ MỘT BÀI TOÁN TÍNH TỔNG

TẠ THẬP *(TP Hồ Chí Minh)*

Chúng ta cùng bắt đầu từ bài toán tính tổng rất quen thuộc sau :

**Bài toán A :**

Tính tổng :

$$A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{43.44} + \frac{1}{44.45}$$

**Lời giải :**

$$A = \frac{2-1}{1.2} + \frac{3-2}{2.3} + \ldots + \frac{44-43}{43.44} + \frac{45-44}{44.45}$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{43} - \frac{1}{44} + \frac{1}{44} - \frac{1}{45}$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{45} = \frac{44}{45}$$

Vì 1 . 2 = 2 ; 2 . 3 = 6 ; ... ; 43 . 44 = 1892 ; 44 . 45 = 1980 ta có bài toán khó hơn chút xíu.

**Bài 1 :** Tính tổng :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{1892} + \frac{1}{1980}$$

Và tất nhiên ta cũng nghĩ đến bài toán ngược.

**Bài 2 :** Tìm $x \in N$ biết :

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{44}{45}$$

Hơn nữa ta có :

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} \ ; \ \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} \ ; \ \ldots \ ; \ \frac{1}{45^2} < \frac{1}{44.45}$$

ta có bài toán

**Bài 3 :** Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{45^2} < 1$$

Mà $0 < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{45^2}$ .

Do vậy, cho ta bài toán "TƯỞNG NHƯ KHÓ"

**Bài 4 :** Chứng tỏ rằng tổng :

$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{45^2}$ không phải là số nguyên.

Chúng ta cũng nhận ra rằng nếu $a_1$ ; $a_2$ ; ... ; $a_{44}$ là các số tự nhiên lớn hơn 1 và khác nhau thì

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a_{44}^2} \le \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{45^2}$$

Giúp ta đến với bài toán HAY và KHÓ sau :

**Bài 5 :** Tìm các số tự nhiên khác nhau $a_1$ ; $a_2$ ; $a_3$ ; ... ; $a_{43}$ ; $a_{44}$ sao cho

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a_{43}^2} + \frac{1}{a_{44}^2} = 1$$

Ta còn có các bài toán "gần gũi" với bài toán 5 như sau :

**Bài 6 :** Cho 44 số tự nhiên $a_1$ ; $a_2$ ; ... ; $a_{44}$ thỏa mãn

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a_{43}^2} + \frac{1}{a_{44}^2} = 1$$

Chứng minh rằng, trong 44 số này, tồn tại hai số bằng nhau.

**Bài 7 :** Tìm các số tự nhiên $a_1$ ; $a_2$ ; $a_3$ ; ... ; $a_{44}$ ; $a_{45}$ thỏa mãn $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{44} < a_{45}$ và

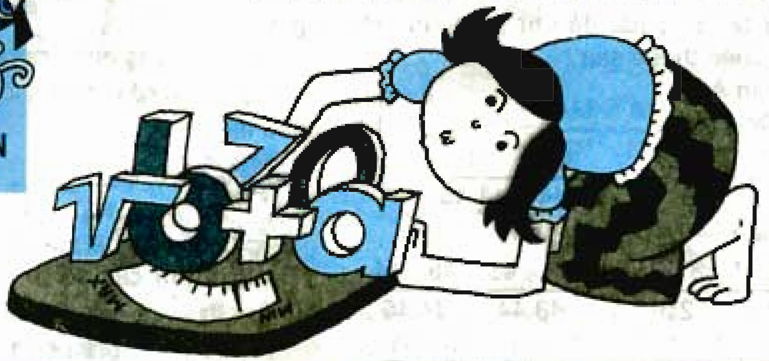
$$\frac{1}{a_1.a_2} + \frac{1}{a_2.a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{42}.a_{43}} + \frac{1}{a_{43}.a_{44}} + \frac{1}{a_{44}.a_{45}} = \frac{44}{45}$$

Các bạn còn phát hiện được điều gì thú vị nữa rồi chăng ?

VƯỢT VŨ MÔN

# DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC
## TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

PHÙNG KIM DUNG *(Trường Hà Nội - Amsterdam)*



Bài toán tìm giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của một hàm số hoặc một biểu thức là dạng toán các bạn thường gặp trong các kì thi, không chỉ ở bậc THCS mà sau này các bạn vẫn gặp ở bậc THPT. Tất nhiên ở mỗi bậc học, bài toán được đặt ra với các mức độ khác nhau. Ở bài viết này xin bước đầu trao đổi với các bạn một chút kinh nghiệm sử dụng bất đẳng thức để giải quyết loại toán này.

Kiến thức cơ bản cần biết để sử dụng là :

● Với a, b $\ge 0$ thì $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ (*) và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b. Đây chính là bất đẳng thức Côsi trong trường hợp 2 số. Các bạn có thể suy từ bất đẳng thức hiển nhiên đúng : $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \ge 0$.

● Với mọi a, b thì $|a|+|b| \ge |a+b|$ (**) và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ab \ge 0$. Các bạn chỉ cần bình phương hai vế để có bất đẳng thức tương đương và hiển nhiên đúng.

● Với các số a, b, c, d tùy ý ta có

$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) \ge (ac+bd)^2$ (***) và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ad = bc. Đây chính là bất đẳng thức Bunhiacôpski đối với hai cặp số. Các bạn có thể suy ngay ra bất đẳng thức này dựa vào hằng đẳng thức

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$$

● Cho $a \ne 0$: $f(x) = ax^2+bx+c$

$$= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$$

Do đó :

- Nếu a > 0 thì $f(x) \ge \dfrac{4ac-b^2}{4a}$ với mọi x và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = -\dfrac{b}{2a}$.

- Nếu a < 0 thì $f(x) \le \dfrac{4ac-b^2}{4a}$ với mọi x và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Bây giờ các bạn theo dõi các thí dụ :

*Thí dụ 1 :* Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^4+2x^2+2}{x^2+1}$

*Lời giải :* Thực hiện phép chia tử thức cho mẫu thức ta viết được

$$y = x^2+1+\frac{1}{x^2+1}$$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có :

$$y = x^2+1+\frac{1}{x^2+1} \ge 2\sqrt{\left(x^2+1\right).\frac{1}{x^2+1}} = 2$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x^2+1=\dfrac{1}{x^2+1}$

$\Leftrightarrow (x^2+1)^2=1 \Leftrightarrow x^2+1=1 \Leftrightarrow x=0$

Vậy y đạt giá trị nhỏ nhất là 2 khi và chỉ khi x = 0.

*Thí dụ 2 :* Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=|x-2003|+|x+2003|$

*Lời giải :* Áp dụng bất đẳng thức (**) với a = x + 2003 và b = 2003 - x ta có

$$y=|x-2003|+|x+2003|$$
$$=|2003-x|+|x+2003|$$
$$\geq |(2003-x)+(x+2003)|=4006$$

Đẳng thức xảy ra

$\Leftrightarrow (2003-x)(x+2003)\geq 0$

$\Leftrightarrow -2003\leq x\leq 2003$

Do đó y đạt giá trị nhỏ nhất là 4006 $\Leftrightarrow -2003\leq x\leq 2003$

*Chú ý :* Nhiều bạn lại áp dụng với a = x + 2003 và b = x - 2003 thì ... chưa được gì. Bởi khi đó ta có

$$y\geq |(x-2003)+(x+2003)|=|2x|=2|x|$$

Vì 2|x| không phải là hằng số nên dù đẳng thức có xảy ra thì cũng không kết luận được gì về giá trị nhỏ nhất của y.

*Thí dụ 3 :* Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=-2001x^2+2002x-2003$.

*Lời giải :* Như phần kiến thức đã trình bày ở trên, ta viết

$$y=-2001\left[x^2-\frac{2002}{2001}x+\frac{2003}{2001}\right]$$
$$=-2001\left[\left(x-\frac{1001}{2001}\right)^2+\frac{3006002}{2001^2}\right]$$
$$=-2001\left(x-\frac{1001}{2001}\right)^2-\frac{3006002}{2001}$$
$$\leq -\frac{3006002}{2001} \text{ với mọi x.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=\dfrac{1001}{2001}$ nên y đạt giá trị nhỏ nhất là $-\dfrac{3006002}{2001}$.

*Chú ý :* Khi gặp đa thức nhiều ẩn, các bạn có thể tạm coi đa thức là một ẩn với một ẩn nào đó và thực hiện cách biến đổi tương tự cũng sẽ giải quyết được bài toán.

*Thí dụ 4 :* Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2-xy-x+y+1$

Lời giải : Ta viết

$$P=x^2-x(y+1)+(y^2+y+1)$$
$$=\left(x-\frac{y+1}{2}\right)^2+(y^2+y+1)-\left(\frac{y+1}{2}\right)^2$$
$$=\left(x-\frac{y+1}{2}\right)^2+\frac{3y^2+2y+3}{4}$$
$$=\left(x-\frac{y+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(y^2+\frac{2}{3}y+1\right)$$
$$=\left(x-\frac{y+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left[\left(y+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}\right]$$
$$=\left(x-\frac{y+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(y+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$$

Do đó $P\geq\dfrac{2}{3}$ với mọi x, y.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x-\dfrac{y+1}{2}=0 \\ y+\dfrac{1}{3}=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$ và $y=-\dfrac{1}{3}$.

Từ đó ta có giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{2}{3}$.

*Chú ý :* Nhiều bạn có "sáng kiến" viết $P=\dfrac{1}{2}(2x^2+2y^2-2xy-2x+2y+2)$

$=\dfrac{1}{2}\left[(x-y)^2+(x-1)^2+(y+1)^2\right]\geq 0$ với mọi x, y.

Tuy nhiên bất đẳng thức trên không thể

trở thành đẳng thức. Ta không được gì, ngoài việc biết được giá trị nhỏ nhất của P, nếu tồn tại sẽ là một số ... dương (!). Các bạn chớ thấy bất đẳng thức trên không trở thành đẳng thức mà vội vàng "liều lĩnh" kết luận : P không có giá trị nhỏ nhất (?).

*Thí dụ 5 :* Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$

*Lời giải :* Tập xác định của hàm số là $0 \le x \le 2$

Ta có $y^2 = 2 + 2\sqrt{x(2-x)} \ge 2$ với mọi x thuộc tập xác định. Vì $y \ge 0$ nên từ $y^2 \ge 2$ suy ra $y \ge \sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$. Do đó GTNN của y là $\sqrt{2}$ .

Áp dụng bất đẳng thức (***) với $a = b = 1$ ; $c = \sqrt{x}$ ; $d = \sqrt{2-x}$ ta có :

$$y^2 = \left(\sqrt{x} + \sqrt{2-x}\right)^2 \le \left(1^2 + 1^2\right)\left[x + (2-x)\right] = 4$$

$\Rightarrow y \le 2$ . Đẳng thức xảy ra

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2-x} \Leftrightarrow x = 1.$

Do đó GTLN của y là 2.

Mức độ khó hơn, các bạn có thể tham khảo các bài toán dưới đây :

*Thí dụ 6 :* Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^3 + 8x$.

*Lời giải :* Ta có

$y = \left(x^4 - 4x^3 + 4x^2\right) - 4\left(x^2 - 2x\right)$

$= \left(x^2 - 2x\right)^2 - 4\left(x^2 - 2x\right)$

$= \left[\left(x^2 - 2x\right) - 2\right]^2 - 4 \ge -4$ với mọi x.

Đẳng thức xảy ra

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$ . Do đó giá trị nhỏ nhất của y là -4, khi và chỉ khi $x = 1 \pm \sqrt{3}$

*Thí dụ 7 :* Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x\sqrt{4-x^2}$

*Lời giải :* Căn thức có nghĩa

$\Leftrightarrow 4 - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 \le 4 \Leftrightarrow |x| \le 2$

$\Leftrightarrow -2 \le x \le 2$

Ta có $|y| = |x|\sqrt{4-x^2} = \sqrt{x^2\left(4-x^2\right)}$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức (*) với $a = x^2$ và $b = 4 - x^2$ ta có

$$|y| = \sqrt{x^2\left(4-x^2\right)} \le \frac{x^2 + \left(4-x^2\right)}{2} = 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $|y| \le 2 \Rightarrow -2 \le y \le 2$

GTLN của y là 2 $\Leftrightarrow x = \sqrt{2}$

GTNN của y là -2 $\Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$

Các bạn hãy tự luyện tập thêm qua các bài toán :

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

*a.* $y = |2x-1| + |2x+5|$

*b.* $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2003}{x^2}$

*c.* $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

*d.* $y = \sqrt{3-x} + \sqrt{4+x}$

*e.* $y = |2x - 2002| + |x + 2003|$

2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

*a.* $y = \sqrt{4-x} + \sqrt{2+x}$

*b.* $y = (x+1)\sqrt{3 - 2x - x^2}$

*c.* $y = \dfrac{x}{(x+2003)^2}$

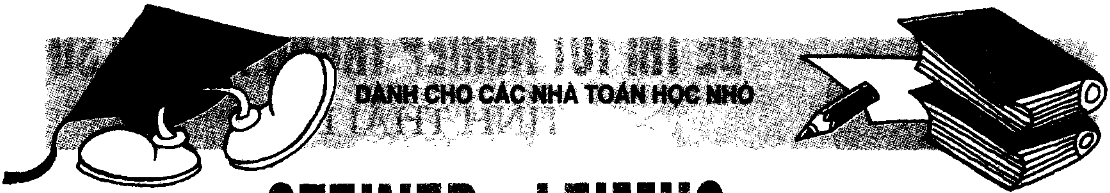
3. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x^2 + 2y^2 - 2xy + 2(x - 2y + 1)$

4. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

*a.* $y = x + \sqrt{1-x^2}$

*b.* $y = 3\sqrt{x-1} + 4\sqrt{5-x}$

*c.* $y = \dfrac{x^4+1}{\left(x^2+1\right)^2}$




# Bài toán STEINER - LEIMUS chưa dừng lại

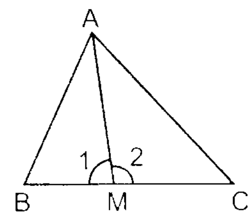
TS. NGUYỄN MINH HÀ *(ĐHSP Hà Nội)*

Sau khi đọc bài viết ở tạp chí số 1, chắc là rất nhiều bạn cho rằng, những yêu cầu mà D. Ch. L Leimus đặt ra cho J. Steiner đã được giải quyết trọn vẹn. Cuộc tìm kiếm nỗ lực của biết bao người trong hơn một trăm năm qua có thể đã tới hồi kết thúc. Vâng, chính tôi cũng đã từng nghĩ vậy. Nhưng ! Cũng lại chính tôi, gần đây, đã nhận thấy rằng, vấn đề vẫn chưa kết thúc, bài toán 2 chỉ là hệ quả của bài toán tổng quát sau.

**Bài toán 3 :** Cho tam giác ABC, phân giác AD. I là điểm bất kì trên đoạn AD. BI, CI theo thứ tự cắt AC, AB tại E, F. Biết rằng $\hat{B} \le \hat{C}$. Chứng minh rằng $BE \ge CF$.

Bài toán 3 được chứng minh thông qua bổ đề 2 sau.

***Bổ đề 2 :*** Cho tam giác ABC. M là một điểm thuộc đoạn BC. Khi đó : AM < max {AB, AC}.



*(h.4)*

*Chứng minh :*

Ta có :

$$\widehat{M_1} + \widehat{M_2} = 180^\circ \ (h.4)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \widehat{M_1} \ge 90^\circ \\ \widehat{M_2} \ge 90^\circ \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} AB > AM \\ AC > AM \end{array}\right.$$

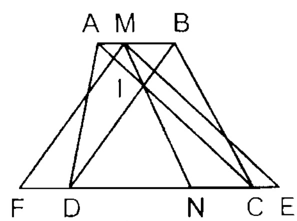
$$\Rightarrow \max\{AB, AC\} > AM.$$

Bổ đề 2 đã được chứng minh.

***Bổ đề 3 :*** Cho tứ giác ABCD. Các đường chéo cắt nhau tại I. Một đường thẳng đi qua I, cắt các cạnh AB, CD theo thứ tự tại M, N. Khi đó : MN < max {AC, BD}.

*Chứng minh :*

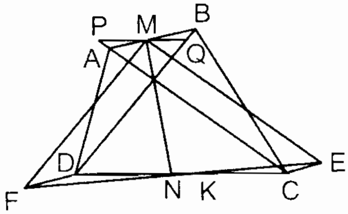
<u>Trường hợp 1 :</u> AB, CD song song. *(h.5)*



*(h.5)*

Qua M, kẻ các đường thẳng song song với AC, BD. Chúng theo thứ tự cắt đường thẳng BC tại E, F.Theo bổ đề 2, MN < max {ME, MF} ⇒ MN < max {AC, BD}.

· <u>Trường hợp 2 :</u> AB, CD không song song. Không mất tính tổng quát, giả sử giao điểm của AB, CD nằm trên tia đối của các tia AB, DC *(h.6)*. Dựng các hình bình hành ACEM, BDFM. Đặt K = CD ∩ EF. Dễ thấy K thuộc các đoạn CD, EF. Qua M, dựng đường thẳng song song với CD. Đường thẳng này theo thứ tự cắt AC, BD tại P, Q. Dễ thấy, P thuộc tia đối của tia AC, Q thuộc đoạn BI. Từ đó suy ra :



*(h.6)*

$$\begin{cases} IP > IA \\ IQ > IB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S(IMP) > S(IMA) \\ S(IMQ) < S(IMB) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{S(IMP)}{S(IMQ)} > \frac{S(IMA)}{S(IMB)}$$

$$\Rightarrow \frac{MP}{MQ} > \frac{MA}{MB} \Rightarrow \frac{NC}{ND} > \frac{EC}{FD}$$

$$\Rightarrow \frac{NC}{ND} > \frac{KC}{KD} \Rightarrow \frac{NC}{ND} + 1 > \frac{KC}{KD} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{ND} > \frac{CD}{KD} \Rightarrow KD > ND$$

⇒ N ∈ đoạn KD ⇒ N thuộc tam giác AEF.

Theo bổ đề 3, ta có : MN < max {ME, MF} ⇒ MN < max {AC, BD}.

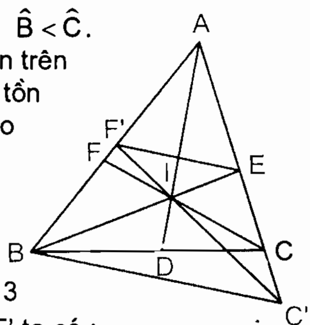
Tóm lại, trong cả hai trường hợp, ta đều có : MN < max {AC, BD}.

Trở lại việc chứng minh bài toán 3.

<u>Trường hợp 1 :</u> $\hat{B} = \hat{C}$. Dễ thấy BE = CF.

<u>Trường hợp 2 :</u> $\hat{B} < \hat{C}$.

Ta có AB > AC nên trên tia đối của tia CA tồn tại điểm C' sao cho AC' = AB. Đặt F' = AB ∩ IC'. Dễ thấy, C'F' = BE (1).




Áp dụng bổ đề 3 cho tứ giác BC'EF' ta có :

CF < max {BE, C'F'} (2).

Từ (1) và (2) suy ra : BE > CF. Bài toán 3 đã được chứng minh.

Trong bài toán 3, nếu cho I trùng tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC thì ta lại nhận được bài toán 2. Cũng nên chú ý rằng, trong phép chứng minh bài toán 2 ta phải dùng đến kiến thức của hình học 9 (tứ giác nội tiếp) nhưng trong phép chứng minh bài toán 3 ta lại chỉ cần đến kiến thức của hình học 8 (định lí Talét).

Bạn đọc thân mến ! Kể từ năm 1840, khi mà D. Ch. L Leimus gửi thư cho J. Steiner, đến nay đã quá một trăm năm mươi năm. Từ cách chứng minh của J. Steiner đến cách chứng minh của R. W. Hegy, từ bài toán 1 đến bài toán 3, khát vọng vươn tới cái đơn giản nhất, cái tổng quát nhất của con người đã dần dần được thực hiện. Nhưng có lẽ, quá trình này chưa dừng lại ở đây. Hi vọng rằng, một ngày nào đó, một bạn đọc nào đó của Toán Tuổi thơ 2 lại đưa ra một phép chứng minh mới, đơn giản hơn phép chứng minh của R. W. Hegy, lại đưa ra và chứng minh một bài toán mới tổng quát hơn bài toán 3.

Để kết thúc, xin giới thiệu với bạn đọc một số bài toán gần gũi với những vấn đề đặt ra trong bài toán này.

**Bài toán 4 :** Cho tam giác ABC có các đường trung tuyến BM, CN. Biết rằng $\hat{B} \le \hat{C}$. Chứng minh rằng :

a) BM ≥ CN.

b) BM + MC ≥ CN + NB.

**Bài toán 5 :** Hãy mở rộng bài toán 4.

**Bài toán 6 :** Cho tam giác ABC có các đường cao BH, CK. Biết rằng $\hat{B} \le \hat{C}$. Chứng minh rằng :

a) BH ≥ CK.

b) BH + AC ≥ CK + AB.

**Bài toán 7 :** Cho tam giác nhọn ABC, đường cao AD, trực tâm H. Điểm M thuộc đoạn HD. BM, CM theo thứ tự cắt AC, AB tại B', C'. Biết rằng $\hat{B} \le \hat{C}$. Chứng minh rằng : BB' ≥ CC'.

**Bài toán 8 :** Cho tam giác nhọn ABC. Biết rằng đường cao AH, phân giác BE, trung tuyến CM có độ dài bằng nhau. Chứng minh rằng : tam giác ABC đều.

# HỌC MỘT BIẾT MƯỜI

VÕ NGỌC PHAN *(Trường Đặng Thai Mai, TP Vinh)*

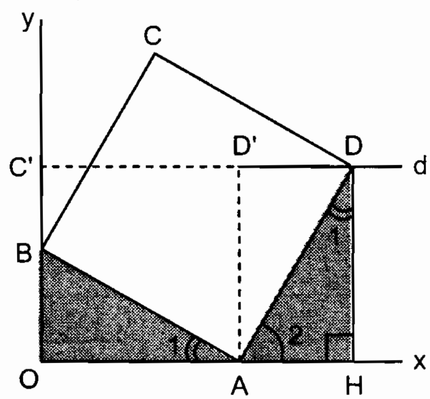
Rèn luyện tính độc lập, sáng tạo là yêu cầu để phát huy phẩm chất của người lao động. Vì thế các bạn cần tập suy luận và sáng tạo, phát hiện những bài toán mới, những vấn đề mới, xuất phát từ những bài toán đã biết.

Xét *bài toán 19, trang 38, Hình học 8* :

Cho một góc vuông $\widehat{xOy}$. Trên tia Ox ta lấy điểm A cố định sao cho OA = a, trên tia Oy ta lấy điểm B di động. Vẽ trong $\widehat{xOy}$ hình vuông ABCD.

a) Tính khoảng cách từ D tới Ox.

b) Tìm tập hợp (quỹ tích) các điểm D khi B di động.




**Lược giải :** a) Kẻ DH $\perp$ Ox. $\widehat{D_1} = \widehat{A_1}$ (phụ với $\widehat{A_2}$), DA = AB (cạnh hình vuông)

$\Rightarrow \Delta DHA = \Delta AOB$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow$ DH = AO = a.

b) D cách Ox một khoảng bằng a không đổi nên D $\in$ d//Ox, cách Ox một khoảng bằng a.

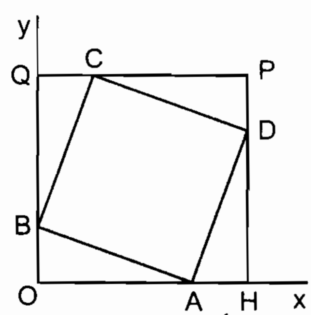
Giới hạn : Khi B $\equiv$ O thì hình vuông ABCD trở thành hình vuông AOC'D' $\Rightarrow$ D $\equiv$ D' $\Rightarrow$ tập hợp D là tia đối của tia D'C'.

● Khi D $\equiv$ D' thì hình vuông ABCD trở thành hình vuông AOC'D'. Hình vuông này có diện tích nhỏ nhất và bằng $a^2$. Do đó có thể thay bài toán quỹ tích bằng bài toán cực trị.

**Bài toán 1 :** Cho góc vuông $\widehat{xOy}$. Trên tia Ox lấy điểm A cố định sao cho OA = a, trên tia Oy lấy điểm B di động. Vẽ trong $\widehat{xOy}$ hình vuông ABCD. Xác định vị trí của đỉnh D để hình vuông ABCD có diện tích nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó theo a.

● Nếu từ C và D kẻ các đường thẳng lần lượt song song với Ox và Oy thì hình tạo thành cũng là hình vuông ngoại tiếp hình vuông ABCD. Ta có bài toán khác.

**Bài toán 2 :** Cho góc vuông $\widehat{xOy}$. Trên tia Ox lấy điểm A, trên tia Oy lấy điểm B (tùy ý, khác O). Vẽ hình vuông ABCD. Qua C và D dựng các đường thẳng lần lượt song song với Ox và Oy, chúng cắt nhau tại P và lần lượt cắt Oy tại Q, Ox tại H.




a) Chứng minh tứ giác OHPQ là hình vuông.

b) Chứng minh tâm đối xứng của hai hình vuông ABCD và OHPQ trùng nhau.

● Bài toán 2 là trường hợp riêng của *bài* *toán 8, trang 54, SGK Hình học 8.* Giải được bài 8, tức là bài toán 2 ở trên đã được giải quyết.

*Bài toán 8 Sách giáo khoa là :*

Cho hai hình bình hành, mỗi cạnh của hình thứ nhất chứa một đỉnh của hình thứ hai. Chứng minh rằng hai hình bình hành đó cùng có một tâm đối xứng.

● Từ bài toán 1, thêm giả thiết : H là chân đường vuông góc hạ từ D xuống Ox. Có thể cho phát hiện sự liên hệ giữa chu vi tam giác OAB và độ dài cạnh hình vuông ABCD. Từ đó ta có :

**Bài toán 3 :** Cho góc vuông $\widehat{xOy}$. Trên tia Ox lấy điểm A cố định, điểm B di động trên tia Oy. Vẽ trong $\widehat{xOy}$ hình vuông ABCD. Gọi H là hình chiếu của D trên Ox. Chứng minh rằng chu vi tam giác OAB < 2m, với m là độ dài đoạn thẳng OH.

**Lược giải :**

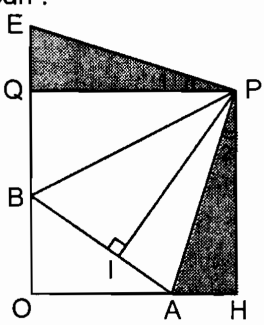
$\Delta DHA = \Delta AOB \Rightarrow OB = AH$

$\Rightarrow OA + OB = OH = m$

Trong $\Delta OAB$ : $AB < OA + OB = m$, chu vi $\Delta OAB$ : $OA + OB + AB < m + m = 2m$.

● **Điều gì sẽ xảy ra nếu chu vi $\Delta OAB$ = 2m ? Ta có bài toán :**

**Bài toán 4 :** Cho hình vuông OHPQ có cạnh bằng m. A, B lần lượt là các điểm trên các cạnh OH, OQ sao cho chu vi $\Delta OAB$ = 2m. Chứng minh $\widehat{APB} = 45^o$, khi A, B di động.




**Lược giải :** Kẻ PE ⊥ PA, với E nằm trên tia OQ.

Ta có $\widehat{P_1} = \widehat{P_2}$ (cùng phụ với $\widehat{APQ}$), PQ = PH ;

$\hat{Q} = \hat{H} = 90^o \Rightarrow \Delta PQE = \Delta PHA$ (g. c. g)

$\Rightarrow QE = AH$ ; $PE = PH$.

Chu vi $\Delta OAB$ : $OA + OB + AB = 2m = OH + OQ \Rightarrow OA + OB + AB = (OA + AH) + (OB + BQ)$

$\Rightarrow AB = AH + BQ = QE + BQ = BE$

$\Rightarrow \Delta BPA = \Delta BPE$ (c. c. c) $\Rightarrow \widehat{BPA} = \widehat{BPE}$

$\Rightarrow \widehat{BPA} = \frac{1}{2}\widehat{APE} \Rightarrow \widehat{APB} = \frac{1}{2}.90^o = 45^o$

● Nếu $\widehat{APB} = 45^o$ quay xung quanh P, nhưng luôn cắt hai cạnh OH và OQ của hình vuông thì chu vi $\Delta OAB$ có luôn luôn bằng 2m không ? Ta có bài toán ngược :

**Bài toán 5 :** Cho hình vuông OHPQ. A, B là các điểm di động lần lượt trên các cạnh OH, OQ sao cho $\widehat{APB} = 45^o$. Chứng minh chu vi $\Delta OAB$ không đổi.

● Vì $\Delta PBA = \Delta PBE$ nên các đường cao PQ và PI của hai tam giác bằng nhau. Thế thì PE bằng một giá trị không đổi. Ta có bài toán :

**Bài toán 6 :** Cho A và B theo thứ tự di động trên các cạnh OH, OQ của hình vuông OHPQ, sao cho $\widehat{APB} = 45^o$. Tìm quỹ tích chân đường vuông góc hạ từ P xuống AB.

● Xét A là trung điểm của OH. Hình vuông OHPQ có xác định được không, nếu biết A và P. Ta có bài toán :

**Bài toán 7 :** Dựng hình vuông, biết một đỉnh A và trung điểm của một cạnh không chứa A.

Từ bài toán 7, có thể dẫn đến bài toán :

**Bài toán 8 :** Cho A là trung điểm cạnh OH của hình vuông OHPQ. Tia At qua A và vuông góc với PA, cắt OQ tại B. Chứng minh PA là tia phân giác $\widehat{BPH}$.

Đảo một phần giả thiết thành kết luận và đưa kết luận thành giả thiết thì vẫn đúng. Ta có bài toán "ngược" :

**Bài toán 9 :** Cho A là trung điểm cạnh OH của hình vuông OHPQ. Trên cạnh OQ lấy điểm B sao cho $\widehat{BPA} = \widehat{APH}$. Chứng minh AB vuông góc PA.

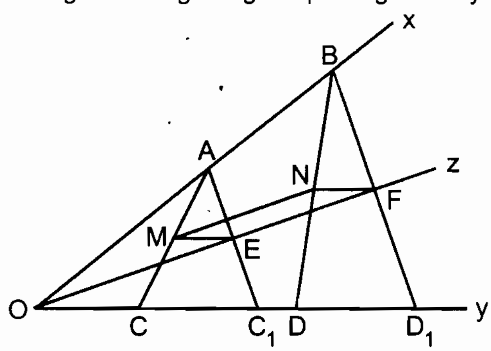
Với tinh thần luôn đào sâu suy nghĩ thì các bạn sẽ thực hiện được mục tiêu : **Học một, biết mười.**

# MỘT PHƯƠNG PHÁP VẼ ĐƯỜNG PHỤ

TS. LÊ QUỐC HÁN
*(ĐH Vinh)*

Trong quá trình học toán ở bậc THCS, có lẽ hấp dẫn nhất và khó khăn nhất là việc vượt qua các bài toán hình học, mà để giải chúng cần phải vẽ thêm các đường phụ. Trong bài báo này, tôi xin nêu một phương pháp thường dùng để tìm ra các đường phụ cần thiết khi giải toán hình học : Xét các vị trí đặc biệt của các yếu tố hình học có trong bài toán cần giải.

**Bài toán 1 :** Cho góc xOy. Trên Ox lấy hai điểm A, B và trên Oy lấy hai điểm C, D sao cho AB = CD. Gọi M và N là trung điểm của AC và BD. Chứng minh đường thẳng MN song song với phân giác $\widehat{xOy}$.




*Hình 1*

Suy luận : Vị trí đặc biệt nhất của CD là khi CD đối xứng với AB qua Oz, phân giác $\widehat{xOy}$.

Gọi $C_1$ và $D_1$ là các điểm đối xứng của A và B qua Oz ; E và F là các giao điểm của $AC_1$ và $BD_1$ với Oz. Khi đó E và F là trung điểm của $AC_1$ và $BD_1$, và do đó vị trí của MN sẽ là EF. Vì vậy ta chỉ cần chứng minh MN // EF là đủ *(xem hình 1)*.

Thật vậy, do AB = CD (gt), $AB = C_1D_1$ (tính chất đối xứng) nên $CD = C_1D_1$ $\Rightarrow CC_1 = DD_1$. Mặt khác ME và NF là đường trung bình của các tam giác $ACC_1$ và $BDD_1$ nên $NF \overset{//}{=} \frac{1}{2}DD_1$ , $ME \overset{//}{=} \frac{1}{2}CC_1$ $\Rightarrow ME \overset{//}{=} NF \Rightarrow$ tứ giác MEFN là hình bình hành $\Rightarrow$ MN // EF $\Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 1 có nhiều biến dạng" rất thú vị, sau đây là một vài biến dạng của nó, đề nghị các bạn giải xem như những bài tập nhỏ ; sau đó hãy đề xuất những “biến dạng” tương tự.

**Bài toán 2 :** Cho tam giác ABC. Trên AB và CD có hai điểm D và E chuyển động sao cho BD = CE. Đường thẳng qua các trung điểm của BC và DE cắt AB và AC tại I và J. Chứng minh $\Delta AIJ$ cân.

**Bài toán 3 :** Cho tam giác ABC, $AB \neq AC$. AD và AE là phân giác trong và trung tuyến của tam giác ABC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt AB và AC tại M và N. Gọi F là trung điểm của MN. Chứng minh AD // EF.

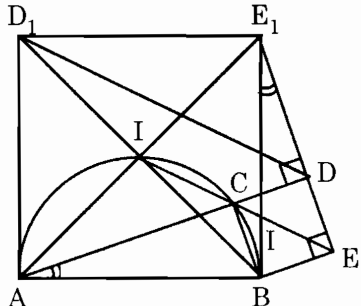
Trong việc giải các bài toán chứa các điểm di động, việc xét các vị trí đặc biệt càng tỏ ra hữu ích, đặc biệt là các bài toán “tìm tập hợp điểm”.

**Bài toán 4 :** Cho nửa đường tròn đường kính AB cố định và một điểm C chuyển động trên nửa đường tròn đó. Dựng hình vuông BCDE. Tìm tập hợp C, D và tâm hình vuông.

Ta xét trường hợp hình vuông BCDE “nằm ngoài” nửa đường tròn đã cho (trường hợp hình vuông BCDE nằm trong đường tròn đã cho được xét tương tự, đề nghị các bạn tự làm lấy xem như bài tập).

Suy luận : Xét trường hợp $C \equiv B$. Khi đó hình vuông BCDE sẽ thu lại một điểm B và các điểm I, D, E đều trùng với B, trong đó I là tâm hình vuông BCDE. Vậy B là một điểm thuộc các tập hợp cần tìm.

Xét trường hợp $C \equiv A$. Dựng hình vuông $BAD_1E_1$ khi đó $D \equiv D_1$, $E \equiv E_1$ và $I \equiv I_1$ (trung điểm $\overset{\frown}{AB}$ ). Trước hết, ta tìm tập hợp E. Vì B và $E_1$ thuộc tập hợp cần tìm nên ta nghĩ ngay đến việc thử chứng minh $\widehat{BEE_1}$ không đổi. Điều này không khó vì $\widehat{ACB} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) và $\Delta BEE_1 = \Delta BCA$ (c. g. c) $\Rightarrow \widehat{BEE_1} = \widehat{BCA} = 90^o \Rightarrow$ E nằm trên nửa đường tròn đường kính $BE_1$ ( 1 / 2 đường tròn này và 1/2 đường tròn đã cho nằm ở hai nửa mặt phẳng khác nhau với “bờ” là đường thẳng $BE_1$).



*Hình 2*

Vì $\widehat{DEB} = \widehat{E_1EB} = 90^o$ nên D nằm trên $EE_1$ *(xem hình 2)*

$\Rightarrow \widehat{ADE_1} = 90^o = \widehat{ABE_1} \Rightarrow$ D nằm trên đường tròn đường kính $AE_1$, nhưng $ABE_1D_1$ là hình vuông nên đường tròn đường kính $AE_1$ cũng là đường tròn đường kính $BD_1$. Chú ý rằng B và $D_1$ là các vị trí giới hạn của tập hợp cần tìm, ta suy ra tập hợp D là nửa đường tròn đường kính $BD_1$ (nửa đường tròn này và điểm A ở về hai nửa mặt phẳng khác nhau với bờ là đường thẳng $BD_1$).

Cuối cùng, để tìm tập hợp I, ta cần chú ý $II_1$ là đường trung bình của $\Delta BDD_1$ nên $II_1$ // DD1 $\Rightarrow \widehat{BII_1} = 90^o \Rightarrow$ tập hợp I là nửa đường tròn đường kính $BI_1$ (đường tròn này và A ở về hai nửa mặt phẳng khác nhau với bờ là $BD_1$).

Để kết thúc, xin mời bạn giải bài toán sau đây :

**Bài toán 5 :** Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB cố định và 1 điểm C chuyển động trên nửa đường tròn đó. Kẻ $CH \perp AB$. Trên đoạn thẳng OC lấy điểm M sao cho OM = CH. Tìm tập hợp M.

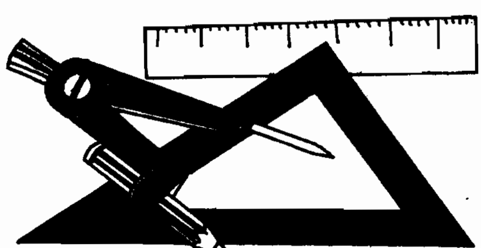
# DỰNG HÌNH BẰNG DỤNG CỤ HẠN CHẾ

ThS. VŨ QUỐC LƯƠNG *(Hà Nội)*

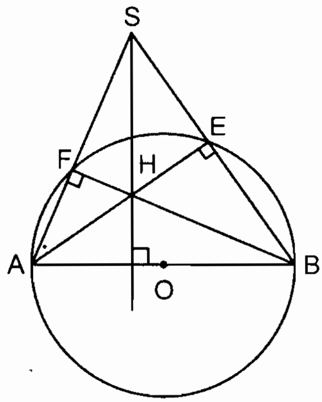
Các em đều biết rằng : Các bài toán dựng hình ở trường phổ thông chỉ được sử dụng hai dụng cụ là : compa và thước thẳng để dựng hình (theo quy ước từ thời cổ Hi Lạp). Tuy nhiên trong các cuộc thi học sinh giỏi toán hoặc "đố vui học tập" thỉnh thoảng vẫn có những bài toán dựng hình đòi hỏi chỉ dựng bằng một dụng cụ là thước thẳng hoặc compa. Những bài toán này rất thú vị, bổ ích và đòi hỏi nhiều sự thông minh sáng tạo trong việc vận dụng các kiến thức đã học. Các nhà toán học cũng đã nghiên cứu khá sâu sắc các bài toán này.

Nhà toán học Ý : Máckêrôni (1750 - 1800) và nhà toán học Đan Mạch : MoRơ (1640 - 1697) chuyên nghiên cứu các bài toán dựng hình chỉ bằng compa. Đến 1890 nhà toán học Áo Adler đã chứng minh rằng : Mọi bài toán dựng hình giải được bằng compa và thước thẳng đều giải được với một mình compa thôi.

Ngược lại nhà toán học Thụy Sĩ Iacốp Stây Ne (1796 - 1863) lại chỉ nghiên cứu những bài toán dựng hình bằng thước thẳng. Ông đã chứng minh được rằng : Mọi bài toán dựng hình (hình học phẳng) bằng compa và thước thẳng giải được, đều có thể dựng được chỉ bằng một thước thẳng nếu trên mặt phẳng cho một đường tròn và tâm của nó. Xin giới thiệu với các em một vài bài toán như vậy.



**Bài toán 1 :** Cho đường tròn đường kính AOB và một điểm S ở ngoài đường tròn. Chỉ dùng một thước thẳng hãy dựng một đường thẳng đi qua S và vuông góc với AB.




*Hình 1*

**Giải** : Nối SA cắt (O) tại F *(xem hình 1)*.

Nối SB cắt (O) tại E.

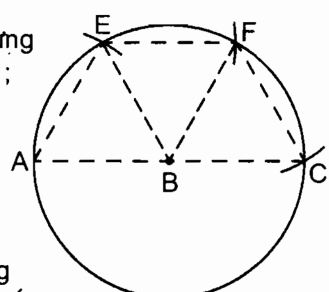
Nối AE cắt BF tại H. Đường thẳng SH là đường thẳng cần dựng.

**Bài toán 2 :** Trên mặt phẳng cho 2 điểm A, B. Chỉ dùng compa hãy dựng hai điểm có khoảng cách gấp đôi độ dài AB (chú ý là cho 2 điểm A, B nhưng chưa có đường thẳng chứa A và B).

**Giải** : - Dựng đường tròn (B ; BA) *(xem hình 2)*

- Dựng đường tròn (A ; AB) cắt đường tròn trên ở E.

- Dựng đường tròn (E ; EA) cắt đường tròn (B) ở F.



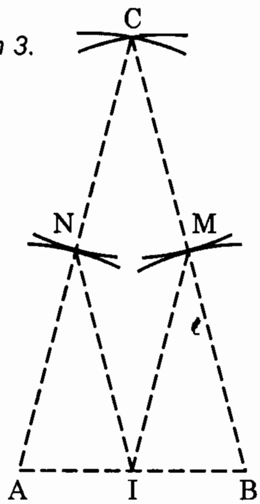

*Hình 2*

- Dựng đường tròn (F ; FE) cắt đường tròn (B) ở C.

Dễ dàng chứng minh được các ΔAEB ; ΔEBF ; ΔFBC đều . Từ đó suy ra A, B, C thẳng hàng và AC = 2 AB.

**Bài toán 3 :** Cho hai điểm A, B. Chỉ dùng compa hãy dựng trung điểm I của đoạn AB.

**Giải** : *Xem hình 3.*




*Hình 3*

- Đặt AB = a. Dựng 1 đoạn dài 2a (bài toán 2)

- Dựng đường tròn (B ; 2a) và đường tròn (A ; 2a), hai đường tròn này cắt nhau tại C.

- Dựng đường tròn (B ; a) và đường tròn (C ; a), hai đường tròn này tiếp xúc nhau tại M, M là trung điểm BC.

- Dựng đường tròn (A ; a) và đường tròn (C ; a), hai đường tròn này tiếp xúc nhau tại N, N là trung điểm AC.

- Dựng đường tròn (N ; a) và đường tròn (M ; a), hai đường tròn này cắt nhau tại giao điểm thứ hai I, I là trung điểm AB.

Phần chứng minh rất dễ dàng, xin dành cho bạn đọc. Bây giờ mời các em giải thử các bài toán sau :

**Bài 4 :** Cho hai điểm A, B. Chỉ dùng compa hãy dựng điểm I thuộc đoạn AB và chia AB theo tỉ số $\frac{IA}{IB} = k \in N$ cho trước.

**Bài 5 :** Cho đường tròn tâm O và hai điểm A, B ở ngoài đường tròn. Chỉ dùng compa hãy dựng giao điểm của đường thẳng AB với đường tròn (O).

**Bài 6 :** Cho tứ giác ABCD. Chỉ dùng compa hãy kiểm tra xem tứ giác ABCD có phải là tứ giác nội tiếp hay không ?

# G. JULBERT VÀ D. MAC DONNELL ĐÃ GIẢI BÀI TOÁN 2 NHƯ THẾ NÀO ?

Trong mục "Dành cho các nhà toán học nhỏ" *(TTT2 số 1, 3/2003)* đã giới thiệu và đề nghị bạn đọc tham gia giải bài toán sau.

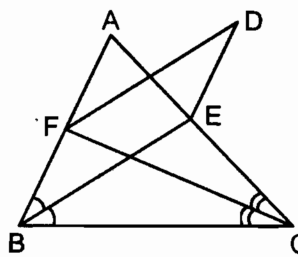
"Cho tam giác ABC có các đường phân giác trong BE, CF. Chứng minh rằng : Nếu $\hat{B} \geq \hat{C}$ thì $BE \leq CF$" (bài toán 2).

Tòa soạn đã nhận được lời giải bài toán 2 của 17 bạn. Trừ một vài bạn giải sai và giải thiếu chính xác, các bạn còn lại đã giải bài toán 2 bằng một trong hai phương án sau đây.

Xin giới thiệu tóm tắt hai phương án giải này.

**Phương án 1 :** Phỏng theo phương pháp mà Stiener đã dùng để chứng minh bài toán 1. Đó là dùng công thức tính độ dài đường phân giác trong của tam giác.

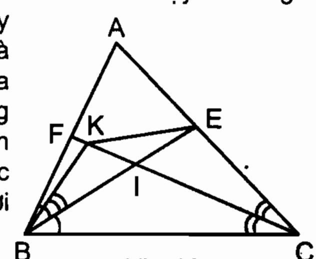
**Phương án 2 :** Trước hết, nhờ tính chất của đường phân giác trong của tam giác, chứng minh $BF \leq CE$ *(hình 1)*. Sau đó, phỏng theo cách chứng minh bài toán 1 của W. Hegy, dựng hình bình hành BEDF và dùng các định lí so sánh độ lớn của góc và độ dài của cạnh đối với tam giác.




*Hình 1*

Bạn đọc thân mến ! Nhờ hai phương án trên, ta sẽ có hai lời giải đúng cho bài toán 2. Tuy nhiên, đúng nhưng không mới và không đẹp. Tôi tin rằng, trước G. Julbert và D. Mac Donnell, đã có rất nhiều người nghĩ tới bài toán 2 và trong những người này, có lẽ cũng đã có rất nhiều người giải bài toán 2 bằng các phương án trên. Vậy mà, không ai nhớ tên họ cả. Nói đến bài toán 2, là người ta nói ngay đến lời giải của G. Julbert và D. Mac Donnell. Vì sao vậy ? Vì lời giải của hai tác giả này mới và đẹp, đó là mục đích tối cao của không chỉ những người làm toán. Xin giới thiệu để bạn đọc cùng thưởng thức lời giải đặc sắc này.

*(xem tiếp trang 21)*




*Hình 2*

# TẬP DƯỢT XEM XÉT BÀI TOÁN ĐẢO

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN *(Trường THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)*

*Trong quá trình học toán, nếu chúng ta có thói quen xem xét bài toán đảo thì cũng sẽ phát hiện nhiều bài toán mới khá thú vị, thậm chí là rất hay. Hãy xét qua ví dụ sau đây :*

**Bài toán thuận :** Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh bên AD, BC. Nối MN (đường trung bình) cắt hai đường chéo BD và AC tại P và Q tương ứng. Ta đã có các kết quả sau :

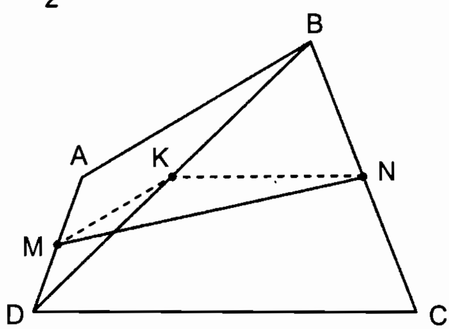
1) MN song song với hai đáy AB, CD và MN = $\frac{1}{2}$ (AB + CD)

2) P, Q lần lượt là các trung điểm của hai đường chéo BD, AC và PQ = $\frac{1}{2}$ |AB - CD|

3) MP = NQ.

*Từ đó ta có các bài toán đảo :*

**Bài toán đảo 1 :** Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi M và N là các trung điểm của các cạnh AD, BC tương ứng. Chứng minh rằng nếu MN = $\frac{1}{2}$ (AB + CD) thì ABCD là hình thang.




*Chứng minh :* Gọi K là trung điểm của đường chéo BD, ta có :

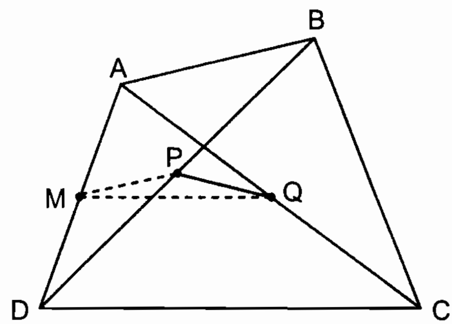
MK // AB và MK = $\frac{1}{2}$ AB

NK // CD và NK = $\frac{1}{2}$ CD

$\Rightarrow$ MK + NK = $\frac{1}{2}$ (AB + CD) = MN (gt)

$\Rightarrow$ M, K, N thẳng hàng $\Rightarrow$ AB // MN và CD // MN $\Rightarrow$ AB // CD (đpcm).

**Bài toán đảo 2 :** Cho tứ giác lồi ABCD (AB < CD). Gọi P, Q là trung điểm của các đường chéo BD và AC tương ứng. Chứng minh rằng nếu PQ = $\frac{1}{2}$ (CD - AB) thì ABCD là hình thang.



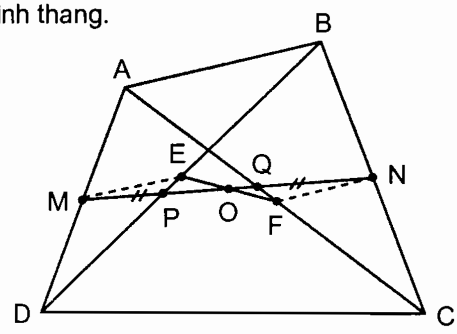

*Chứng minh :* Gọi M là trung điểm của AD, ta có : PM // AB và PM = $\frac{1}{2}$ AB

QM // CD và QM = $\frac{1}{2}$ CD

$\Rightarrow$ QM - PM = $\frac{1}{2}$ (CD - AB) = PQ

$\Rightarrow$ M, P, Q thẳng hàng $\Rightarrow$ AB // PQ và CD // PQ $\Rightarrow$ AB // CD (đpcm).

**Bài toán đảo 3 :** Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi M và N là trung điểm của các cạnh AD và BC tương ứng. Giả sử MN lần lượt cắt các đường chéo BD và AC tại P và Q. Chứng minh rằng nếu MP = NQ thì ABCD là hình thang.




*Chứng minh :* - Tất nhiên AC không song song với BD (1)

- Gọi E, F là trung điểm của các đường chéo BD và AC tương ứng. Giả sử P ≠ E và Q ≠ F. Ta có ME song song và bằng NF (vì cùng song song và bằng $\frac{1}{2}$ AB) ⇒ MENF là hình bình hành ⇒ MN cắt EF tại trung điểm O của mỗi đoạn hay OM = ON, mà MP = NQ ⇒ PO = OQ ⇒ PEQF là hình bình hành ⇒ PE // QF hay BD // AC, trái với (1).

Vậy E ≡ P, F ≡ Q hay AB // MP, CD // NQ ⇒ AB // MN // CD (đpcm).

Bằng cách suy nghĩ tương tự như vậy ta cũng có bài toán đảo sau đây mà lời giải dành cho các bạn :

**Bài toán đảo 4 :** Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của hai đường chéo BD và AC. Giả sử đường thẳng PQ cắt các cạnh AD và BC tại M và N tương ứng. Cho biết MP = NQ. Hỏi ABCD có là hình thang hay không ?

Chúc các bạn có thói quen xem xét các bài toán đảo trong quá trình học tập để phát hiện ra các bài toán mới thú vị.

# • *Kết quả :* Thơ và Ô CHỮ (TTT2 số 2)

Hình như ô chữ lần này vẫn chưa đủ khó, nên hầu hết các bạn gửi bài về đều nhận ra ngay được ô chữ cột dọc. Ở các ô chữ hàng ngang có rất nhiều đáp án khác nhau như: ở hàng thứ hai bạn có thể chọn LAO TÂM, LAO VÀO, CHO BẠN, hay ở hàng thứ mười bạn cũng có thể làm TÍ CHÚT, TÍNH MÀ, TÍNH SỐ, TÍNH ẨU ... Sau đây là các bạn có lời giải đúng đã rất may mắn nhận được phần thưởng của TTT qua bốc thăm : *Ngô Mạnh Tùng*, số 12, tổ 7, khu C, thị trấn Phúc Yên, Mê Linh, **Vĩnh Phúc** ; *Nguyễn Thị Cẩm Nhung*, 4/8 Lý Nam Đế, Hương Sơ, **TP. Huế** ; *Bùi Phương Mai*, 9A, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, **Nam Định** ; *Mai Diệu Linh*, 7G, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, **Nghệ An** ; *Bùi Hoàng Nam*, 8B, THCS huyện Từ Sơn, *Nguyễn Thị Lúa*, 8A, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh** ; *Phùng Thanh Thủy*, 8C, THCS Hà Nội – Amsterdam, **Hà Nội** ; *Lê Công Thành*, 8A, THCS thị trấn Hương Khê, **Hà Tĩnh**.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | T | H | Ư | Ớ | | K | Ẻ | | | | |
| | | | Đ | À | | S | Â | U | | | |
| | | | S | Ố | | Ũ | | | | | |
| C | H | Í | N | H | | H | Ư | Ơ | N | G | |
| | | | | T | | M | G | I | Á | C | |
| | H | Ì | N | H | | U | Ô | N | G | | |
| | | | T | R | | N | G | Đ | I | Ể | M |
| | | | N | Ộ | | T | I | Ế | P | | |
| | T | I | Ế | P | | U | Y | Ế | N | | |
| | | | | L | | L | U | Ậ | N | | |
| N | G | U | Y | Ê | | T | Ố | | | | |
| | | Đ | A | T | | Ứ | C | | | | |

ANH COMPA

# LÀM QUEN VỚI BẤT ĐẲNG THỨC TRÊ - BƯ - SÉP

LÊ VÕ VIỆT KHANG *(Hà Nội)*

*Các bạn đã từng được làm quen với các bất đẳng thức Cô si, Bunhiacôpski nhưng không ít bạn còn chưa biết về bất đẳng thức Trê - bư - sép. Con đường đi đến bất đẳng thức này thật là giản dị, quá gần gũi với những kiến thức cơ bản của các bạn bậc THCS.*

Các bạn có thể thấy ngay : Nếu $a_1 \le a_2$ và $b_1 \le b_2$ thì $(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \ge 0$. Khai triển vế trái của bất đẳng thức này ta có :

$a_1b_1 + a_2b_2 - a_1b_2 - a_2b_1 \ge 0$

$\Rightarrow a_1b_1 + a_2b_2 \ge a_1b_2 + a_2b_1$.

Nếu cộng thêm $a_1b_1 + a_2b_2$ vào cả hai vế ta được :

$2(a_1b_1 + a_2b_2) \ge a_1(b_1 + b_2) + a_2(b_1 + b_2)$

$\Rightarrow 2(a_1b_1 + a_2b_2) \ge (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)$ (*)

Bất đẳng thức (*) chính là bất đẳng thức Trê - bư - sép với n = 2. Nếu thay đổi giả thiết, cho $a_1 \le a_2$ và $b_1 \ge b_2$ thì tất cả các bất đẳng thức trên cùng đổi chiều và ta có :

$2(a_1b_1 + a_2b_2) \le (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)$ (**)

Các bất đẳng thức (*) và (**) đều trở thành đẳng thức khi và chỉ khi $a_1 = a_2$ hoặc $b_1 = b_2$.

Làm theo con đường đi tới (*) hoặc (**), các bạn có thể giải quyết nhiều bài toán rất thú vị.

**Bài toán 1 :** Biết rằng x + y = 2. Chứng minh $x^{2003} + y^{2003} \le x^{2004} + y^{2004}$.

**Lời giải :** Do vai trò bình đẳng của x và y nên có thể giả sử $x \le y$. Từ đó suy ra : $x^{2003} \le y^{2003}$.

Do đó $(y^{2003} - x^{2003})(y - x) \ge 0$

$\Rightarrow x^{2004} + y^{2004} \ge x.y^{2003} + y.x^{2003}$

Cộng thêm $x^{2004} + y^{2004}$ vào hai vế ta có :

$2(x^{2004} + y^{2004}) \ge (x+y)(x^{2003} + y^{2003})$
$= 2(x^{2003} + y^{2003})$

$\Rightarrow x^{2004} + y^{2004} \ge x^{2003} + y^{2003}$ (đpcm).

*Để ý rằng :* Bất đẳng thức vừa chứng minh trở thành đẳng thức $\Leftrightarrow$ x = y = 1 ; các bạn sẽ có lời giải của các bài toán sau :

**Bài toán 2 :** Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^{2003} + y^{2003} = x^{2004} + y^{2004} \end{cases}$$

Nếu các bạn quan tâm tới các yếu tố trong tam giác thì vận dụng các bất đẳng thức (*) hoặc (**) sẽ dẫn đến nhiều bài toán mới.

**Bài toán 3 :** Cho tam giác ABC có diện tích bằng 1. AH và BK là các đường cao của tam giác.

Chứng minh : $(BC + CA)(AH + BK) \ge 8$.

**Lời giải :** Ta có AH x BC = BK x CA = 2. Do vai trò bình đẳng của BC và CA nên có thể giả sử rằng $BC \le CA \Rightarrow \dfrac{2}{BC} \ge \dfrac{2}{CA}$ $\Rightarrow AH \ge BK$.

Do đó $(CA - BC)(BK - AH) \le 0$

$\Rightarrow CA \times BK + BC \times AH \le BC \times BK + CA \times AH$

Cộng thêm CA x BK + BC x AH vào 2 vế ta có :

$2(CA \times BK + BC \times AH) \le (BC + CA)(AH + BK)$

$\Rightarrow (BC + CA)(AH + BK) \ge 8$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ BC = CA hoặc BK = AH $\Leftrightarrow$ BC = CA $\Leftrightarrow$ Tam giác ABC là tam giác cân đỉnh C.

**Bài toán 4 :** Cho tam giác ABC với BC = a, CA = b, AB = c và các đường cao tương ứng của các cạnh này có độ dài lần lượt là $h_a$, $h_b$, $h_c$. Chứng minh :

$$\frac{1}{h_a + h_b} + \frac{1}{h_b + h_c} + \frac{1}{h_c + h_a} \le \frac{a + b + c}{4S}$$

với S là diện tích tam giác ABC.

**Lời giải :** Do vai trò bình đẳng của các cạnh trong tam giác nên có thể giả sử rằng $a \le b \le c$

$$\Rightarrow \frac{2S}{a} \ge \frac{2S}{b} \ge \frac{2S}{c} \Rightarrow h_a \ge h_b \ge h_c .$$

Làm như lời giải bài toán 3 ta có :

$(a + b)(h_a + h_b) \ge 8S$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_a + h_b} \le \frac{a+b}{8S} \quad (1)$$

Tương tự ta được : $\dfrac{1}{h_b + h_c} \le \dfrac{b+c}{8S}$ (2)

$$\frac{1}{h_c + h_a} \le \frac{c+a}{8S} \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1), (2), (3) dẫn đến :

$$\frac{1}{h_a + h_b} + \frac{1}{h_b + h_c} + \frac{1}{h_c + h_a} \le \frac{a+b+c}{4S} \quad (4)$$

Bất đẳng thức (4) trở thành đẳng thức $\Leftrightarrow$ các bất đẳng thức (1), (2), (3) đồng thời trở thành đẳng thức $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow$ Tam giác ABC là tam giác đều.

Bây giờ các bạn thử giải các bài tập sau đây :

**1)** Biết rằng $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $F = \dfrac{x^4 + y^4}{x^6 + y^6}$.

**2)** Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$.

Chứng minh :

$$\frac{x^4 + y^4}{x^3 + y^3} + \frac{y^4 + z^4}{y^3 + z^3} + \frac{z^4 + x^4}{z^3 + x^3} \ge 1.$$

**3)** Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh lần lượt là a, b, c và độ dài các đường phân giác trong thuộc các cạnh này lần lượt là $l_a$, $l_b$, $l_c$. Chứng minh :

$$\frac{al_a + bl_b}{l_a + l_b} + \frac{bl_b + cl_c}{l_b + l_c} + \frac{cl_c + al_a}{l_c + l_a} \le a + b + c.$$

**4)** Hãy dự đoán và chứng minh bất đẳng thức Trê - bư - sép với n = 3. Từ đó hãy sáng tạo ra các bài toán. Nếu bạn thấy thú vị với những khám phá của mình ở bài tập này, hãy gửi gấp bài viết về cho chuyên mục EUREKA của TTT2.

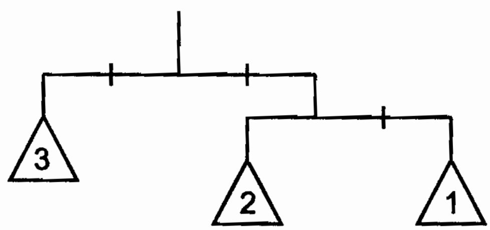
● ***Kết quả :*** (THỬ TÀI TTT 2 số 2)

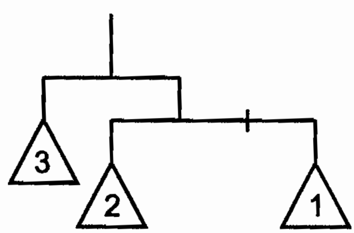
# NHỮNG THANH TREO THĂNG BẰNG

**Nhận xét :** + Có khá nhiều bạn tham gia giải bài toán này, nhưng do không nắm chắc đề bài nên đã nêu ra nhiều trường hợp sai, lặp lại và thiếu. Lời giải tốt là lời giải chỉ ra được ít nhất 10 hệ thống thanh treo thăng bằng đúng.

+ Những sai lầm và thiếu sót mà các bạn mắc phải :

- Độ dài tay đòn phải nhỏ hơn hoặc bằng 5dm.
- Chỉ có 3 loại quả cân 1kg, 2kg, 3kg mỗi quả chỉ sử dụng một lần và phải đủ cả 3 quả.
- Có thể đặt cả 3 quả cân trên một thanh treo, thậm chí ngay tại vị trí giữa hai cánh tay đòn.
- Tỉ lệ độ dài 2 tay đòn trên một thanh treo trong hai trường hợp mà bằng nhau thì chỉ được tính là một cách vì dm dùng trong bài chỉ tượng trưng cho "đơn vị độ dài" nói chung. Ví dụ :




Các bạn được thưởng kì này : *Lê Huy Thưởng*, 9A, THCS Phan Bội Châu , Tứ Kỳ, **Hải Phòng** ; *Phan Hải Lê*, 8E, THCS Đặng Thai Mai, TP Vinh, **Nghệ An** ; *Nguyễn Vũ Thanh Long*, 7/1, THCS Chu Văn An, TP **Huế**.

NGUYỄN ANH QUÂN

# Từ ĐƠN GIẢN đến THÚ VỊ

TRẦN QUỐC HOÀN *(Nhóm PXP, 10T, THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương)*

Khi giải phương trình bậc hai, đã bao giờ bạn từng đặt câu hỏi, chẳng hạn tại sao phương trình $x^2 + 6x - 3 = 0$ có nghiệm là $(-3+2\sqrt{3})$ thì cũng có nghiệm là $(-3-2\sqrt{3})$ ?

Ban đầu tôi giải thích điều kì lạ này bằng định lí Viét nhưng sau quá trình suy nghĩ, tìm tòi tôi mới phát hiện ra những bí ẩn tuyệt vời đằng sau điều kì lạ đó.

Trước hết ta xét bài toán :

**Bài toán 1 :**

Chứng minh rằng : Nếu phương trình bậc hai có hệ số hữu tỉ, có một nghiệm vô tỉ là $m+\sqrt{n}$ ($m ; n \in Q$) thì sẽ có một nghiệm nữa là $m-\sqrt{n}$ .

*Chứng minh :* Có 3 cách để chứng minh bài toán này.

**Cách 1 :** *(sử dụng hệ thức Viét)*

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ (*) ($a \neq 0$) có một nghiệm là $m+\sqrt{n}$ . Gọi $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của (*) trong đó $x_1 = m+\sqrt{n}$.

Do $x_1$ là nghiệm của (*)

$\Rightarrow ax_1^2 + bx_1 + c = 0$

$\Leftrightarrow a(m+\sqrt{n})^2 + b(m+\sqrt{n}) + c = 0$

$\Leftrightarrow am^2 + an + bm + c = -\sqrt{n}(2am+b)$ (1)

Do $m+\sqrt{n}$ vô tỉ ; m hữu tỉ

$\Rightarrow \sqrt{n}$ vô tỉ và vế trái của (1) hữu tỉ

$\Rightarrow$ vế phải của (1) hữu tỉ

$\Rightarrow 2am + b = 0$

$\Rightarrow m = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2)$ (hệ thức Viét)

$\Rightarrow x_1 + x_2 = 2m \Rightarrow x_2 = 2m - x_1 = m - \sqrt{n}$ (đpcm).

**Cách 2 :**

Khi chứng minh như ở cách 1 và được $2am + b = 0$

$\Rightarrow 2am + b = 0 = am^2 + an + bm + c$

Khi đó : $a(m-\sqrt{n})^2 + b(m-\sqrt{n}) + c$

$= am^2 + an + bm + c - \sqrt{n}(2am+b) = 0$

$\Rightarrow m-\sqrt{n}$ là nghiệm của (*), đpcm.

**Cách 3 :**

Xét $g(x) = (x-m-\sqrt{n})(x-m+\sqrt{n})$

$= (x-m)^2 - n = x^2 - 2mx + m^2 - n$

Chia đa thức $ax^2 + bx + c$ cho g(x) ta có :

$ax^2 + bx + c = a(x-m-\sqrt{n})(x-m+\sqrt{n})$

$+(b+2ma)x + (an + c - m^2a)$

Khi $x_1 = m+\sqrt{n} \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$

$\Rightarrow (b+2ma)(m+\sqrt{n}) + an + c - m^2a = 0$

Do $m+\sqrt{n}$ vô tỉ ; $m, n, a, b, c \in Q$

$\Rightarrow b + 2ma = an + c - m^2a = 0$

$\Rightarrow ax^2 + bx + c = a(x-m-\sqrt{n})(x-m+\sqrt{n})$

$\Rightarrow m-\sqrt{n}$ là một nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (đpcm).

Sau khi thử nghiệm một số trường hợp, tôi đã tổng quát bài toán như sau :

**Bài toán 2 :**

Chứng minh rằng : Nếu một phương trình bậc n ($n \geq 2$) có hệ số hữu tỉ và một nghiệm vô tỉ là $m+\sqrt{n}$ ($m, n \in Q$) thì $m-\sqrt{n}$ cũng là một nghiệm của phương trình này.

*Chứng minh :* Đến đây có lẽ bạn đọc cũng thấy được sự bất lực của các cách 1 ; 2 (bài toán 1) trong bài toán này. Tuy nhiên sử dụng cách giải 3 bài toán 1 ta sẽ chứng minh được bài toán 2.

Thật vậy : Xét phương trình P(x) = 0 với P(x) là đa thức bậc n và hệ số hữu tỉ.

Xét $G(x) = (x - m - \sqrt{n})(x - m + \sqrt{n})$

$= x^2 - 2mx + m^2 - n$

Chia P(x) cho G(x) được thương là Q(x) dư Bx + C (B, C $\in$ Q)

Vì $x_0 = m + \sqrt{n}$ là nghiệm của P(x) = 0

$\Rightarrow P(x_0) = Q(x_0) = 0 \Rightarrow Bx_0 + C = 0$

$\Rightarrow B(m + \sqrt{n}) + C = 0.$

Do $m + \sqrt{n}$ vô tỉ ; B, C hữu tỉ $\Rightarrow$ B = C = 0

$\Rightarrow P(x) = Q(x).(x - m - \sqrt{n})(x - m + \sqrt{n})$

$\Rightarrow m - \sqrt{n}$ cũng là nghiệm của phương trình P(x) = 0 (đpcm).

Bây giờ chúng ta xét đến bài toán 3 cũng là một bài toán quen thuộc về phương trình bậc hai.

**Bài toán 3 :**

Chứng minh rằng : Một phương trình bậc hai không thể có nghiệm hữu tỉ nếu các hệ số của nó đều lẻ.

*Chứng minh :* Giả sử phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c $\in$ Z, lẻ) có nghiệm hữu tỉ là $\frac{p}{q}$ $(p, q \in Z, q \neq 0, (p, q) = 1)$

$$\Rightarrow a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\left(\frac{p}{q}\right) + c = 0$$

$\Rightarrow ap^2 + bpq + cq^2 = 0$ (2)

Từ phương trình (2) ta có $ap^2 \vdots q$ mà $(p,q) = 1 \Rightarrow a \vdots q \Rightarrow$ q lẻ (vì a lẻ)

Tương tự $c \vdots p \Rightarrow$ p lẻ (vì c lẻ)

Do a, b, c, p, q lẻ $\Rightarrow$ vế trái (2) lẻ và khác 0 (vô lí).

$\Rightarrow$ Phương trình không có nghiệm hữu tỉ (đpcm).

Để tổng quát bài toán này có lẽ một số bạn sẽ mắc sai lầm khi quy về phương trình bậc n bất kì. Điều này không đúng với n lẻ, chẳng hạn n = 3 ta có phương trình : $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ vẫn có nghiệm -1.

**Bài toán 4 :**

Chứng minh rằng : Một phương trình bậc n chẵn, không thể có nghiệm hữu tỉ nếu hệ số của nó đều lẻ.

*Chứng minh :* Dựa vào chứng minh của bài toán 3 ta có :

Xét $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$ là phương trình bậc n (với n chẵn ; $a_i$ nguyên lẻ, $i = \overline{0,n}$) có nghiệm hữu tỉ là $\frac{p}{q}$ $(p, q \in Z, q \neq 0, (p, q) = 1)$

Ta có :

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + ... + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

$\Leftrightarrow a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + ... + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$ (3)

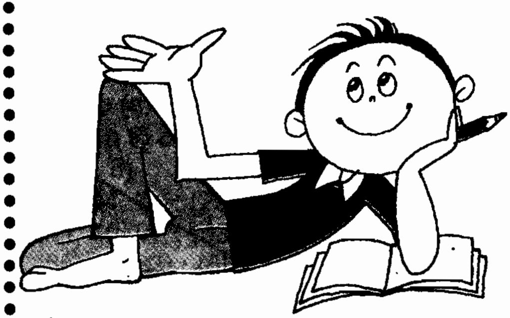
$$\Rightarrow \begin{cases} a_np^n \vdots q \\ a_0q^n \vdots p \end{cases} \text{mà } (p, q) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a_n \vdots q \\ a_0 \vdots p \end{cases}$$

$\Rightarrow$ p, q lẻ (vì $a_0$, $a_n$ lẻ)

Do $a_i$ $(i = \overline{0,n})$ , p, q lẻ, n chẵn $\Rightarrow$ vế trái của (3) là số lẻ khác 0 (vô lí).

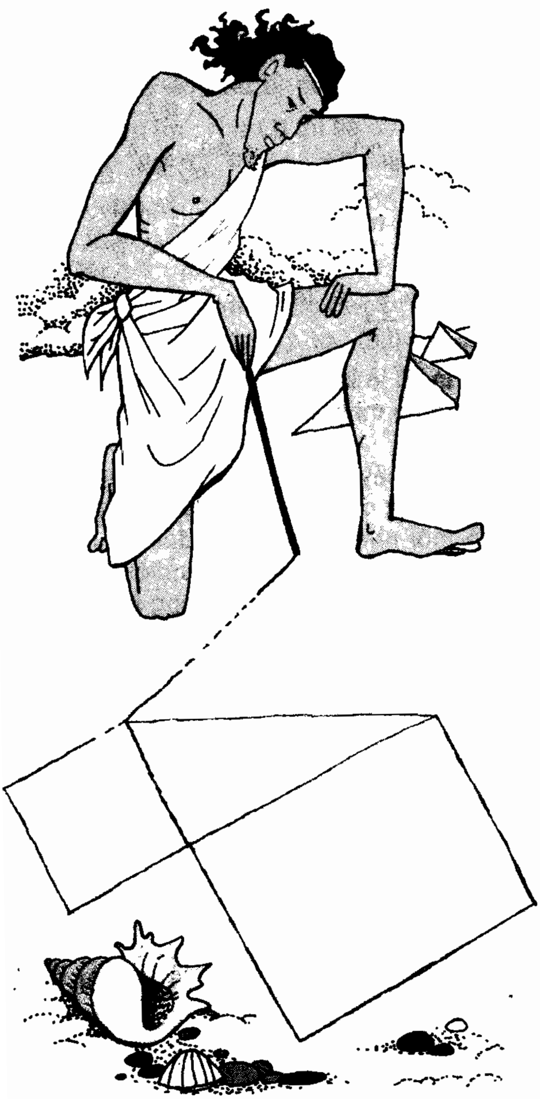
$\Rightarrow$ Phương trình không có nghiệm hữu tỉ (đpcm).

Các bạn thấy đấy, mọi sự phức tạp đều bắt đầu bằng cái đơn giản. Từ một chút kì lạ nhỏ thôi nhưng nếu chịu đào sâu suy nghĩ thì sẽ khám phá rất nhiều điều thú vị. Đó là nguyên tắc hàng đầu trong sáng tạo toán học. Chúc các bạn thành công trên con đường đi tìm vẻ đẹp của toán học.



# ĐỊNH LÍ PY-TA-GO

PSG. TS. PHẠM GIA ĐỨC *(Tác giả SGK)*



* Học sinh lớp 7 được học định lí Py-ta-go và đã quen với các phát biểu sau :

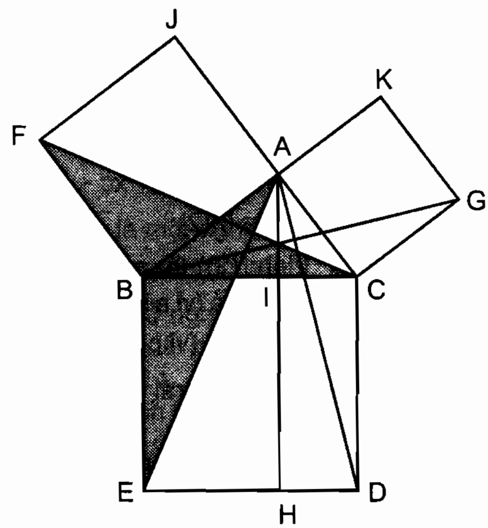
a. Trong một tam giác vuông, bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông.

b. Nếu bình phương cạnh lớn nhất của một tam giác không bằng tổng bình phương hai cạnh còn lại thì tam giác đó không phải là tam giác vuông.

c. Trong một tam giác, nếu bình phương cạnh lớn nhất bằng tổng bình phương hai cạnh còn lại thì tam giác đó là vuông và góc vuông đối diện với cạnh lớn nhất.

Chú ý rằng a. là định lý Py-ta-go thuận, b. là định lí Py-ta-go phản đảo và c. là định lí Py-ta-go đảo. Nhờ định lí Py-ta-go đảo ta có thể dựng được góc vuông không cần êke. Người cổ Ai Cập đã biết vẽ góc vuông nhờ tam giác có 3 cạnh là 3, 4, 5 (đơn vị độ dài).

* Ở lớp 7, định lý Py-ta-go được thừa nhận (không chứng minh) vì lý do sư phạm. Tuy nhiên, từ xa xưa, ở Hy Lạp cũng như ở Trung Quốc, người ta đã quen với hình vẽ sau (được gọi là "Cối xay gió") dùng để chứng minh định lí Py-ta-go.

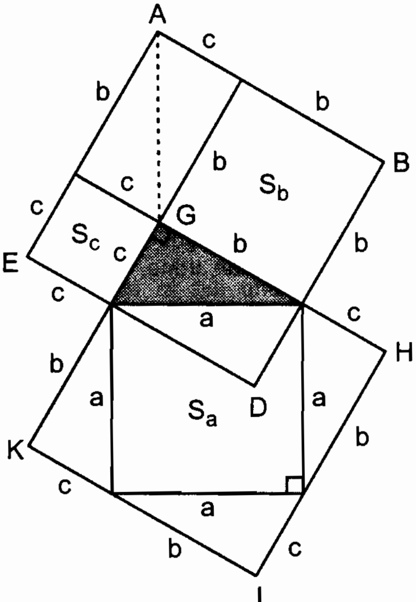



*Hình 1*

Nội dung chính như sau :

Hai tam giác BFC và BAE bằng nhau nên có diện tích bằng nhau. Nhưng diện tích tam giác BFC bằng nửa diện tích hình vuông ABFJ, diện tích tam giác BAE bằng nửa diện tích hình chữ nhật BIHE, suy ra diện tích hình vuông ABFJ bằng diện tích hình chữ nhật BIHE. Tương tự, diện tích hình vuông AKGC bằng diện tích hình chữ nhật CIHD. Từ đó ta có định lí Py-ta-go, phát biểu bằng "ngôn ngữ diện tích" là : Diện tích hình vuông BCDE bằng tổng diện *tích hai hình vuông ABFJ và ACGK.*

* Có thể giới thiệu thêm cách chứng minh sau đây cũng dễ hiểu đối với học sinh :




*Hình 2*

Trên hình 2, hai hình vuông ABDE và GHIK cùng có cạnh bằng b + c.

Gọi $S_a$, $S_b$, $S_c$ lần lượt là diện tích các hình vuông cạnh a, b, c (a là độ dài cạnh huyền, b và c là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông).

Ta có :

$$S_{ABDE} = (b + c)^2 = S_b + S_c + 4.\frac{bc}{2} \qquad (1)$$

$$S_{GHIK} = (b + c)^2 = S_a + 4.\ \frac{bc}{2} \qquad (2)$$

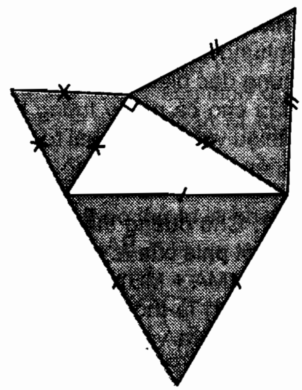
Từ (1) và (2) suy ra : $S_a = S_b + S_c$

Năm 1968, trong cuốn sách nói về định lí Py-ta-go, Elisha Scott đã thống kê và phân loại 367 cách chứng minh khác nhau về định lí Py-ta-go.

Một số cách chứng minh định lí Py-ta-go cũng được giới thiệu trong cuốn "Nâng cao Hình học 8", tác giả : Phạm Gia Đức và Vũ Hoàng Lâm.

* Ta có thể mở rộng định lí Py-ta-go như sau :

Dựng ba tam giác đều có cạnh tương ứng là ba cạnh của một tam giác vuông cho trước. Thế thì: Diện tích tam giác đều có cạnh là cạnh huyền bằng tổng diện tích hai tam giác đều có cạnh là cạnh góc vuông.



*Hình 3*

Thay ba tam giác đều bằng ba đa giác đồng dạng. Bạn hãy vẽ hình và phát biểu định lý Py-ta-go mở rộng.

* Định lí Py-ta-go là cầu nối giữa hình học và số học. Nếu các số tự nhiên a, b, c là độ dài tương ứng của cạnh huyền và hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông thì bộ ba số tự nhiên (a, b, c) là nghiệm của phương trình $x^2 = y^2 + z^2$ và được gọi là <u>bộ ba số Py-ta-go</u>.

Phương trình Py-ta-go có vô số nghiệm. Nếu (a, b, c) là một bộ ba số Py-ta-go thì (ka, kb, kc) cũng là một bộ ba số Py-ta-go ($k \in N^*$).

Sau đây là danh sách các bộ ba số Py-ta-go (a, b, c) với $a \le 100$, $b \ge c$ và a, b, c nguyên tố cùng nhau :

(5, 4, 3) ; (13, 12, 5) ; (17, 15, 8) ;
(25, 24, 7) ; (29, 21, 20) ; (37, 35, 12) ;
(41, 40, 9) ; (53, 45, 28) ; (61, 60, 11) ;
(65, 56, 33) ; (65,63, 16) ; (73, 55, 48) ;
(85, 84, 13) ; (85, 77, 36) ; (89, 80, 39) ;
(97, 72, 65).

# BẮT ĐẦU TỪ Ý TƯỞNG CỦA HÊ RÔNG

NGUYỄN MINH HÀ *(ĐHSP1 Hà Nội)*

Thuở còn là học sinh phổ thông, tôi rất thích môn hình học. Những bài toán hình học hay luôn tạo cho tôi niềm say mê và hứng khởi trong học tập. Trong những bài toán này, có một bài rất đơn giản nhưng đặc biệt sâu sắc, lời giải của nó là sự khởi đầu cho cả một ý tưởng lớn. Bài viết này xin giới thiệu với bạn đọc bài toán đó và toàn bộ sự phát triển tiếp theo của nó.

**Bài toán 1 :** Cho đường thẳng $\Delta$ và hai điểm A, B nằm về một phía của $\Delta$. Hãy tìm trên $\Delta$ điểm M sao cho tổng (MA + MB) nhỏ nhất.

Bài toán 1 (BT1) là một bài toán quang học. Người đầu tiên đặt ra và giải quyết nó chính là nhà toán học cổ Hê Rông, người Ai Cập, sống vào thế kỉ thứ nhất trước Công nguyên, tác giả của công thức tính diện tích tam giác theo độ dài ba cạnh của nó ( $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ).

Hê Rông đã giải BT1 thật đẹp đẽ và mẫu mực.

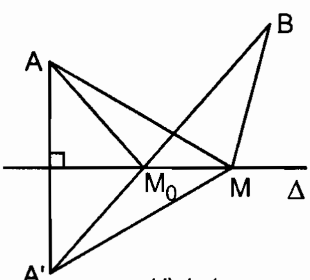
Gọi A' là điểm đối xứng của A qua $\Delta$ *(hình1)*. Vì A, B nằm về một phía của $\Delta$ nên A', B nằm về hai phía của $\Delta$. Vậy đoạn A'B và $\Delta$ cắt nhau.

Đặt $M_0 = A'B \cap \Delta$. Với mọi M thuộc $\Delta$, ta có :

$AM + MB = A'M + BM \geq A'B$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ M thuộc đoạn A'B $\Leftrightarrow M \equiv M_0$.

*Tóm lại :* Tổng (AM +MB) nhỏ nhất khi $M \equiv M_0$.




*Hình 1*

Tôi đã từng hỏi nhiều người câu hỏi sau : "Bằng cách nào mà Hê Rông lại nghĩ ra điểm A' kì diệu trong lời giải trên". Câu trả lời mà tôi thường nhận được là : "Vì Hê Rông nhận thấy MA' = MA với mọi M thuộc $\Delta$ ". Đó là câu trả lời đúng, nhưng rất ít ý nghĩa, câu trả lời của những người đã đọc lời giải BT1 của Hê Rông (có trong rất nhiều sách hình học sơ cấp) chứ không phải là câu trả lời của những người tự nghĩ ra lời giải đó. Câu trả lời sau, tôi ít khi nhận được, nhưng lại làm tôi đặc biệt thích thú : "Đường gấp khúc AMB quá "cong queo" nên việc quan sát độ dài của nó rất khó. Chính vì vậy, Hê Rông đã nghĩ ra điểm A' để thay đường gấp khúc AMB bằng đường gấp khúc A'MB, đỡ "cong queo" hơn, có độ dài bằng độ dài đường gấp khúc AMB nhưng dễ quan sát hơn". Tôi nghĩ, câu trả lời trên mới chính là câu trả lời của những người tự nghĩ ra lời giải BT1, như Hê Rộng đã nghĩ. Nó là sự khởi đầu của một ý tưởng quan trọng, ý tưởng của Hê Rông :

*Khi cần quan sát độ dài của một đường gấp khúc quá "cong queo" ta hãy dùng các phép đối xứng trục để thay nó bằng một đường gấp khúc mới, đỡ "cong queo" hơn, có độ dài bằng độ dài đường gấp khúc đã cho nhưng dễ quan sát hơn.*

Nhờ ý tưởng trên, ta có thể giải được nhiều bài toán cực trị và bất đẳng thức hình học hay và khó. Bài toán sau đây là bài toán đầu tiên trong nhóm những bài toán này.

**Bài toán 2 :** Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$ và điểm M nằm trong góc đó. Hãy tìm trên Ox, Oy các điểm A, B sao cho P(MAB) nhỏ nhất.

Ở đây, kí hiệu P(.) chỉ chu vi của tam giác, nó sẽ có hiệu lực trong toàn bộ bài viết này.

**Lời giải :** Gọi $M_1$, $M_2$ lần lượt là các điểm đối xứng của M qua Ox, Oy *(hình 2)*, ta thấy :

$$\widehat{M_1OM_2} = \widehat{M_1OM} + \widehat{MOM_2}$$
$$= 2\widehat{xOM} + 2\widehat{MOy} = 2\widehat{xOy} < 180^o$$

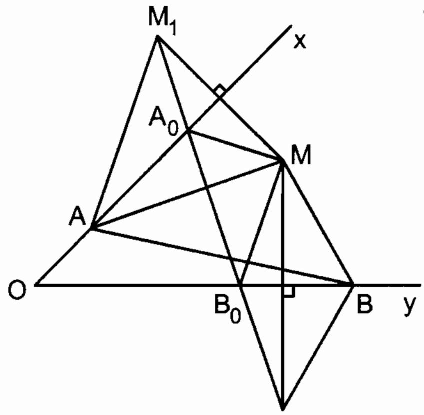
Vậy đoạn $M_1M_2$ cắt các tia Ox, Oy.

Đặt $A_0 = M_1M_2 \cap Ox$ ; $B_0 = M_1M_2 \cap Oy$.

Với mọi A, B thuộc Ox, Oy, ta có :

$P(MAB) = MA + AB + BM = M_1A + AB + BM_2 \geq M_1M_2$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ A, B thuộc đoạn $M_1M_2$ $\Leftrightarrow A \equiv A_0$ ; $B \equiv B_0$.




*Hình 2*

*Tóm lại :* P(MAB) nhỏ nhất khi $A \equiv A_0$ ; $B \equiv B_0$.

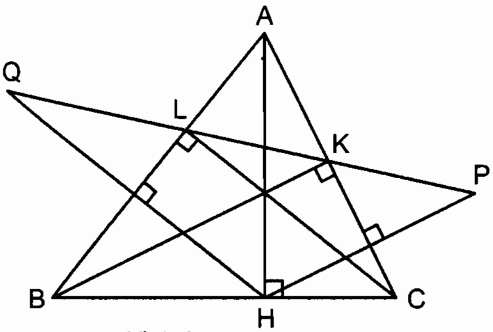
Nhờ BT2, ta dễ dàng giải được bài toán khó sau.

**Bài toán 3 :** Cho tam giác nhọn ABC. Hãy tìm trên các cạnh BC, CA, AB các điểm D, E, F sao cho P(DEF) nhỏ nhất.

BT3 được đặt ra bởi nhà toán học Italia, Fagnano (1682 - 1766). Lời giải được giới thiệu dưới đây thuộc nhà toán học Hunggari, Fejer (1880 - 1959).

Trước hết, ta phát biểu một bổ đề.

**Bổ đề 1 :** Cho tam giác nhọn ABC, đường cao AH. P, Q là các điểm đối xứng của H qua AC, AB. Đoạn PQ cắt các đoạn AC, AB tại K, L. Khi đó $BK \perp AC$, $CL \perp AB$ *(hình 3)*.




*Hình 3*

Việc chứng minh bổ đề 1 (BĐ1) khá dễ dàng, xin dành cho bạn đọc.

Trở lại việc giải BT3.

Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Gọi P, Q là các điểm đối xứng của H qua AC, AB. Gọi K, L là giao điểm của đoạn PQ với các đoạn AC, AB.

Giả sử D, E, F là các điểm đã cho trên các cạnh BC, CA, AB. Gọi $M_1$, $M_2$ là các điểm đối xứng của D qua AC, AB *(hình 4)*.

Xét hai tam giác APQ, $AM_1M_2$, ta thấy :

$$\begin{cases} AM_1 = AM_2 = AD \ge AH = AP = AQ \\ \widehat{M_1AM_2} = 2\widehat{BAC} = \widehat{PAQ} \end{cases}$$

$\Rightarrow M_1M_2 \ge PQ$ (1)

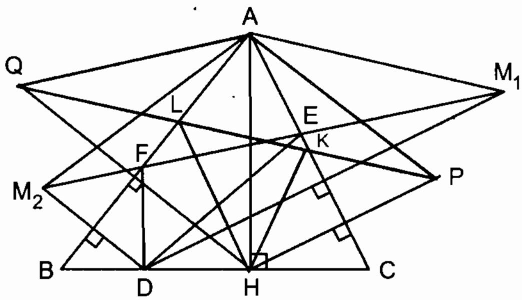
Mặt khác :

$$\begin{cases} P\,(DEF) = DE + EF + FD \\ \qquad\qquad = M_1E + EF + FM_2 \ge M_1M_2 \\ P\,(HKL) = HK + KL + LH \\ \qquad\qquad = PK + KL + LQ = PQ \end{cases} \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra : P (DEF) $\ge$ P (HKL).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ Đẳng thức xảy ra ở (1), (2) $\Leftrightarrow$ $D \equiv H$ ; E, F thuộc đoạn $M_1M_2$ $\Leftrightarrow$ $D \equiv H$ ; $E \equiv K$ ; $F \equiv L$.

Chú ý tới BĐ1, ta có kết luận : P(DEF) nhỏ nhất khi D, E, F theo thứ tự là hình chiếu của A, B, C trên BC, CA, AB.




*Hình 4*

Ngoài lời giải của Fejer, BT3 còn có một lời giải khác. Lời giải này là sự phát triển hết sức đặc sắc ý tưởng nói trên của Hê Rông. Tác giả của nó là nhà toán học Đức Schwarz. K.A (1834 - 1921).

Trước hết, ta phát biểu một bổ đề.

**Bổ đề 2 :** Cho tam giác nhọn ABC. Các điểm H, K, L theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB. Khi đó :

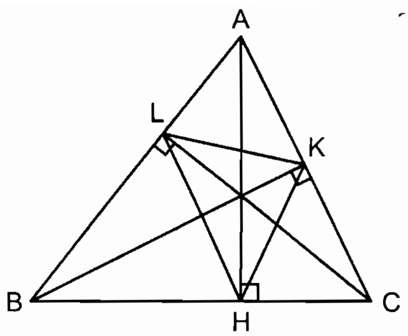
a) H, K, L là hình chiếu của A, B, C trên các cạnh BC, CA, AB $\Leftrightarrow$ $\widehat{LHB} = \widehat{KHC} = \widehat{BAC}$ ; $\widehat{HKC} = \widehat{LKA} = \widehat{ABC}$ ; $\widehat{KLA} = \widehat{HLB} = \widehat{BCA}$.

b) Trong điều kiện a), ta có :

AH sinA = BK sinB = CL sinC *(hình 5)*.

Việc chứng minh BĐ2 khá dễ dàng, xin dành cho bạn đọc.

Gọi $B_1$, $H_1$, $L_1$, $D_1$, $F_1$ là các điểm đối xứng của B, H, L, D, F qua đường thẳng AC.




*Hình 5*

Gọi $A_2$, $L_2$, $K_2$, $F_2$, $E_2$ là các điểm đối xứng của A, $L_1$, K, $F_1$, E qua đường thẳng $CB_1$.

Gọi $C_3$, $K_3$, $H_3$, $E_3$, $D_3$ là các điểm đối xứng của C, $K_2$, $H_1$, $E_2$, $D_1$ qua đường thẳng $B_1A_2$.

Gọi $B_4$, $H_4$, $L_4$, $D_4$, $F_4$ là các điểm đối xứng của $B_1$, $H_3$, $L_2$, $D_3$, $F_2$ qua đường thẳng $A_2C_3$.

Gọi $A_5$, $L_5$, $K_5$, $F_5$, $E_5$ là các điểm đối xứng của $A_2$, $L_4$, $K_3$, $F_4$, $E_3$ qua đường thẳng $B_4C_3$ *(hình 6)*.

Xét hai tam giác : $AA_2A_5$ và $BB_1B_4$, dễ thấy :

$$\begin{cases} A_2A = A_2A_5 = 2AH\ ;\ \widehat{AA_2A_5} = 2\hat{A} \\ B_1B = B_2B_4 = 2BK\ \ ;\ \widehat{BB_1B_4} = 2\hat{B} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AA_5 = 2AH\sin A \\ BB_4 = 2BK\sin B \end{cases}$$

$\Rightarrow AA_5 = BB_4$ (1) (Theo BĐ2, phần b).

Mặt khác, dễ thấy :

$AB = AB_1 = A_2B_1 = A_2B_4 = A_5B_4$ (2)

Từ (1), (2) suy ra : $ABB_4A_5$ là hình bình hành (3)

Tương tự (2) ta có : $AF = A_5F_5$, $AL = A_5L_5$ (4)

Từ (3), (4) suy ra : $LFF_5L_5$ là hình bình hành $\Rightarrow LL_5 = FF_5$ (5)

Nhờ BĐ2, phần a), ta thấy L, K, $H_1$, $L_2$, $K_3$, $H_4$, $L_5$ thẳng hàng

$\Rightarrow LL_5 = LK + KH_1 + H_1L_2 + L_2K_3 + K_3H_4 + H_4L_5$.

Tương tự như (2) ta có :

$KH_1 = KH$ ; $H_1L_2 = HL$ ; $L_2K_2 = LK$ ; $K_3H_4 = KH$ ; $H_4L_5 = HL$.

Vậy : $LL_5 = 2(LK + KH + HL) = 2P(HKL)$ (6)

Mặt khác :

$FF_5 \le FE + ED_1 + D_1F_2 + F_2E_3 + E_3D_4 + D_4F_5$.

Tương tự như (2), ta có :

$ED_1 = ED$ ; $D_1F_2 = DF$ ; $F_2E_3 = FE$ ; $E_3D_4 = ED$ ; $D_4F_5 = DF$.

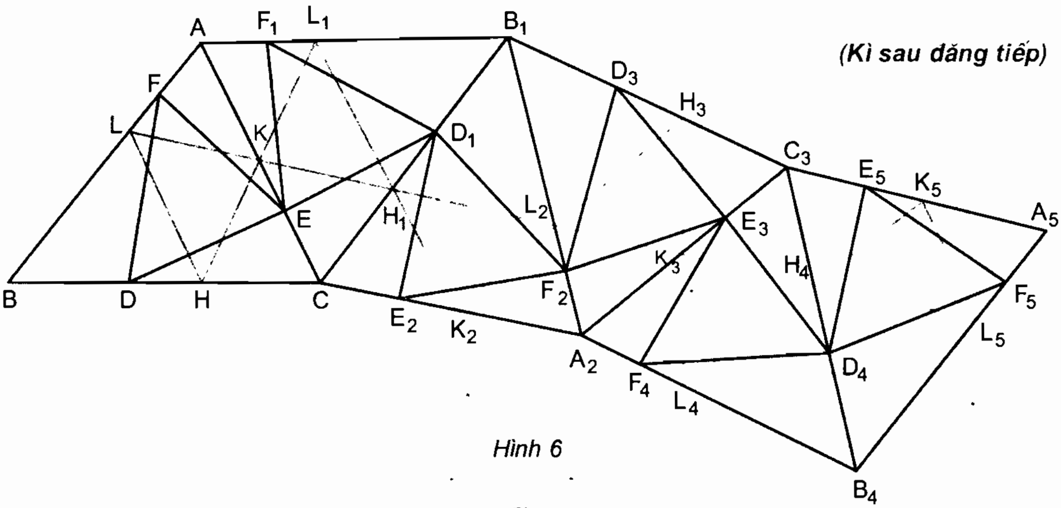
Vậy : $FF_5 \le 2(FE + ED + DF) = 2P(DEF)$ (7)

Từ (5), (6), (7) suy ra : P (DEF) ≥ P (HKL).

Đẳng thức xảy ra ⇔ F, E, $D_1$, $F_2$, $E_3$, $D_4$, $F_5$ thẳng hàng ⇔ D ≡ H ; E ≡ K ; F ≡ L (theo BĐ2 phần a).

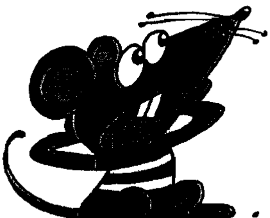
*Tóm lại :* P(DEF) nhỏ nhất khi và chỉ khi D, E, F theo thứ tự là hình chiếu của A, B, C trên BC, CA, AB.

***(Kì sau đăng tiếp)***




*Hình 6*

# Xem khác nhau là ... giống nhau



LÊ QUANG NẪM
*(ĐHKHTN, ĐHQG TP Hồ Chí Minh)*

Trước tiên, các bạn xem các bài toán sau :

**Bài toán 1 :** Cho sáu số vô tỉ. Chứng minh rằng có thể chọn ra được ba số a, b, c trong sáu số đã cho để a + b, b + c, c + a cũng là các số vô tỉ.

**Bài toán 2 :** Cho sáu điểm khác nhau trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Với mỗi đoạn thẳng nối hai trong sáu điểm đã cho, ta tô màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có ba cạnh cùng màu.

**Bài toán 3 :** Chứng minh rằng trong sáu người bất kỳ luôn tìm được ba người đôi một quen nhau hoặc đôi một không quen nhau (bài toán Ram - Say).

**Bài toán 4 :** Chia các số 1, 2, 3, 4, 5 thành hai nhóm. Chứng minh rằng có một nhóm chứa các số a, b, c (có thể các số này trùng nhau) sao cho a + b = c.

**Bài toán 5 :** Cho sáu điểm khác nhau trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Ngoài ra độ dài các đoạn thẳng nối hai trong sáu điểm trên cũng khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại một đoạn thẳng là cạnh lớn nhất của một tam giác có đỉnh là ba trong sáu điểm đã cho đồng thời cũng là cạnh nhỏ nhất của một tam giác khác có đỉnh là ba trong sáu điểm đã cho.

**Bài toán 6 :** Sáu nhà khoa học từ sáu nước khác nhau viết thư trao đổi với nhau về một trong hai đề tài. Chứng minh rằng có ba nhà khoa học viết thư trao đổi với nhau về cùng một đề tài.

**Bài toán 7 :** Năm nhà du hành vũ trụ của hai nước cùng bay vào trạm không gian quốc tế. Các số hiệu 1, 2, 3, 4, 5 được gán ngẫu nhiên cho từng người. Chứng minh rằng có ba nhà du hành vũ trụ có cùng một quốc tịch sao cho hiệu của số hiệu của hai người này là số hiệu của người kia.

Nếu các bạn bỏ công ra giải tất cả các bài toán trên thì thật đáng khen nhưng đó không phải là điều tôi muốn trình bày trong bài này. Điều tôi muốn nói là bảy bài toán trên thật ra là một. Tuy có cách phát biểu khác nhau, số liệu khác nhau nhưng về bản chất thì như nhau. Bạn chưa tin ư ? Ta hãy xem nhé. Bảy bài toán trên thật ra là các cách phát biểu khác nhau hay tương đương với bài toán 2. Bây giờ ta xem như bài toán 2 đã được giải. Chứng minh hoàn chỉnh của nó sẽ được trình bày sau.

Ở bài toán 3, ta "coi" mỗi người như là một điểm của mặt phẳng. Nếu hai người quen nhau thì đoạn thẳng nối hai điểm tương ứng với họ được tô màu xanh, ngược lại ta tô màu đỏ. Theo bài toán 2, có một tam giác T có ba cạnh cùng màu. Nếu T có các cạnh màu xanh thì sẽ có ba người tương ứng (với các đỉnh của T) đôi một quen nhau. Nếu T có các cạnh màu đỏ thì sẽ có ba người đôi một không quen nhau.

Bài toán 6 cũng là bài toán 2 và có cách giải tương tự như cách giải bài toán 3.

Bài toán 5 tuy có cách phát biểu thật dài nhưng cũng chỉ là biến thể của bài toán 2. Ở bài toán 2, quá trình tô màu là ngẫu nhiên. Do vậy, để giải bài toán 5, ta dùng một cách tô màu đặc biệt. Cụ thể, với mỗi tam giác có đỉnh là ba trong sáu đỉnh đã cho, ta tô màu đỏ cạnh lớn nhất, tô màu xanh hai cạnh còn lại. Do vậy, theo bài toán 2, có một tam giác T có ba cạnh cùng màu. Vì cạnh lớn nhất của T có màu đỏ nên các cạnh của T đều có màu đỏ. Do cạnh nhỏ nhất của T có màu đỏ nên nó là cạnh lớn nhất của một tam giác khác. Từ đây ta suy ra điều cần chứng minh.

Ở bài toán 1, coi mỗi số vô tỉ đã cho như là một điểm của mặt phẳng. Hai số có tổng là một số vô tỉ thì đoạn thẳng nối hai điểm tương ứng được tô màu đỏ, ngược lại thì tô màu xanh. Vì có một tam giác T có ba cạnh cùng màu nên có ba số vô tỉ a, b, c (ứng với ba đỉnh của T) sao cho a + b, b + c, c + a đều là số vô tỉ (nếu các cạnh của T có màu đỏ) hoặc a + b, b + c, c + a đều là số hữu tỉ (nếu các cạnh của T có màu xanh). Chỉ có trường hợp đầu xảy ra và đó là điều phải chứng minh. Thật vậy, nếu $x = a + b$, $y = b + c$, $z = c + a$ đều là số hữu tỉ thì $a = \frac{x - y + z}{2}$ là số hữu tỉ. Điều này vô lí do a là số vô tỉ.

Các bài toán 1, 3, 5, 6 đều liên quan đến số 6 như bài toán 2. Trong khi đó, các bài 4, 7 lại liên quan đến con số 5 mà lại có bản chất như bài toán 2 mới lạ chứ ! Dễ thấy, hai bài toán 4, 7 là một nên ta chỉ trình bày cánh giải bài toán 4 mà thôi.

Trên mặt phẳng lấy 6 điểm và kí hiệu 6 điểm này bởi các chữ số : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6. Khi đó nếu i, j là hai điểm khác nhau thì $|i - j|$ nhận giá trị từ 1 đến 5. Cạnh nối hai điểm i, j được tô màu đỏ nếu $|i - j|$ thuộc nhóm thứ nhất và được tô màu xanh nếu $|i - j|$ thuộc nhóm thứ hai. Vì có một tam giác có ba cạnh cùng màu nên tồn tại các điểm có kí hiệu là i ; j ; k sao cho $|i - j|$, $|k - j|$, $|i - k|$ thuộc cùng một nhóm, chẳng hạn là nhóm thứ nhất. Ta giả sử $i < j < k$. Khi đó $a = |i - j| = j - i$, $b = |k - j| = k - j$, $c = |i - k| = k - i$ đều thuộc nhóm thứ nhất và có $a + b = c$.

Các bạn thấy thế nào ? Tất cả đều là bài toán 2. Nhiệm vụ cuối cùng của chúng ta là chứng minh bài toán 2. Chứng minh khá đơn giản như sau :

Xét một điểm A trong sáu điểm đã cho. Năm đoạn thẳng xuất phát từ A được tô một trong hai màu nên theo nguyên lí Đi-rích-lê, tồn tại ba đoạn thẳng có cùng màu. Giả sử các đoạn thẳng AB, AC, AD được tô màu xanh. Nếu các đoạn thẳng BC, CD, DB đều có màu đỏ thì tam giác BCD có ba cạnh cùng đỏ. Ngược lại, có một đoạn thẳng, BC chẳng hạn, có màu xanh thì tam giác ABC có ba cạnh cùng màu xanh. Vậy trong mọi trường hợp ta đều tìm được một tam giác có ba cạnh cùng màu.

Từ một bài toán, các bạn phát triển thành nhiều bài toán, đó là một cách học tốt. Nhưng để nhìn bảy bài toán khác nhau trở thành giống nhau cũng phải rèn luyện không hề dễ dàng, có phải không các bạn ?

# BẠN BIẾT GÌ VỀ CÁC DANH NHÂN ?

[illegible]

[illegible]

Phân tích thành nhân tử là một trong những kĩ năng cơ bản nhất của chương trình đại số bậc THCS. Kĩ năng này được sử dụng khi giải các bài toán : biến đổi đồng nhất các biểu thức toán học, giải phương trình, chứng minh bất đẳng thức và giải các bài toán cực trị ... Sách giáo khoa lớp 8 đã giới thiệu nhiều phương pháp phân tích thành nhân tử. Sau đây tôi xin nêu một phương pháp thường sử dụng, dựa vào việc kết hợp các phương pháp quen thuộc như đặt nhân tử chung, nhóm số hạng, hằng đẳng thức ...

# PHƯƠNG PHÁP HOÁN VỊ VÒNG QUANH

TS. LÊ QUỐC HÁN *(ĐH Vinh)*

Phương pháp này dựa vào một số nhận xét sau đây :

**1/ Giả sử phải phân tích biểu thức F(a, b, c) thành nhân tử, trong đó a, b, c có vai trò như nhau trong biểu thức đó. Nếu F(a, b, c) = 0 khi a = b thì F(a, b, c) sẽ chứa các nhân tử a - b, b - c và c - a.**

**Bài toán 1 :** Phân tích thành nhân tử :

$F(a, b, c) = a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$.

*Nhận xét :* Khi a = b ta có :

$F(a, b, c) = a^2(a - c) + a^2(c - a) = 0$, do đó F(a, b, c) có chứa nhân tử a - b.

Tương tự F(a, b, c) chứa các nhân tử b - c, c - a. Vì F(a, b, c) là biểu thức bậc ba, do đó F(a, b, c) = k.(a - b)(b - c)(c - a).

Cho a = 1, b = 0, c = -1 ta có :

$1 + 1 = k.1.1.(-2) \Rightarrow k = -1$.

Vậy : F(a, b, c) = -(a - b)(b - c)(c - a).

**Bài toán 2 :** Phân tích thành nhân tử :

$F(a, b, c) = a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$.

*Nhận xét :* Tương tự như bài toán 1, ta thấy F(a, b, c) phải chứa các nhân tử a - b, b - c, c - a. Nhưng ở đây F(a, b, c) là biểu thức bậc bốn, trong khi đó (a - b)(b - c)(c - a) bậc ba, vì vậy F(a, b, c) phải có một thừa số bậc nhất của a, b, c. Do vai trò a, b, c như nhau nên thừa số này có dạng k(a + b + c). Do đó :

F(a, b, c) = k(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)

Cho a = 0 ; b = 1 ; c = 2 suy ra k = -1.

Vậy :

F(a, b, c) = -(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c).

**2/ Trong một số bài toán, nếu F(a, b, c) là biểu thức đối xứng của a, b, c nhưng F(a, b, c) ≠ 0 khi a = b thì ta thử xem khi a = -b, F(a, b, c) có triệt tiêu không, nếu thỏa mãn thì F(a, b, c) chứa nhân tử a + b, và từ đó chứa các nhân tử b + c, c + a.**

**Bài toán 3 :** Chứng minh rằng :

Nếu $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+y+z}$ thì

$$\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{z^n}=\frac{1}{x^n+y^n+z^n}$$

với mọi số nguyên lẻ n.

*Nhận xét :*

Từ giả thiết $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+y+z}$ suy ra

(xy + xz + yz)(x + y + z) - xyz = 0 (*)

Do đó ta thử phân tích biểu thức F(x, y, z) = (xy + xz + yz)(x + y + z) - xyz thành nhân tử.

Chú ý rằng khi x = - y thì F(x, y, z) $= - y^2z + y^2z = 0$ nên F(x, y, z) chứa nhân tử x + y. Lập luận tương tự như bài toán 1, ta có $F(x, y, z) = (x + y)(y + z)(x + z)$.

Do đó (*) trở thành :

$(x + y)(y + z)(x + z) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+x=0 \end{array}\right.$$

Nếu $x + y = 0$ chẳng hạn thì $x = - y$ và do n lẻ nên $x^n = (-y)^n = -y^n$.

Vậy :

$$\frac{1}{x^n}+\frac{1}{y^n}+\frac{1}{z^n}=\frac{1}{x^n+y^n+z^n} \Leftrightarrow \frac{1}{z^n}=\frac{1}{z^n}$$

Tương tự cho các trường hợp còn lại, ta có đpcm.

Có những khi ta phải linh hoạt hơn trong tình huống mà hai nguyên tắc trên không thỏa mãn :

**Bài toán 4 :**

Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

*Nhận xét :* Ta thấy rằng khi $x = y$ hay $x = -y$ thì $F(x, y, z) \neq 0$. Nhưng nếu thay $x = -(y + z)$ thì $F(x, y, z) = 0$ nên $F(x, y, z)$ có nhân tử $x + y + z$. Chia $F(x, y, z)$ cho $x + y + z$, ta được thương $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$ và dư là 0. Do đó :

$F(x, y, z) = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$.

Ta có thể thêm bớt vào $F(x, y, z)$ một lượng $3x^2y + 3xy^2$ để nhận được kết quả này.

Các bạn hãy dùng các phương pháp và kết quả nêu trên để giải các bài tập sau đây.

**Bài toán 5 :**

Tính tổng :

$$\frac{a^k}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^k}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^k}{(c-a)(c-b)}$$

trong đó $k = 1, 2, 3, 4$.

**Bài toán 6 :**

Chứng minh rằng $(a - b)^5 + (b - c)^5 + (c - a)^5$ chia hết cho $5(a - b)(b - c)(c - a)$.

# MỘT PHƯƠNG PHÁP TÌM NGHIỆM DƯƠNG ĐỘC ĐÁO

PHẠM ĐÌNH THỰC *(TP Hồ Chí Minh)*

Bằng kiến thức hình học lớp 6 ta có thể giải được các phương trình bậc hai một ẩn được không ? Câu trả lời là ở trường hợp tổng quát thì không được, nhưng trong rất nhiều trường hợp ta vẫn có thể tìm được nghiệm dương.

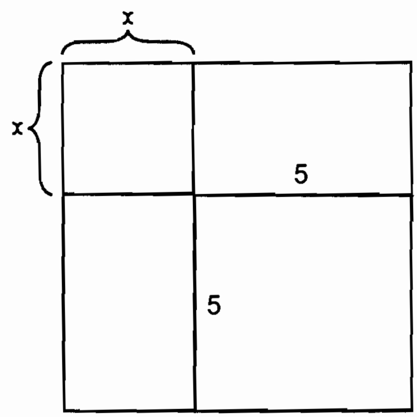
**Ví dụ :** Tìm nghiệm dương của phương trình $x^2 + 10x = 39$.

**Lời giải :**

Ta có : $x^2 + 10x = 39$

$\Leftrightarrow x^2 + 2.5.x = 39$

Từ biến đổi trên, ta hình dung x là cạnh của một hình vuông thì diện tích của hình vuông đó là $x^2$. Kéo dài mỗi cạnh của hình vuông thêm 5 đơn vị (như hình vẽ), ta dễ thấy :




Hình vuông to có độ dài cạnh là $x + 5$ sẽ có diện tích là 64. Do đó :

$(x + 5)^2 = 64 = 8^2 \Leftrightarrow x + 5 = 8 \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy phương trình có nghiệm dương là $x = 3$.

Phương pháp này đã được nhà toán học Italia nổi tiếng Jerôm Cacđanô (1501 - 1576) sử dụng khi tìm nghiệm dương của phương trình $x^2 + 6x = 31$.

Các bạn hãy tìm nghiệm dương của phương trình $x^2 - 8x = 33$ bằng phương pháp hình học thử xem ?

# NHỮNG KHAI THÁC TỪ MỘT ĐA THỨC QUEN THUỘC


KHÁM PHÁ

**Lời tòa soạn :** Đa thức $F(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ chắc là rất có "duyên" với các bạn. Ngoài bài viết của TS. **Lê Quốc Hán** (xem trang 7), TTT2 nhận được 3 bài viết của nhà giáo **Nguyễn Đức Tấn** *(TP Hồ Chí Minh)* và hai bạn **Trần Đức Trung** *(9B, THCS Nguyễn Đăng Đạo, TX Bắc Ninh, Bắc Ninh)*, **Nguyễn Thị Thanh Thủy** *(8B1, THCS Vĩnh Niệm, Lê Chân, TP Hải Phòng)* khai thác các bài toán liên quan tới đa thức này. TTT2 xin được tổng hợp lại và trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc.


**Bài toán 1 :** Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

**Lời giải :** Ta có $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= (a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 + c^3 - 3abc$

$= [(a + b)^3 + c^3] - 3ab(a + b + c)$

$= (a + b + c)[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2 - 3ab]$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

$= \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$.

**Nhận xét :**

Nếu $a^3+b^3+c^3=3abc$ thì $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ a=b=c \end{array}\right.$

Nếu cho $a = x - y$ ; $b = y - z$ ; $c = z - x$ thì $a + b + c = 0$, ta có bài toán :

**Bài toán 2 :** *(Đề thi học sinh giỏi toán cấp II, miền Bắc 1962)*

Phân tích đa thức $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$ thành nhân tử.

**Lời giải :** Từ nhận xét trên ta có ngay $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x)$.

• Với $a = x^2 + y^2$ ; $b = z^2 - x^2$ ; $c = -y^2 - z^2$ cũng cho $a + b + c = 0$ và ta lại có bài toán :

**Bài toán 3 :**

*(Thi vô địch toán 8 - Belarussia - 1957)*

Phân tích thành nhân tử :

$(x^2 + y^2)^3 + (z^2 - x^2)^3 - (y^2 + z^2)^3$

**Lời giải :** $(x^2 + y^2)^3 + (z^2 - x^2)^3 - (y^2 + z^2)^3$

$= (x^2 + y^2)^3 + (z^2 - x^2)^3 + (-y^2 - z^2)^3$

$= 3(x^2 + y^2)(z^2 - x^2)(-y^2 - z^2)$

$= 3(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(x + z)(x - z)$.

• Lại cho $a = \frac{1}{x}$ ; $b = \frac{1}{y}$ ; $c = \frac{1}{z}$, ta có bài toán khác :

**Bài toán 4 :** Cho $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$.

Tính $P=\frac{xy}{z^2}+\frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}$.

**Lời giải :**

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \Rightarrow \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}=\frac{3}{xyz}$.

Ta có :

$$P=\frac{xy}{z^2}+\frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}=xyz\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\right)$$

$$=xyz.\frac{3}{xyz}=3$$

Vậy P = 3.

**Bài toán 5 :** Cho $abc \neq 0$, $a^3+b^3+c^3=3abc$. Tính giá trị của

$$A=\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right).$$

**Lời giải :** Theo bài toán 1,

$a^3+b^3+c^3=3abc$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ a=b=c \end{array}\right.$$

+ Nếu $a+b+c=0$ thì :

$$A=\frac{a+b}{b}.\frac{b+c}{c}.\frac{c+a}{a}=\frac{-c}{b}.\frac{-a}{c}.\frac{-b}{a}=-1$$

+ Nếu $a=b=c$ thì :

$A=(1+1)(1+1)(1+1)=2.2.2=8$.

Vậy A nhận hai giá trị là 8 và -1.

• Với $a=yz$ ; $b=zx$ ; $c=xy$ thì :

$a^3+b^3+c^3=3abc$

$\Leftrightarrow y^3z^3+z^3x^3+x^3y^3=3x^2y^2z^2$.

Từ đó hình thành bài toán :

**Bài toán 6 :** Cho $xyz \neq 0$ thỏa mãn $x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3=3x^2y^2z^2$. Tính giá trị biểu thức

$$M=\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right).$$

**Lời giải :** Theo cách đặt nêu trên, dễ dàng đưa bài toán 6 về bài toán 5.

Kết quả M = -1 hoặc M = 8.

**Bài toán 7 :** Giải hệ $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^2+c^2=1 \\ a^3+b^3+c^3=1 \end{cases}$

*(Thi học sinh giỏi TP Hồ Chí Minh, 1986-1987)*

**Lời giải :** Theo bài 1, ta có : $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$\Leftrightarrow 1-3abc=1-ab-bc-ca$

$\Leftrightarrow 3abc=ab+bc+ca$ (1)

Mặt khác $(a+b+c)^2=1$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=1$

$\Leftrightarrow ab+bc+ca=0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow abc=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{array}\right.$

Từ đây lần lượt suy ra các nghiệm của hệ là : $\left[\begin{array}{l} a=0,\ b=0,\ c=1 \\ a=0,\ b=1,\ c=0 \\ a=1,\ b=0,\ c=0 \end{array}\right.$

**Bài toán 8 :** Cho $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^2+c^2=1 \\ a^3+b^3+c^3=1 \end{cases}$

Tính giá trị của biểu thức :

$P=a^{2002}+b^{2003}+c^{2004}$.

**Lời giải :** Áp dụng bài 7, ta có kết quả duy nhất P = 1.

**Bài toán 9 :** *(Thi vào lớp 10 chuyên toán THPT Lê Hồng Phong, TP Hồ Chí Minh, 1998)*

Cho $\Delta ABC$ có ba cạnh a, b, c thỏa mãn : $a^3+b^3+c^3=3abc$. Hỏi $\Delta ABC$ là tam giác gì ?

**Lời giải :** $a^3+b^3+c^3=3abc$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \text{ (không xảy ra vì a, b, c > 0)} \\ a=b=c \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

**Bài toán 10 :** Cho $\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=b^2 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{c} \end{cases}$

Tính $x^3 + y^3 + z^3$ theo a, b, c.

**Lời giải :** Áp dụng bài 1 : $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + a(b^2 - (xy + yz + zx))$ (1)

Mặt khác, $a^2 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$

$$\Rightarrow xy + yz + zx = \frac{a^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2} = \frac{a^2 - b^2}{2} \quad (2)$$

Từ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{c} \Leftrightarrow \dfrac{xy+yz+zx}{xyz}=\dfrac{1}{c}$

$\Leftrightarrow xyz = c(xy + yz + zx)$

$\Leftrightarrow xyz = c.\dfrac{a^2-b^2}{2}$ (theo (2)) (3)

Thay (2) ; (3) vào (1) ta có :

$$x^3+y^3+z^3 = 3c\frac{a^2-b^2}{2} + a\left(b^2 - \frac{a^2-b^2}{2}\right) = \frac{3c(a^2-b^2)+a(3b^2-a^2)}{2}$$

**Bài toán 11 :** Biết $\begin{cases} ax+by=c \\ bx+cy=a \\ cx+ay=b \end{cases}$

Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

**Lời giải :** Từ giả thiết ta suy ra :

$ax + by + bx + cy + cx + ay = a + b + c$

$\Leftrightarrow (a + b + c)(x + y - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ x+y-1=0 \end{array}\right.$$

+ Với $a + b + c = 0$, theo bài toán 1 $\Rightarrow$ đpcm.

+ Với $x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 - x$, thay vào hệ, sau một số biến đổi dẫn đến $a = b = c$, theo bài toán 1 $\Rightarrow$ đpcm.

Chắc chắn vẫn còn nhiều tìm tòi khám phá xung quanh đa thức $F(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$. Sau đây là một số bài toán cùng dạng của nhà giáo ***Nguyễn Đức Tấn***, TP Hồ Chí Minh, gửi tới các bạn, xem như bài tập :

**Bài toán 12 :** Giải phương trình :

$(3x - 2)^3 - (x - 3)^3 = (2x + 1)^3$.

**Bài toán 13 :** Giải phương trình nghiệm nguyên : $(x + y)^3 = (x - 2)^3 + (y + 2)^3 + 6$.

**Bài toán 14 :** Phân tích thành nhân tử :

$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$.

**Bài toán 15 :** Phân tích thành nhân tử :

$(x + y + z)^3 - (x + y - z)^3 - (x - y + z)^3 - (-x + y + z)^3$.

**Bài toán 16 :** Cho $abc \neq 0$, $a + b + c = 0$.

Tính $\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ca}+\dfrac{c^2}{ab}$.

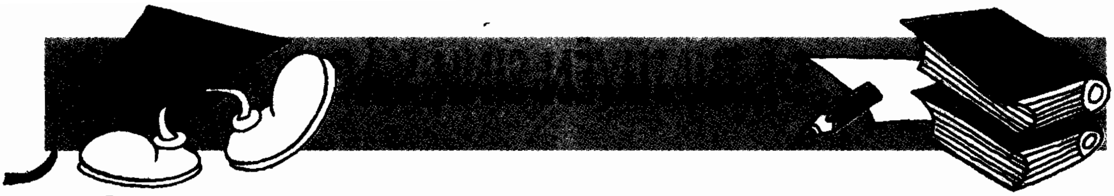
**Bài toán 17 :** Cho $a + b + c + d = 0$.

Chứng minh rằng :

$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(c + d)(ab - cd)$.

**Bài toán 18 :** Cho x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x^6 + y^6$.



# BẮT ĐẦU TỪ Ý TƯỞNG CỦA HÊ RÔNG

*(tiếp theo kì trước)*

Các BT1, 2, 3 tạo thành một nhóm bài "bền vững và đặc sắc" trong hệ thống các bài toán bất đẳng thức và cực trị hình học có liên quan đến phép đối xứng trục. Nói đến một trong ba bài của nhóm, người ta lập tức nghĩ đến ngay tới hai bài còn lại. Cho đến đầu những năm 90 của thế kỉ trước, nhóm bài "bền vững và đặc sắc" này vẫn là một độc chiêu khi người ta muốn giới thiệu ý tưởng của Hê Rông với những ai quan tâm tới hình học sơ cấp. Tuy nhiên, trong mười năm trở lại đây, tình hình đã thay đổi. Trong hệ thống các bài toán bất đẳng thức và cực trị hình học có liên quan tới phép đối xứng trục đã xuất hiện hai nhóm bài mới với độ bền vững và đặc sắc không kém gì nhóm các BT1, 2, 3. Nhờ chúng, nhóm các BT1, 2, 3 không còn là một độc chiêu khi người ta muốn nói tới ý tưởng của Hê Rông.

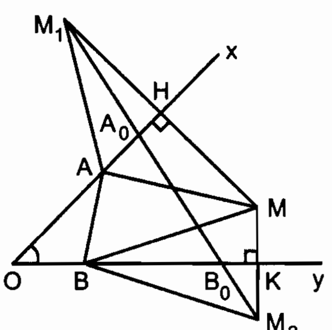
TS. NGUYỄN MINH HÀ *(ĐHSP Hà Nội)*

Kì này, xin giới thiệu với bạn đọc về nhóm bài thứ nhất trong hai nhóm bài này.

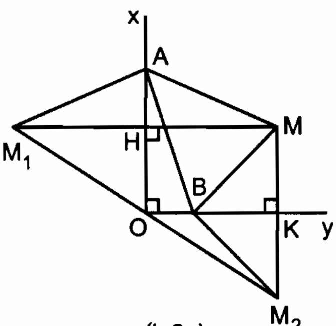
**Bài toán 4 :** Cho góc $\widehat{xOy}$ và điểm M nằm trong góc đó. Các điểm A, B theo thứ tự thuộc Ox, Oy (A, B khác O). H, K là hình chiếu của M trên các đường thẳng chứa Ox, Oy. Chứng minh rằng :

$P(MAB) \geq 2HK$.

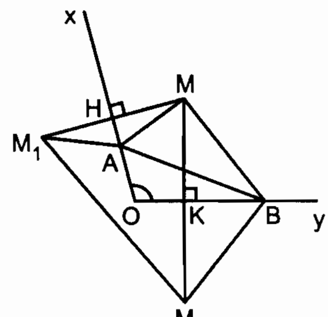
**Lời giải :** Gọi $M_1$, $M_2$ là các điểm đối xứng của M qua Ox, Oy. Có hai trường hợp xảy ra.



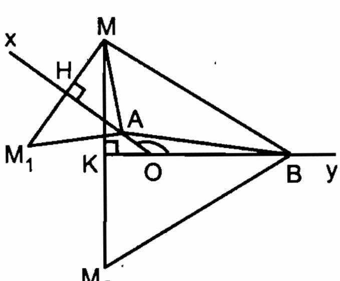

*(h.1)*




*(h.2a)*




*(h.2b)*




*(h.2c)*

Trường hợp 1 : $\widehat{xOy} < 90^\circ$ *(h.1)*. Vì $\widehat{xOy} < 90^\circ$ nên $\widehat{M_1OM_2} < 180^\circ$.

Vậy đoạn $M_1M_2$ cắt các tia Ox, Oy.

Đặt $A_0 = M_1M_2 \cap Ox$ ; $B_0 = M_1M_2 \cap Oy$ ($A_0$, $B_0$ khác O). Ta thấy :

$P(MAB) = MA + AB + BM = M_1A + AB + BM_2 \geq M_1M_2 = 2HK$.

Vậy $P(MAB) \geq 2HK$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A \equiv A_0$ ; $B \equiv B_0 \Leftrightarrow$ O là tâm đường tròn bàng tiếp đối diện với đỉnh M của $\Delta MAB$.

Trường hợp 2 : $\widehat{xOy} \geq 90^\circ$ *(h.2a, h.2b, h.2c)*

Vì $\widehat{xOy} \geq 90^\circ$ nên $\widehat{M_1OM_2} \geq 180^\circ$ .

Suy ra, hoặc đoạn $M_1M_2$ đi qua O *(h.2a)* hoặc đoạn $M_1M_2$ không đồng thời cắt các tia Ox, Oy *(h.2b, h.2c)*. Vì vậy, mặc dù giống như trường hợp 1, ta vẫn có : $P(MAB) \geq 2$ HK. Nhưng đẳng thức không xảy ra. Suy ra $P(MAB) > 2$ HK.

Tóm lại, trong cả hai trường hợp $P(MAB) \geq 2$ HK.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ O là tâm đường tròn bàng tiếp đối diện với đỉnh M của MAB.

BT4 được đặt ra và chứng minh lần đầu tiên bởi bạn **Phạm Ngọc Huy**, khi là học sinh lớp 12 Toán, trường PTNK, ĐHQG thành phố Hồ Chí Minh. Tuy nhiên cách chứng minh của bạn Huy hơi dài và cần đến các kiến thức toán của chương trình THPT. Tiếp thu ý tưởng của Hê Rông, tôi đã thay phép chứng minh của bạn Huy bởi chứng minh trên.

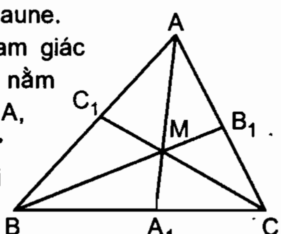
Nhờ BT4, bạn Huy đã đưa ra một lời giải hết sức độc đáo và ngắn gọn cho bài toán hay và khó sau đây.

**Bài toán 5 :** Cho tam giác ABC, M là điểm nằm trong tam giác. MA, MB, MC theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại $A_1$, $B_1$, $C_1$. Gọi $A_2$, $B_2$, $C_2$ lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng : $P(A_1B_1C_1) \geq P(A_2B_2C_2)$.

BT5 được đặt ra bởi nhà toán học Mĩ, Jack Garfulkel, sống cùng thời với chúng ta, vừa mới mất cách đây một vài năm. Ông là tác giả của rất nhiều bất đẳng thức hình học hay và khó. Nhiều bất đẳng thức hình học do ông đặt ra đến nay vẫn chưa được chứng minh. BT5 lần đầu tiên được chứng minh cũng bởi một nhà toán học Mĩ, CS. Gardner. Tuy nhiên, chứng minh của CS. Gardner quá dài và phức tạp. Tôi đã theo dõi chứng minh này một lần và đã tự nhủ rằng, chỉ một lần mà thôi. Ngay từ lúc đó, tôi đã đặt câu hỏi, liệu có thể, tìm cho BT5 một phép chứng minh khác đơn giản và đẹp đẽ hơn phép chứng minh của CS. Gardner. Tình cờ nhưng rất nhanh chóng, bạn Huy đã trả lời câu hỏi của tôi bằng **phép chứng minh tuyệt vời** dưới đây.

Trước hết, xin phát biểu không chứng minh một bổ đề quen thuộc mà tác giả của nó là nhà toán học Pháp, Gergaune.

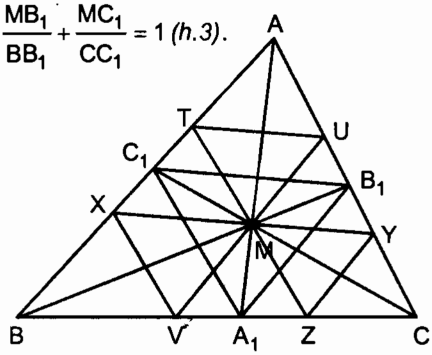
**Bổ đề 3 :** Cho tam giác ABC. M là một điểm nằm trong tam giác. MA, MB, MC theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại $A_1$, $B_1$, $C_1$.



*(h.3)*

Khi đó :

$$\frac{MA_1}{AA_1} + \frac{MB_1}{BB_1} + \frac{MC_1}{CC_1} = 1 \ (h.3).$$



*(h.4)*

Nhờ BĐ3 và BT4 bạn Huy đã chứng minh BT5 như sau :

Qua M kẻ các đường thẳng tương ứng song song với các cạnh của tam giác $A_1$, $B_1$, $C_1$. Chúng cắt các cạnh của tam giác ABC tại X, Y, Z, T, U, V *(h.4)*. Dễ thấy các tam giác MUT, VMX, ZYM đồng dạng với tam giác $A_1B_1C_1$ với các tỉ số đồng dạng tương ứng là $\frac{AM}{AA_1}$, $\frac{BM}{BB_1}$, $\frac{CM}{CC_1}$. Từ BĐ3, dễ dàng suy ra :

$$\frac{AM}{AA_1} + \frac{BM}{BB_1} + \frac{CM}{CC_1} = 2.$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AA_1}P(A_1B_1C_1) + \frac{BM}{BB_1}P(A_1B_1C_1)$$

$$+ \frac{CM}{CC_1}P(A_1B_1C_1) = 2P(A_1B_1C_1).$$

$$\Rightarrow P(MUT) + P(VMX) + P(ZYM) = 2P(A_1B_1C_1) \quad (1)$$

Theo BT4, ta có : $P(MUT) \geq 2B_2C_2$ ;

$P(VMX) \geq 2C_2A_2$ ; $P(ZYM) \geq 2A_2B_2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra :

$P(A_1B_1C_1) \geq B_2C_2 + C_2A_2 + A_2B_2$

$\Rightarrow P(A_1B_1C_1) \geq P(A_2B_2C_2)$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $\Delta$ABC nhọn và A, B, C là tâm các đường tròn bàng tiếp đối diện với đỉnh M của các tam giác MTU, MVQ, MRZ $\Leftrightarrow$ $\Delta$ABC nhọn và A, B, C là tâm các đường tròn bàng tiếp đối diện với đỉnh $A_1$, $B_1$, $C_1$ của $\Delta A_1B_1C_1$ $\Leftrightarrow$ $\Delta$ABC nhọn và M là trực tâm của nó.

Giống như các BT1, 2, 3, các BT1, 4, 5 cũng tạo thành một nhóm bài "bền vững và đặc sắc" trong hệ thống các bài toán bất đẳng thức và cực trị hình học có liên quan tới phép đối xứng trục. Trong phép chứng minh các BT4, 5 ta vẫn thấy ý tưởng của Hê Rộng giữ vai trò hết sức quan trọng.

***(Kì sau đăng tiếp)***

# KHÔNG CHỈ DỪNG LẠI Ở VIỆC GIẢI TOÁN !

LÊ TRỌNG CHÂU
*(GV trường THCS Bình An, Can Lộc, Hà Tĩnh)*

Trong học toán, việc tạo được thói quen chủ động tìm tòi, khai thác, phát triển các bài toán sẽ giúp người học hiểu sâu sắc kiến thức đã học, phát triển tư duy sáng tạo và tiếp thu tốt những kiến thức mới.

• Chúng ta sẽ bắt đầu từ một bài toán quen thuộc.

**Bài toán 1 :**

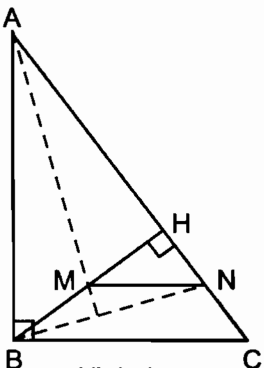
Cho $\Delta ABC$ có $\hat{B} = 90^o$ ; đường cao BH. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BH và HC. Chứng minh : $AM \perp BN$.

**Lời giải :**

Từ giả thiết ta có :

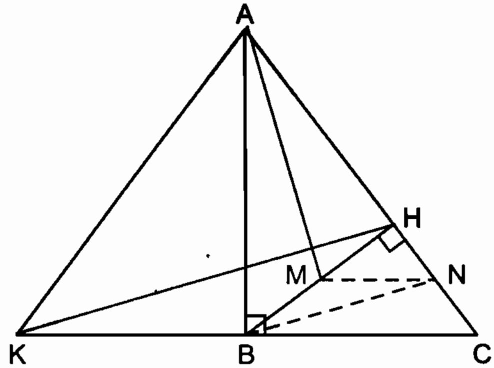
MN là đường trung bình của $\Delta HBC$ *(hình 1)* $\Rightarrow MN \parallel BC$, mặt khác $BC \perp AB$ $\Rightarrow MN \perp AB$.

Xét $\Delta ABN$ có $MN \perp AB$ ; $BM \perp AN$ $\Rightarrow$ M là trực tâm của $\Delta ABN$ $\Rightarrow AM \perp BN$ (đpcm).



*Hình 1*

• Có rất nhiều hướng phát triển bài toán 1, cho ta những bài toán mới khá thú vị. Từ suy nghĩ nếu tạo được đường thẳng song song với AM hoặc BN thì đường thẳng đó sẽ tương ứng vuông góc với BN hoặc AM, ta cho thêm điểm K mà B là trung điểm của KC *(hình 2)*, dễ dàng nhận thấy BN là đường trung bình của $\Delta CKH \Rightarrow BN \parallel KH$ $\Rightarrow AM \perp KH$. Ta có bài toán sau :



*Hình 2*

**Bài toán 2 :**

Cho $\Delta ABC$ có $\hat{B} = 90^o$ ; đường cao BH. Gọi M là trung điểm của BH và K là điểm đối xứng với C qua B.

Chứng minh : $KH \perp AM$.

**Lời giải :**

Gọi N là trung điểm của HC, theo chứng minh trên, ta có đpcm.

• Hoàn toàn là bài toán 2 nhưng với cách phát biểu khác đi, ta có bài toán 3.

**Bài toán 3 :**

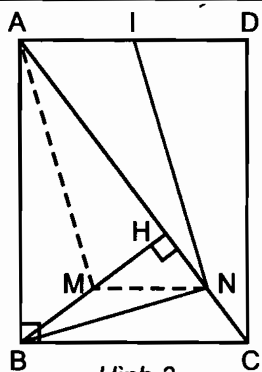
Cho $\Delta ABC$ cân tại A, đường cao AH. Hạ $HI \perp AC$, M là trung điểm của HI. Chứng minh rằng $BI \perp AM$.

• Tiếp tục phát triển theo hướng trên : tạo ra đường thẳng song song với AM, đường thẳng đó ắt vuông góc với BN.

**Bài toán 4 :**

Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu của B trên AC, I và N lần lượt là trung điểm của AD và HC. Chứng minh rằng $BN \perp IN$.

**Lời giải :**




*Hình 3*

Gọi M là trung điểm của BH *(hình 3)*.

Ta có AM ⊥ BN (bài toán 1).

Ta còn phải chứng minh AM // IN, thật vậy :

Do MN là đường trung bình của ΔHBC nên $MN // = \frac{1}{2}BC$, mặt khác, ABCD là hình chữ nhật và I là trung điểm của AD nên $IA // = \frac{1}{2}BC$. Do đó IA // = MN ⇒ MNIA là hình bình hành ⇒ AM // IN, bài toán được chứng minh xong.

• Bài toán 4 còn nhiều cách giải khác. Kết hợp bài toán 3 và bài toán 4 ta có bài toán mới khó hơn chút xíu.

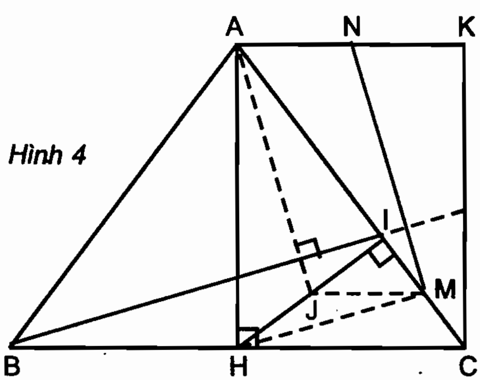
**Bài toán 5 :**

Cho ΔABC cân tại A, đường cao AH. Dựng hình chữ nhật AHCK ; HI ⊥ AC. M và N lần lượt là trung điểm của IC và AK. Chứng minh rằng MN ⊥ BI.

**Lời giải :**

Gọi J là trung điểm của HI *(hình 4)*. Áp bài toán 3 ta có BI ⊥ AJ ; mặt khác, theo chứng minh của bài toán 4, tứ giác AJMN là hình bình hành và AJ // MN, vậy : MN ⊥ BI (đpcm).

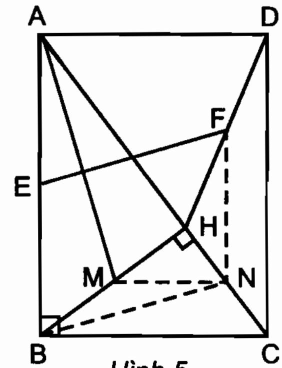
• Tương tự như bài toán 4 (dựng hình chữ nhật ABCD rồi tạo AM // IN), ta sẽ tạo EF // BN để được bài toán sau.




*Hình 4*

**Bài toán 6 :**

Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu của B trên AC ; E, F, M lần lượt là trung điểm của AB, DH, BH. Chứng minh rằng AM ⊥ EF.




*Hình 5*

**Lời giải :**

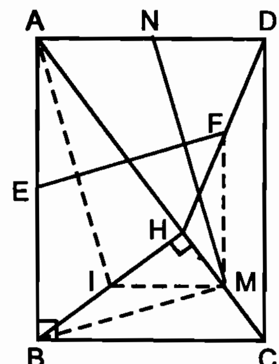
Gọi N là trung điểm của CH *(hình 5)*. Áp dụng chứng minh tứ giác AMNI là hình bình hành (bài toán 4), ta chứng minh được tứ giác BEFN cũng là hình bình hành, suy ra EF // NB.

Mặt khác BN ⊥ AM (theo bài toán 1). Vậy ta có AM ⊥ EF .

• Lại kết hợp bài toán 4 và bài toán 6, cho ta một kết quả khác.

**Bài toán 7 :**

Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu của B trên AC ; E, F, M, N lần lượt là trung điểm của AB, DH, HC, AD. Chứng minh rằng EF ⊥ MN.




*Hình 6*

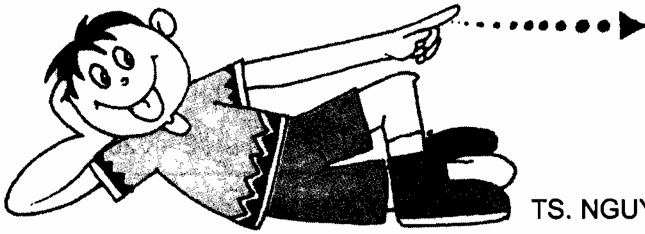
**Lời giải :**

Gọi I là trung điểm của BH *(hình 6)*.

Lần lượt theo các bài toán 1, 4, 6 ta có các kết quả sau : AI ⊥ BM, AI // MN, BM // EF ⇒ EF ⊥ MN (đpcm).

• Tiếp tục khai thác, phát triển bài toán 1 chắc chắn còn nhiều điều thú vị. Qua đây, tác giả mong muốn các bạn luôn có thói quen chủ động tìm tòi, khai thác, phát triển các bài toán, thông qua đó tự rèn luyện tư duy và tích lũy được nhiều kiến thức bổ ích. Chúc các bạn thành công.

# BẮT ĐẦU TỪ Ý TƯỞNG CỦA HÊRÔNG



*(tiếp theo kì trước)*

TS. NGUYỄN MINH HÀ *(ĐHSP Hà Nội)*

Cùng với BT1 của Hêrông, bài toán sau đây cũng được tôi đặc biệt chú ý ngay từ khi còn là học sinh phổ thông.

**Bài toán 6 :**

Cho tam giác ABC và điểm M thuộc tam giác. Chứng minh rằng : $MB + MC \le AB + AC$.

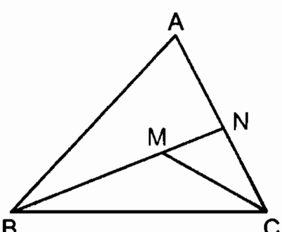
Để chứng minh BT6, trước hết, ta phát biểu không chứng minh một bổ đề.

**Bổ đề 4 :**

Cho ba điểm A, B, C bất kì. Ta có $AB + AC \ge BC$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ A thuộc đoạn BC.

Trong BĐ4, các điểm A, B, C có thể thẳng hàng, thậm chí trùng nhau.

Khi X trùng Y thì khoảng cách giữa X và Y bằng không. Cách hiểu này có hiệu lực không chỉ trong BĐ4 mà còn có hiệu lực cho tới cuối bài viết này.




*Hình1*

BĐ4 là sự phát biểu chi tiết bất đẳng thức tam giác, đã được giới thiệu trong chương trình hình học 7.

Trở lại việc giải BT6.

Đặt $N = BM \cap AC$ *(hình 1)*.Theo BĐ4, ta có :

$MB + MC \le MB + MN + NC = NB + NC \le AB + AN + NC = AB + AC$.

Vậy $MB + MC \le AB + AC$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv N$ ; $A \equiv N \Leftrightarrow M \equiv A$.

Tôi chú ý tới BT6 vì sự giản dị trong hình thức nhưng sâu sắc về nội dung của nó. Tôi luôn có cảm giác rằng, kết quả mà ta đạt được trong BT6 chỉ là sự mở đầu cho những kết quả khác, sâu sắc hơn, thú vị hơn. Chính vì vậy mà tôi đã tìm cách mở rộng BT6.

Kì này, xin giới thiệu với bạn đọc những tìm tòi đầu tiên mà tôi đạt được trong quá trình mở rộng này. Thật ngẫu nhiên, ý tưởng quan trọng của Hêrông đã giúp tôi rất nhiều.

Hãy coi ABC như một tứ giác "suy biến" với hai đỉnh trùng nhau, BT6 ngay lập tức được mở rộng như sau :

**Bài toán 7 :** Cho tứ giác ABCD và điểm M thuộc tứ giác. Chứng minh rằng :

$MB + MC \le \max\{AB + AC ; DB + DC\}$.

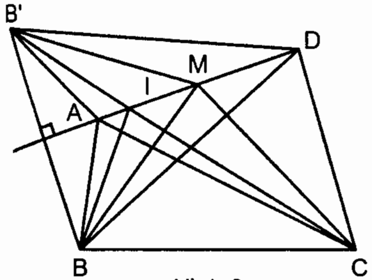
Kí hiệu $\max\{a_1 ; a_2 ; ... ; a_n\}$ chỉ số lớn nhất trong các số $a_1 ; a_2 ; ... ; a_n$. Nó có hiệu lực cho tới cuối bài viết này.

BT7 là sự mở rộng đầu tiên và đơn giản nhất của BT6. Vậy mà tôi đã gặp khó khăn nhiều trong khi giải nó. Loay hoay mãi mà không giải được. Đã có lúc tôi nghĩ rằng, kết quả mà tôi đặt ra trong BT7 có lẽ không đúng. Trong thời khắc bế tắc ấy, tôi bỗng nhận ra rằng, xét cho cùng thì tôi đang phải quan sát và so sánh độ dài ba đường gấp khúc BMC, BAC, BDC, do đó tôi lại nghĩ đến ý tưởng của Hêrông. Nhờ sự liên tưởng này, tôi đã giải được BT7.

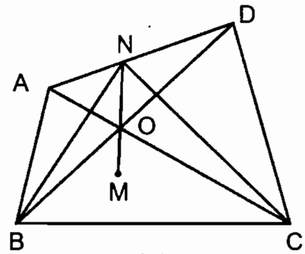
Xin giới thiệu với bạn đọc lời giải đó.

**Trường hợp 1 :** M thuộc đoạn AD (hình 2a).

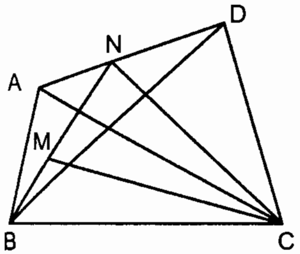
Gọi B' là điểm đối xứng của B qua AD. Vì B, C nằm về cùng một phía của AD nên B', C nằm về hai phía của AD. Suy ra : đoạn B'C và đường thẳng AD cắt nhau.



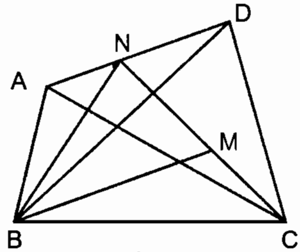

*Hình 2a*




*Hình 2b*




*Hình 2c*




*Hình 2d*

Đặt I = B'C $\cap$ AD. Ta thấy :

$$M \in \text{đoạn } AD \Rightarrow \left[\begin{array}{l} I \in \text{tia } MA \\ I \in \text{tia } MD \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M \in \Delta CDB' \\ M \in \Delta CAB' \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} MB' + MC \le DB' + DC \\ MB' + MC \le AB' + AC \end{array}\right. \text{(theo BT6)} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} MB + MC \le DB + DC \\ MB + MC \le AB + AC \end{array}\right.$$

$\Rightarrow MB + MC \le \max\{AB + AC \,;\, DB + DC\}$.

**Trường hợp 2 :** M không thuộc đoạn AD *(hình 2b, 2c, 2d)*.

Lấy N thuộc đoạn AD sao cho M thuộc tam giác NBC (tùy vào vị trí của M mà ta có cách chọn N thích hợp (hình 2b, 2c, 2d)). Theo BT6, ta có : $MB + MC \le NB + NC$ (1)

Theo trường hợp 1, ta có :

$$NB + NC \le \max\{AB + AC \,;\, DB + DC\} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $MB + MC \le \max\{AB + AC \,;\, DB + DC\}$.

Tóm lại trong cả hai trường hợp, ta đều có :

$$MB + MC \le \max\{AB + AC \,;\, DB + DC\}.$$

Nếu $AB + AC > DB + DC$ thì đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv A$.

Nếu $AB + AC < DB + DC$ thì đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv D$.

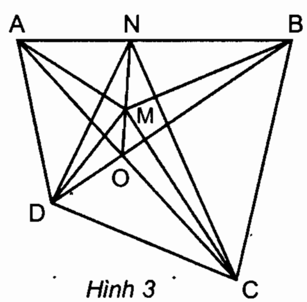
Nếu $AB + AC = DB + DC$ thì đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv A$ hoặc $M \equiv D$.

Nhờ kết quả đạt được trong BT7, tôi hy vọng kết quả sau đây đúng.

**Bài toán 8 :** Cho tứ giác ABCD và điểm M nằm trong tứ giác.

Chứng minh rằng : $MA + MB + MC + MD \le \max\{\alpha \,;\, \beta \,;\, \gamma \,;\, \delta\}$

Trong đó : $\alpha = AB + AC + AD$ ; $\beta = BC + BD + BA$ ; $\gamma = CD + CA + CB$ ; $\delta = DA + DB + DC$.




*Hình 3*

BT8 là bài toán khó, tuy nhiên, nhờ BT7 ta có thể giải BT8 khá dễ dàng. Lời giải mà tôi giới thiệu dưới đây là lời giải của bạn *Đào Phương Bắc* khi đang là học sinh trường THCS Bế Văn Đàn, Đống Đa, **Hà Nội**.

Đặt O = AC $\cap$ BD. Vì M thuộc tứ giác ABCD nên M thuộc một trong các tam giác OAB, OBC, OBC, OCD, ODA. Không mất tính tổng quát, giả sử M thuộc tam giác OAB *(hình 3)*. Đặt N là giao của tia OM và đoạn AB. Ta thấy : M thuộc các tam giác NAC, NBD. Theo BT6, ta có :

$$\begin{cases} MA + MC \le NA + NC \\ MB + MD \le NB + ND \end{cases}$$

$\Rightarrow MA + MB + MC + MD \le AB + NC + ND$ (1)

Theo BT7, ta có :

$NC + ND \le \max\{AC + AD \,;\, BC + BD\}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra : $MA + MB + MC + MD \le \max\{AB + AC + AD \,;\, BC + BD + BA\}$

$\Rightarrow MA + MB + MC + MD \le \max\{\alpha \,;\, \beta\}$

$\Rightarrow MA + MB + MC + MD \le \max\{\alpha \,;\, \beta \,;\, \gamma \,;\, \delta\}$

Kết luận chi tiết cho điều kiện xảy ra đẳng thức BT8 rất phức tạp. Tuy nhiên, ta có kết luận đơn giản nhưng rất có ý nghĩa sau :

Trong BT8, đẳng thức có xảy ra. Nếu đẳng thức xảy ra thì $M \in \{A, B, C, D\}$.

Bạn Bắc không phải là người đầu tiên tìm ra lời giải cho BT8 nhưng lời giải của Bắc thật đơn giản và đẹp đẽ, đáng để cho ta ghi nhớ.

***(Kì sau đăng tiếp)***

# TỪ MỘT BÀI TOÁN VỀ BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC

TẠ MINH HIẾU

*(GV trường THCS Phạm Công Bình, Yên Lạc, Vĩnh Phúc)*

*Trong SGK Toán 7 mới có bài toán :*

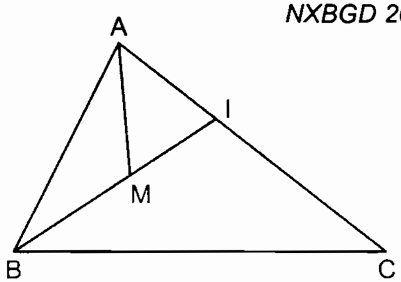
Cho tam giác ABC và M là một điểm nằm trong tam giác. Gọi I là giao điểm của đường thẳng BM và cạnh AC.

a) So sánh MA với MI + IA. Từ đó chứng minh MA + MB < IB + IA.

b) So sánh IB với IC + CB. Từ đó chứng minh IB + IA < CA + CB.

c) Chứng minh bất đẳng thức : MA + MB < CA + CB.

*(Bài 17, trang 63, SGK Toán 7 tập hai, NXBGD 2003)*




**Lời giải :**

a) Xét $\Delta AMI$ : Ta có MA < MI + AI

$\Rightarrow$ MA + MB < MB + MI + IA

$\Leftrightarrow$ MA + MB < IB + IA (1)

b) Xét $\Delta IBC$ : Ta có BI < IC + BC

$\Rightarrow$ IB + IA < IA + IC + BC

$\Leftrightarrow$ IB + IA < AC + BC (2)

c) Từ (1) và (2) ta có : MA + MB < IB + IA < CA + CB $\Rightarrow$ MA + MB < CA + CB.

Do đó từ bài toán trên ta có bài toán thu gọn sau :

**Bài 1 :** Cho $\Delta ABC$, M là một điểm nằm trong tam giác ABC.

Chứng minh MB + MC < AB + AC.

Từ bài toán 1 ta có thể phát triển được hai bài toán tổng quát hơn sau :

**Bài 2 :** Cho $\Delta ABC$, M là một điểm nằm trong tam giác ABC.

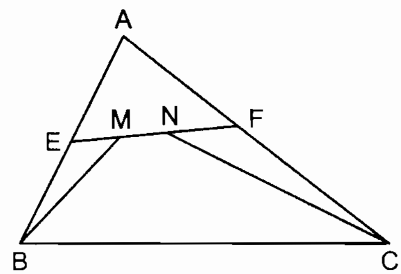
Chứng minh rằng : MA + MB + MC < 2p (trong đó 2p là chu vi của tam giác ABC).

**Bài 3 :** Cho $\Delta ABC$, M là một điểm nằm trong tam giác ABC.

Chứng minh rằng : MA + MB + MC > p (trong đó 2p là chu vi của tam giác ABC).

Nếu miền trong tam giác có 2 điểm khác nhau thì ta có bài toán sau :

**Bài 4 :** Cho $\Delta ABC$, M và N là hai điểm nằm trong tam giác ABC sao cho MN cắt hai cạnh AB, AC của tam giác ABC. Chứng minh rằng : BM + MN + NC < AB + AC.




**Lời giải :** Giả sử MN cắt AB và AC tại E và F.

Xét : $\Delta BEM$ có : BM < BE + EM ;

$\Delta CFN$ có : NC < NF + FC.

Từ đó ta có :

BM + NC < BE + EM + NF + FC

$\Leftrightarrow$ BM + MN + NC < BE + EM + MN + NF + FC = BE + EF + FC (1)

Xét $\Delta AEF$ có : EF < AE + AF (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ BM + MN + NC < AB + AC.

Từ bài toán 17, trang 63, SGK Toán 7 tập hai, NXBGD 2003 trên đây, chắc chắn còn nhiều bài tập được khai thác sâu hơn. *"Bắt đầu từ ý tưởng của Hê Rông"*, TS. Nguyễn Minh Hà (ĐHSP Hà Nội) cũng đã mở rộng bài toán trên với những kết quả hết sức sâu sắc và thú vị (xem bài trang 24).

HỌC RA SAO?

# TỪ MỘT LỜI GIẢI ĐI ĐẾN BÀI TOÁN TỔNG QUÁT

NGUYỄN ĐỨC TẤN *(TP. Hồ Chí Minh)*

Trong kì thi chọn học sinh giỏi THPT của TP. Hồ Chí Minh năm học 2002 - 2003 có bài toán bất đẳng thức đại số sau :

**Bài toán :** Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng : $\frac{25a}{b+c}+\frac{16b}{c+a}+\frac{c}{a+b}>8.$ (1)

Bài toán này có nhiều cách giải.

Tôi xin giải bài toán này bằng phương pháp đổi biến và vận dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, mà từ lời giải này ta có thể dẫn đến bài toán tổng quát một cách không khó khăn gì.

**Lời giải :**

Đặt $b+c=x$ ; $c+a=y$ ; $a+b=z$. Do đó :

$$a=\frac{-x+y+z}{2};\ b=\frac{x-y+z}{2};\ c=\frac{x+y-z}{2}.$$

Vì a ; b ; c > 0 nên x ; y ; z > 0 và $x<y+z$ (2)

Ta có :

$$\frac{25a}{b+c}+\frac{16b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{25(-x+y+z)}{2x}$$

$$+\frac{16(x-y+z)}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}=$$

$$=\left(\frac{-25}{2}+\frac{-16}{2}+\frac{-1}{2}\right)+\left(\frac{25y}{2x}+\frac{16x}{2y}\right)$$

$$+\left(\frac{25z}{2x}+\frac{x}{2z}\right)+\left(\frac{16z}{2y}+\frac{y}{2z}\right)\geq$$

$$\geq -21+2\sqrt{\frac{25y}{2x}.\frac{16x}{2y}}+2\sqrt{\frac{25z}{2x}.\frac{x}{2z}}+$$

$$+2\sqrt{\frac{16z}{2y}.\frac{y}{2z}}=-21+20+5+4=8$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases}\frac{25y}{2x}=\frac{16x}{2y}\\ \frac{25z}{2x}=\frac{x}{2z}\\ \frac{16z}{2y}=\frac{y}{2z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{5}=\frac{y}{4}\\ \frac{x}{5}=z\\ \frac{y}{4}=z\end{cases}\Leftrightarrow\frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z}{1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z}{1}=\frac{y+z}{4+1}=\frac{y+z}{5}$$

$\Rightarrow x=y+z$, mâu thuẫn với (2)

$\Rightarrow$ đẳng thức không xảy ra.

Vậy, ta có : $\frac{25a}{b+c}+\frac{16b}{c+a}+\frac{c}{a+b}>8.$

Dựa vào ý tưởng của cách giải trên, ta đề xuất và giải được bài toán sau :

**Bài toán tổng quát :** Cho m, n, p, a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{ma}{b+c}+\frac{nb}{c+a}+\frac{pc}{a+b}\geq$$

$$\geq\frac{1}{2}(\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{p})^2-(m+n+p)$$

**Lời giải :**

Đặt $b+c=x$ ; $c+a=y$ ; $a+b=z$.

Do đó :

$$a=\frac{-x+y+z}{2};\ b=\frac{x-y+z}{2};\ c=\frac{x+y-z}{2}.$$

Vì a ; b ; c > 0 nên x ; y ; z > 0 ; $x<y+z$ ; $y<z+x$ ; $z<x+y$ (3)

Ta có :

$$\frac{ma}{b+c}+\frac{nb}{c+a}+\frac{pc}{a+b}=$$

$$=\frac{m(-x+y+z)}{2x}+\frac{n(x-y+z)}{2y}+\frac{p(x+y-z)}{2z}$$

$$=-\frac{1}{2}(m+n+p)+$$

$$+\left(\frac{my}{2x}+\frac{nx}{2y}\right)+\left(\frac{mz}{2x}+\frac{px}{2z}\right)+\left(\frac{nz}{2y}+\frac{py}{2z}\right)$$

$$\geq-\frac{1}{2}(m+n+p)+$$

$$+2\sqrt{\frac{my}{2x}\cdot\frac{nx}{2y}}+2\sqrt{\frac{mz}{2x}\cdot\frac{px}{2z}}+2\sqrt{\frac{nz}{2y}\cdot\frac{py}{2z}}$$

$$=-\frac{1}{2}(m+n+p)+\sqrt{mn}+\sqrt{mp}+\sqrt{np}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{p})^2-(m+n+p)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases}\dfrac{my}{2x}=\dfrac{nx}{2y}\\ \dfrac{mz}{2x}=\dfrac{px}{2z}\\ \dfrac{nz}{2y}=\dfrac{py}{2z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{m}}=\dfrac{y}{\sqrt{n}}\\ \dfrac{z}{\sqrt{p}}=\dfrac{x}{\sqrt{m}}\\ \dfrac{z}{\sqrt{p}}=\dfrac{y}{\sqrt{n}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{m}}=\frac{y}{\sqrt{n}}=\frac{z}{\sqrt{p}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{m}}=\frac{y}{\sqrt{n}}=\frac{z}{\sqrt{p}}=\frac{y+z}{\sqrt{n}+\sqrt{p}}=$$

$$=\frac{z+x}{\sqrt{p}+\sqrt{m}}=\frac{x+y}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}.$$

Nếu có : $\left[\begin{array}{l}\sqrt{m}\geq\sqrt{n}+\sqrt{p}\\ \sqrt{n}\geq\sqrt{p}+\sqrt{m}\\ \sqrt{p}\geq\sqrt{m}+\sqrt{n}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq y+z\\ y\geq z+x,\\ z\geq x+y\end{array}\right.$

điều này mâu thuẫn với (3).

Vậy : $\dfrac{ma}{b+c}+\dfrac{nb}{c+a}+\dfrac{pc}{a+b}\geq$

$$\geq\frac{1}{2}(\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{p})^2-(m+n+p).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases}\dfrac{b+c}{\sqrt{m}}=\dfrac{c+a}{\sqrt{n}}=\dfrac{a+b}{\sqrt{p}}\\ \sqrt{m}<\sqrt{n}+\sqrt{p}\\ \sqrt{n}<\sqrt{p}+\sqrt{m}\\ \sqrt{p}<\sqrt{m}+\sqrt{n}\end{cases}$$

Trường hợp m = 5, n = 4, p = 1 chính là bài toán ban đầu. Ngoài ra với những giá trị cụ thể khác của m, n, p ta sẽ nêu được nhiều bất đẳng thức "đẹp" như bất đẳng thức (1).

Một kinh nghiệm các bạn nên vận dụng khi học toán : Thử xem với lời giải nào thì có thể đi đến bài toán tổng quát dễ dàng nhất.


# VẬN DỤNG BỔ ĐỀ HÌNH THANG vào giải toán

NGUYỄN ANH HOÀNG
*(giáo viên THCS Nguyễn Du, Quận I, TP. Hồ Chí Minh)*

• Trong Tạp chí Toán Tuổi thơ 2 số 4 (TTT2(4)), tháng 6 năm 2003, ở mục kết quả THỬ TÍ TOÁN, để chia đôi một đoạn thẳng song song với một đường thẳng chọ trước chỉ bằng thước thẳng, ta đã dựa vào một bổ đề :

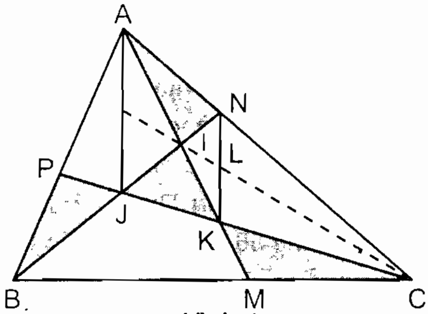
"Đường thẳng nối giao điểm các đường chéo của hình thang với giao điểm các cạnh bên kéo dài sẽ chia đáy của hình thang thành hai phần bằng nhau".

Bổ đề này thường được gọi là bổ đề "Hình thang". Để chứng minh bổ đề, các bạn có thể tham khảo phần chứng minh trong TTT2(4).

• Ở bài viết này, xin nêu thêm một số dạng ứng dụng khác của bổ đề "Hình thang".

**Bài toán 1 :** Cho $\Delta ABC$. M, N, P lần lượt là các điểm trên các cạnh BC, CA, AB. Nối AM, BN, CP cắt nhau tại I, J, K *(hình 1)*. Kí hiệu S là diện tích, chứng minh rằng :

Nếu $S_{\Delta AIN} = S_{\Delta BJP} = S_{\Delta CKM} = S_{\Delta IJK}$ thì $S_{\square APJI} = S_{\square BMKJ} = S_{\square CNIK}$.




*Hình 1*

**Lời giải :** Gọi L là giao điểm của CI và NK.

Từ $S_{\Delta ANI} = S_{\Delta IJK} \Rightarrow S_{\Delta ANI} + S_{\Delta AIJ} = S_{\Delta IJK} + S_{\Delta AIJ} \Rightarrow S_{\Delta NAJ} = S_{\Delta KAJ}$.

Ta nhận thấy $\Delta NAJ$ và $\Delta KAJ$ có chung cạnh AJ nên khoảng cách từ N và K tới AJ là bằng nhau, dẫn đến NK // AJ.

Xét hình thang KNAJ, có hai cạnh bên AN x JK = C ; có hai đường chéo AK x JN = I, theo bổ đề "Hình thang", CI cắt NK tại trung điểm của NK. Vậy L là trung điểm của NK (*).

Từ (*) ta chứng minh được $S_{\Delta CIN} = S_{\Delta CIK}$, mà $S_{\Delta AIN} = S_{\Delta CKM} \Rightarrow S_{\Delta CIM} = S_{\Delta CIA}$ $\Rightarrow IA = IM$ (**) ($\Delta CIM$ và $\Delta CIA$ có chung đường cao hạ từ C tới AM).

Từ (**) $\Rightarrow S_{\Delta BIA} = S_{\Delta BIM}$ ($\Delta BIM$ và $\Delta BIA$ có chung đường cao hạ từ B tới AM).

$\Leftrightarrow S_{\Delta BPJ} + S_{\square APJI} = S_{\Delta IJK} + S_{\square BJKM}$

$\Leftrightarrow S_{\square APJI} = S_{\square BJKM}$ (do $S_{\Delta BPJ} = S_{\Delta IJK}$).

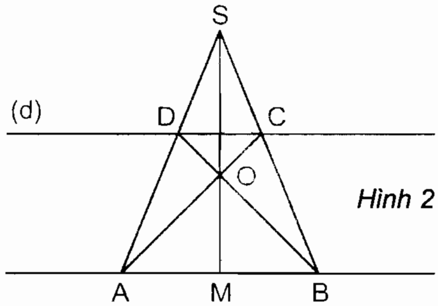
Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được từng cặp trong ba tứ giác APJI, BMKJ, CNIK có diện tích bằng nhau và do đó diện tích của ba tứ giác này bằng nhau.

• Xét bài toán đảo của bài toán dựng hình chỉ bằng thước kẻ trong TTT2(4) nói trên.

**Bài toán 2 :** Cho trước một đoạn thẳng AB và trung điểm M của nó. Chỉ bằng thước thẳng, hãy dựng qua điểm C nằm ngoài AB, một đường thẳng song song với AB.

**Lời giải :**

*Phân tích :* Giả sử dựng được đường thẳng (d) đi qua C và song song với AB *(hình 2)*.




*Hình 2*

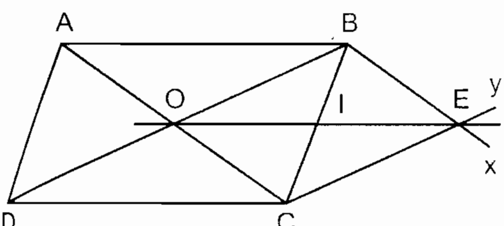
Trên phần kéo dài của tia BC, lấy một điểm S bất kì. Gọi giao điểm của SA và (d) là D, AC cắt BD tại O. Theo bổ đề Hình thang, đường thẳng SO đi qua điểm M, từ đó ta có cách dựng.

*Cách dựng :* Lấy điểm S như trên. Lần lượt nối AC, SM, các đường thẳng này cắt nhau tại O. Nối SA, BO, cắt nhau tại D. Đường thẳng (d) đi qua C, D chính là đường thẳng cần dựng : (d) đi qua C, (d) // AB.

● Kết quả của bài toán 2 cũng được vận dụng trong nhiều bài toán dựng hình chỉ bằng thước thẳng.

**Bài toán 3 :** Cho hình bình hành ABCD với O là tâm. Chỉ dùng thước thẳng, qua O, hãy dựng đường thẳng song song với một cạnh bất kì của hình bình hành ABCD.

**Lời giải :** Theo bài toán, O lần lượt là trung điểm AC, BD *(hình 3)*.




*Hình 3*

Áp dụng bài toán 2 cho đoạn thẳng AC với O là trung điểm của AC và B là điểm nằm ngoài AC, ta hoàn toàn dựng được đường thẳng Bx // AC.

Tương tự, ta cũng dựng được đường thẳng Cy // BD.

Gọi E là giao điểm của Bx, Cy, ta thấy ngay OBEC là hình bình hành.

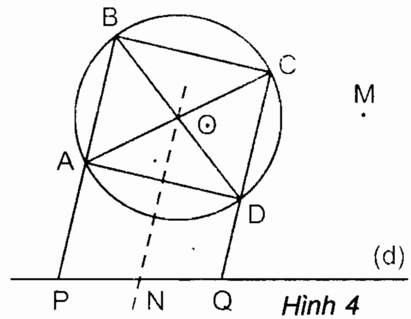
Do đó, nếu gọi I là giao điểm của BC và OE thì I là trung điểm của BC, mặt khác O là trung điểm của BD nên OI là đường trung bình của ΔBCD, OI // CD.

Suy ra OE là đường thẳng cần dựng.

**Bài toán 4 :** Trong mặt phẳng cho trước đường tròn (S) và tâm O của nó ; một điểm M và một đường thẳng (d) bất kì. Chỉ bằng thước thẳng, hãy dựng một đường thẳng đi qua M song song với (d).

**Lời giải :** Để áp dụng được bài toán 2 trong trường hợp này, ta cần xác định được trên (d) hai điểm P, Q khác nhau và điểm N là trung điểm của PQ.

Ta thực hiện như sau :




*Hình 4*

Trên (d), lấy một điểm P tùy ý *(hình 4)*.

Qua P, kẻ cát tuyến PAB tới (S).

AO, BO cắt (S) lần lượt tại C, D.

CD cắt (d) tại Q.

Theo tính chất của đường tròn, ta chứng minh được tứ giác ABCD là hình bình hành có tâm là điểm O. Theo bài toán 3, qua O ta dựng được đường thẳng song song với AB và dễ thấy đường thẳng này cắt PQ tại N là trung điểm của PQ. Đến đây, ta có thể suy ra cách dựng đường thẳng qua M song song với (d) dựa vào bài toán 2.

**Bài tập tự giải :**

**Bài toán 5 :** Cho trước đường tròn (S) và tâm O của nó, M là một điểm bất kì. Chỉ dùng thước thẳng, hãy dựng qua M một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng (d) cho trước.

**Bài toán 6 :** Cho tứ giác ABCD, AD cắt BC tại S, AC cắt BD tại O. Chứng minh rằng nếu SO đi qua trung điểm M của AB thì SO cũng đi qua trung điểm N của CD và tứ giác ABCD là hình thang.

# Mở rộng định lí
## VỀ ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA HÌNH THANG

TỐNG THÀNH VŨ
*(Lớp Kĩ thuật Viễn thông B, K41, ĐH GTVT Hà Nội)*

Trong chương trình hình học 8, phần hình thang, có một định lí quan trọng.

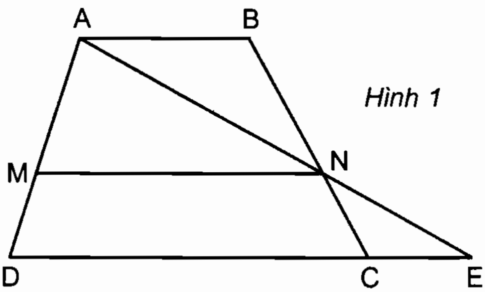
**Định lí 1 :** Đường trung bình của hình thang song song với hai đáy và có độ dài bằng nửa tổng hai đáy.

Sau khi có định lí Talét, định lí 1 được mở rộng thành một định lí mới với nhiều ứng dụng quan trọng. Bài viết này xin giới thiệu với bạn đọc định lí mới đó và một vài ứng dụng của nó.

**Định lí 2 :** Cho hình thang ABCD. Các điểm M, N thuộc các cạnh bên AD, BC và thỏa mãn điều kiện $\dfrac{MA}{MD}=\dfrac{NB}{NC}=\dfrac{m}{n}$. Khi đó, ta có :

a) MN song song với AB, DC.

b) $MN=\dfrac{nAB+mDC}{m+n}$




*Hình 1*

Chứng minh : Đặt E = AN ∩ DC *(hình 1)*

a) Vì AB // DC nên : $\dfrac{AN}{EN}=\dfrac{BN}{CN}$ (1)

Theo giả thiết : $\dfrac{BN}{CN}=\dfrac{AM}{DM}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra : $\dfrac{AN}{EN}=\dfrac{AM}{DM}$

$\Rightarrow$ MN // DC, AB (định lí Talét đảo)

b) Theo định lí Talét thuận, ta có :

$$MN=\frac{AM}{AD}.DE=\frac{AM}{AD}.(DC+CE)=$$
$$=\frac{AM}{AD}.(DC+\frac{CE}{AB}.AB)=$$
$$=\frac{AM}{AD}.(DC+\frac{CN}{BN}.AB)\quad(3)$$

Từ giả thiết $\dfrac{MA}{MD}=\dfrac{NB}{NC}=\dfrac{m}{n}$, ta có :

$$\begin{cases}\dfrac{AM}{AD}=\dfrac{m}{m+n}\\[2mm]\dfrac{CN}{BN}=\dfrac{n}{m}\end{cases}$$ (4). Từ (3), (4) suy ra :

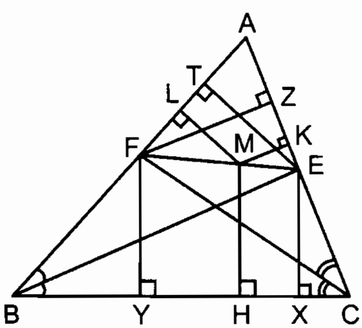
$$MN=\frac{m}{m+n}(DC+\frac{n}{m}AB)$$
$$\Rightarrow MN=\frac{nAB+mCD}{m+n}$$

Định lí 2 đã được chứng minh. Dưới đây là một vài ứng dụng của nó.

**Bài toán 1 :** Cho tam giác ABC, các phân giác BE, CF. Điểm M thuộc đoạn EF. H, K, L là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng : MH = MK + ML.

**Lời giải :**

+ Gọi X, Y là hình chiếu của E, F trên BC ; Z là hình chiếu của F trên CA ; T là hình chiếu của E trên AB *(hình 2)*.




*Hình 2*

+ Vì BE, CF là các đường phân giác của ΔABC nên ta có : EX = ET ; FY = FZ (1)

Đặt $\frac{ME}{MF} = \frac{m}{n}$. Theo định lí (2), ta có :

$$MH = \frac{nEX + mFY}{m+n} \quad (2)$$

Áp dụng định lí Talét cho các tam giác EFZ và EFT, ta có :

$$MK = \frac{m}{m+n}FZ\ ;\ ML = \frac{n}{m+n}ET \quad (3)$$

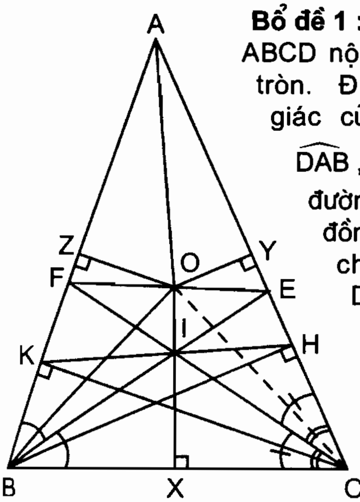
Từ (1), (2), (3) suy ra :

$$MH = \frac{n}{m+n}ET + \frac{m}{m+n}EZ$$

= ML + MK (đpcm).

**Bài toán 2 :** Cho tam giác ABC nhọn, phân giác BE, CF, đường cao BH, CK. O, I theo thứ tự là tâm các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp. Chứng minh rằng : I, H, K thẳng hàng khi và chỉ khi O, E, F thẳng hàng.

Để giải BT2, ta không chỉ cần BT1 mà cần có thêm bổ đề sau.




**Bổ đề 1 :** Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn. Đường phân giác của các góc $\widehat{DAB}$, $\widehat{CBA}$ và đường thẳng CD đồng quy khi và chỉ khi DA + CB = = DC.

*Hình 3*

Việc chứng minh bổ đề trên khá dễ dàng, xin dành cho bạn đọc.

**Lời giải** (BT2) **:**

Gọi X, Y, Z là hình chiếu của O trên BC, CA, AB *(hình 3)*. Vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AOY} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$.

$\Rightarrow \Delta BKC \backsim \Delta OYK$ ; tương tự :

$\Delta CHB \backsim \Delta OZA$ ; $\Delta OXB \backsim \Delta AKC$

$$\Rightarrow \frac{BK}{BC} = \frac{OY}{OA}\ ;\ \frac{CH}{CB} = \frac{OZ}{OA}\ ;\ \frac{OX}{OB} = \frac{AK}{AC} \quad (1)$$

Tứ giác BCKH nội tiếp $\Rightarrow \Delta AHK \backsim \Delta ABC$

$$\Rightarrow \frac{HK}{BC} = \frac{AK}{AC}, \text{ từ } (1) \Rightarrow \frac{HK}{BC} = \frac{OX}{OB} \quad (2)$$

Vì tứ giác BCHK nội tiếp nên theo BĐ1, ta có : I, H, K thẳng hàng $\Leftrightarrow$ BK + CH = HK

$$\Leftrightarrow \frac{BK}{BC} + \frac{CH}{CB} = \frac{HK}{BC} \Leftrightarrow \frac{OY}{OA} + \frac{OZ}{OA} = \frac{OX}{OB}$$

(theo (1), (2)) $\Leftrightarrow$ OY + OZ = OX (vì OA = OB) $\Leftrightarrow$ O, E, F thẳng hàng (theo BT1)

Bài toán dưới đây là đề dự tuyển IMO năm 1998, do Ba Lan đề xuất.

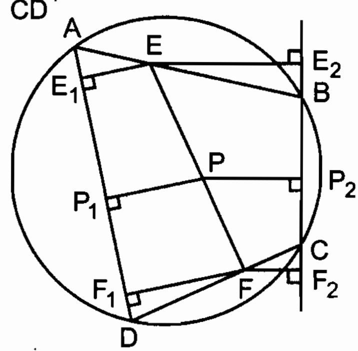
**Bài toán 3 :** Cho tứ giác nội tiếp ABCD. Các điểm E, F theo thứ tự thay đổi trên các cạnh AB, CD sao cho $\frac{AE}{BE} = \frac{CF}{DF}$. Điểm P thuộc đoạn EF sao cho $\frac{PE}{PF} = \frac{AB}{CD}$. Chứng minh rằng : $\frac{S(PAD)}{S(PBC)}$ không phụ thuộc vào E, F (S(.) chỉ diện tích của tam giác)

**Lời giải :** Gọi $P_1$, $E_1$, $F_1$ là hình chiếu của P, E, F trên AD ; $P_2$, $E_2$, $F_2$ là hình chiếu của P, E, F trên BC *(hình 4)*.

Theo định lí 2, ta có :

$$\begin{cases} PP_1 = \dfrac{PF.EE_1 + PE.FF_1}{EF} \\ PP_2 = \dfrac{PF.EE_2 + PE.FF_2}{EF} \end{cases}$$

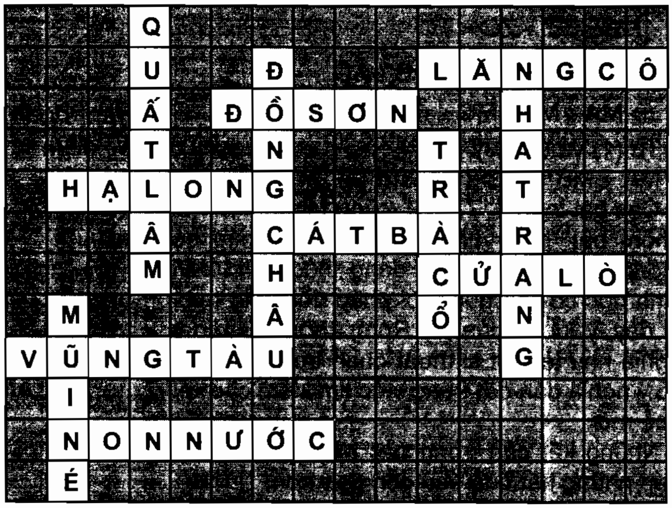
Từ hai đẳng thức trên với chú ý rằng $\frac{PE}{PF} = \frac{AB}{CD}$, ta có :




*Hình 4*

*(xem tiếp trang 26)*

# ● *Kết quả:* Ô CHỮ MÙA HÈ ĐI BIỂN




Anh rất vui vì thấy các bạn tham gia giải ô chữ kì này đều biết khá nhiều khu du lịch biển nổi tiếng của nước ta. Phần lớn các bạn đã đưa ra đáp án trùng với đáp án của anh. Riêng ở hàng ngang với chữ LĂNG CÔ, một số bạn điền chữ VŨNG RÔ (khu du lịch biển ở Phú Yên). Cách điền này cũng đúng. Anh xin trao quà cho những bạn giải đúng, trình bày sạch đẹp, có ghi địa chỉ đầy đủ và gửi đến đúng hạn : *Trần Thu Hoài*, phòng 202A, nhà D2, Dịch Vọng, Cầu Giấy ; *Trần Vân Anh*, 178A Nguyễn Lương Bằng, Đống Đa ; *Trịnh Nguyệt Ánh*, số 10, tổ 24A, phường Thanh Lương, Hai Bà Trưng, **Hà Nội** ; *Hoàng Thị Mai Phương*, số 147, tổ 33, phường Kỳ Bá ; *Mai Hoàng Ngân*, số 19, tổ 26, phường Quang Trung, TX Thái Bình, **Thái Bình**.

ANH COMPA

## Mở rộng ... *(tiếp theo trang 19)*

$$\begin{cases} PP_1 = \dfrac{CD.EE_1 + AB.FF_1}{AB + CD} \\ PP_2 = \dfrac{CD.EE_2 + AB.FF_2}{AB + CD} \end{cases} \text{ suy ra :}$$

$$\frac{S(PAD)}{S(PBC)} = \frac{PP_1.AD}{PP_2.BC} =$$

$$= \frac{(CD.EE_1 + AB.FF_1).AD}{(CD.EE_2 + AB.FF_2).BC} \quad (1)$$

Theo giả thiết :

$$\frac{AE}{BE} = \frac{CF}{DF} \Rightarrow \frac{AE}{CF} = \frac{BE}{DF} \ (2)$$

Mặt khác, vì tứ giác ABCD nội tiếp nên ta có :

$$\begin{cases} \Delta EAE_1 \backsim \Delta FCF_2 \\ \Delta EBE_2 \backsim \Delta FDF_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{AE}{CF} = \dfrac{EE_1}{FF_2} \\ \dfrac{BE}{DF} = \dfrac{EE_2}{FF_1} \end{cases} \quad (3)$$

Từ (2), (3) suy ra :

$$\frac{AE}{CF} = \frac{BE}{DF} = \frac{EE_1}{FF_2} = \frac{EE_2}{FF_1} = k \ (k > 0)$$

$$\Rightarrow \frac{CD.EE_1 + AB.FF_1}{CD.EE_2 + AB.FF_2} =$$

$$= \frac{(CF + DF).EE_1 + AB.FF_1}{(CF + DF).EE_2 + AB.FF_2} =$$

$$= \frac{\left(\dfrac{AE}{k} + \dfrac{BE}{k}\right).EE_1 + AB.\dfrac{EE_2}{k}}{\left(\dfrac{AE}{k} + \dfrac{BE}{k}\right).EE_2 + AB.\dfrac{EE_1}{k}} =$$

$$= \frac{\dfrac{AB}{k}(EE_1 + EE_2)}{\dfrac{AB}{k}(EE_1 + EE_2)} = 1 \quad (4)$$

Từ (1), (4) suy ra :

$$\frac{S(PAD)}{S(PBC)} = \frac{AD}{BC}, \text{ không phụ thuộc vào E, F.}$$

***(Kì sau đăng tiếp)***

# MỘT KĨ NĂNG CÓ NHIỀU ỨNG DỤNG

LÊ ANH TUẤN *(Quỳnh Đôi, Quỳnh Lưu, Nghệ An)*

Các bạn hãy xuất phát từ một bài toán nhỏ : "Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 2x + 2$".

Thật là dễ dàng viết được $y = (x - 1)^2 + 1$ nên $y \geq 1$ với mọi x và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$. Do đó y đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1 khi $x = 1$.

Điều cốt lõi ở cách viết trên là từ biểu thức $x^2 - 2x$, ta biết phải thêm 1 đơn vị để có $(x - 1)^2$. Tại sao biết được điều đó ? Tại vì ta nhìn $x^2$ là *bình phương số thứ nhất*, 2x là *hai lần tích số thứ nhất với số thứ hai* nên số thứ hai chính là 1, vậy phải thêm *bình phương số thứ hai* tức là thêm 1 !

Đây là *một kĩ năng* mà các bạn cần *thành thạo để giải quyết nhiều bài toán.*

Bây giờ các bạn hãy lần lượt theo dõi các thí dụ :

**Thí dụ 1 :** Chứng minh với mọi a, b ta có $a^2 - ab + b^2 \geq 0$.

*Phân tích :* Nhìn vế trái như một đa thức bậc 2 đối với ẩn a và sử dụng kĩ năng trên ta có :

$$a^2 - ab + b^2 = a^2 - 2.a.\frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}$$

$$= \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}.$$

Từ đó dễ dàng suy ra điều phải chứng minh và thấy ngay đẳng thức chỉ xảy ra khi $a = b = 0$.

**Thí dụ 2 :** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = x^2 + y^2 + xy - x - y$.

*Phân tích :* Nhiều bạn viết :

$$F = \frac{1}{2}[2x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2y + 2] - 1$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x+y)^2\right] - 1$$

Do đó : $F \geq -1$ với mọi x, y. Nhưng ta thấy bất đẳng thức này không thể trở thành đẳng thức nên "con đường" này không đi đến được kết quả. Thậm chí có bạn sau khi chứng tỏ đẳng thức $F = -1$ không xảy ra đã "liều" kết luận : F không có giá trị nhỏ nhất !

Nếu sử dụng kĩ năng đã trình bày thì hãy nhìn F như đa thức bậc hai ẩn x và viết :

$$F = x^2 + x(y-1) + (y^2 - y)$$

$$= x^2 + 2.x.\left(\frac{y-1}{2}\right) + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 - \frac{y}{2} - \frac{1}{4}$$

$$= \left(x + \frac{y-1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{4} - \frac{1}{12}$$

$$= \left(x + \frac{y-1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$$

Do đó $F \geq -\frac{1}{3}$ với mọi x, y.

Mặt khác :

$$F = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{y-1}{2} = 0 \\ y - \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{3}.$$

Vậy F đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{1}{3}$ khi $x = y = \frac{1}{3}$. (xem thêm TTT2 số 2 - 4/2003)

**Thí dụ 3 :** Phân tích đa thức thành nhân tử : $F = x^4 + y^2 - 2x^2y + x^2 + x - 2y$.

*Phân tích :* Hãy nhìn F như đa thức ẩn y, ta viết : $F = y^2 - 2y(x^2 + 1) + x^4 + x^2 + x$

$= y^2 - 2y(x^2 + 1) + (x^2 + 1)^2 - x^2 + 2x - 1$

$= (y + x^2 + 1)^2 - (x - 1)^2$

$= (y + x^2 + x)(y + x^2 - x - 2)$

**Thí dụ 4 :** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số : $y = \sqrt{x - 2\sqrt{x-3}}$.

*Phân tích :* Vẫn với kĩ năng nhìn ra bình phương của một biểu thức ta viết :

$y = \sqrt{(x-3) - 2\sqrt{x-3} + 1 + 2}$

$= \sqrt{(\sqrt{x-3} - 1)^2 + 2}$.

Do đó $y \geq \sqrt{2}$ với mọi $x \geq 3$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x-3} = 1 \Leftrightarrow x - 3 = 1$ $\Leftrightarrow x = 4$.

Vậy y đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{2}$ khi $x = 4$.

**Thí dụ 5 :** Tìm các số nguyên x, y sao cho $y = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ (*)

*Phân tích :* Ta thấy :

$x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1 > 0$ với mọi x nên y xác định với mọi x. Từ đó ta cũng có $y > 0$.

Do đó : $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y^2 = (x+2)^2 + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y^2 - (x+2)^2 = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ (y + x + 2)(y - x - 2) = 1 \end{cases}$

Vì $x, y \in Z$ nên $y + x + 2$ và $y - x - 2$ cũng nhận giá trị nguyên. Lưu ý tổng và tích của hai biểu thức này là dương nên ta có :

$\begin{cases} y + x + 2 = 1 \\ y - x - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

Kĩ năng làm xuất hiện bình phương của một biểu thức còn được sử dụng trong rất nhiều bài toán khác. Mong các bạn lưu ý để giải quyết các bài toán cần tới kĩ năng này.

# THƯ GỬI TOÁN TUỔI THƠ 2 TỪ TRUNG TÂM TÀI NĂNG TOÁN HỌC WINCONSIN

Sau khi TTT2 giới thiệu Kì thi chọn tài năng toán học Winconsin (Số 5, tháng 7/2003), thật không ngờ và không biết bằng con đường nào TTT2 đã đến tận nước Mỹ.

Tòa soạn TTT2 vừa nhận được bức thư của Giáo sư Donald S. Passman - một trong những người tổ chức của Trung tâm tài năng toán học Winconsin cho biết thêm một số chi tiết của các kì thi.

TTT2 xin giới thiệu với bạn đọc nguyên văn bức thư :

August 13, 2003.

Tap chi Toan Tuoi tho 2

57 Pho Giang Vo - quan Ba Dinh - Hanoi - Vietnam

Dear Sirs,

I am one of the organizers of the Wisconsin Mathematics Talent Search. I am pleased to hear that you mention our problem sets in your mathematics magazine. The talent search is open to middle school and high school students of all countries . There are five problem sets a year, one in each of the months October, November, December, January and February.

They are available on the web site www.math.wisc.edu/~talent. Also on that site are previous problems and their answers. Answers can be submitted to us by either email or by ordinary mail to the address mentioned on the question sheet. Our email address will appear on all future question sheets. We grade the exams and inform the students of their grades in several different ways.

Unfortunately, the Honor's Day celebration and the Van Vleck Scholarship are only for students who live in the state of Wisconsin. Please also note that the California people run their own Talent Search. They use our problems, but their exam is only open to students from the state of California. I hope this clarifies some of the details.

Sincerely,

Donald S. Passman

Richard Brauer Professor of Mathematics

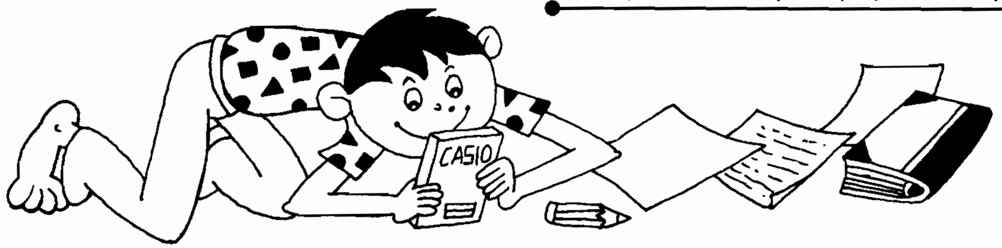
Chúng tôi hi vọng bạn đọc của TTT2 sẽ tự dịch được bức thư này. Cảm ơn các bạn !

**TTT2**

# MỘT SỐ DẠNG TOÁN THI HỌC SINH GIỎI
# "GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH ĐIỆN TỬ CASIO"

*(tiếp theo kì trước)*

TS. TẠ DUY PHƯỢNG *(Viện Toán học)*




**Dạng toán 2 :** *Máy tính điện tử bỏ túi trợ giúp cho việc giải toán.*

Với máy tính điện tử, xuất hiện một dạng đề thi học sinh giỏi toán mới : kết hợp hữu cơ giữa suy luận toán học với tính toán trên máy. Có những bài toán khó đòi hỏi không chỉ nắm vững các kiến thức toán (lí thuyết chia hết, đồng dư, ...) và sáng tạo (cách giải độc đáo, suy luận đặc biệt, ...), mà trong quá trình giải còn đòi hỏi phải xét và loại trừ nhiều trường hợp. Không dùng máy thì thời gian làm bài sẽ lâu. Máy tính điện tử đẩy nhanh tốc độ làm bài, do đó dạng toán này rất thích hợp trong các kì *thi học sinh giỏi toán kết hợp với máy tính*. Dưới đây là một số ví dụ.

**Bài 1 :** (Thi khu vực, 2003, lớp 9)

Tìm tất cả các số tự nhiên n ($1010 \le n \le 2010$) sao cho $a_n = \sqrt{20203 + 21n}$ cũng là số tự nhiên.

**Lời giải :** Vì $1010 \le n \le 2010$ nên $203,5 \approx \sqrt{41413} \le a_n \le \sqrt{62413} \approx 249,82$.

Vì $a_n$ nguyên nên $204 \le a_n \le 249$. Ta có $a_n^2 = 20203 + 21n = 21 \times 962 + 1 + 21n$.

Suy ra $a_n^2 - 1 = 21 \times (962 + n)$,

hay $(a_n - 1)(a_n + 1) = 3 \times 7 \times (962 + n)$.

Do đó $a_n^2 - 1 = (a_n - 1)(a_n + 1)$ chia hết cho 7.

Chứng tỏ $(a_n - 1)$ hoặc $(a_n + 1)$ chia hết cho 7. Vậy $a_n = 7k + 1$ hoặc $a_n = 7k - 1$.

Trường hợp 1 : Nếu $a_n = 7k - 1$ thì do $204 \le a_n = 7k - 1 \le 249$ nên (*tính trên máy*) $29,42 \le k \le 35,7$. Do k nguyên nên k chỉ có thể là các số : 30, 31, 32, 33, 34, 35. Vì $a_n^2 - 1 = 7k(7k - 2)$ chia hết cho 21 nên k chỉ có thể là : 30, 32, 33, 35 (có thể dùng máy tính trực tiếp hay xét k hoặc 7k - 2 phải chia hết cho 3). Cho k lần lượt bằng 30, 32, 33, 35 và *tính trên máy* ta được :

| k | 30 | 32 | 33 | 35 |
|---|---|---|---|---|
| n | 1118 | 1406 | 1557 | 1873 |
| $a_n$ | 209 | 223 | 230 | 244 |

Trường hợp 2 : Nếu $a_n = 7k + 1$ thì do $204 \le a_n = 7k + 1 \le 249$ nên (*tính trên máy*) $29,14 \le k \le 35,57$. Do k nguyên nên k chỉ có thể là các số : 30, 31, 32, 33, 34, 35. Vì $a_n^2 - 1 = 7k(7k + 2)$ chia hết cho 21 nên k chỉ có thể là : 30, 31, 33, 34 (có thể dùng máy tính trực tiếp hay xét k hoặc 7k + 2 phải chia hết cho 3). Cho k lần lượt bằng 30, 31, 33, 34 và *tính trên máy* ta được :

| k | 30 | 31 | 33 | 34 |
|---|---|---|---|---|
| n | 1158 | 1301 | 1601 | 1758 |
| $a_n$ | 211 | 218 | 232 | 239 |

Như vậy, có tất cả 8 đáp số.

**Lời bình 1 :** Đây là một bài *thi học sinh giỏi toán* tương đối khó và hay. Nhờ có máy tính nên tốc độ làm bài tăng lên đáng kể, mặc dù suy luận toán học đóng vai trò quyết định.

**Bài 2 :** (Thi khu vực, 2002, lớp 9, Dự bị)

2a) Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $n^3$ là một số có ba chữ số đầu và bốn chữ số cuối đều bằng 1, tức là $n^3 = \overline{111...1111}$.

Với n vừa tìm được thì $n^3$ bằng bao nhiêu ?

2b) Tìm số tự nhiên n ($1000 \le n \le 2000$) sao cho $a_n = \sqrt{57121 + 35n}$ là số tự nhiên.

2c) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2$ là một số có 12 chữ số và có dạng $n^2 = \overline{2525******89}$, các dấu * ở các vị trí khác nhau có thể là các số khác nhau.

2d) Tìm tất cả các số tự nhiên n có ba chữ số sao cho $n^{69} = \overline{1986...}$, $n^{121} = \overline{3333...}$ .

**Bài 3 :** (Thi khu vực, 2003, lớp 9, Dự bị)

3a) Tìm các chữ số a, b, c, d để ta có :

$$\overline{a5} \times \overline{bcd} = 7850.$$

3b) Tìm các số có không quá 10 chữ số mà khi ta đưa chữ số cuối cùng lên vị trí đầu tiên thì số đó tăng lên gấp 5 lần.

3c) Hãy tìm năm chữ số cuối cùng của số $2^{2^{24}} + 1$ (số Fecmat thứ 24).

3d) Giải phương trình :

$x^2 - 2003[x] + 2002 = 0$, với [x] là phần nguyên của x.

**Bài 4 :** (Thi khu vực, 2003, lớp 12)

Tìm số dư khi chia $2001^{2010}$ cho số 2003.

**Bài 5 :** (Thi khu vực, 2001, lớp 10)

5a) Tìm các ước số nguyên tố nhỏ nhất và lớn nhất của số $215^2 + 314^2$.

5b) Tìm số lớn nhất và nhỏ nhất trong các số tự nhiên dạng $\overline{1x2y3z4}$ chia hết cho 7.

**Bài 6 :** (Sở GD-ĐT Cần Thơ, 2003, lớp 9)

Số $3^{12} - 1$ chia hết cho hai số tự nhiên nằm trong khoảng 70 đến 79. Tìm hai số đó.

**Bài 7 :** (Thi khu vực, 2002, lớp 12)

Tìm ước số chung lớn nhất của hai số sau đây : a = 24614205 ; b = 10719433.

**Bài 8 :** Kiểm nghiệm trên máy tính : các số dạng 10n + 1 là hợp số với n = 3, ... , 10. Chứng minh rằng, số dạng 10n + 1 có thể là số nguyên tố chỉ khi n có dạng $n = 2^p$.

Giả thuyết : $10^n + 1$ là số nguyên tố khi và chỉ khi n = 1 hoặc n = 2.

**Lời bình 2 :** Giả thuyết này tương tự bài toán Fecmat : $2^{2^p} + 1$ là hợp số với mọi $p \ge 5$.

**Bài 9 :** Tìm tất cả các cặp số $\overline{ab}$ và $\overline{cd}$ sao cho đảo ngược hai số đó thì tích không đổi, tức là : $\overline{ab} \times \overline{cd} = \overline{ba} \times \overline{dc}$.

Thí dụ : 12 x 42 = 504 = 21 x 24 ;
13 x 93 = 1209 = 31 x 39 ; ...

**Bài 10 :** Tìm phân số $\frac{m}{n}$ xấp xỉ tốt nhất $\sqrt{2}$ ($\delta(m,n) = \left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right|$ là nhỏ nhất), trong đó m và n là các số có hai chữ số.

**Kết luận :** Dạng bài *Máy tính điện tử bỏ túi trợ giúp cho việc giải toán* thực chất là bài thi học sinh *giỏi toán* (không phải *giỏi tính*). Nó hoàn toàn có thể dùng được trong các kì thi học sinh giỏi toán. Nó nâng cao ý nghĩa của mục đích đưa máy tính vào trường phổ thông. Nó còn dẫn dắt ta tới những giả thuyết và những nghiên cứu toán học nghiêm túc (bài 8 và bài 10). Nó cũng là nguyên nhân mà loài người cần nghiên cứu để tăng tốc độ xử lí cho các máy tính điện tử. Theo tôi, đây là dạng toán hay nhất. Trong kỳ thi cấp khu vực, dạng bài này nên chiếm 40% - 60% số điểm.

# BẮT ĐẦU TỪ Ý TƯỞNG CỦA HÊRÔNG

***(tiếp theo kì trước)***

TS. NGUYỄN MINH HÀ *(ĐHSP Hà Nội)*

Từ các bài toán 6, 7, 8, tôi nghĩ đến bài toán đặc sắc sau.

**Bài toán 9 :** Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Chứng minh rằng : $MA + MB + MC \le \max\{\alpha ; \beta ; \gamma\}$.

Trong đó : $\alpha = AB + AC$ ; $\beta = BC + BA$ ; $\gamma = CA + CB$.

Để giải BT9, trước hết ta phát biểu và chứng minh một bổ đề.

**Bổ Đề 5 :** Cho tam giác ABC, điểm M thuộc đoạn BC.

Chứng minh rằng : $AM \le \max\{AB ; AC\}$.

**Chứng minh :**

**Trường hợp 1 :** $M \equiv B$ hoặc $M \equiv C$

$$\left[\begin{array}{l} AM = AB \\ AM = AC \end{array}\right. \Rightarrow AM \le \max\{AB ; AC\}$$

**Trường hợp 2 :** $M \ne B$ ; $M \ne C$

$$\text{Do } \widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^o \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \widehat{AMB} \ge 90^o \\ \widehat{AMC} \ge 90^o \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} AM \le MB \\ AM \le MC \end{array}\right. \Rightarrow AM \le \max\{AB ; AC\}$$

Nếu AB > AC thì đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv B$.

Nếu AB < AC thì đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv C$.

Nếu AB = AC thì đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv B$ hoặc $M \equiv C$.

Trở lại việc giải BT9.

Trên tia đối của các tia MB, MC lấy các điểm C', B' sao cho : MC' = MC ; MB' = MB. Đường thẳng chứa tia phân giác của các góc $\widehat{BMB'}$ ; $\widehat{CMC'}$ theo thứ tự cắt các đoạn thẳng AB ; AC tại N ; P. Không mất tính tổng quát, giả sử $AN \ge AP$.

Theo BĐ5, ta có : $MA \le NA$ (1)

Mặt khác, ta có : $MB + MC = MB' + MC = B'C \le NB' + NC = NB + NC$ (2)

Từ (1), (2) suy ra :

$MA + MB + MC \le NA + NB + NC = AB + NC \le AB + \max\{AC ; BC\}$ (BĐ5)

$= \max\{AB + AC ; BC + BA\}$

$= \max\{\alpha ; \beta\} \le \max\{\alpha ; \beta ; \gamma\}$.

Trong BT9 đẳng thức có xảy ra. Khi đẳng thức xảy ra thì $M \in \{A ; B ; C\}$.

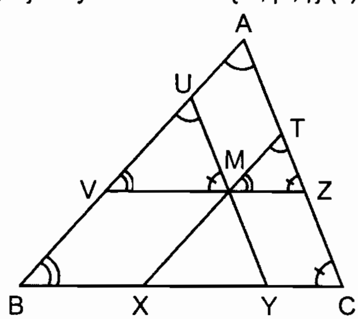
Trong lời giải trên, ý tưởng của Hêrông vẫn đóng một vai trò quan trọng.

Trục đối xứng NP đã được xây dựng thật sáng tạo.

Ngoài lời giải trên, dựa vào những tính chất "đẹp" của tam giác mà tứ giác và đa giác không có, ta còn có thể giải BT9 theo một cách khác, không cần có BĐ5.

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng : $A = \min\{A ; B ; C\}$. Suy ra : $\alpha = \max\{\alpha ; \beta ; \gamma\}$ (1)

Qua M, kẻ các đường thẳng song song với BC, CA, AB, chúng cắt các cạnh BC, CA, AB tại X ; Y ; Z ; T ; U ; V *(hình 1)*.




*Hình 1*

$$\text{Ta có : } \begin{cases} MA \le MU + UA \\ MB \le MV + VB \\ MC \le MZ + ZC \end{cases} \quad (2)$$

Vì AUMT là hình bình hành nên ta có : MU = AT.

Vì $A = \min\{A ; B ; C\}$ nên trong các tam giác UVM, TMZ có : $U = \min\{U ; V ; M\}$, $T = \min\{T ; Z ; M\}$.

Từ đó suy ra : $MV \le UV$ ; $MZ \le TZ$.

Từ (2), với các chú ý trên, ta có :

$$\begin{cases} MA \le AU + AT \\ MB \le UV + VB = UB \\ MC \le TZ + ZC = TC \end{cases}$$

$$\Rightarrow MA + MB + MC \le AB + AC$$

$$\Rightarrow MA + MB + MC \le \alpha \quad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra :

$MA + MB + MC \le \max\{\alpha ; \beta ; \gamma\}$.

Các bài toán 6, 7, 8, 9 cũng tạo thành một nhóm bài "bền vững và đặc sắc" trong hệ thống các bài toán bất đẳng thức và cực trị hình học có liên quan tới phép đối xứng trục. Ở đây, ý tưởng của Hê Rông không chỉ có ý nghĩa như là một kĩ thuật quan trọng mà còn có ý nghĩa dẫn dắt trong việc tìm kiếm các kết quả mới.

Những kết quả trong các bài tập 8, 9 thật đẹp nhưng kết quả sau còn đẹp hơn.

**Bài toán 10 :** Cho đa giác $A_1A_2 \ldots A_n$ và điểm M nằm trong đa giác. Chứng minh rằng : $MA_1 + MA_2 + \ldots + MA_n \le \max\{\alpha_1 ; \alpha_2 ; \ldots ; \alpha_n\}$.

Trong đó, $\alpha_i$ $(1 \le i \le n)$ là tổng các khoảng cách từ $A_i$ tới các đỉnh còn lại của đa giác.

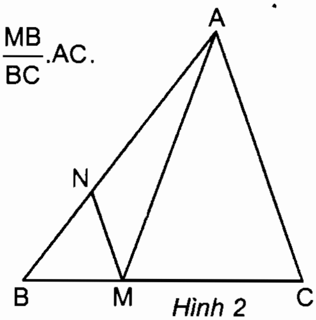
Khi n = 3, BT10 trở thành BT9.

Khi n = 4, BT10 trở thành BT8.

BT10 sẽ được giải như thế nào đây ? Ngay lập tức, tôi có linh cảm rằng, ý tưởng của Hê Rông không còn hiệu lực nữa, cần phải tìm ra một biện pháp nào đó mới mẻ hơn, hiệu quả hơn thì mới có hi vọng giải quyết được vấn đề. Lật đi lật lại các bài toán 8, 9, không thấy gì, quay sang rà soát các bài toán 6, 7, không có mảy may hi vọng, chán nản, tôi đành gác bút lại và tự nhủ rằng, thôi để dịp khác. Bẵng đi một thời gian dài bận rộn, một hôm, tình cờ lục lại đống giấy tờ bụi bặm của mình, tôi lại thấy BT10 hiện ra và vấn đề tìm lời giải cho BT 10 lại trở về với tôi như là một thứ duyên nợ. Tôi đọc đi đọc lại những gì có liên quan trong đống giấy tờ lộn xộn ấy và bỗng nhận thấy rằng, không phải từ các bài toán 8, 9 hay từ các bài toán 6, 7 mà cần phải bắt đầu từ BĐ5. Bởi vì BĐ5 là dạng đơn giản nhất của BT10. Trong BĐ5, đa giác $A_1A_2 \ldots A_n$ có dạng đơn giản nhất : đoạn thẳng BC ; tổng $MA_1 + MA_2 + \ldots + MA_n$ có dạng đơn giản nhất : tổng một số hạng MA. Sau một hồi suy xét và liên hệ, tôi đã mở rộng BĐ5 như sau :

**Bổ đề 6 :** Cho tam giác ABC, điểm M thuộc đoạn BC, khi đó :

$$MA \le \frac{MC}{BC}.AB + \frac{MB}{BC}.AC.$$



*Hình 2*

Chứng minh : Trên đoạn AB lấy điểm N sao cho MN song song với AC *(hình 2).*

Theo BĐ4, ta có : $AM \le AN + NM$ (1)

Theo định lí Talét, ta có :

$$\begin{cases} AN = \dfrac{AN}{AB}.AB = \dfrac{MC}{BC}.AB \\ NM = \dfrac{MN}{AC}.AC = \dfrac{MB}{BC}.AC \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$AM \le \frac{MC}{BC}.AB + \frac{MB}{BC}.AC.$$

Nếu AB > AC thì đẳng thức xảy ra khi $M \equiv B$.

Nếu AB < AC thì đẳng thức xảy ra khi $M \equiv C$.

Nếu AB = AC thì đẳng thức xảy ra khi $M \equiv B$ hoặc $M \equiv C$.

Nhận xét :

+ Ta có : $\dfrac{MC}{BC}.AB + \dfrac{MB}{BC}.AC \le$

$$\le \left(\frac{MC}{BC} + \frac{MB}{BC}\right).\max\{AB ; AC\} =$$

$$= \max\{AB ; AC\}.$$

Suy ra : $AM \le \max\{AB ; AC\}$. Rõ ràng, BĐ6 là sự mở rộng của BĐ5.

+ Nếu thay cụm từ "cho tam giác ABC" bởi cụm từ "cho ba điểm A, B, C" thì BĐ6 vẫn đúng. Tuy nhiên, điều kiện xảy ra đẳng thức sẽ phức tạp hơn. Việc kiểm tra chi tiết nhận xét này không khó, xin dành cho bạn đọc.

+ BĐ6, mở rộng như trên thường được gọi là BĐ6 mở rộng. BĐ6 và BĐ6 mở rộng cũng hay đấy, nhưng chúng có giúp ta giải được BT10 hay không ? Chắc nhiều bạn sẽ hỏi tôi như vậy, nhưng hãy bình tĩnh đã, chúng ta cần qua một bổ đề quan trọng nữa.

***(Kì sau đăng tiếp)***

# ĐẶC BIỆT HÓA để có bài toán mới

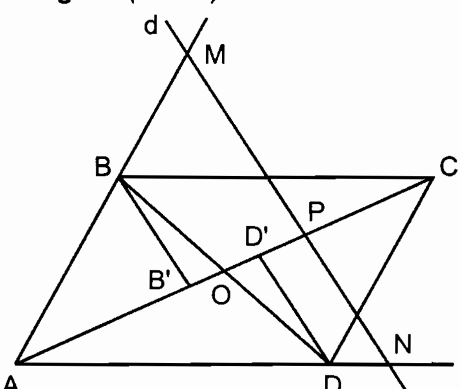
NGUYỄN THANH TÙNG
*(GV trường THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, Hà Tĩnh)*

*Trong quá trình dạy học toán, việc tìm lời giải các bài toán không chỉ là mục đích mà còn là cơ sở để đề xuất các bài toán mới. Nếu ta biết khai thác bài toán vừa giải xong bằng cách đặc biệt hóa thì có thể thu được những bài toán thú vị khác. Trong bài viết này tôi sẽ trình bày một vài bài toán có được từ một bài toán sau đây.*

**Bài toán 1 :** Từ điểm P trên đường chéo AC của hình bình hành ABCD, kẻ đường thẳng d lần lượt cắt các tia AB, AD tại M và N.

Chứng minh : $\frac{AB}{AM}+\frac{AD}{AN}=\frac{AC}{AP}$.

**Lời giải :** *(hình 1)*




*Hình 1*

Từ B và D kẻ BB' // MN, DD' // MN (B', D' $\in$ AC).

Ta có : $\frac{AB}{AM}=\frac{AB'}{AP};\frac{AD}{AN}=\frac{AD'}{AP}$.

Do đó : $\frac{AB}{AM}+\frac{AD}{AN}=\frac{AB'+AD'}{AP}$.

Vì $\Delta BOB' = \Delta DOD'$ (g.c.g) $\Rightarrow$ B'O = D'O.

Nên : AB' + AD' = 2AO = AC

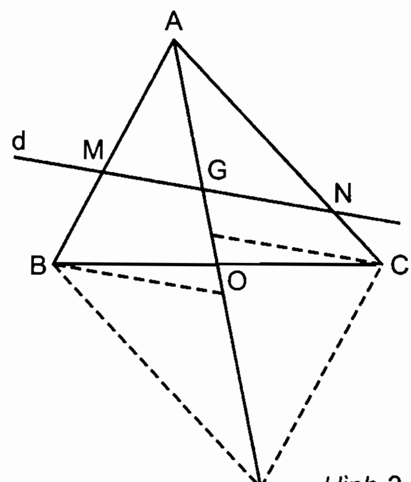
$\Rightarrow \frac{AB}{AM}+\frac{AD}{AN}=\frac{AC}{AP}$.

● Trong bài toán 1 ta chú ý rằng AO là trung tuyến của $\Delta ABD$. Nếu P là trọng tâm của $\Delta ABD$ thì $AP=\frac{1}{3}AC$. Từ đó ta có bài toán sau :

**Bài toán 2 :** Đường thẳng d đi qua trọng tâm G của $\Delta ABC$ lần lượt cắt các cạnh AB và AC tại M và N.

Chứng minh : $\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}=3$.

**Lời giải :** *(hình 2)*

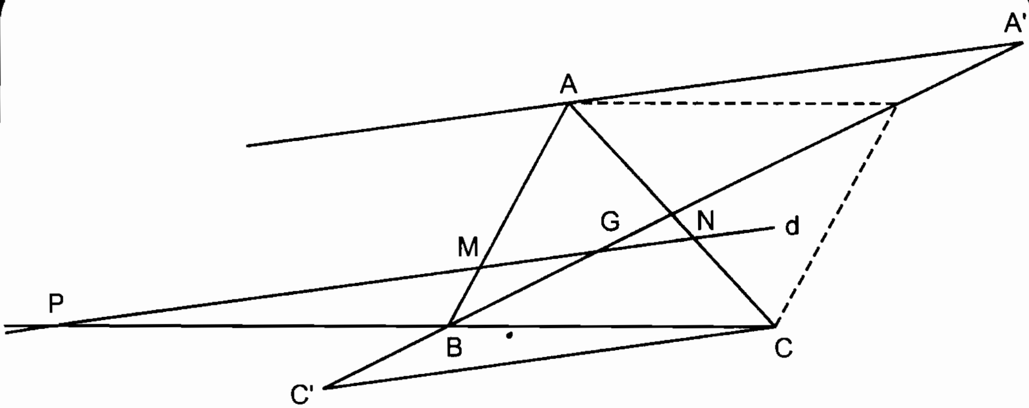



*Hình 2*

Tương tự như bài toán 1 :

$$\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}=\frac{2AO}{AG}=\frac{2.\frac{3}{2}AG}{AG}=3.$$

● Trong bài toán 2 nếu đường thẳng d cắt tia CB tại P thì :




*Hình 3*

$$\frac{AC}{CN}+\frac{BC}{CP}=3 \text{ và } \frac{AB}{BM}-\frac{BC}{BP}=3.$$

Từ đó ta có bài toán sau :

**Bài toán 3 :** Đường thẳng d đi qua trọng tâm G của $\Delta ABC$ cắt cạnh AB tại M, cạnh AC tại N và tia CB tại P.

Chứng minh :

$$\frac{AB^2}{AM.BM}+\frac{AC^2}{AN.CN}-\frac{BC^2}{BP.CP}=9.$$

**Lời giải :** *(hình 3)*

Áp dụng bài toán 2 ta có :

$$\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}=3\ ;\ \frac{AC}{CN}+\frac{BC}{CP}=3 \qquad (1)$$

Riêng vì MN cắt tia CB tại P nên tương tự cách chứng minh bài toán 2, ta có :

$$\frac{BA}{BM}=\frac{BA'}{BG}\ ;\ \frac{BC}{BP}=\frac{BC'}{BG}$$

$$\Rightarrow \frac{BA}{BM}-\frac{BC}{BP}=3 \qquad (2)$$

(dễ thấy BA' - BC' = 3BG).

Từ (1) và (2) suy ra :

$$\frac{AB}{AM}+\frac{AC}{AN}+\frac{AC}{CN}+\frac{BC}{CP}+\frac{AB}{BM}-\frac{BC}{BP}=9$$

$$\Rightarrow \frac{AB(AM+MB)}{AM.MB}+\frac{AC(AN+NC)}{AN.NC}-\frac{BC(CP-BP)}{BP.PC}=9$$

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{AM.BM}+\frac{AC^2}{AN.CN}-\frac{BC^2}{BP.CP}=9 \text{ (đpcm)}$$

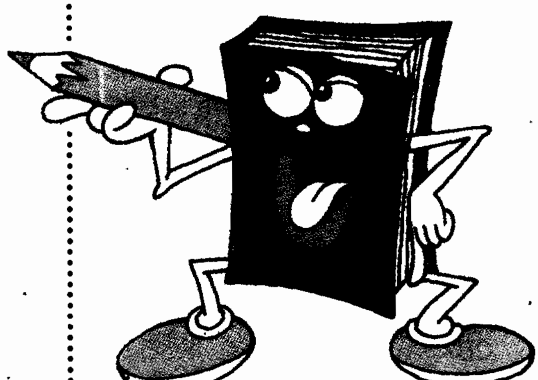
● Nếu $\Delta ABC$ đều, cạnh a thì AB = AC = BC = a, ta đề xuất được bài toán :

**Bài toán 4 :** Đường thẳng d đi qua tâm O của tam giác đều ABC, cạnh a, cắt cạnh AB tại M, cạnh AC tại N và tia CB tại P. Chứng minh :

$$\frac{1}{AM.BM}+\frac{1}{AN.CN}-\frac{1}{BP.CP}=\frac{9}{a^2}.$$

Các bạn hãy giải bài toán 4 xem như bài tập. Trên đây là các bài tập định lượng, được khai thác từ bài toán 1 theo hướng đặc biệt hóa.

Bằng phương pháp tương tự mời bạn đọc hãy đề xuất các bài toán mới.



# MỘT SỐ DẠNG TOÁN sử dụng phép phân tích đa thức thành nhân tử

PHẠM VĂN CHIẾN

*(GV trường THCS Xuân Phong, Xuân Trường, Nam Định)*

Sau khi xem xong tạp chí Toán Tuổi thơ 2 số 5 (tháng 7 năm 2003), tôi rất tâm đắc với các bài toán phân tích đa thức thành nhân tử. Do đó tôi mạnh dạn trao đổi với bạn đọc về vấn đề vận dụng phép phân tích đa thức thành nhân tử vào giải một số dạng toán ở bậc THCS.

**1. Rút gọn các biểu thức đại số.**

**Bài toán 1 :** Rút gọn :

$$A = \frac{\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{a^2b^2} + \sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} \quad \text{với } ab \neq 0.$$

**Lời giải :** Đặt $\sqrt[3]{a} = x$ ; $\sqrt[3]{b} = y$.

$$\Rightarrow A = \frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{x^2 + xy + y^2}$$

$$= \frac{(x^2+y^2)^2 - x^2y^2}{x^2 + xy + y^2}$$

$$= \frac{(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)}{x^2 + xy + y^2}$$

$$= x^2 + y^2 - xy$$

$$\Rightarrow A = \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{ab}$$

**Bài toán 2 :** Rút gọn : $B = \dfrac{x + 5 - 5\sqrt{x-1}}{x - 3\sqrt{x-1} - 1}$.

**Lời giải :** Điều kiện : $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x - 3\sqrt{x-1} - 1 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x > 1$ ; $x \neq 10$.

Đặt $a = \sqrt{x-1} \Rightarrow a > 0$ ; $a \neq 3$.

$$\Rightarrow B = \frac{a^2 + 6 - 5a}{a^2 - 3a} = \frac{(a-2)(a-3)}{a(a-3)} = \frac{a-2}{a}$$

$$= 1 - \frac{2}{a} \Rightarrow B = 1 - \frac{2}{\sqrt{x-1}}.$$

**2. Chứng minh bất đẳng thức**

**Bài toán 3 :** Cho $\Delta ABC$ với $\widehat{A} \geq \widehat{B} \geq \widehat{C}$. Chứng minh :

$$\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_c} + \frac{h_c}{h_a} \geq \frac{h_b}{h_a} + \frac{h_a}{h_c} + \frac{h_c}{h_b} \quad (*)$$

**Lời giải :** Hạ $AH \perp BC$ ; $BI \perp AC$. Ta có $AH = h_a$, $BI = h_b$. Dễ thấy 2 tam giác vuông AHC và BIC đồng dạng và chung góc C.

$$\Rightarrow \frac{h_a}{h_b} = \frac{AH}{BI} = \frac{b}{a}.$$

Áp dụng điều tương tự ta có :

$$(*) \Leftrightarrow \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right) - \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2c + c^2a + a^2b - a^2c - bc^2 - ab^2}{abc} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{c(b^2 - a^2) + c^2(a-b) + ab(a-b)}{abc} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)(c^2 + ab - bc - ac)}{abc} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{abc} \geq 0 \quad (**)$$

Vì $\widehat{A} \geq \widehat{B} \geq \widehat{C} \Leftrightarrow a \geq b \geq c$ nên (**) đúng, tức là (*) được chứng minh.

**3. Giải phương trình và bất phương trình**

**Bài toán 4 :** Giải phương trình :

$$4x^3 - 10x^2 + 6x - 1 = 0 \ (1)$$

**Lời giải :**

(1) $\Leftrightarrow 4x^3 - 2x^2 - 8x^2 + 4x + 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2(2x - 1) - 4x(2x - 1) + (2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2x - 1)(2x^2 - 4x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

**Bài toán 5 :** Giải phương trình :

$$x^2 + x + 12\sqrt{x+1} = 36 \qquad (2)$$

**Lời giải :** Ta có :

(2) $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - x - 1 + 12\sqrt{x+1} - 36 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 - (\sqrt{x+1} - 6)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1 - \sqrt{x+1} + 6)(x+1+\sqrt{x+1} - 6) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\left(\sqrt{x+1} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{23}{4}\right]\left[(x+1-4) + \right.$

$\left. + (\sqrt{x+1} - 2)\right] = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 3) = 0$

(Vì $\left(\sqrt{x+1} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{23}{4} > 0,\ \forall x \geq -1$)

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2$

$\Leftrightarrow x + 1 = 4 \Leftrightarrow x = 3.$

Vậy phương trình (2) có nghiệm duy nhất là $x = 3$.

**Bài toán 6 :** Giải bất phương trình :

$$7x^3 - 12x^2 - 8 < 0 \qquad (3)$$

**Lời giải :** (3) $\Leftrightarrow 7x^3 - 14x^2 + 2x^2 - 8 < 0$

$\Leftrightarrow 7x^2(x - 2) + 2(x^2 - 4) < 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(7x^2 + 2x + 4) < 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)[6x^2 + 3 + (x + 1)^2] < 0$

$\Leftrightarrow x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2.$

Vậy bất phương trình (3) có nghiệm là $x < 2$.

**4. Một số bài toán khác.**

**Bài toán 7 :** CMR nếu :

$\dfrac{a^2 - 2b}{a(1-2b)} = \dfrac{b^2 - 2a}{b(1-2a)}$ (*) với $a, b \neq 0$ ; $a \neq b$ ; $a, b \neq \dfrac{1}{2}$ thì $a + b + \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

**Lời giải :** (*) $\Leftrightarrow a^2b - 2a^3b - 2b^2 + 4ab^2$

$= b^2a - 2ab^3 - 2a^2 + 4a^2b$

$\Leftrightarrow 3ab^2 - 3a^2b - 2a^3b + 2b^3a - 2b^2 + 2a^2 = 0$

$\Leftrightarrow 3ab(b - a) + 2ab(b^2 - a^2) - 2(b^2 - a^2) = 0$

$\Leftrightarrow (b - a)[3ab + 2ab(b + a) - 2(a + b)] = 0$

Vì $a \neq b \Rightarrow b - a \neq 0$ nên hệ thức trên tương đương với :

$$3ab + 2ab(b + a) - 2(a + b) = 0$$

Do $a.b \neq 0 \Rightarrow \dfrac{3}{2} + a + b - \dfrac{a+b}{ab} = 0$

$\Rightarrow a + b + \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ (đpcm).

**Bài toán 8 :** Chứng minh : $n^2 + 11n + 39$ không chia hết cho 49 với $\forall n \in N$.

**Lời giải :** Xét $M = n^2 + 11n + 39 = n^2 + 2n + 9n + 18 + 21 = (n + 2)(n + 9) + 21$.

Có $(n + 9) - (n + 2) = 7 \Rightarrow n + 9$ và $n + 2$ cùng chia hết cho 7 hoặc không cùng chia hết cho 7.

- Nếu $n + 9$ và $n + 2$ cùng chia hết cho 7 thì $(n + 9)(n + 2)$ chia hết cho 49 mà 21 không chia hết cho 49 nên M không chia hết cho 49.

- Nếu $n + 9$ và $n + 2$ không cùng chia hết cho 7 thì $(n + 9)(n + 2)$ không chia hết cho 7 mà 21 chia hết cho 7 nên M không chia hết cho 49.

Vậy $n^2 + 11n + 39$ không chia hết cho 49.

*Sau đây là một số bài tập để các bạn thử vận dụng :*

**1.** Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình :

$$x^6 - x^4 + 2x^3 + 2x^2 = y^2.$$

**2.** Cho $ab \geq 1$.

Chứng minh : $\dfrac{1}{1+a^2} + \dfrac{1}{1+b^2} \geq \dfrac{2}{1+ab}$.

**3.** Chứng minh rằng với mỗi số nguyên lẻ n thì $(n^8 - n^6 - n^4 + n^2)$ chia hết cho 1152.


# Mở rộng định lí về đường trung bình của hình thang

*(tiếp theo kì trước)*

TỐNG THÀNH VŨ
*(Lớp Kĩ thuật Viễn thông B, K41, ĐH GTVT Hà Nội)*

**Bài toán 4 :** Cho tứ giác ABCD. Các điểm X, Y, Z, T theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho các đường thẳng XT, YZ, BD đồng quy. Chứng minh rằng : P(XYZT) < max {P(BCD) ; P(CDA) ; P(DAB) ; P(ABC)}.

Để giải BT4, ta cần có hai bổ đề.

**Bổ đề 2 :** Cho tam giác ABC. Một đường thẳng bất kì, không đi qua A, B, C, theo thứ tự cắt các đường thẳng BC, CA, AB tại X, Y, Z.

Ta có : $\dfrac{XB}{XC}.\dfrac{YC}{YA}.\dfrac{ZA}{ZB}=1.$

BĐ2 là một phần của định lí Mênêlauýt mà phép chứng minh nó có trong rất nhiều tài liệu hình học sơ cấp, xin không giới thiệu ở đây.

**Bổ đề 3 :** Cho tứ giác ABCD và các điểm X, Y, Z nằm trên biên của tứ giác. Chứng minh rằng :

P(XYZ) ≤ max {P(BCD) ; P(CDA) ; P(DAB) ; P(ABC)} (biên của tứ giác là hình hợp bởi bốn cạnh của nó).

BĐ3 được chứng minh khá dễ dàng nhờ kết quả có trong bài toán 7 thuộc bài viết "Bắt đầu từ ý tưởng của Hê Rông" của TS. Nguyễn Minh Hà (Toán Tuổi thơ 2, số 6, 8/2003).

Trở lại việc chứng minh BT4.

Giả sử XT, YZ, BD đồng quy tại H. Không mất tính tổng quát, giả sử H thuộc tia đối của tia BD (hình 5a, hình 5b).

Áp dụng BĐ2 cho ΔABD và ΔCBD, ta có :

$$\begin{cases}\dfrac{TD}{TA}.\dfrac{XA}{XB}.\dfrac{HB}{HD}=1\\[2mm] \dfrac{ZD}{ZC}.\dfrac{YC}{YA}.\dfrac{HB}{HD}=1\end{cases}\Rightarrow \frac{TD}{TA}.\frac{XA}{XB}=\frac{ZD}{ZC}.\frac{YC}{YA} \qquad (1)$$

Xảy ra ba trường hợp sau :

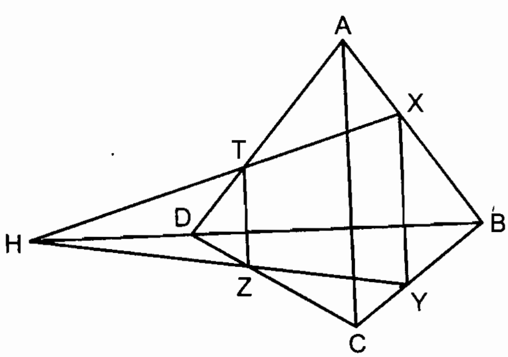
Trường hợp 1 (hình 5a) : $\dfrac{TD}{TA}=\dfrac{ZD}{ZC}$

Theo (1) ta có : $\dfrac{XA}{XB}=\dfrac{YC}{YA}$ ⇒ TZ // AC ; ZY // AC.

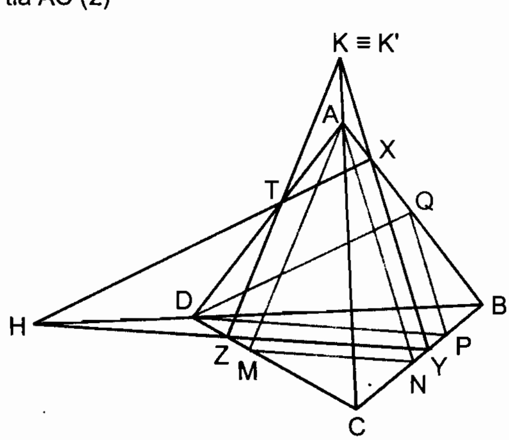
Trường hợp 2 (hình 5b) : $\dfrac{TD}{TA}>\dfrac{ZD}{ZC}$

Theo (1) ta có : $\dfrac{XA}{XB}<\dfrac{YC}{YA}$ ⇒ TZ, XY cùng cắt AC.

Đặt K = TZ ∩ AC ; K' = XY ∩ AC. Từ các bất đẳng thức $\dfrac{TD}{TA}>\dfrac{ZD}{ZC}$ ; $\dfrac{XA}{XB}<\dfrac{YC}{YA}$ dễ dàng suy ra K, K' cùng thuộc tia đối của của tia AC (2)




*Hình 5a*




*Hình 5b*

Áp dụng BĐ2 cho ΔDAC và ΔBAC, ta có :

$$\begin{cases} \dfrac{ZC}{ZD}.\dfrac{TD}{TA}.\dfrac{KA}{KB}=1 \\ \dfrac{YC}{YA}.\dfrac{XB}{XA}.\dfrac{K'A}{K'B}=1 \end{cases} \Rightarrow \frac{KA}{KB}=\frac{K'A}{K'B} \quad (3)\ (\text{theo } (1))$$

Từ (2), (3) suy ra : K ≡ K'.

Vậy : TZ, XY, AC đồng quy (tại K).

Trường hợp 3 : $\frac{TD}{TA}<\frac{ZD}{ZC}$

Tương tự như trường hợp 2, ta cũng có TZ, ZY, AC đồng quy. Tuy nhiên, điểm đồng quy lại thuộc tia đối của tia CA.

Phần còn lại của phép chứng minh BT4 diễn ra hoàn toàn tương tự đối với các trường hợp 1, 2, 3. Cụ thể là :

+ Trường hợp 2 và trường hợp 3 hoàn toàn giống nhau.

+ Trường hợp 1 tương tự nhưng đơn giản hơn các trường hợp 2, 3.

Vì lí do trên, để cho đơn giản, ta chỉ tiến hành chứng minh phần còn lại của BT4 trong trường hợp 2 (hình 5b).

Trên các cạnh DC, CB của tứ giác ABCD ta lấy các điểm M, N sao cho : AM // TZ ; AN // XY. Theo định lí Talét, ta có :

$$\frac{MZ}{MC}=\frac{AK}{AC}=\frac{NY}{NC}\Rightarrow MN/\!/ZY.$$

Trên các cạnh CB, BA của tứ giác ABCD ta lấy các điểm P, Q sao cho : DP // ZY ; DQ // TX. Theo định lí Talét, ta có :

$$\frac{PY}{PB}=\frac{DH}{DB}=\frac{QX}{QB}\Rightarrow PQ/\!/XY.$$

Tóm lại ta có : AM // TZ ; DQ // TX ; MN // ZY // DP ; PQ // XY // AN.

Từ đó suy ra : $\frac{XA}{XQ}=\frac{YN}{YP}=\frac{ZM}{ZD}=\frac{TA}{TD}=\frac{m}{n}$

(m, n > 0 ; m + n = 1)

Áp dụng định lí 2 cho các hình thang AQPN, PNMD và định lí Talét cho các tam giác MDA, DAQ, ta có :

$$\begin{cases} XY=mQP+nAN \\ YZ=mPD+nNM \\ ZT=nMA \\ TX=mDQ \end{cases}$$

⇒ P(XYZT) = mP(DPQ) + nP(AMN)
≤ (m + n) max {P(DPQ) ; P(AMN)}
= max {P(DPQ) ; P(AMN)} (4)

Đặt {P(BCD) ; P(CDA) ; P(DAB) ; P(ABC)} = (*)

Theo BĐ3, ta có : $\begin{cases} P(DPQ)\le \max\ (*) \\ P(AMN)\le \max\ (*) \end{cases}$ (5)

Trong (5), dấu bằng không xảy ra ở cả hai bất đẳng thức (bạn đọc tự kiểm tra). Kết hợp với (4), ta có : P(XYZT) < max {P(BCD) ; P(CDA) ; P(DAB) ; P(ABC)}

BT (4) thuộc loại cực khó. Ấy vậy mà, lời giải của nó lại chỉ dựa vào một định lí thật đơn giản, định lí 2. "Tôi đã từng dạy rất nhiều học sinh giỏi, trong số đó có nhiều em sau này đi thi toán quốc tế đạt thành tích cao. Nhưng tôi chưa thấy học sinh nào giải được BT4. Tôi thật sự cảm ơn nếu ai đó có thể tìm thấy cho BT4 một lời giải mà không cần đến định lí 2". Trên đây là tâm sự của TS. Nguyễn Minh Hà, tác giả BT4 và lời giải của nó.

Định lí 2 còn nhiều ứng dụng nữa. Tuy nhiên, do khuôn khổ có hạn của bài viết, xin dừng lại ở đây. Những bài toán tôi giới thiệu dưới đây có thể xem như những bài tập thực hành kĩ năng sử dụng định lí 2.

**Bài toán 5 :** Cho tứ giác ABCD. Các điểm M, N thuộc các cạnh AB, CD sao cho :

$$\frac{AM}{BM}=\frac{CN}{DN}.$$

Đặt E = AN ∩ DM ; F = BN ∩ CM. Chứng minh rằng : S(MENF) = S(AOE) + S(BCF).

**Bài toán 6 :** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). AE, BF là các đường phân giác. Tia EF cắt (O) tại I.

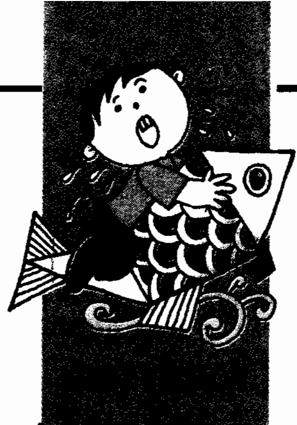
Chứng minh rằng : $\frac{1}{IA}=\frac{1}{IB}+\frac{1}{IC}.$

**Bài toán 7 :** Cho tam giác ABC. Điểm M chạy trên cạnh BC. $(O_1)$, $(O_2)$ là đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABM, ACM. Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn $O_1O_2$.

**Bài toán 8 :** Cho tam giác ABC, AD, BE, CF là các đường phân giác. Các điểm X, Y, Z theo thứ tự thuộc các đoạn EF, FD, DE. X', Y', Z' là hình chiếu của X, Y, Z lên các đường thẳng AB, BC, CA. Chứng minh rằng :

$$XX' + YY' + ZZ' \le XY + YZ + ZX.$$

*Toán Tuổi thơ 2 xin cảm ơn TS. Nguyễn Minh Hà giúp đỡ rất nhiều để hoàn chỉnh bài viết này.*



# ĐA THỨC ĐỐI XỨNG HAI ẨN và các ứng dụng

ĐÀM HUY ĐÔNG

(Giáo viên trường THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang, Hưng Yên)

A. LÍ THUYẾT.

**1.** Đa thức hai ẩn x, y không đổi khi thay x bởi y và y bởi x gọi là đa thức đối xứng (đtđx) hai ẩn.

*Ví dụ* : $P(x, y) = x^3y + xy^3$ ; $Q(x, y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ là các đtđx.

Các đa thức $U(x, y) = 2x - 3y$ ; $V(x, y) = x^2 - y^2$ không phải là các đtđx.

**2.** Các đa thức $t_1 = x + y$ và $t_2 = xy$ gọi là đtđx cơ bản.

**3.** Kí hiệu $S_n = x^n + y^n$ ($n \in N^*$) thì $S_n$ đều biểu diễn được theo $t_1$, $t_2$.

*Ví dụ :*

$$S_1 = x + y = t_1$$

$$S_2 = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = t_1^2 - 2t_2$$

$$S_3 = x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$$

$$= t_1^3 - 3t_1t_2$$

$$S_4 = x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2$$

$$= S_2^2 - 2t_2^2 = t_1^4 - 4t_1^2.t_2 + 2t_2^2$$

...

• Công thức truy hồi : $S_k = t_1.S_{k-1} - t_2.S_{k-2}$.

**4.** Mọi đtđx hai ẩn x, y đều có thể viết dưới dạng đa thức hai ẩn $t_1$, $t_2$.

B. CÁC ỨNG DỤNG.

**I. Phân tích đa thức thành nhân tử.**

**Bài toán 1 :** Phân tích đa thức

$f(x, y) = x^5 + 3xy^4 + y^5 + 3x^4y + x^2y^3 + 3x^2y^2 + x^3y + xy^3$ thành nhân tử.

**Lời giải :** Ta có

$f(x, y) = x^5 + 3xy^4 + y^5 + 3x^4y + x^2y^3 + 3x^2y^2 + x^3y + xy^3 =$

$= (x^5 + y^5) + 3xy(x^3 + y^3) + xy(y^2 + y^2) + x^2y^2(x + y) + 3x^2y^2$

$$= t_1^5 - 5t_1^3t_2 + 5t_1t_2^2 + 3t_2\left(t_1^3 - 3t_1t_2\right) +$$

$$+ t_2\left(t_1^2 - 2t_2\right) + t_2^2t_1 + 3t_2^2$$

$$= t_1^5 - 2t_1^3t_2 - 3t_1t_2^2 + t_1^2t_2 + t_2^2$$

$$= t_1^5 - 3t_1^3t_2 + t_1^2t_2 + t_2t_1^3 - 3t_1t_2^2 + t_2^2$$

$$= \left(t_1^2 + t_2\right).\left(t_1^3 - 3t_1t_2 + t_2\right)$$

$$= (x^2 + y^2 + 3xy).(x^3 + y^3 + xy)$$

**II. Giải hệ phương trình.**

**Bài toán 2 :** Giải hệ $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^4 + y^4 = 17 \end{cases}$

**Lời giải :** Đặt $t_1 = x + y$, $t_2 = xy$ thì hệ trở thành $\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_1^4 - 4t_1^2t_2 + 2t_2^2 = 17 \end{cases}$

Thế $t_1 = 3$ ta có :

$2t_2^2 - 36t_2 + 64 = 0 \Rightarrow t_2 = 16$ ; $t_2 = 2$.

Do đó x, y là các nghiệm của phương trình $u^2 - 3u + 16 = 0$ hoặc $u^2 - 3u + 2 = 0$. Từ đó ta có x = 1 & y = 2 hoặc x = 2 & y = 1.

**III. Giải phương trình.**

**Bài toán 3 :** Giải phương trình sau :

$$\sqrt[4]{16 + x} + \sqrt[4]{1 - x} = 3$$

**Lời giải :** Đặt $a = \sqrt[4]{16 + x}$, $b = \sqrt[4]{1 - x}$

Ta có $\begin{cases} a + b = 3 \\ a^4 + b^4 = 17 \end{cases}$

Từ kết quả bài toán trên ta có a, b và từ đó có nghiệm của phương trình là x = -15 hoặc x = 0.

**IV. Chứng minh đẳng thức.**

**Bài toán 4 :** Cho x + y = 1, $x^3 + y^3 = a$, $x^5 + y^5 = b$.

Chứng minh 5a.(a + 1) = 9b + 1.

**Lời giải :** Ta có :

$$x^3 + y^3 = t_1^3 - 3t_1t_2 = a \Rightarrow t_2 = \frac{1-a}{3};$$

$$b = x^5 + y^5 = t_1^5 - 5t_1^3t_2 + 5t_2^2t_1$$

(áp dụng công thức truy hồi)

$$\Rightarrow b = 1 + 5t_2^2 - 5t_2 = \frac{5a^2 + 5a - 1}{9}$$

Vậy $9b = 5a^2 + 5a - 1$ hay 9b + 1 = 5a.(a + 1).

**V. Lập phương trình bậc hai.**

**Bài toán 5 :** Hãy lập phương trình có hai nghiệm $y_1 = x_1^3 - 2x_2$ ; $y_2 = x_2^3 - 2x_1$, với $x_1$, $x_2$ là nghiệm của phương trình :

$$x^2 - x - 5 = 0.$$

**Lời giải :** Theo Vi-et ta có $t_1 = x_1 + x_2 = 1$ ; $t_2 = x_1.x_2 = -5$.

$$y_1 + y_2 = x_1^3 + x_2^3 - 2(x_1 + x_2)$$
$$= t_1^3 - 3t_1t_2 - 2t_1 = 1 - 3.(-5) - 2.1$$
$$= 1 + 15 - 2 = 14.$$
$$y_1.y_2 = \left(x_1^3 - 2x_2\right).\left(x_2^3 - 2x_1\right)$$
$$= x_1^3x_2^3 - 2\left(x_1^4 + x_2^4\right) + 4x_1x_2$$
$$= t_2^3 - 2\left(t_1^4 - 4t_1^2t_2 + 2t_2^2\right) + 4t_2$$
$$= (-5)^3 - 2.(14 - 4.(-5) + 2.(-5)^2) + 4.(-5)$$
$$= -125 - 2.(1 + 20 + 50) - 20$$
$$= -125 - 142 - 20 = -287$$

Vậy $y_1$, $y_2$ là nghiệm của phương trình :

$$y^2 - 14y - 287 = 0.$$

**VI. Tìm cực trị.**

**Bài toán 6 :** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $A = x\sqrt{x} + y\sqrt{y}$, biết $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

**Lời giải :** Đặt $\sqrt{x} = a$, $\sqrt{y} = b$ (a, b ≥ 0), $t_1 = a + b$, $t_2 = a.b \Rightarrow t_1 = 1$ ; $t_2 \geq 0 \Rightarrow$

$$A = a^3 + b^3 = t_1^3 - 3t_1t_2 = 1 - 3t_2 \leq 1$$

$\Rightarrow A_{max} = 1$, khi $t_2 = 0$, khi đó $\left[\begin{array}{l}(x,y) = (0,1)\\(x,y) = (1,0)\end{array}\right.$

Lại có :

$$\frac{(a+b)^2}{4} \geq ab \Rightarrow \frac{t_1^2}{4} \geq t_2 \Rightarrow t_2 \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 0 \leq t_2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow A_{min} = \frac{1}{4} \text{ khi } t_2 = \frac{1}{4}$$

Khi đó :

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ a.b = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow a = b = \frac{1}{2} \Rightarrow x = y = \frac{1}{4}.$$

Vậy $A_{max} = 1$ ; $A_{min} = \frac{1}{4}$.

C. MỘT SỐ BÀI TẬP.

**1.** Phân tích đa thức thành nhân tử.

a) $f(x, y) = 10x^4 - 27x^3y - 110x^2y^2 - 27xy^3 + 10y^4$.

b) $2x^4 - x^3y + 3x^2y^2 - xy^3 + 2y^4$.

**2.** Lập phương trình bậc hai $z^2 + pz + q = 0$ có các nghiệm là :

$z_1 = x_1^6 - 2x_2^2$, $z_2 = x_2^6 - 2x_1^2$ với $x_1$, $x_2$ là nghiệm của $x^2 - x - 3 = 0$.

**3.** Cho x, y dương thỏa mãn x + y = 1.

Chứng minh rằng : $8.(x^4 + y^4) + \frac{1}{xy} \geq 5$

**4.** Giải hệ $\begin{cases} x^3 + y^3 = 5 \\ xy^2 + x^2y = 1 \end{cases}$

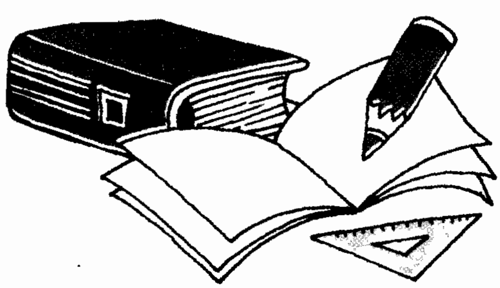
**5.** Chứng minh :

$(x + y)^4 + x^4 + y^4 = 2(x^2 + xy + y^2)^2$.

**6.** Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình : $x^3 + y^3 + 1 = 3xy$.

**7.** Giải phương trình :

$$\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{3-x} = 1.$$



# BẮT ĐẦU TỪ Ý TƯỞNG CỦA HÊRÔNG

***(tiếp theo kì trước)***

TS. NGUYỄN MINH HÀ *(ĐHSP Hà Nội)*

**Bổ đề 7 :** Cho dãy điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ và đoạn thẳng BC. Điểm M thuộc đoạn BC. Khi đó : $MA_1 + MA_2 + ... + MA_n \le \max\{BA_1 + BA_2 + ... + BA_n ; CA_1 + CA_2 + ... + CA_n\}$.

Chứng minh : Áp dụng BĐ6 mở rộng cho bộ ba điểm $A_i$, B, C $(1 \le i \le n)$, ta có :

$$MA_i \le \frac{MC}{BC}.BA_i + \frac{MB}{BC}.CA_i \quad (1 \le i \le n).$$

Từ n bất đẳng thức trên, suy ra :

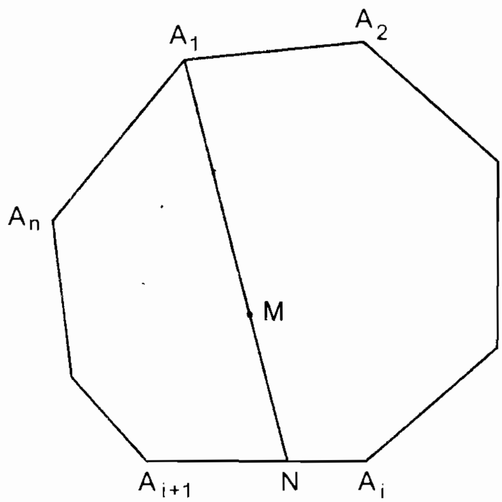
$$MA_1 + MA_2 + ... + MA_n$$
$$\le \frac{MC}{BC}(BA_1 + BA_2 + ... + BA_n)$$
$$+\frac{MB}{BC}(CA_1 + CA_2 + ... + CA_n)$$
$$\le \left(\frac{MC}{BC} + \frac{MB}{BC}\right).\max\{BA_1 + BA_2 + ... + BA_n ; CA_1 + CA_2 + ... + CA_n\}$$
$$= \max\{BA_1 + BA_2 + ... + BA_n ; CA_1 + CA_2 + ... + CA_n\}$$

BĐ7 được chứng minh.

**Nhận xét :** Nhờ BĐ6 ta thấy, nếu tồn tại $i_0 \in \{1 ; 2 ; ... ; n\}$ sao cho $A_{i_0}$ không thuộc đường thẳng BC thì trong bất đẳng thức $MA_{i_0}A_i \le \frac{MC}{BC}.BA_{i_0} + \frac{MB}{BC}.CA_{i_0}$, đẳng thức xảy ra khi $M \in \{B ; C\}$, từ đó suy ra, trong BĐ7, đẳng thức cũng xảy ra khi $M \in \{B ; C\}$.

Nhờ BĐ7, ta có thể giải BT10 như sau :

Vì M nằm trong đa giác $A_1A_2 ... A_n$ nên đường thẳng $A_1M$ cắt một cạnh nào đó của đa giác. Giả sử cạnh đó là $A_iA_{i+1}$ $(2 \le i \le n - 1)$. Đặt $N = A_1M \cap A_iA_{i+1}$.




Áp dụng BĐ7 cho dãy điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ và đoạn thẳng $A_1N$, ta có :

$$MA_1 + MA_2 + ... + MA_n \le$$
$$\le \max\{\alpha_1 ; NA_1 + NA_2 + ... + NA_n\} \quad (1)$$

Áp dụng BĐ7 cho dãy điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ và đoạn thẳng $A_iA_{i+1}$, ta có :

$$NA_1 + NA_2 + ... + NA_n \le \max\{\alpha_i ; \alpha_{i+1}\} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $MA_1 + MA_2 + ... + MA_n \le \max\{\alpha_1 ; \alpha_i ; \alpha_{i+1}\}$

$$\Rightarrow MA_1 + MA_2 + ... + MA_n \le \max\{\alpha_1 ; \alpha_2 ; ... ; \alpha_n\}.$$

Nhờ nhận xét sau phép chứng minh BĐ7, ta thấy : trong BĐ10, đẳng thức xảy ra khi $M \in \{A_1 ; A_2 ; ... ; A_n\}$.

Hoàn toàn tương tự phép chứng minh BĐ7, với chú ý rằng, bất đẳng thức không đổi chiều nếu ta nhân hai vế của nó với cùng một số dương, ta có kết quả sau.

**Bổ đề 8 :** Cho dãy điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ ; dãy số dương $x_1, x_2, ..., x_n$ và đoạn thẳng BC. Điểm M thuộc đoạn BC. Khi đó :

$$x_1MA_1 + x_2MA_2 + ... + x_nMA_n \le$$
$$\le \max\{x_1BA_1 + x_2BA_2 + ... + x_nBA_n ; x_1CA_1 + + x_2CA_2 + ... + x_nCA_n\}.$$

Nhờ BĐ8 và phương pháp chứng minh BT10, ta dễ dàng giải được bài toán tổng quát sau.

**Bài toán 11 :** Cho đa giác $A_1A_2 ... A_n$ và điểm M nằm trong đa giác. Cho dãy điểm $X_1, X_2, ..., X_m$ và dãy số dương $x_1, x_2, ... , x_m$.

Chứng minh rằng : $x_1MX_1 + x_2MX_2 + ... + + x_mMX_m \le \max\{\alpha_1 ; \alpha_2 ; ... ; \alpha_n\}$.

Trong đó, $\alpha_i = x_1A_iX_1 + x_2A_iX_2 + ... + + x_mA_iX_m$ $(1 \le i \le n)$.

Nội dung của BT11 chính là "những kết quả khác, sâu sắc hơn, thú vị hơn" mà tôi đã từng đề cập đến sau khi giới thiệu BT6.

Để bạn đọc có thể hình dung được phần nào sự sâu sắc và thú vị của BT11, xin giới thiệu hai trường hợp cụ thể của nó.

**Bài toán 12 :** Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Chứng minh rằng :

$$BC.MA + CA.MB + AB.MC <$$
$$< 2.\max\{AB.AC ; BC.BA ; CA.CB\}.$$

**Bài toán 13 :** Cho tam giác nhọn ABC. AH, BK, CL là các đường cao. Điểm M nằm trong tam giác HKL. Chứng minh rằng : $MA + MB + MC \le \max\{AH + BC ; BK + + CA ; CL + AB\}$.

Tôi có thể giải BT12 mà không cần đến BT11, nhưng đối với BT13 thì tôi không thể. Tôi thực sự cảm ơn nếu ai đó có thể cho tôi biết một lời giải của BT13 mà không cần đến BT11.

Bắt đầu từ ý tưởng của HêRông (phương pháp giải BT1) nhưng kết thúc lại là một ý tưởng mới, hoàn toàn khác lạ (BĐ8 và pl[illegible] iải BT 10). Phải chăng tôi đã đi lạc chủ đề ? Không, hoàn toàn không. Ý tưởng dẫn dắt ý tưởng, đó là điều quan trọng nhất mà tôi muốn trao đổi cùng bạn đọc thông qua bài viết này. Ý tưởng dẫn dắt ý tưởng, toán học đã đi lên như vậy đấy.

Để kết thúc, xin giới thiệu với bạn đọc một số bài toán có liên quan tới những vấn đề được đề cập đến trong bài viết này.

**Bài toán 14 :** Cho hình chữ nhật ABCD. Điểm M cho trước trên cạnh AB. Hãy tìm trên các cạnh BC, CD, DA các điểm N, P, Q sao cho chu vi tam giác MNPQ nhỏ nhất.

**Bài toán 15 :** Cho tam giác đều ABC, tâm O. Hãy tìm trên các cạnh BC, CA, AB các điểm X, Y, Z sao cho tổng (OX + XY + YZ + ZO) nhỏ nhất.

**Bài toán 16 :** Cho hình chữ nhật ABCD. Điểm M nằm trong hình chữ nhật. Chứng minh rằng :

$$MA + MB + MC + MD \le AB + AC + AD.$$

**Bài toán 17 :** Cho tam giác ABC, $AB \ge AC$. Các trung tuyến BM, CN cắt nhau tại G. Chứng minh rằng :

a) $BM + MC \ge CN + NB$.

b) $BG + AC \le CG + AB$.

**Bài toán 18 :** Cho tam giác ABC, điểm M nằm trên cạnh BC. Chứng minh rằng :

$$S(ABC).AM \le S(AMC).AB + S(AMB).AC.$$

**Bài toán 19 :** Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Chứng minh rằng :

$$\frac{MA}{BC} + \frac{MB}{CA} + \frac{MC}{AB} \le$$
$$\le \max\left\{\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB} ; \frac{BC}{BA} + \frac{BA}{BC} ; \frac{CA}{CB} + \frac{BC}{CA}\right\}$$

**Bài toán 20 :** Cho tam giác ABC. Các điểm X, Y, Z khác A, B, C và theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng : $P(XYZ) \ge \min\{P(AYZ) ; P(BZX) ; P(CXY)\}$.

Nói riêng về BT20, bài này được giới thiệu và giải trên tạp chí *The American Mathematical monthly* của Mỹ. Tôi đã đọc lời giải của nó. Thật đáng tiếc, bài toán quá đẹp nhưng lời giải quá xấu. Chính vì nghĩ rằng có thể tìm thấy cho BT20 một lời giải đơn giản hơn mà tôi giới thiệu nó với bạn đọc *"Toán Tuổi thơ 2"* nhân bài viết của mình, với rất nhiều ước lượng về độ dài. *"Toán Tuổi thơ 2"* hi vọng nhận được một **lời giải tuyệt vời** từ một bạn đọc nào đó.


# NHỮNG MỞ RỘNG BAN ĐẦU TỪ MỘT BÀI TOÁN TRONG SÁCH GIÁO KHOA

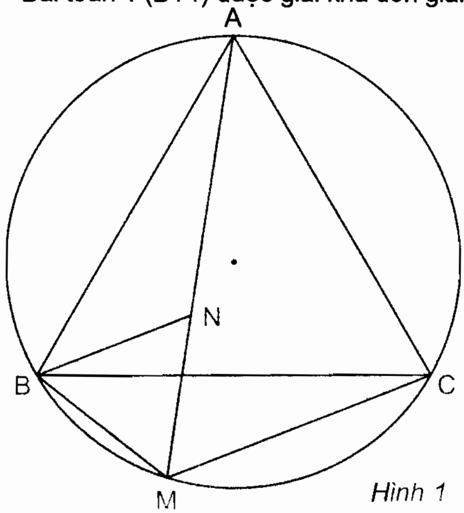
TS. LÊ QUỐC HÁN *(ĐHSP Vinh)*

❀ *Từ một bài toán quen thuộc trong SGK Hình học lớp 9, TS. Lê Quốc Hán đã có những mở rộng thú vị. Con đường mở rộng này cũng là một cách học toán mà các bạn cần rèn luyện. TTT2 chân thành cảm ơn TS. Nguyễn Minh Hà đã cùng TS. Lê Quốc Hán làm phong phú thêm những mở rộng này.*

Trong SGK Hình học lớp 9, trang 38, có bài toán số 14, nội dung như sau :

**Bài toán 1 :** Cho tam giác đều ABC và điểm M thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ (không chứa A) của đường tròn ngoại tiếp tam giác. Chứng minh rằng : MA = MB + MC.

Bài toán 1 (BT1) được giải khá đơn giản :




*Hình 1*

**Lời giải :** Trên MA lấy điểm N sao cho MN = MB (1) (*hình 1*) ; do $\widehat{BMN} = \widehat{BCA} = 60^o$ nên $\Delta$BMN đều $\Rightarrow$ BN = BM (2).

$\Delta$ABC đều nên BA = BC, mặt khác $\widehat{ABC} = \widehat{MBN} = 60^o \Rightarrow \widehat{ABN} = \widehat{MBC}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra : $\Delta ABN = \Delta CBM$ (c.g.c) $\Rightarrow$ NA = MC (4).

Từ (1), (4) suy ra :

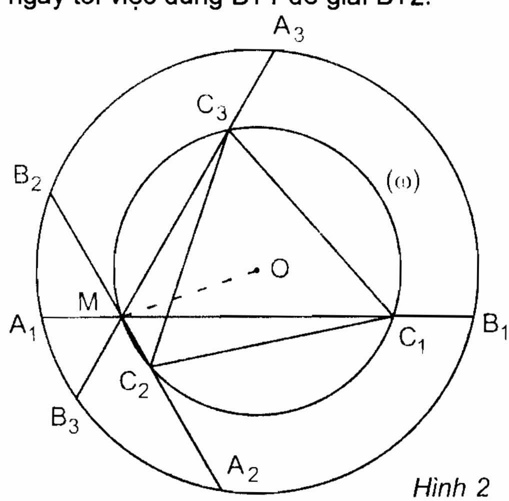
MN + NA = MB + MC $\Rightarrow$ MA = MB + MC.

BT1 là sự khởi đầu cho rất nhiều mở rộng đẹp và sâu sắc. Do sự hạn chế về chương trình, trong bài viết này, chúng tôi chỉ có thể giới thiệu với bạn đọc những mở rộng ban đầu của BT1. Mặc dù vậy, những mở rộng này, trong chừng mực nào đó, sẽ giúp các bạn trả lời câu hỏi lớn được đặt ra trong chuyên mục của chúng ta : “Học toán ra sao ?”.

Trong BT1, giả thiết tam giác ABC đều tương đương với giả thiết các đường thẳng MA, MB, MC đôi một tạo với nhau một góc $60^o$. Nhận xét trên cho ta một cách mở rộng BT1.

**Bài toán 2 :** Cho đường tròn (O) và điểm M nằm trong đường tròn. Các dây $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$ đi qua M ($A_1$, $B_2$, $A_3$, $B_1$, $A_2$, $B_3$ theo thứ tự nằm trên (O)) và đôi một tạo với nhau một góc $60^o$. Chứng minh rằng : $MA_1 + MA_2 + MA_3 = MB_1 + MB_2 + MB_3$.

Vì BT2 được sinh ra từ BT1 nên ta nghĩ ngay tới việc dùng BT1 để giải BT2.




*Hình 2*

**Lời giải :** Không mất tính tổng quát, giả sử O nằm trong góc $\widehat{B_1MA_3}$ và hơn thế

$\widehat{OMB_1} \le \widehat{OMA_3}$ (*hình 2*). Dựng đường tròn ($\omega$) tâm O, bán kính OM. Đường tròn này theo thứ tự cắt các đoạn $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$ tại $C_1$, $C_2$, $C_3$. Dễ thấy M thuộc cung $\widehat{C_2C_3}$ (không chứa $C_1$) của ($\omega$).

Mặt khác $\begin{cases} \widehat{C_1C_2C_3} = \widehat{C_1MC_3} = 60^o \\ \widehat{C_1C_3C_2} = \widehat{C_1MC_2} = 60^o \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta C_1C_2C_3$ đều. Theo kết quả của BT1, ta có : $MC_1 = MC_2 + MC_3$ (1)

Lại chú ý rằng, (O) và ($\omega$) đồng tâm,

ta có : $\begin{cases} MA_1 = C_1B_1 \\ C_2A_2 = MB_2 \quad (2) \\ C_3A_3 = MB_3 \end{cases}$

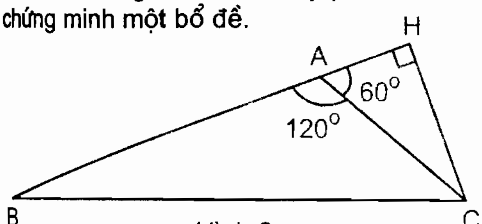
Từ (1), (2) dễ dàng suy ra :

$MA_1 + MA_2 + MA_3 = MB_1 + MB_2 + MB_3$.

Tiếp theo mở rộng trên, BT1 còn có một mở rộng khác cũng khá hấp dẫn. Nó giới thiệu với chúng ta mối quan hệ đẹp giữa ba số $MA^2$, $MB^2$, $MC^2$.

**Bài toán 3 :** Cho tam giác đều ABC và điểm M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác. Chứng minh rằng : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$. (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC)

Trước khi giải BT3, ta hãy phát biểu và chứng minh một bổ đề.




*Hình 3*

**Bổ đề 1 :** Cho tam giác ABC có góc $\hat{A} = 120^o$.

Khi đó : $BC^2 = AB^2 + AC^2 + AB.AC$.

*Chứng minh :* Gọi H là hình chiếu của C trên AB (*hình 3*). Dễ thấy :

$$AH = \frac{1}{2}AC \ ; \ CH = \frac{\sqrt{3}}{2}AC \ (1)$$

Theo định lí Py-ta-go, ta có :

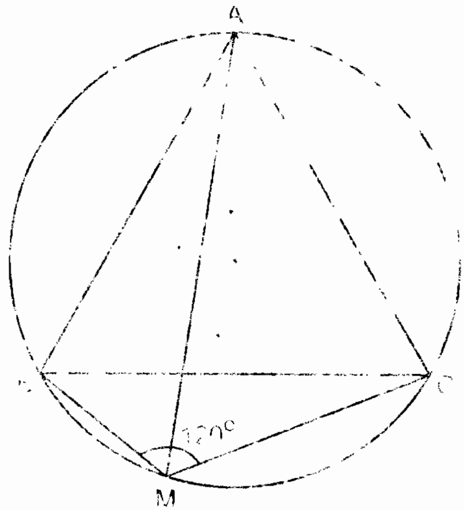
$$BC^2 = BH^2 + CH^2 \ (2)$$

Từ (1), (2) suy ra :

$$BC^2 = (AB + AH)^2 + CH^2$$
$$= \left(AB + \frac{1}{2}AC\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}AC\right)^2$$
$$= AB^2 + AB.AC + \frac{1}{4}AC^2 + \frac{3}{4}AC^2$$
$$= AB^2 + AC^2 + AB.AC$$

BĐ1 đã được chứng minh.

Trở lại việc giải BT3.




*Hình 4*

Không mất tính tổng quát, giả sử M thuộc cung $\widehat{BC}$ (không chứa A) của (O) (*hình 4*). Theo kết quả đạt được trong BT1, ta có : MA = MB + MC

$\Rightarrow MA^2 = MB^2 + MC^2 + 2MB.MC$

$\Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(MB^2 + MC^2 + MB.MC)$ (1)

Vì tam giác ABC đều nên $\widehat{BMC} = 120^o$.

Theo BĐ1, ta có : $MB^2 + MC^2 + MB.MC = BC^2$

$\Rightarrow MB^2 + MC^2 + MB.MC = 3R^2$ (2)

Từ (1), (2) suy ra : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$.

Từ BT3, tương tự như cách phát triển BT1 thành BT2, chúng ta có thể phát biểu kết quả mở rộng hơn. Các bạn thử suy nghĩ và gửi gấp ý kiến về TTT2. Ở số tạp chí sau sẽ giới thiệu tiếp những phát triển mới. Cảm ơn các bạn.

***(Kì sau đăng tiếp)***


# CHỨNG MINH một số không phải là SỐ CHÍNH PHƯƠNG

LÊ VÕ VIỆT KHANG (*Hà Nội*)

Trong chương trình Toán lớp 6, các em đã được học về các bài toán liên quan tới phép chia hết của một số tự nhiên cho một số tự nhiên khác 0 và đặc biệt là được giới thiệu về số chính phương, đó là số tự nhiên bằng bình phương của một số tự nhiên (chẳng hạn : 0 ; 1 ; 4 ; 9 ;16 ; 25 ; 121 ; 144 ; ...).

Kết hợp các kiến thức trên, các em có thể giải quyết bài toán : Chứng minh một số không phải là số chính phương. Đây cũng là một cách củng cố các kiến thức mà các em đã được học. Những bài toán này sẽ làm tăng thêm lòng say mê môn toán cho các em.

**1. Nhìn chữ số tận cùng**

Vì số chính phương bằng bình phương của một số tự nhiên nên có thể thấy ngay **số chính phương phải có chữ số tận cùng là một trong các chữ số 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9**. Từ đó các em có thể giải được bài toán kiểu sau đây :

**Bài toán 1 :** Chứng minh số

$$n = 2004^2 + 2003^2 + 2002^2 - 2001^2$$

không phải là số chính phương.

**Lời giải :** Dễ dàng thấy chữ số tận cùng của các số $2004^2$ ; $2003^2$ ; $2002^2$ ; $2001^2$ lần lượt là 6 ; 9 ; 4 ; 1. Do đó số n có chữ số tận cùng là 8 nên n không phải là số chính phương.

**Chú ý :** Nhiều khi số đã cho có chữ số tận cùng là một trong các số 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9 nhưng vẫn không phải là số chính phương. Khi đó các bạn phải lưu ý thêm một chút nữa :

**Nếu số chính phương chia hết cho số nguyên tố p thì phải chia hết cho $p^2$.**

**Bài toán 2 :** Chứng minh số 1234567890 không phải là số chính phương.

**Lời giải :** Thấy ngay số 1234567890 chia hết cho 5 (vì chữ số tận cùng là 0) nhưng không chia hết cho 25 (vì hai chữ số tận cùng là 90). Do đó số 1234567890 không phải là số chính phương.

**Chú ý :** Có thể lý luận 1234567890 chia hết cho 2 (vì chữ số tận cùng là 0), nhưng không chia hết cho 4 (vì hai chữ số tận cùng là 90) nên 1234567890 không là số chính phương.

**Bài toán 3 :** Chứng minh rằng nếu một số có tổng các chữ số là 2004 thì số đó không phải là số chính phương.

**Lời giải :** Ta thấy tổng các chữ số của số 2004 là 6 nên 2004 chia hết cho 3 mà không chia hết 9 nên số có tổng các chữ số là 2004 cũng chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9, do đó số này không phải là số chính phương.

**2. Dùng tính chất của số dư**

Chẳng hạn các em gặp bài toán sau đây :

**Bài toán 4 :** Chứng minh một số có tổng các chữ số là 2006 không phải là số chính phương.

Chắc chắn các em sẽ dễ bị "choáng". Vậy ở bài toán này ta sẽ phải nghĩ tới điều gì ? Vì cho giả thiết về tổng các chữ số nên chắc chắn các em phải nghĩ tới phép chia cho 3 hoặc cho 9. Nhưng lại không gặp điều "kì diệu" như bài toán 3. Thế thì ta nói được điều gì về số này ? Chắc chắn số này chia cho 3 phải dư 2. Từ đó ta có lời giải.

**Lời giải :** Vì **số chính phương khi chia cho 3 chỉ có số dư là 0 hoặc 1** mà thôi (coi như bài tập để các em tự chứng minh !). Do tổng các chữ số của số đó là 2006 nên số đó chia cho 3 dư 2. Chứng tỏ số đã cho không phải là số chính phương.

Tương tự các em có thể tự giải quyết được 2 bài toán :

**Bài toán 5 :** Chứng minh tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 2005 không phải là số chính phương.

**Bài toán 6 :** Chứng minh số

$$n = 2004^4 + 2004^3 + 2004^2 + 23$$

không là số chính phương.

Bây giờ các em theo dõi bài toán sau để nghĩ tới một "tình huống" mới.

**Bài toán 7 :** Chứng minh số

$$n = 4^4 + 44^{44} + 444^{444} + 4444^{4444} + 15$$

không là số chính phương.

**Nhận xét :** Nếu xét n chia cho 3, các em sẽ thấy số dư của phép chia sẽ là 1, thế là không "bắt chước" được cách giải của các bài toán 3 ; 4 ; 5 ; 6. Nếu xét chữ số tận cùng các em sẽ thấy chữ số tận cùng của n là 9 nên không làm "tương tự" được như các bài toán 1 ; 2. Số dư của phép chia n cho 4 là dễ thấy nhất, đó chính là 3. Một **số chính phương khi chia cho 4 sẽ cho số dư như thế nào nhỉ ?** Các em có thể tự chứng minh và được kết quả : **số dư đó chỉ có thể là 0 hoặc 1**. Như vậy là các em đã giải xong bài toán 7.

**3. "Kẹp" số giữa hai số chính phương "liên tiếp"**

Các em có thể thấy rằng : Nếu n là số tự nhiên và số tự nhiên k thỏa mãn $n^2 < k < (n + 1)^2$ thì k không là số chính phương. Từ đó các em có thể xét được các bài toán sau :

**Bài toán 8 :** Chứng minh số 4014025 không là số chính phương.

**Nhận xét :** Số này có hai chữ số tận cùng là 25, chia cho 3 dư 1, chia cho 4 cũng dư 1. Thế là tất cả các cách làm trước đều không vận dụng được. Các em có thể thấy lời giải theo một hướng khác.

**Lời giải :** Ta có $2003^2 = 4012009$ ; $2004^2 = 4016016$ nên $2003^2 < 4014025 < 2004^2$. Chứng tỏ 4014025 không là số chính phương.

**Bài toán 9 :** Chứng minh

$$A = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$$

không là số chính phương với mọi số tự nhiên n khác 0.

**Nhận xét :** Đối với các em đã làm quen với dạng biểu thức này thì có thể nhận ra A + 1 là số chính phương (đây là bài toán quen thuộc với lớp 8). Các em lớp 6, lớp 7 cũng có thể chịu khó đọc lời giải.

**Lời giải :** Ta có :

$$\begin{aligned} A + 1 &= n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 \\ &= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 \\ &= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1 \\ &= (n^2 + 3n + 1)^2. \end{aligned}$$

Mặt khác :

$$(n^2 + 3n)^2 < (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) = A.$$

Điều này hiển nhiên đúng vì $n \geq 1$. Chứng tỏ : $(n^2 + 3n)^2 < A < A + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$. Suy ra A không là số chính phương.

Các em có thể rèn luyện bằng cách thử giải bài toán sau :

**Bài toán 10 :** Hãy tìm số tự nhiên n sao cho $A = n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n$ là số chính phương.

Gợi ý : Nghĩ đến $(n^2 - n + 1)^2$.

**Bài toán 11 :** Chứng minh số

$$23^5 + 23^{12} + 23^{2003}$$

không là số chính phương.

Gợi ý : Nghĩ đến phép chia cho 3 hoặc phép chia cho 4.

**Bài toán 12 :** Có 1000 mảnh bìa hình chữ nhật, trên mỗi mảnh bìa được ghi một số trong các số từ 2 đến 1001 sao cho không có hai mảnh nào ghi số giống nhau. Chứng minh rằng : Không thể ghép tất cả các mảnh bìa này liền nhau để được một số chính phương.

**Bài toán 13 :** Chứng minh rằng : Tổng các bình phương của bốn số tự nhiên liên tiếp không thể là số chính phương.

Gợi ý : Nghĩ tới phép chia cho 4.

**Bài toán 14 :** Chứng minh rằng số

$$333^{333} + 555^{555} + 777^{777}$$

không là số chính phương.

Gợi ý : Nghĩ đến phép chia cho ... một chục (?)

**Bài toán 15 :** Lúc đầu có hai mảnh bìa, một cậu bé tinh nghịch cứ cầm một mảnh bìa lên lại xé ra làm bốn mảnh. Cậu ta mong rằng cứ làm như vậy đến một lúc nào đó sẽ được số mảnh bìa là một số chính phương. Cậu ta có thực hiện được mong muốn đó không ?

Để kết thúc bài viết này, tôi muốn chúc các em học thật giỏi môn toán ngay từ đầu bậc THCS và cho tôi được nói riêng với các quý thầy cô : nguyên tắc chung để chứng minh một số tự nhiên không là số chính phương, đó là dựa vào một trong các điều kiện cần để một số là số chính phương (mà như các quý thầy cô đã biết : mọi điều kiện cần trên đời là dùng để ... phủ định !). Từ đó các quý thầy cô có thể sáng tạo thêm nhiều bài toán thú vị khác.

Mong các em và quý thầy cô phát hiện thêm nhiều điều kiện cần nữa để chúng ta có thể tìm hiểu kĩ hơn về số chính phương.

# SỐ NGHIỆM CỦA MỘT SỐ LOẠI PHƯƠNG TRÌNH

NGUYỄN THANH HÀI
*(GV THCS Nam Cường, Nam Trực, Nam Định)*

Kiến thức về xét dấu các nghiệm của một phương trình bậc hai là một trong những kiến thức cơ bản của THCS. Sau này khi học lên bậc THPT, các em vẫn cần sử dụng. Ta nhớ lại những điều cần thiết :

● Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, ta thường kí hiệu $P = \frac{c}{a}$; $S = -\frac{b}{a}$ và $x_1$, $x_2$ là các nghiệm của phương trình.

● Các điều kiện quan trọng :

+) $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0$

+) $0 = x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ S > 0 \end{cases}$

+) $x_1 < x_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ S < 0 \end{cases}$

+) $x_1 = x_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ S = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \Delta = 0 \\ S = 0 \end{cases}$

+) $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

+) $x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

Sử dụng các kiến thức trên chúng ta có thể xét được số nghiệm của nhiều loại phương trình.

## 1. Phương trình trùng phương

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \qquad (1)$$

Đặt ẩn phụ $t = x^2 \geq 0$ thì (1) sẽ trở thành

$$at^2 + bt + c = 0 \qquad (2)$$

Mỗi nghiệm $t > 0$ của (2) cho hai nghiệm $x = \pm\sqrt{t}$ của (1).

Nghiệm $t = 0$ của (2) sẽ cho một nghiệm $x = 0$ của (1).

Tất nhiên $t < 0$ sẽ không cho nghiệm của (1).

**Bài toán 1 :** Biện luận số nghiệm của phương trình : $x^4 - mx^2 + 3m - 8 = 0 \qquad (3)$

**Lời giải :** Đặt $t = x^2 \geq 0$ thì (3) trở thành :

$$t^2 - mt + 3m - 8 = 0 \qquad (4)$$

Số nghiệm của (3) phụ thuộc vào dấu các nghiệm của (4), tức là phụ thuộc vào dấu của các biểu thức

$\Delta = m^2 - 12m + 32$ ; $P = 3m - 8$ ; $S = m$

Ta lập bảng biện luận :

| m | Δ | P | S | Nghiệm của (4) | Số nghiệm của (3) |
|---|---|---|---|---|---|
| | + | - | - | $t_1 < 0 < t_2$ | 2 |
| 0 | + | - | 0 | $t_1 < 0 < t_2$ | 2 |
| | + | - | + | $t_1 < 0 < t_2$ | 2 |
| $\frac{8}{3}$ | + | 0 | + | $0 = t_1 < t_2$ | 3 |
| | + | + | + | $0 < t_1 < t_2$ | 4 |
| 4 | 0 | + | + | $t_1 = t_2 > 0$ | 2 |
| | - | + | + | Vô nghiệm | 0 |
| 8 | 0 | + | + | $t_1 = t_2 > 0$ | 2 |
| | + | + | + | $0 < t_1 < t_2$ | 4 |

**Bài toán 2 :** Tìm m để phương trình

$$x^4 - 2mx^2 + m^2 - 3 = 0 \qquad (5)$$

có đúng ba nghiệm phân biệt.

**Lời giải :** Đặt $t = x^2 \geq 0$ thì (5) trở thành :

$$t^2 - 2mt + m^2 - 3 = 0 \qquad (6)$$

Phương trình (5) có đúng ba nghiệm phân biệt ⇔ phương trình (6) có nghiệm $t_1, t_2$ thỏa mãn $0 = t_1 < t_2$ ⇔ $\begin{cases} P = 0 \\ S > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3 = 0 \\ 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm\sqrt{3} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \sqrt{3}.$$

**2. Phương trình $a(x - \alpha)^2 + b|x - \alpha| + c = 0$** (7)

Đặt ẩn phụ $t = |x - \alpha|$ thì (7) cũng sẽ trở thành phương trình (2).

Ta thấy mối quan hệ giữa số nghiệm của (1), (7) với nghiệm của (2) rất giống nhau. Có thể tổng kết lại nhờ bảng sau :

| Số nghiệm của (1) ; (7) | Nghiệm của (2) | Điều kiện |
|---|---|---|
| 0 | Vô nghiệm hoặc $t_1 \le t_2 < 0$ | $\left[\begin{array}{l} \Delta < 0 \\ \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \end{array}\right.$ |
| 1 | $t_1 \le t_2 = 0$ | $\begin{cases} P = 0 \\ S \le 0 \end{cases}$ |
| 2 | $t_1 < 0 < t_2$ hoặc $t_1 = t_2 > 0$ | $\left[\begin{array}{l} P < 0 \\ \begin{cases} \Delta = 0 \\ S > 0 \end{cases} \end{array}\right.$ |
| 3 | $0 = t_1 < t_2$ | $\begin{cases} P = 0 \\ S > 0 \end{cases}$ |
| 4 | $0 < t_1 < t_2$ | $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ |

**Bài toán 3 :** Tìm m để phương trình

$$x^2 - 2x - |x - 1| + m = 0 \qquad (8)$$

có đúng hai nghiệm phân biệt.

**Lời giải :** Ta có

$$(8) \Leftrightarrow (x - 1)^2 - |x - 1| + m - 1 = 0$$

Đặt $t = |x - 1| \ge 0$ thì (8) trở thành :

$$t^2 - t + m - 1 = 0 \qquad (9)$$

Phương trình (8) có đúng hai nghiệm phân biệt ⇔ phương trình (9) có nghiệm $t_1, t_2$ thỏa mãn $t_1 < 0 < t_2$ hoặc $t_1 = t_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P < 0 \\ \begin{cases} \Delta = 0 \\ S > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m - 1 < 0 \\ \begin{cases} 1 - 4m + 4 = 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m = \dfrac{5}{4} \end{array}\right.$$

**3. Phương trình $a(kx + n) + b\sqrt{kx + n} + c = 0$ (10)**

Để không tầm thường ta giả sử $k \ne 0$.

Đặt ẩn phụ $t = \sqrt{kx + n} \ge 0$ thì (10) trở thành (2). Với mỗi giá trị $t \ge 0$ cho ta một nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{k}(t^2 - n)$. Do đó số nghiệm của phương trình (10) đúng bằng số nghiệm không âm của phương trình (2).

**Bài toán 4 :** Tìm m sao cho phương trình $2x - m\sqrt{2x - 1} + 2m - 4 = 0$ (11) có hai nghiệm phân biệt.

**Lời giải :** Đặt $t = \sqrt{2x - 1} \ge 0$ thì phương trình (11) trở thành

$$t^2 - mt + 2m - 3 = 0 \qquad (12)$$

Phương trình (11) có hai nghiệm phân biệt ⇔ Phương trình (12) có hai nghiệm phân biệt $t_1, t_2$ thỏa mãn $t_2 > t_1 \ge 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P \ge 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m + 12 > 0 \\ 2m - 3 \ge 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 6 \\ m < 2 \end{array}\right. \\ m \ge \dfrac{3}{2} \\ m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 6 \\ \dfrac{3}{2} \le m < 2 \end{array}\right.$$

Trước khi dừng bài viết, xin đề nghị các em có thể tự giải các bài tập sau đây :

**Bài tập 1 :** Tìm m để phương trình

$$x^2 + 2m|x - 2| - 4x + m^2 + 3 = 0$$

có ít nhất một nghiệm.

**Bài tập 2 :** Chứng minh rằng phương trình : $mx^4 - 3(m - 2)x^2 + m - 3 = 0$ luôn có nghiệm với mọi m.

**Bài tập 3 :** Biện luận số nghiệm của phương trình : $x - m\sqrt{x - 2} + m^2 - 5 = 0$.

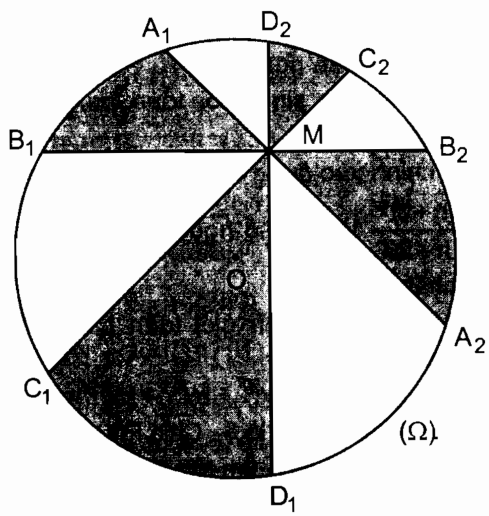
# Định lí Pizza

TS. NGUYỄN MINH HÀ *(ĐHSP Hà Nội)*

NGƯT. TRẦN ANH DŨNG *(THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai)*

Pizza không phải là tên của một nhà toán học mà là tên của một loại bánh hình tròn của người Ý. Định lí Pizza là định lí về hình tròn nhưng thường được phát triển một cách sinh động nhờ hình ảnh của chiếc bánh Pizza. Định lí này lần đầu tiên được công bố và chứng minh trên tạp chí Mathematics Magazine số 41 (năm 1968) bởi nhà toán học L.J.Upton. Bài báo này xin giới thiệu với bạn đọc định lí Pizza và phép chứng minh định lí đó.

**Định lí Pizza :** Nếu chia chiếc bánh Pizza thành tám phần bởi bốn nhát cắt cùng đi qua một điểm nằm trong chiếc bánh sao cho hai nhát cắt kề nhau tạo với nhau một góc bằng $45^o$ thì tổng diện tích của bốn phần đôi một không kề nhau này bằng tổng diện tích của bốn phần đôi một không kề nhau kia.

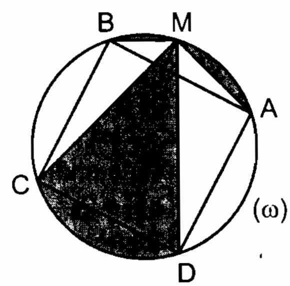



*Hình 1*

Trên *hình 1*, ta thấy hình tròn $(\Omega)$ được chia thành tám phần bởi các dây $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$, $D_1D_2$ cùng đi qua điểm M và $(A_1A_2,\ B_1B_2) = (B_1B_2,\ C_1C_2) = (C_1C_2,\ D_1D_2) = (D_1D_2,\ A_1A_2) = 45^o$. Định lí Pizza khẳng định rằng, tổng diện tích của bốn phần "trắng" bằng tổng diện tích của bốn phần "màu".. Kí hiệu $(\Delta_1,\ \Delta_2)$ chỉ góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1$, $\Delta_2$, nó có hiệu lực trong toàn bộ bài báo này.

Có nhiều cách chứng minh định lí Pizza. Xin giới thiệu với bạn đọc một cách chứng minh khá đơn giản của riêng chúng tôi.

Trước hết, ta cần có một bổ đề.




*Hình 2*

**Bổ đề :** Cho hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn $(\omega)$. Điểm M thuộc cung $\overset{\frown}{AB}$ nhỏ. Các dây MA, MB, MC, MD chia $(\omega)$ thành năm phần "trắng" và "màu" (*hình 2*). Khi đó, tổng diện tích của hai phần "trắng" bằng tổng diện tích của ba phần "màu".

**Chứng minh bổ đề :** Gọi H là hình chiếu của M trên đoạn AB (*hình 2*). Ta thấy :

$$S(MAD) + S(MBC) = S(HAD) + S(HBC)$$

$$\frac{1}{2}HA.AD + \frac{1}{2}HB.BC = \frac{1}{2}(HA + HB).AD$$

(vì AD = BC)

$$= \frac{1}{2}AB.AD = \frac{1}{2}S(ABCD) \quad (1)$$

Mặt khác, vì ABCD là hình vuông nên các cung $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CD}, \overset{\frown}{DA}$ có số đo bằng nhau (cùng bằng $90^o$) $\Rightarrow$ diện tích của các hình viên phân sinh ra bởi các cung này bằng nhau $\Rightarrow$ tổng diện tích của hai hình viên phân sinh ra bởi hai cung $\overset{\frown}{AD}, \overset{\frown}{BC}$ bằng tổng diện tích của hai hình viên phân sinh ra bởi hai cung $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{DC}$ (2).

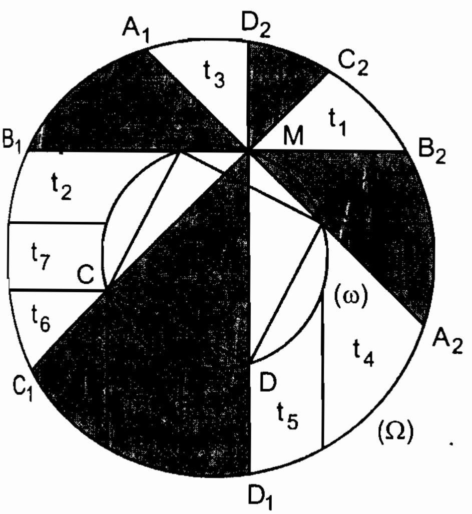
Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ trên *hình 2*, tổng diện tích của hai phần "trắng" bằng tổng diện tích của ba phần "màu". Bổ đề đã được chứng minh.

Bổ đề trên chính là trường hợp đặc biệt của định lí Pizza khi bốn nhát cắt cùng đi qua một điểm nằm trên biên của chiếc bánh Pizza.

Trong phép chứng minh bổ đề trên, kí hiệu S(.) chỉ diện tích các đa giác.

Trở lại việc chứng minh định lí Pizza.

**Chứng minh định lí Pizza :** Trên *hình 1*, gọi O là tâm của $(\Omega)$, gọi $(\omega)$ là hình tròn tâm O, bán kính OM. Để cho bạn đọc dễ theo dõi, chúng tôi vẽ thêm một hình mới (*hình 3*), hình này chính là *hình 1* vẽ thêm đường tròn $(\omega)$ và một số đường thẳng sẽ được giới thiệu dưới đây.




*Hình 3*

Không mất tính tổng quát, giả sử O nằm trong góc $\widehat{C_1MD_1}$.

Đặt A, B, C, D theo thứ tự là giao điểm thứ hai của các dây $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$, $D_1D_2$ với $(\omega)$. Vì $(A_1A_2, B_1B_2) = (B_1B_2, C_1C_2) = (C_1C_2, D_1D_2) = (D_1D_2, A_1A_2) = 45^o$ nên ABCD là hình vuông. Các dây MA, MB, MC, MD chia $(\omega)$ thành năm phần "trắng", "màu". Theo bổ đề, tổng diện tích của hai phần "trắng" bằng tổng diện tích của ba phần "màu" (3).

Hình tròn $(\Omega)$ bỏ đi hình tròn $(\omega)$, còn lại một hình vành khăn mà ta kí hiệu là $(\Omega) \setminus (\omega)$.

Qua A, C vẽ các đường thẳng song song với $B_1B_2$. Qua A, B, C vẽ các đường thẳng song song với $D_1D_2$.

Năm đường thẳng vừa vẽ cùng với các đường thẳng $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$, $D_1D_2$ chia $(\Omega) \setminus (\omega)$ thành 14 phần, trong đó có 7 phần "trắng" với các diện tích là $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7$ và 7 phần "màu" với các diện tích là $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7$.

Vì mọi đường thẳng đi qua O đều là trục đối xứng của $(\Omega) \setminus (\omega)$ nên ta có : $t_1 = m_1$ ; $t_2 = m_2$ ; ... ; $t_7 = m_7$ (4). (bạn đọc tự kiểm tra)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ trên *hình 3*, tổng diện tích của bốn phần "trắng" bằng tổng diện tích của bốn phần "màu". Định lí Pizza đã được chứng minh.

Trên đây ta đã chứng minh định lí Pizza trong trường hợp n = 8 (chia bánh thành 8 phần). Người ta đã chứng minh được rằng, nó vẫn đúng khi n = 12 ; 16 ; 20 ; ... nhưng không đúng khi n = 2, 4, 6, 10, 14, 18, ...


# NHỮNG MỞ RỘNG BAN ĐẦU TỪ MỘT BÀI TOÁN TRONG SÁCH GIÁO KHOA

*(tiếp theo kì trước)*

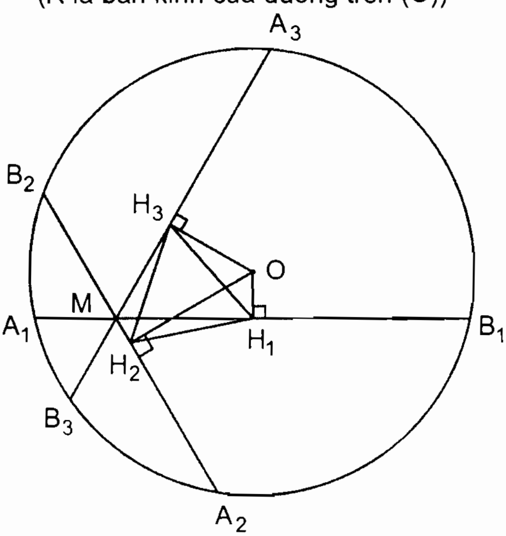
TS. LÊ QUỐC HÁN và TS. NGUYỄN MINH HÀ

Từ BT3, tương tự như cách phát triển BT1 thành BT2, ta có bài toán mới sau đây.

**Bài toán 4 :** Cho đường tròn (O) và điểm M nằm trong (O). Các dây $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$ đi qua M và đôi một tạo với nhau một góc $60^o$. Chứng minh rằng :

$MA_1^2 + MB_1^2 + MA_2^2 + MB_2^2 + MA_3^2 + MB_3^2 = 6R^2$.

(R là bán kính của đường tròn (O))




*Hình 5*

**Lời giải** : Không mất tính tổng quát, giả sử O nằm trong góc $\widehat{B_1MA_3}$ và hơn thế $\widehat{OMB_1} \le \widehat{OMA_3}$ *(hình 5)*. Gọi $H_1$, $H_2$, $H_3$ lần lượt là hình chiếu của O trên $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$. Đương nhiên, $H_1$, $H_2$, $H_3$ nằm trên đường tròn (ω) đường kính OM và M thuộc cung $\overset{\frown}{H_2H_3}$ (không chứa $H_1$) của (ω).

Mặt khác : $\begin{cases} \widehat{H_1H_2H_3} = \widehat{H_1MH_3} = 60^o \\ \widehat{H_1H_3H_2} = \widehat{H_1MH_2} = 60^o \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta H_1H_2H_3$ đều. Theo kết quả của BT3, ta có :

$OH_1^2 + OH_2^2 + OH_3^2 = MH_1^2 + MH_2^2 + MH_3^2$ (1)

Lại chú ý rằng, $H_1A_1 = H_1B_1$ ; $H_2A_2 = H_2B_2$ ; $H_3B_3 = H_3C_3$, ta có :

$MA_1^2 + MB_1^2 = (H_1A_1 - H_1M)^2 + (H_1B_1 + H_1M)^2$
$= 2(H_1A_1^2 + H_1M^2)$

$MA_2^2 + MB_2^2 = (H_2A_2 - H_2M)^2 + (H_2B_2 + H_2M)^2$
$= 2(H_2A_2^2 + H_2M^2)$

$MA_3^2 + MB_3^2 = (H_3A_3 - H_3M)^2 + (H_3B_3 + H_3M)^2$
$= 2(H_3A_3^2 + H_3M^2)$

Từ đó và chú ý tới định lý Py-ta-go, ta có :

$MA_1^2 + MB_1^2 = 2(R^2 - H_1O^2 + H_1M^2)$
$MA_2^2 + MB_2^2 = 2(R^2 - H_2O^2 + H_2M^2)$
$MA_3^2 + MB_3^2 = 2(R^2 - H_3O^2 + H_3M^2)$

$\Rightarrow MA_1^2 + MB_1^2 + MA_2^2 + MB_2^2 + MA_3^2 + MB_3^2 = 6R^2 - (H_1O^2 + H_2O^2 + H_3O^2) + (H_1M^2 + H_2M^2 + H_3M^2)$ (2)

Từ (1), (2) suy ra :

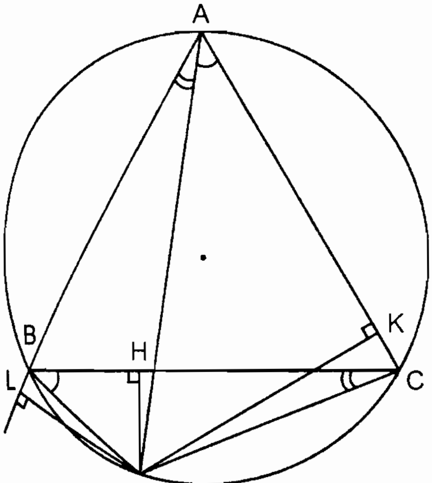
$MA_1^2 + MB_1^2 + MA_2^2 + MB_2^2 + MA_3^2 + MB_3^2 = 6R^2$.

Chưa dừng lại ở đây, mối quan hệ đẹp

giữa các số $\frac{1}{MH}, \frac{1}{MK}, \frac{1}{ML}$, trong đó H, K, L là hình chiếu của M trên BC, CA, AB, cũng sinh ra từ BT1.

**Bài toán 5 :** Cho tam giác ABC đều và điểm M thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ (không chứa A) của đường tròn ngoại tiếp tam giác. H, K, L theo thứ tự là hình chiếu của M trên BC, CA, AB.

Chứng minh rằng : $\frac{1}{MH} = \frac{1}{MK} + \frac{1}{ML}$.



*Hình 6*

**Lời giải :** Theo giả thiết, tứ giác ABMC nội tiếp. Suy ra : $\widehat{ABM} + \widehat{ACM} = 180^o$.

Không mất tính tổng quát, giả sử : $\widehat{ACM} \le 90^o \le \widehat{ABM}$.

Khi đó, K thuộc đoạn CA ; L thuộc tia đối của tia BA *(hình 6)*.

Dễ thấy : $\begin{cases} \Delta BHM \backsim \Delta AKM \\ \Delta CHM \backsim \Delta ALM \end{cases}$

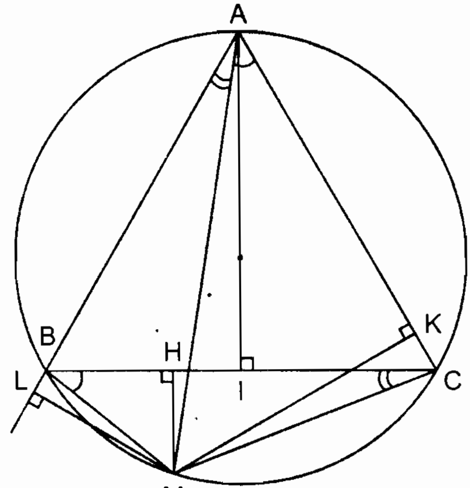
$\Rightarrow \begin{cases} \frac{MH}{MK} = \frac{MB}{MA} \\ \frac{MH}{ML} = \frac{MC}{MA} \end{cases} \Rightarrow \frac{MH}{MK} + \frac{MH}{ML} = \frac{MB+MC}{MA}$

Theo BT1, $\frac{MB+MC}{MA} = 1$.

Vậy $\frac{MH}{MK} + \frac{MH}{ML} = 1 \Rightarrow \frac{1}{MH} = \frac{1}{MK} + \frac{1}{ML}$.

BT5 giúp ta đi đến kết quả đẹp sau đây.

**Bài toán 6 :** Cho tam giác ABC đều và điểm M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác. H, K, L lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng : $MH^2 + MK^2 + ML^2 = h^2$. (h là độ dài các đường cao của tam giác ABC)



*Hình 7*

**Lời giải :** Không mất tính tổng quát, giả sử M thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ (không chứa A) của đường tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi I là hình chiếu của A trên BC.

Ta thấy :

S(ABC) = S(MAB) + S(MCA) - S(MBC)

$\Rightarrow \frac{1}{2}BC.AI = \frac{1}{2}AB.ML + \frac{1}{2}CA.MK - \frac{1}{2}BC.MH$

$\Rightarrow$ AI = ML + MK - MH (vì BC = CA = AB)

$\Rightarrow MH^2 + MK^2 + ML^2 + 2(MK.ML - MH.MK - MH.ML) = h^2$ (AI = h) (1)

Theo BT5 ta có : $\frac{1}{MH} = \frac{1}{MK} + \frac{1}{ML}$

$\Rightarrow$ MK.ML = MH.ML + MH.MK

$\Rightarrow$ MK.ML - MH.ML - MH.MK = 0 (2)

Từ (1), (2) suy ra : $MH^2 + MK^2 + ML^2 = h^2$.

***(Kì sau đăng tiếp)***

# CHỨNG MINH MỘT SỐ LÀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG
*(GV THCS Đa Tốn, Gia Lâm, Hà Nội)*

Các bạn đã được giới thiệu các phương pháp chứng minh một số không phải là số chính phương trong TTT2 số 9. Bài viết này, tôi muốn giới thiệu với các bạn bài toán chứng minh một số là số chính phương.

**Phương pháp 1 : Dựa vào định nghĩa.**

Ta biết rằng, số chính phương là bình phương của một số tự nhiên. Dựa vào định nghĩa này, ta có thể định hướng giải quyết các bài toán.

**Bài toán 1 :** Chứng minh : Với mọi số tự nhiên n thì $a_n = n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$ là số chính phương.

**Lời giải :** Ta có :

$$a_n = n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1$$
$$= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1$$
$$= (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1$$
$$= (n^2 + 3n + 1)^2$$

Với n là số tự nhiên thì $n^2 + 3n + 1$ cũng là số tự nhiên, theo định nghĩa, $a_n$ là số chính phương.

**Bài toán 2 :** Chứng minh số

$$\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ chữ số }1}\underbrace{55\ldots5}_{n-1\text{ chữ số }5}6$$ là số chính phương.

**Lời giải :**

Ta có $A = \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ chữ số }1}\underbrace{55\ldots5}_{n-1\text{ chữ số }5}6$

$$= \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ chữ số }1}\underbrace{55\ldots5}_{n\text{ chữ số }5} + 1$$

$$= \underbrace{11\ldots1}_{2n\text{ chữ số }1} + 4 \times \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ chữ số }1} + 1$$

$$= \frac{10^{2n} - 1}{9} + 4 \times \frac{10^n - 1}{9} + 1$$

$$= \frac{10^{2n} + 4 \times 10^n + 4}{9} = \frac{(10^n + 2)^2}{9}$$

$$= \left(\frac{1\overbrace{0\ldots0}^{n-1\text{ chữ số }0}2}{3}\right)^2 = \underbrace{3\ldots3}_{n-1\text{ chữ số }3}4^2.$$

Vậy :

$\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ chữ số }1}\underbrace{55\ldots5}_{n-1\text{ chữ số }5}6$ là số chính phương.

**Phương pháp 2 : Dựa vào tính chất đặc biệt.**

Ta có thể chứng minh một tính chất rất đặc biệt : "Nếu a, b là hai số tự nhiên nguyên tố cùng nhau và a.b là một số chính phương thì a và b đều là các số chính phương".

**Bài toán 3 :** Chứng minh rằng : Nếu m, n là các số tự nhiên thỏa mãn $3m^2 + m = 4n^2 + n$ thì m - n và 4m + 4n + 1 đều là số chính phương.

**Lời giải :**

Ta có : $3m^2 + m = 4n^2 + n$

$\Leftrightarrow 4(m^2 - n^2) + (m - n) = m^2$

$\Leftrightarrow (m - n)(4m + 4n + 1) = m^2$ (*)

Gọi d là ước chung lớn nhất của m - n và

$4m + 4n + 1$ thì $(4m + 4n + 1) + 4(m - n) \vdots d$
$\Rightarrow 8m + 1 \vdots d$.

Mặt khác, từ (*) ta có : $m^2 \vdots d^2 \Rightarrow m \vdots d$.

Từ $8m + 1 \vdots d$ và $m \vdots d$ ta có $1 \vdots d \Rightarrow d = 1$.

Vậy $m - n$ và $4m + 4n + 1$ là các số tự nhiên nguyên tố cùng nhau, thỏa mãn (*) nên chúng đều là các số chính phương.

Cuối cùng xin gửi tới các bạn một số bài toán thú vị về số chính phương :

① Chứng minh các số sau đây là số chính phương :

a) $224\underbrace{99\ldots9}_{n-2 \text{ chữ số } 9}1\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ chữ số } 0}9$

b) $\underbrace{44\ldots4}_{n \text{ chữ số } 4}\underbrace{88\ldots8}_{n-1 \text{ chữ số } 8}9$

② Cho các số nguyên dương a, b, c đôi một nguyên tố cùng nhau, thỏa mãn :
$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Hãy cho biết $a + b$ có là số chính phương hay không ?

③ Chứng minh rằng, với mọi số tự nhiên n thì $3^n + 4$ không là số chính phương.

④ Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 2n + 2004$ là số chính phương.

⑤ Chứng minh : Nếu $a = 2 + 2\sqrt{12n^2 + 1}$
n là hai số tự nhiên thì a là số chính ương.

# PHẦN THUẬN ...

*(tiếp theo trang 21)*

**Bài 1 :** Cho đoạn thẳng AB. Một điểm C chuyển động trên AB. Lấy AC và BC làm cạnh dựng hai hình vuông về cùng một phía của AB. Tìm quỹ tích trung điểm M của đoạn thẳng nối tâm hai hình vuông (quỹ tích M là một đoạn thẳng // AB và cách AB một khoảng $\frac{AB}{4}$).

**Bài 2 :** Cho đoạn thẳng AB. Một điểm C chuyển động trên AB. Lấy AC và BC làm cạnh dựng hai tam giác đều về cùng một phía của AB. Tìm quỹ tích trung điểm M của đoạn thẳng nối tâm hai tam giác đều (Quỹ tích là một đoạn thẳng // AB, cách AB một khoảng $\frac{AB\sqrt{3}}{4}$).

**Bài 3 :** Cho đường tròn (O ; R) và một đường thẳng d cắt (O) ở A và B. Một điểm M chuyển động trên d. Từ M kẻ 2 tiếp tuyến MP và MQ với đường tròn. Tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP. (Quỹ tích là 2 tia // d và cách d một đoạn bằng $\frac{OK}{2}$ với $OK \perp d$).

**Bài 4 :** Cho nửa đường tròn đường kính AOB. Một điểm M chuyển động trên nửa đường tròn. Dựng tam giác đều BMC về nửa mặt phẳng bờ BM không chứa O.

a) Tìm quỹ tích đỉnh C (Cung chứa góc $60^o$).

b) Tìm quỹ tích trung điểm H của MC (cung chứa góc $90^o$).

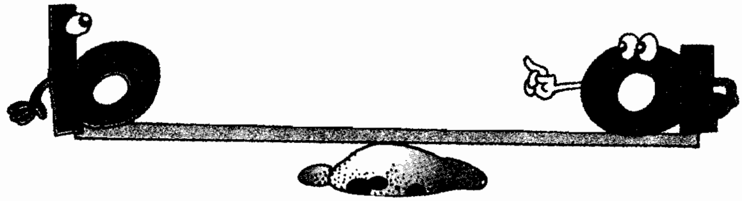
c) Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác đều BMC (một nửa đường tròn).

**Bài 5 :** Cho góc $\widehat{xOy}$. Tìm quỹ tích các điểm M ở miền trong của góc $\widehat{xOy}$ sao cho tổng các khoảng cách từ M tới Ox, Oy là một hằng số h đã cho. (Đoạn AB với $A \in Ox$, $B \in Oy$ sao cho A cách Oy một đoạn là h ; B cách Oy một đoạn là h)

# TỪ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC ĐƠN GIẢN

LINH NGUYÊN

*(Lớp 8/10, THCS Nguyễn Du, quận I, TP. Hồ Chí Minh)*



Tôi xin trao đổi cùng các bạn một bất đẳng thức đơn giản nhưng có thể sử dụng để đề xuất và chứng minh nhiều bài toán thú vị.

**Bài toán 1 :** Với a, b dương, ta có :

$$\mathbf{a^3 + b^3 \geq ab(a + b)} \qquad (*)$$

**Lời giải :** Thật vậy, (*) tương đương với :

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a + b) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a + b)(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a + b)(a - b)^2 \geq 0$, đúng với mọi a, b dương. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

● Ta có :

$$(*) \Leftrightarrow \frac{a^3}{b} + b^2 \geq a(a+b) \ \ (\text{do } b > 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{b} + b^2 \geq a^2 + ab.$$

Tương tự, với a, b, c dương thì

$$\frac{b^3}{c} + c^2 \geq b^2 + bc \ ; \ \frac{c^3}{a} + a^2 \geq c^2 + ca.$$

Từ đó, ta chứng minh được bài toán :

**Bài toán 2 :** Với ba số a, b,c dương, chứng minh rằng :

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca.$$

● Từ (*), tiếp tục suy ra : $\dfrac{a^3 + b^3}{ab} \geq a + b$ ; $\dfrac{b^3 + c^3}{bc} \geq b + c$ ; $\dfrac{c^3 + a^3}{ca} \geq c + a$ với a, b, c là ba số dương. Sử dụng kết quả này, ta chứng minh được bài toán trong *đề thi vào 10 chuyên Lê Hồng Phong 2000-2001* :

**Bài toán 3 :** Với a, b,c dương, chứng minh rằng :

$$\frac{a^3 + b^3}{2ab} + \frac{b^3 + c^3}{2bc} + \frac{c^3 + a^3}{2ca} \geq a + b + c.$$

● Lại có :

$$(*) \Leftrightarrow 4(a^3 + b^3) \geq a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$\Leftrightarrow 4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3.$$

Ta đề xuất được bài toán :

**Bài toán 4 :**

Với a, b, c dương, chứng minh rằng :

$$8(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b)^3 + (b + c)^3 + (c + a)^3$$

● Nhận xét : Nếu bổ sung giả thiết abc = 1,

$$(*) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + abc \geq ab(a + b) + abc$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + 1 \geq ab(a + b + c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^3 + b^3 + 1} \leq \frac{1}{ab(a + b + c)}.$$

Tương tự, ta có :

$$\frac{1}{b^3 + c^3 + 1} \leq \frac{1}{bc(a + b + c)} \ ;$$

$$\frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq \frac{1}{ca(a + b + c)}.$$

Suy ra :

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq$$

$$\frac{1}{ab(a + b + c)} + \frac{1}{bc(a + b + c)} + \frac{1}{ca(a + b + c)}$$

$$= \frac{1}{a + b + c} \cdot \frac{a + b + c}{abc} = 1.$$

Ta đề xuất được bài toán :

**Bài toán 5 :** Cho a, b, c dương, abc = 1.
Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1}\le 1.$$

● Áp dụng bài toán 5, ta sẽ chứng minh :

**Bài toán 6 :** (*Đề dự tuyển kì thi toán quốc tế lần thứ 37, năm 1996*).

Cho a, b, c dương, abc = 1. Chứng minh :

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\le 1.$$

**Lời giải :** Ta sẽ chứng minh

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}$$

$$\le\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1}$$

bằng cách chứng minh :

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}\le\frac{1}{a^3+b^3+1}\quad (1);$$

$$\frac{bc}{b^5+c^5+bc}\le\frac{1}{b^3+c^3+1}\quad (2);$$

$$\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\le\frac{1}{c^3+a^3+1}\quad (3).$$

Thật vậy :

(1) $\Leftrightarrow a^5+b^5+ab\ge ab(a^3+b^3+1)$

$\Leftrightarrow a^5+b^5\ge ab(a^3+b^3)$

$\Leftrightarrow a^5+b^5\ge a^4b+ab^4$

$\Leftrightarrow (a^5-a^4b)+(b^5-ab^4)\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)(a^4-b^4)\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)(a^2+b^2)\ge 0$, đúng.

Tương tự, (2) và (3) cũng đúng, bài toán được chứng minh.

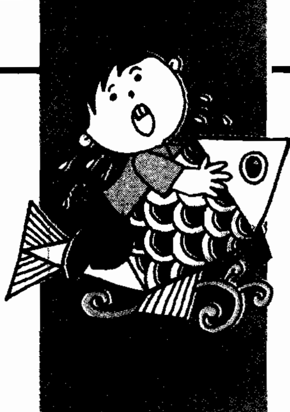
● Đề nghị các bạn áp dụng bất đẳng thức (*) để tiếp tục chứng minh các bài toán :

**1.** Cho a, b, c không âm, chứng minh :

$$a^3+b^3+c^3\ge a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}.$$

**2.** Cho a, b, c dương, chứng minh :

$$\frac{5a^3-c^3}{ac+3a^2}+\frac{5c^3-b^3}{cb+3c^2}+\frac{5b^3-a^3}{ba+3b^2}\le a+b+c.$$



# PHẦN THUẬN CỦA BÀI TOÁN QUỸ TÍCH

VŨ QUỐC LƯƠNG

*(THCS Chu Văn An, Hà Nội)*

Toán quỹ tích là một dạng toán khó trong hình học, các em thường bị lúng túng khi gặp loại toán này trong các kì thi tốt nghiệp và thi học sinh giỏi ở bậc THCS. Bài viết này nhằm giúp các em một số kinh nghiệm giải quyết phần thuận của bài toán quỹ tích.

Đối với bài toán tìm quỹ tích của điểm M thì phần thuận phải dựa vào tính chất $\alpha$ của M để suy ra M thuộc một hình F xác định.

Sau bước "đoán nhận" quỹ tích bằng phương pháp vẽ 3 trường hợp hoặc bằng cách dựa vào sự chuyển động của điểm M (nếu M có thể chạy ra xa vô tận thì quỹ tích M phải là đường thẳng hoặc dựa vào tính đối xứng của quỹ tích ...) ta thường tiến hành chứng minh phần thuận như thế nào ? Ta gặp hai tình huống sau đây :

**1. Dự đoán quỹ tích M là có dạng thẳng** (đoạn thẳng, tia, đường thẳng) ta có thể chọn lựa các cách chứng minh sau :

- Sử dụng quỹ tích đường trung trực.
- Sử dụng quỹ tích đường phân giác.
- Sử dụng quỹ tích đường thẳng song song cách đều.
- Nối điểm chuyển động M với một điểm O cố định rồi chứng minh : OM song song với một đường thẳng cố định, hoặc vuông góc với một đường thẳng cố định hoặc OM tạo với đường thẳng cố định một góc $\alpha$ không đổi.

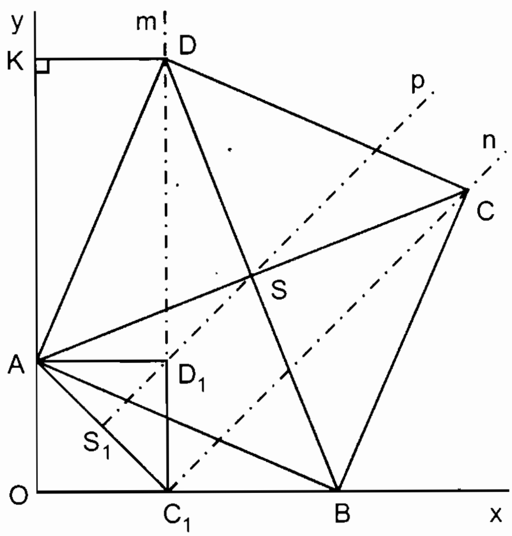
**Ví dụ 1 :** Cho góc vuông $\widehat{yOx}$ và điểm A cố định thuộc Oy. Một điểm B chuyển động trên Ox. Dựng hình vuông ABCD ở miền trong của góc $\widehat{yOx}$.

a) Tìm quỹ tích điểm D.

b) Tìm quỹ tích điểm C.

c) Tìm quỹ tích tâm S của hình vuông.

**Hướng giải :**




a) Hạ $DK \perp Oy$.

Chứng minh : $\triangle AKD = \triangle AOB$
$\Rightarrow DK = OA = const \Rightarrow D \in$ đường thẳng // Oy và cách Oy một đoạn OA. Giới hạn lại $D \in$ tia $D_1m$ và {D} là tia $D_1m$.

b) Dựng đường tròn tâm S ngoại tiếp hình vuông ABCD. $(S) \cap Ox = C_1$. Ta có tứ giác $ACBC_1$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AC_1O} = \widehat{ACB} = 45^o$
$\Rightarrow C_1$ là điểm cố định mà $C_1C \perp AC_1$
$\Rightarrow C \in$ tia $C_1n \perp AC_1$.

***Chú ý :*** Nếu chứng minh $C \in$ tia phân giác góc $\widehat{mC_1x}$ cũng được nhưng sẽ dài và khó hơn.

c) Để tìm quỹ tích S có rất nhiều cách.

Tốt nhất ta nên lí luận như sau : Do (S) luôn luôn đi qua 2 điểm cố định A và $C_1 \Rightarrow SA = SC_1 \Rightarrow S \in$ trung trực $AC_1$.

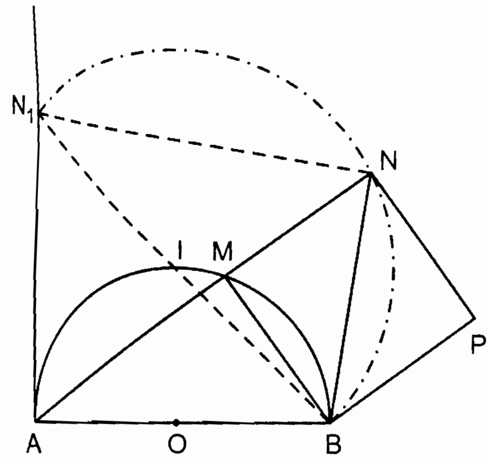
Giới hạn lại ta có {S} là tia $S_1p$.

**2. Dự đoán được quỹ tích điểm M có dạng tròn** (đường tròn cung tròn) ta có chọn lựa các cách chứng minh sau :

- Chứng minh điểm M luôn luôn cách một điểm cố định O cố định một khoảng không đổi.
- Dựa vào quỹ tích cung chứa góc.
- Chọn 3 điểm A, B, C cố định. Chứng minh tứ giác ABCM nội tiếp ⇒ M thuộc đường tròn đi qua A, B, C.

**Ví dụ 2 :** Cho nửa đường tròn đường kính AOB. Một điểm M chuyển động trên nửa đường tròn. Dựng hình vuông BMNP ở nửa mặt phẳng bờ BM không chứa O. Tìm {N}.

**Hướng giải** : Ta có thể chứng minh phần thuận theo các cách sau :




*Cách 1 :* Chứng minh A, M, N thẳng hàng ⇒ $\widehat{ANB} = 45^o$ ⇒ N cung chứa góc $45^o$ vẽ trên AB.

*Cách 2 :* Trên tiếp tuyến Ax lấy $AN_1 = AB$. Nối $N_1B \Rightarrow \widehat{AN_1B} = 45^o$ mà $\widehat{ANB} = 45^o$ ⇒ tứ giác $AN_1NB$ nội tiếp mà A, $N_1$, B cố định, vậy N thuộc đường tròn đi qua A, $N_1$, B.

*Cách 3 :* Chứng minh $\widehat{BNN_1} = 45^o$ ⇒ N thuộc đường tròn đường kính $BN_1$.

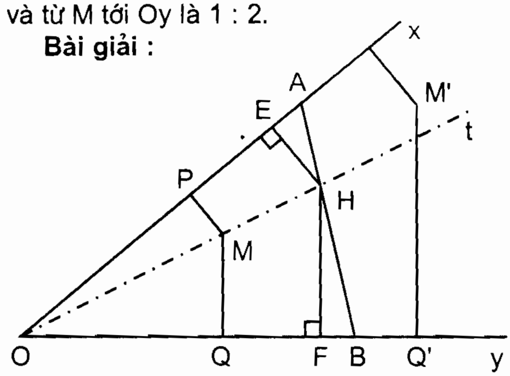
Giới hạn lại ta đều có quỹ tích N là nửa đường tròn đường kính $BN_1$.

*Cách 4 :* Kéo dài PM cắt đường tròn tại I. Dễ chứng minh I là trung điểm ⇒ I cố định. Mà IN = IB ⇒ N thuộc đường tròn tâm I, bán kính IB.

***Chú ý :*** Do mệnh đề thuận và mệnh đề phản đảo là tương đương nên có những khi người ta đã thay phần thuận bởi mệnh đề phản đảo, cụ thể là : Chứng minh M không thuộc F thì M không có tính chất α.

**Ví dụ 3 :** Cho góc nhọn $\widehat{yOx}$. Tìm quỹ những điểm M nằm ở miền trong của góc sao cho tỉ số các khoảng cách từ M tới Ox và từ M tới Oy là 1 : 2.

**Bài giải :**




*1. Đảo :* Lấy A ∈ Ox ; B ∈ Oy sao cho OA = OB. Lấy H cố định thuộc AB sao cho HA : HB = 1 : 2.

Hạ HE ⊥ Ox, HF ⊥ Oy.

Rõ ràng ◺HEA ∽ ◺HFB (g.g) nên $\frac{HE}{HF} = \frac{HA}{HB} = \frac{1}{2}$.

Lấy M bất kì thuộc tia OH. Hạ MP ⊥ Ox, MQ ⊥ Oy.

Ta có : $\frac{MP}{HE} = \frac{MQ}{HF} \Rightarrow \frac{MP}{MQ} = \frac{HE}{HF} = \frac{1}{2}$.

*2. Thuận :*

Lấy M' không thuộc tia OH ta chứng minh $\frac{M'P'}{M'Q'} \neq \frac{1}{2}$. (dễ dàng)

Vậy quỹ tích điểm M là tia OH.

Dưới đây xin nêu một số bài tập quỹ tích để các bạn tham khảo.

***(xem tiếp trang 7)***


# TÍNH SỐ CÁC CHỮ SỐ CỦA MỘT SỐ TỰ NHIÊN

VÕ HOÀI THÀNH

*(GV THCS Trần Phú, Tam Đàn, Phú Ninh, Quảng Nam)*

**Bài toán tổng quát**

Cho số tự nhiên $n > 1$ có k chữ số. Hỏi dãy số tự nhiên liên tiếp 1, 2, ... , n có bao nhiêu chữ số ?

(Chẳng hạn với $n = 9$ thì dãy có 9 chữ số ; với $n = 10$ thì dãy có 11 chữ số)

**Lời giải.**

● Với $k = 1$.

Dãy có n số 1, 2, ... , n. Số các chữ số của dãy là $N = n$.

● Với $k > 1$.

Giả sử $n = \overline{a_1a_2 \ldots a_k}$.

Ta quy ước mỗi số tự nhiên từ 1 đến n được viết đủ k chữ số bằng cách viết thêm số 0 ở phía trước các số có ít hơn k chữ số và đặt n số đã cho theo cột ở dạng sau :

00... 01

00... 02

.............

$\overline{a_1a_2 \ldots a_k}$.

Số các chữ số đã dùng theo quy ước là nk, trong đó số chữ số 0 được thêm vào là :

$10 - 1$ số ở hàng chục ;

$10^2 - 1$ số ở hàng trăm ;

.......................................

$10^{k-1} - 1$ số ở hàng $10k - 1$.

Vậy số chữ số 0 được thêm vào là

$$N_0 = (10 + 10^2 + \ldots + 10^{k-1}) - (k - 1) = \underbrace{11\ldots1}_{k \text{ chữ số } 1} - k = \frac{10^k - 1}{9} - k = \frac{10^k - 9k - 1}{9}.$$

Do đó số chữ số của dãy là

$$N = nk - N_0 = nk - \frac{10^k - 9k - 1}{9}.$$

Vậy $$N = \frac{9k(n+1) - 10^k + 1}{9}. \qquad (1)$$

Sau đây ta nêu những áp dụng cụ thể của bài toán trên.

**Áp dụng 1.** Tìm số chữ số của dãy được tạo thành khi viết liên tiếp các số tự nhiên 1, 2, ... , $\underbrace{999\ldots9}_{k \text{ chữ số } 9}$ (với $k \le 9$).

*Cách 1.* Áp dụng kết quả (1) trong trường hợp $n = \underbrace{999\ldots9}_{k \text{ chữ số } 9} = 10^k - 1$ ta được

$$N = \frac{9k \cdot 10^k - 10^k + 1}{9} = \frac{(9k-1)10^k + 1}{9}. \qquad (2)$$

*Cách 2.* Tính trực tiếp.

Dãy được tạo thành khi viết liên tiếp các số tự nhiên 1, 2, ... , $\underbrace{999\ldots9}_{k \text{ chữ số } 9}$ (với $k \le 9$) có :

$9 \cdot 10^0$ số có 1 chữ số

$9 \cdot 10^1$ số có 2 chữ số

..................................

$9 \cdot 10^{k-1}$ số có k chữ số.

Vậy số chữ số của dãy là

$$N = 9 \cdot (1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^0 + \ldots + k \cdot 10^{k-1})$$

$$N = 9 \cdot \overline{k(k-1)(k-2)\ldots 321}. \qquad (3)$$

Nhận xét. Từ (2) và (3) suy ra

$$\frac{(9k-1)\cdot 10^k+1}{81}=\overline{k(k-1)(k-2)\ldots 321}. \quad (4)$$

**Áp dụng 2.** Dãy số được tạo thành khi viết các số tự nhiên liên tiếp 1, 2, ... , 1231 có bao nhiêu chữ số ?

**Lời giải.**

*Cách 1.* Dùng công thức (1) với n = 1231 và k = 4, ta có

$$N=\frac{9\cdot 4\cdot 1232-10^4+1}{9}=3817 \text{ (chữ số)}.$$

*Cách 2.* Dãy số được tạo thành khi viết các số tự nhiên liên tiếp 1, 2, ... , 999 có số chữ số theo (2) là

$$9\cdot 321 = 2889 \text{ (chữ số)}.$$

Dãy số được tạo thành khi viết các số tự nhiên liên tiếp 1000, 1001, ... , 1231 có số chữ số là

$$4(1231 - 1000 + 1) = 928 \text{ (chữ số)}.$$

Số chữ số của dãy là

$$N = 2889 + 928 = 3817 \text{ (chữ số)}.$$

**Áp dụng 3.** Ta viết các số tự nhiên liên tiếp 1, 2, 3, ... để được số tự nhiên A có nhiều hơn 2008 chữ số. Hỏi chữ số thứ 2008 của số A bằng bao nhiêu ?

**Lời giải.** Giả sử chữ số thứ 2008 của số A thuộc số tự nhiên n và n có k chữ số.

*Cách 1.* Dãy số được tạo thành khi viết các số tự nhiên liên tiếp 1, 2, ... , 99 có số chữ số theo (2) là

$$9\cdot 21 = 189 \text{ (chữ số)}.$$

Dãy số được tạo thành khi viết các số tự nhiên liên tiếp 1, 2, ... , 999 có số chữ số theo (2) là

$$9\cdot 321 = 2889 \text{ (chữ số)}.$$

Vì $189 < 2008 < 2889$ nên k = 3.

Từ chữ số thứ 190 đến chữ số thứ 2008 của số A có số chữ số là

$$2008 - 190 + 1 = 1819 \text{ (chữ số)}.$$

Vì $1819 = 3\cdot 606 + 1$ nên chữ số thứ 2008 của số A là chữ số hàng trăm của số thứ 607 trong dãy các số tự nhiên có 3 chữ số, tức là chữ số hàng trăm của số

$$99 + 607 = 706.$$

Vậy chữ số thứ 2008 của số A là số 7.

*Cách 2.* Gọi B là số được tạo thành khi viết các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến n và gọi N là số chữ số của B.

Vì chữ số thứ 2008 của số B là một chữ số thuộc số n nên $N \geq 2008$. Suy ra

$$\frac{9k(n+1)-10^k+1}{9}\geq 2008.$$

Với k = 2 thì $n \geq 1009$ : loại.

Với k = 3 thì $n \geq 706$.

Do đó n = 706 và N = 2010 nên chữ số thứ 2008 của số A là số 7.

Để giúp các bạn rèn luyện thêm về dạng toán này, tôi xin đưa thêm hai bài toán sau.

**Bài toán 1.** Dãy gồm 2010 số tự nhiên từ 1 đến 2010 có bao nhiêu chữ số ?

**Bài toán 2.** Ta viết các số tự nhiên liên tiếp 1, 2, 3, ... để được số tự nhiên A có nhiều hơn 3000 chữ số. Hỏi chữ số thứ 3000 của số A bằng bao nhiêu ?


# CHỨNG MINH CÓ SỐ BẰNG MỘT SỐ CHO TRƯỚC

NGƯT. MINH TRÂN
*(Phòng GD Hương Thủy, Thừa Thiên - Huế)*

**Bài toán.** "Cho các số a, b, c, ... và m thỏa mãn một hệ thức đã cho. Chứng minh rằng trong các số a, b, c, ... có ít nhất một số bằng số m".

Để giải bài toán trên, ta cần chứng minh được $(a-m)(b-m)(c-m)\ldots=0.$ (*)

Nhiều bạn khi giải loại toán này còn lúng túng, mất khá nhiều thời gian. Xin mách với các bạn một cách làm nhanh như sau.

*Bước 1 : Khai triển biểu thức (*).*

*Bước 2 : Biến đổi giả thiết của bài toán, đối chiếu với biểu thức đã khai triển của (*) để thấy rằng từ giả thiết suy ra kết luận.*

Sau đây là một số bài toán minh họa.

**Bài toán 1.** Cho ba số a, b, c khác 0 thỏa mãn $a+b+c=2008$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2008}$.

Chứng minh rằng trong các số a, b, c có ít nhất một số bằng 2008.

*Phân tích.* Trước hết ta triển khai biểu thức

$(a-2008)(b-2008)(c-2008)=0$

$\Leftrightarrow (ab-2008a-2008b+2008^2)(c-2008)=0$

$\Leftrightarrow abc-2008(ab+bc+ca)+$
$+2008^2(a+b+c)-2008^3=0.$ (1)

Biến đổi biểu thức của giả thiết

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2008}$

$\Leftrightarrow abc-2008(ab+bc+ca)=0.$ (2)

Trừ theo vế của (1) và (2), suy ra

$2008^2(a+b+c)-2008^3=0$ (3)

$\Leftrightarrow a+b+c-2008=0.$

**Lời giải.** Từ giả thiết $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2008}$, suy ra $abc-2008(ab+bc+ca)=0.$ (2)

Từ giả thiết $a+b+c=2008$, suy ra

$2008^2(a+b+c)-2008^3=0.$ (3)

Cộng theo vế của (2) và (3), suy ra

$abc-2008(ab+bc+ca)+$
$+2008^2(a+b+c)-2008^3=0.$ (1)

$\Leftrightarrow (a-2008)(b-2008)(c-2008)=0$

$\Leftrightarrow a=2008$ hoặc $b=2008$ hoặc $c=2008$.

Ta có đpcm.

**Bài toán 2.** Cho ba số a, b, c khác 0 thỏa mãn $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ và $abc=1$.

Chứng minh rằng trong các số a, b, c có ít nhất một số bằng 1.

*Phân tích.* Khai triển biểu thức

$(a-1)(b-1)(c-1)=0$

$\Leftrightarrow (ab-a-b+1)(c-1)=0$

$\Leftrightarrow abc-(ab+bc+ca)+$
$+(a+b+c)-1=0.$ (4)

Biến đổi giả thiết với $abc=1$, ta có

$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

$\Leftrightarrow a+b+c=ab+bc+ca$

$\Leftrightarrow a+b+c-(ab+bc+ca)=0.$ (5)

Trừ theo vế của (4) và (5), suy ra

$abc-1=0.$ (6)

**Lời giải.** Từ giả thiết $abc=1$, suy ra

$abc-1=0.$ (6)

Từ giả thiết $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ và $abc=1$, suy ra

$$a+b+c=ab+bc+ca$$

$$\Leftrightarrow a+b+c-(ab+bc+ca)=0. \qquad (5)$$

Cộng theo vế của (5) và (6) suy ra

$$\Leftrightarrow abc-(ab+bc+ca)+$$
$$+(a+b+c)-1=0. \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(b-1)(c-1)=0$$

$$\Leftrightarrow a=1 \text{ hoặc } b=1 \text{ hoặc } c=1.$$

Ta có đpcm.

**Bài toán 3.** Cho ba số a, b, c khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c}}=\frac{1}{3}$ và $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=$

$$=\sqrt{6+2\sqrt{5}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}.$$

Chứng minh rằng trong các số a, b, c có ít nhất một số bằng 27.

**Lời giải.** Ta có

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c}}=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{abc}-3(\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca})=0. \qquad (7)$$

Rút gọn căn thức :

$$\sqrt{29-12\sqrt{5}}=\sqrt{(3-2\sqrt{5})^2}=\left|3-2\sqrt{5}\right|$$

$$\Rightarrow \sqrt{6+2\sqrt{5}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}=$$
$$=\sqrt{6+2\sqrt{5}-(2\sqrt{5}-3)}=\sqrt{9}=3.$$

Suy ra

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}-3=0$$

$$\Rightarrow 9(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})-27=0. \qquad (8)$$

Cộng theo vế của (7) và (8), ta được

$$\sqrt[3]{abc}-3(\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca})+$$
$$+9(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})-27=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{a}-3)(\sqrt[3]{b}-3)(\sqrt[3]{c}-3)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{a}=3 \text{ hoặc } \sqrt[3]{b}=3 \text{ hoặc } \sqrt[3]{c}=3$$

$$\Leftrightarrow a=27 \text{ hoặc } b=27 \text{ hoặc } c=27.$$

Ta có đpcm.

**Bài tập áp dụng.**

**Bài 1.** Cho ba số a, b, c khác 0 thỏa mãn

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=2 \text{ và } \frac{1}{\sqrt[3]{a}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c}}=\frac{1}{2}.$$

Chứng minh rằng có ít nhất một trong các số a, b, c bằng 8.

**Bài 2.** Cho $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=\frac{4}{\sqrt[3]{a}}+\frac{4}{\sqrt[3]{b}}+\frac{4}{\sqrt[3]{c}}$ và $abc=8$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các số a, b, c bằng 8.

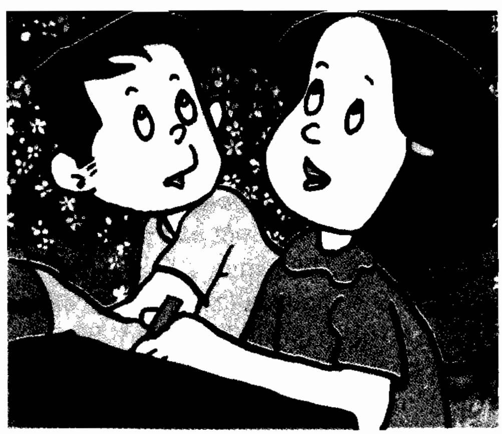
**Bài 3.** Cho các số a, b, c, n khác 0 thỏa mãn $a+b+c=n$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{n}$.

Chứng minh rằng trong các số a, b, c có ít nhất một số bằng n.

**Bài 4.** Cho các số a, b, c, n khác 0 thỏa mãn $a+b+c=\frac{n^2}{a}+\frac{n^2}{b}+\frac{n^2}{c}$ và $abc=n^3$.

Chứng minh rằng trong các số a, b, c có ít nhất một số bằng n.

**Chú ý.** Kết luận của bài 1, bài 3 có thể thay bởi "Chứng minh rằng trong các số a, b, c có ít nhất hai số đối nhau".



# GIẢI THƯỞNG FIELDS (The Fields medals)

*John Charles Fields*

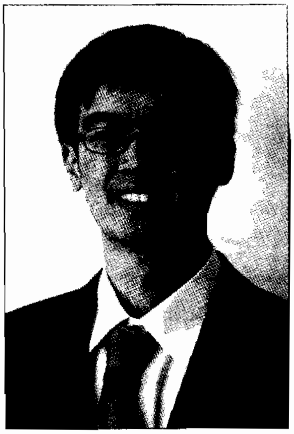
Fields là giải thưởng cao quý được trao cho các nhà toán học dưới 40 tuổi có các công trình nghiên cứu đóng góp quan trọng cho toán học. Giải được trao tại mỗi kì đại hội của Hội Toán học Quốc tế (ICM) và được trao lần đầu vào năm 1936.

Người vận động sáng lập và góp tiền thành lập giải Fields chính là GS. John Charles Fields (1863-1932), người Canada, nổi tiếng với *lí thuyết hàm đại số và lí thuyết tích phân Abel*, là Chủ tịch Hội Toán học Quốc tế (IMU) thời kì năm 1924-1932. Giải bị gián đoạn trong suốt thế chiến II và được trao đều đặn 4 năm một lần từ năm 1950 đến nay. Ban đầu, giải chỉ trao tối đa mỗi lần cho hai nhà toán học nhưng từ năm 1966 tăng lên tối đa là 4 người.

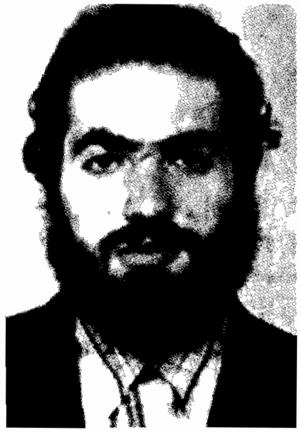
Giải Fields bao gồm tấm huy chương bằng vàng và tiền mặt. Mặt phải của tấm huy chương là hình cái đầu của nhà bác học Ác-si-mét (287-212 BC) với dòng chữ bao quanh là "Vượt lên khỏi chính mình và lĩnh hội thế giới". Nổi lên trước mặt trái của tấm huy chương là dòng chữ "Các nhà toán học từ khắp nơi trên thế giới tụ hội về đây để trân trọng những công trình xuất sắc".

*The Fields medals*

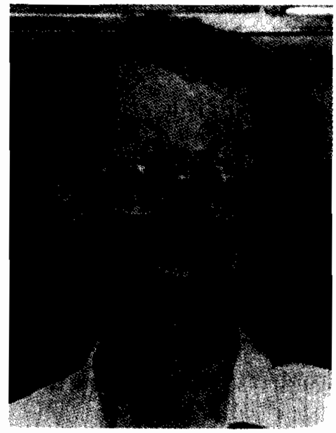
Có tất cả 48 nhà toán học đã được trao giải thưởng Fields. Người trẻ tuổi nhất là Terence Tao. Năm 2006, Tao được trao giải Fields khi mới 31 tuổi. Năm 1966, Grothendieck vì bất đồng quan điểm chính trị nên đã không đến lễ trao giải tại Matxcơva (nhưng vẫn nhận giải). Năm 1978, Margulis do bị hạn chế di chuyển nên đã không đến được Hensiki để nhận giải. Có 8 người được trao giải Fields từng dự thi Toán Quốc tế (IMO). Gây ngạc nhiên nhất là Grigori Perelman (sinh năm 1966), huy chương vàng IMO năm 1982, được



*Terence Tao*



*Grigori Perelman*



*Andrew Wiles*

trao giải thưởng Fields năm 2006) vì đã giải được một trong *bảy thách đố thiên niên kỉ* của toán học là giả thuyết Poincaré. Ông là người duy nhất từ chối nhận giải Fields (và cũng từ chối nhận giải thưởng của Viện toán học Clay trị giá 1 triệu đô la). Năm 1998, do quá tuổi quy định nên Andrew Wiles, người Mỹ, người đã chứng minh được bài toán Fermat nổi tiếng, là người đầu tiên được trao giải bạc của IMU.

Danh sách nhận giải thương Fields.

2006 : Terence Tao (Úc/Mỹ), Grigori Perelman (Nga), Andrei Okounkov (Nga/Mỹ), Wendelin Werner (Pháp)

2002 : Laurent Lafforgue (Pháp), Vladimir Voevodsky (Nga/Mỹ)

1998 : Richard Ewen Borcherds (Anh), William Timothy Gowers (Anh), Maxim Kontsevich (Nga), Curtis T. McMullen (Mỹ)

1994 : Efim Isakovich Zelmanov (Nga), Pierre-Louis Lions (Pháp), Jean Bourgain (Bỉ), Jean-Christophe Yoccoz (Pháp)

1990 : Vladimir Drinfeld (Liên Xô), Vaughan Frederick Randal Jones (New Zealand), Shigefumi Mori (Nhật Bản), Edward Witten (Mỹ)

1986 : Simon Donaldson (Anh), Gerd Faltings (Tây Đức), Michael Freedman (Mỹ)

1982 : Alain Connes (Pháp), William Thurston (Mỹ), Shing-Tung Yau (Trung Quốc/Mỹ)

1978 : Pierre Deligne (Bỉ), Charles Fefferman (Mỹ), Grigory Margulis (Liên Xô), Daniel Quillen (Mỹ)

1974 : Enrico Bombieri (Italia), David Mumford (Mỹ)

1970 : Alan Baker (Anh), Heisuke Hironaka (Nhật), Sergei Petrovich Novikov (Liên Xô), John Griggs Thompson (Anh)

1966 : Michael Atiyah (Anh), Paul Joseph Cohen (Mỹ), Alexander Grothendieck (Pháp), Stephen Smale (Mỹ)

1962 : Lars V. Hormander (Thụy Điển), John Milnor (Mỹ)

1958 : Klaus Roth (Anh), Rene Thom (Pháp)

1954 : Kunihiko Kodaira (Nhật Bản), Jean-Pierre Serre (Pháp)

1950 : Laurent Schwartz (Pháp), Atle Selberg (Na Uy)

1936 : Lars Ahlfors (Phần Lan), Jesse Douglas (Mỹ)

NGÔ QUANG HIỂN - HOÀNG TRỌNG HẢO *(st)*

*(Ngõ 105 Ninh Xá, TP. Bắc Ninh, Bắc Ninh)*


# LÃI ĐƠN

VŨ KIM THỦY

**LTS.** *Từ khi xuất hiện để làm vật ngang giá chung, tiền được luân chuyển không ngừng. Ngân hàng ra đời sau đó giúp cho các dòng luân chuyển đó thuận lợi và đảm bảo. Khi tiền được vay, đặc biệt với mục đích kinh doanh, thì người vay phải trả thêm một khoản tiền cho việc sử dụng số tiền ấy. Số tiền trả thêm đó gọi là tiền lãi.*

Số lượng tiền được vay gọi là phần chính, phần gốc *(principal)* ; số tiền phải trả thêm để được sử dụng số tiền ấy gọi là lãi, tiền lãi *(interest)*.

Nếu số tiền lãi được tính không thay đổi trong các năm thì được gọi là lãi đơn *(simple interest)*. Chúng ta sẽ biết khái niệm lãi kép ở bài viết khác.

**Ví dụ.** Khoản tiền \$2000 cho vay trong 5 năm với lãi suất 3% mỗi năm. Tìm số tiền lãi đơn và tổng số tiền thu về.

**Lời giải.** Tiền lãi trên \$2000 trong 1 năm với lãi suất 3% là

$$\frac{3}{100}\times \$2000 = \$60.$$

Tiền lãi trên \$2000 trong 5 năm với lãi suất 3% là

$$\frac{3}{100}\times \$2000 \times 5 = \$300.$$

Số lượng tiền thu về = Tiền gốc + Tiền lãi = \$2000 + \$300 = \$2300.

Vậy tiền lãi là \$300 và tổng số tiền thu về là \$2300.

**Ghi nhớ.** Lãi đơn bằng phần chính (phần gốc) nhân với tỉ suất lãi (theo phần trăm) và nhân với số năm. Vậy nếu phần chính là P, phần lãi là I, tỉ suất lãi là R phần trăm với khoảng thời gian vay là T năm thì $I = \frac{PRT}{100}$.

Các từ tiếng Anh thường gặp :

| | |
|---|---|
| *loan* | vay |
| *borrower* | người vay |
| *sum* | tổng |
| *per annum* | mỗi năm |
| *amount* | số lượng |
| *interest* | lãi, tiền lãi |
| *rate* | tỉ suất, suất |
| *principal* | phần chính, tiền gốc |
| *period* | khoảng thời gian |

**Bài tập.** Một người vay ngân hàng, lãi suất theo năm giảm từ $6\frac{1}{2}\%$ xuống 6% do đó mỗi năm phải trả lãi ít đi \$76. Tính :

i) Tổng số tiền người đó đã vay.

ii) Tiền lãi phải trả mỗi năm với tỉ suất $6\frac{1}{2}\%$.

Năm phần thưởng cho năm bạn có lời giải tốt nhất.


*Trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 304 (10/2002) và số 305 (11/2002) các tác giả Nguyễn Anh Thuấn và Nguyễn Phước đã phân tích cách giải một số dạng đặc biệt của phương trình bậc bốn. Trong quá trình tìm hiểu, tôi cũng phát hiện ra được một hướng giải các phương trình dạng này, đồng thời xây dựng hướng giải cho một số dạng mới của phương trình bậc bốn. Đó chính là nội dung của bài viết dưới đây.*

# Một hướng giải PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN DẠNG ĐẶC BIỆT

CAO NGỌC TOẢN
*(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên - Huế)*

**✪DẠNG 1. Phương trình bậc bốn dạng**

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0, (a \neq 0)$$

*Đây là phương trình bậc bốn có hệ số đối xứng và đối xứng lệch.*

***Hướng giải.*** Để giải PT dạng trên ta thực hiện như sau:

Đặt ẩn phụ $t = x^2 \pm 1$, suy ra $t^2 = x^4 \pm 2x^2 + 1$. Lúc đó

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x^4 \pm 2x^2 + 1) + bx(x^2 \pm 1) + (c \pm 2a)x^2 = 0.$$

Do đó $at^2 + bxt + (c \pm 2a)x^2 = 0$ (1)

PT(1) (ẩn $t$) có nghiệm khi $b^2 - 4ac \mp 8a^2 \geq 0$. Thay nghiệm $t$ (phụ thuộc $x$) vào biểu thức $x^2 - t \pm 1 = 0$ và giải PT này ta tìm được $x$.

**★Thí dụ 1.** *Giải các phương trình sau*

a) $x^4 - 10x^3 + 23x^2 - 10x + 1 = 0$ (1)

b) $3x^4 - 8x^3 - 34x^2 + 8x + 3 = 0$ (2)

***Lời giải.*** a) Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow t^2 = x^4 + 2x^2 + 1$.

Lúc đó, biến đổi PT (1) thành

$(x^4 + 2x^2 + 1) - 10x(x^2 + 1) + 21x^2 = 0$,

hay là $t^2 - 10xt + 21x^2 = 0$

$\Leftrightarrow (t - 7x)(t - 3x) = 0 \Leftrightarrow t = 7x$ hoặc $t = 3x$.

• Với $t = 7x$ ta có $x^2 - 7x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$.

• Với $t = 3x$ ta có $x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}; \quad x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

b) Đặt $t = x^2 - 1 \Rightarrow t^2 = x^4 - 2x^2 + 1$. Lúc đó biến đổi PT (2) thành

$3(x^4 - 2x^2 + 1) - 8x(x^2 - 1) - 28x^2 = 0$, hay là

$3t^2 - 8xt - 28x^2 = 0 \Leftrightarrow (t + 2x)\left(t - \dfrac{14}{3}x\right) = 0$

$\Leftrightarrow t = -2x$ hoặc $t = \dfrac{14}{3}x$.

• Với $t = -2x$ ta có $x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$.

• Với $t = \dfrac{14}{3}x$ ta có

$3x^2 - 14x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{7 \pm \sqrt{58}}{3}$.

Vậy PT đã cho có bốn nghiệm là

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}; \quad x_{3,4} = \frac{7 \pm \sqrt{58}}{3}. \square$$

**✪DẠNG 2. Phương trình bậc bốn dạng**

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+\frac{c^2}{a^2}=0, (a\neq 0)$$

***Hướng giải.*** Đặt ẩn phụ $t=x^2+\frac{c}{a}$, suy ra

$$t^2=x^4+\frac{2c}{a}x^2+\frac{c^2}{a^2}.$$

Lúc đó ta có $x^4+ax^3+bx^2+cx+\frac{c^2}{a^2}=0$.

$$\Leftrightarrow\left(x^4+\frac{2c}{a}x^2+\frac{c^2}{a^2}\right)+ax\left(x^2+\frac{c}{a}\right)+\left(b-\frac{2c}{a}\right)x^2=0,$$

tức là $t^2+axt+\left(b-\frac{2c}{a}\right)x^2=0$ (1)

PT (1) (ẩn $t$) có nghiệm khi $\frac{a^3-4ab+8c}{a}\geq 0$. Thay nghiệm $t$ (phụ thuộc $x$) tìm được vào biểu thức $x^2-t+\frac{c}{a}=0$ và giải PT này ta tìm được $x$.

**★Thí dụ 2.** *Giải phương trình*

$$x^4+2x^3-20x^2+4x+4=0$$

***Lời giải.*** Ta có $a=2$, $b=-20$, $c=4$, $\frac{c^2}{a^2}=4$ nên $\frac{a^3-4ab+8c}{a}=100>0$.

Đặt $t=x^2+2 \Rightarrow t^2=x^4+4x^2+4$. Biến đổi PT đã cho thành

$(x^4+4x^2+4)+2x(x^2+2)-24x^2=0$, hay là

$$t^2+2xt-24x^2=0\Leftrightarrow(t-4x)(t+6x)=0$$

$\Leftrightarrow t=4x$ hoặc $t=-6x$.

• Với $t=4x$ ta có $x^2-4x+2=0\Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{2}$.

• Với $t=-6x$ ta có $x^2+6x+2=0\Leftrightarrow x=-3\pm\sqrt{7}$.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là

$$x_{1,2}=2\pm\sqrt{2};\ \ x_{3,4}=-3\pm\sqrt{7}.\ \square$$

**✪DẠNG 3. Phương trình bậc bốn dạng**

$$a^2x^4+2abx^3+(\pm a+b^2)x^2\pm bx+c=0, (a\neq 0)$$

***Hướng giải.*** Đặt ẩn phụ $t=ax^2+bx$.

Lúc đó ta có

$$a^2x^4+2abx^3+(\pm a+b^2)x^2\pm bx+c=0$$

$\Leftrightarrow(ax^2+bx)^2\pm(ax^2+bx)+c=0$, tức là

$t^2\pm t+c=0$ (1)

Giải PT (1) để tìm $t$, sau đó thay vào biểu thức $ax^2+bx-t=0$ và giải PT này ta tìm được $x$.

**★Thí dụ 3.** *Giải phương trình*

$$4x^4+52x^3+171x^2+13x-30=0.$$

***Lời giải.*** Ta có $a^2=4$, $2ab=52$, $b=13$, $c=-30$, suy ra $a=2$.

Đặt $t=2x^2+13x$, biến đổi PT đã cho thành

$(2x^2+13x)^2+2(2x^2+13x)-30=0$, hay là

$t^2+t-30=0\Leftrightarrow t=5$ hoặc $t=-6$.

• Với $t=5$ ta có

$2x^2+13x-5=0\ \Leftrightarrow\ x=\frac{-13\pm\sqrt{209}}{4}$.

• Với $t=-6$ ta có

$2x^2+13x-5=0\Leftrightarrow x=-6$ hoặc $x=\frac{1}{2}$.

Vậy PT đã cho có bốn nghiệm là

$$x_{1,2}=\frac{-13\pm\sqrt{209}}{4};\ \ x_3=-\frac{1}{2};\ \ x_4=-6.\ \square$$

* * *

* *

Để kết thúc bài báo, mời các bạn hãy giải các bài tập tương tự, cùng loại sau:

**1.** Giải các phương trình

a) $x^4-x^3-10x^2-x+1=0$;

b) $x^4+2x^3-17x^2-2x+1=0$;

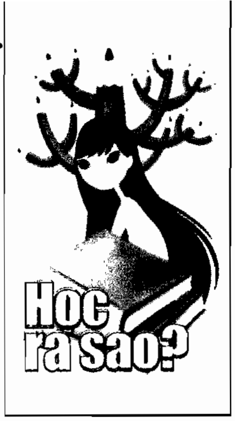
c) $x^4-9x^3+16x^2+18x+4=0$.

**2.** Xét phương trình

$$25x^4+206x^3+671x^2-26x+m=0.$$

a) Tìm $m$ để phương trình trên có nghiệm.

b) Giải phương trình khi $m=-42$.




# ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐỒNG BẬC VÀO GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

HOÀNG ĐỨC NGUYÊN
*(GV. Trường THPT chuyên, Đại học Sư phạm Hà Nội)*

*Phương pháp đồng bậc hay còn gọi là phương pháp đẳng cấp là một phương pháp hay được sử dụng trong việc giải hệ phương trình. Đối với phương pháp này, người ta sử dụng giả thiết của bài toán để tìm ra hệ thức liên hệ giữa các biến mà ở đó mỗi hạng tử có cùng bậc. Hệ thức này được sử dụng để tìm ra quan hệ giữa các ẩn bằng cách coi nó là phương trình một ẩn số và các tham số rồi giải phương trình này.*

Sau đây là một số ví dụ.

**Ví dụ 1.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3+2xy^2+12y=0 & (1) \\ x^2+8y^2=12. & (2) \end{cases}$$

*(Thi vào 10 THPT chuyên ĐH KHTN HN 1993)*

**Lời giải.** Thay (2) vào (1) suy ra

$x^3+2xy^2+y(x^2+8y^2)=0$

$\Leftrightarrow (x^3+8y^3)+(x^2y+2xy^2)=0$

$\Leftrightarrow (x+2y)(x^2-xy+4y^2)=0.$ (3)

+ TH1. Nếu $x=-2y$ thì từ (2) suy ra

$$12y^2=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \Rightarrow x=-2 \\ y=-1 \Rightarrow x=2. \end{array}\right.$$

Thử lại thỏa mãn (1).

+ TH2. Nếu $x^2-xy+4y^2=0$ thì

$$(x-\frac{y}{2})^2+\frac{15y^2}{4}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-\dfrac{y}{2}=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0$$

Thay vào (2) không thỏa mãn.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là:

$(x\,;\,y)=(2\,;\,-1),(-2\,;\,1).$

**Ví dụ 2.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3-y^3=7 & (1) \\ xy(x-y)=2. & (2) \end{cases}$$

**Lời giải.** Từ (1) và (2) suy ra

$2(x^3-y^3)=7xy(x-y)$

$\Leftrightarrow (x-y)[2(x^2+xy+y^2)-7xy]=0$

$\Leftrightarrow (x-y)(2x^2-5xy+2y^2)=0.$

+ TH1. $x=y$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow 0x=7$: loại.

+ TH2. $2x^2-5xy+2y^2=0$.

Khi đó $(x-2y)(2x-y)=0$.

Xét $x=2y$. Thay vào (1) ta được

$7y^3=7 \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=2$: thỏa mãn (2).

Xét $y=2x$. Thay vào (1) ta được

$-7x^3=7 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y=-2$: thỏa mãn (2).

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là:

$(x\,;\,y)=(2\,;\,1),(-1\,;\,-2).$

**Ví dụ 3.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3-xy^2+y^3=1 & (1) \\ 4x^4+y^4=4x+y. & (2) \end{cases}$$

*(Thi vào 10 THPT chuyên ĐH KHTN HN 2005)*

**Lời giải.** Từ (1) và (2) suy ra

$4x^4+y^4=(x^3-xy^2+y^3)(4x+y)$

$\Leftrightarrow xy(x^2-4xy+3y^2)=0$

$\Leftrightarrow xy(x-y)(x-3y)=0.$

+ TH1. $x=0$. Khi đó

(1) $\Leftrightarrow y^3=1 \Leftrightarrow y=1$: thỏa mãn (2).

+ TH2. $y=0$. Khi đó

(1) $\Leftrightarrow x^3=1 \Leftrightarrow x=1$: thỏa mãn (2).

+ TH3. $x=y$. Khi đó

(1) $\Leftrightarrow x^3=1 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1$: thỏa mãn (2).

+ TH4. $x=3y$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow 25y^3=1$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{\sqrt[3]{5}}{5} \Rightarrow x=\dfrac{3\sqrt[3]{5}}{5}$: thỏa mãn (2).

Vậy hệ đã cho có bốn nghiệm là:

$$(x\,;\,y)=(0\,;\,1),(1\,;\,0),(1\,;\,1),\left(\frac{3\sqrt[3]{5}}{5};\frac{\sqrt[3]{5}}{5}\right).$$

**Ví dụ 4.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(x+y)(x^2+y^2)=15 & (1)\\ (x-y)(x^2-y^2)=3. & (2)\end{cases}$$

*(Thi vào 10 THPT chuyên ĐH KHTN HN 2004)*

**Lời giải.** Từ (1) và (2) suy ra

$$(x+y)(x^2+y^2)=5(x-y)(x^2-y^2)$$

$\Leftrightarrow (x+y)(x^2+y^2)=5(x+y)(x-y)^2$

+ Nếu $x+y=0$. Khi đó (1) không thỏa mãn.

+ Nếu $x^2+y^2=5(x-y)^2$. Khi đó

$2x^2-5xy+2y^2=0 \Leftrightarrow (x-2y)(2x-y)=0.$

Xét $x=2y$. Thay vào (1) ta được

$15y^3=15 \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=2$: thỏa mãn (2).

Xét $y=2x$. Thay vào (1) ta được

$5x^3=15 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=2$: thỏa mãn (2).

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là:

$$(x\,;y)=(2\,;1),(1\,;2).$$

**Ví dụ 5.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^3-8x=y^3+2y\\ x^2-3=3(y^2+1).\end{cases}$$

**Lời giải.** Biến đổi hệ ta được

$$\begin{cases}x^3-y^3=2(4x+y) & (1)\\ x^2-3y^2=6. & (2)\end{cases}$$

Do đó $3(x^3-y^3)=(4x+y)(x^2-3y^2)$

$\Leftrightarrow x(x^2+xy-12y^2)=0.$

+ TH1. $x=0$. Thay vào (2) ta được $y^2=-2$: loại.

+ TH2. $x^2+xy-12y^2=0 \Leftrightarrow (x-3y)(x+4y)=0.$

Xét $x=3y$. Thay vào (2) ta được

$$y^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=1\Rightarrow x=3\\ y=-1\Rightarrow x=-3.\end{array}\right.$$

Thử lại thỏa mãn (1).

Xét $x+4y=0$ hay $x=-4y$. Thay vào (2) ta được

$$y^2=\frac{6}{13}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=\dfrac{\sqrt{78}}{13}\Rightarrow x=-\dfrac{4\sqrt{78}}{13}\\ y=-\dfrac{\sqrt{78}}{13}\Rightarrow x=\dfrac{4\sqrt{78}}{13}.\end{array}\right.$$

Thử lại thỏa mãn (1).

Vậy hệ đã cho có bốn nghiệm $(x\,;y)$ là: $(3\,;1)$, $(-3\,;-1)$, $\left(-\dfrac{4\sqrt{78}}{13};\dfrac{\sqrt{78}}{13}\right)$, $\left(\dfrac{4\sqrt{78}}{13};-\dfrac{\sqrt{78}}{13}\right)$.

**Nhận xét.** Qua các ví dụ trên, hi vọng các bạn sẽ rút ra được những kinh nghiệm khi giải hệ phương trình bằng phương pháp đồng bậc.

**Bài tập tự luận.** Giải các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases}2y(x^2-y^2)=3x\\ x(x^2+y^2)=10y.\end{cases}$

2) $\begin{cases}x-3y=4\dfrac{y}{x}\\ y-3x=4\dfrac{x}{y}.\end{cases}$

3) $\begin{cases}2x^3+3x^2y=5\\ y^3+6xy^2=7.\end{cases}$

*(Thi vào 10 THPT chuyên ĐH KHTN HN 2003)*

4) $\begin{cases}x^2+y^2+xy=1\\ x^3+y^3=x+3y.\end{cases}$

*(Thi vào 10 THPT chuyên ĐH KHTN HN 2003)*


# Một phương pháp chứng minh HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

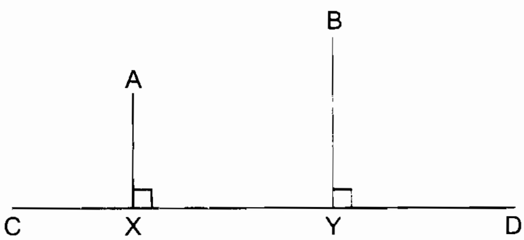
TRẦN BÁ DUY LINH *(Đại học Kinh tế TP. Hồ Chí Minh)*

*Trong bài viết này chúng tôi giới thiệu đến bạn đọc một phương pháp chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau, ngoài những phương pháp mà chúng ta thường dùng.*

**Bổ đề.** Trong mặt phẳng cho 4 điểm A, B, C, D. Khi đó $AB \perp CD$ khi và chỉ khi

$$AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2. \qquad (1)$$

**Chứng minh.** Gọi X, Y thứ tự là chân đường vuông góc hạ từ A, B xuống CD.




+ Nếu $AB \perp CD$ thì $X \equiv Y$. Theo định lí Pytago ta có $AC^2 - AD^2 = XC^2 - XD^2 = BC^2 - BD^2$.

+ Ngược lại, giả sử có (1).

Suy ra $XC^2 - XD^2 = YC^2 - YD^2$.

Đặt $XC^2 - XD^2 = k$.

Suy ra $XC^2 - (XC \pm CD)^2 = k$.

Từ đó $XC = \mp\dfrac{CD^2 + k}{2CD}$.

Tương tự $YC = \mp\dfrac{CD^2 + k}{2CD}$.

Lưu ý rằng tùy theo giá trị của tổng $CD^2 + k$ âm hay không âm mà cả XC và YC sẽ chỉ nhận cùng một giá trị (vì $XC, YC \geq 0$).

Từ đó suy ra $XC = YC$.

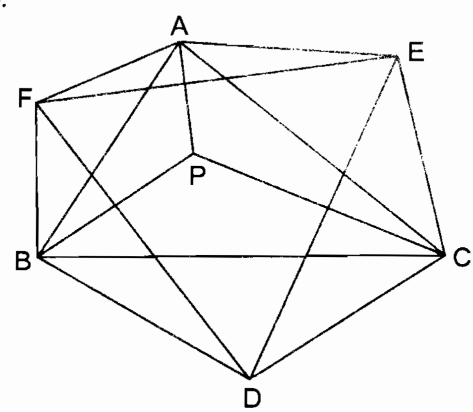
Tương tự $XD = YD$.

Do đó $X \equiv Y$ hay $AB \perp CD$.

Bổ đề được chứng minh.

**Ví dụ 1.** Về phía ngoài $\Delta ABC$ vẽ các tam giác BCD, CAE, ABF tương ứng cân tại đỉnh D, E, F. Chứng minh rằng các đường thẳng qua A, B, C và tương ứng vuông góc với EF, FD, DE đồng quy.

**Lời giải.** Gọi P là giao điểm của đường thẳng qua B vuông góc FD và qua C vuông góc ED.




Vì $BP \perp FD$ và $CP \perp DE$ nên theo *bổ đề* ta có $BF^2 - BD^2 = PF^2 - PD^2$; $CD^2 - CE^2 = PD^2 - PE^2$.

Cộng theo vế hai đẳng thức trên suy ra

$$BF^2 - BD^2 + CD^2 - CE^2 = PF^2 - PE^2.$$

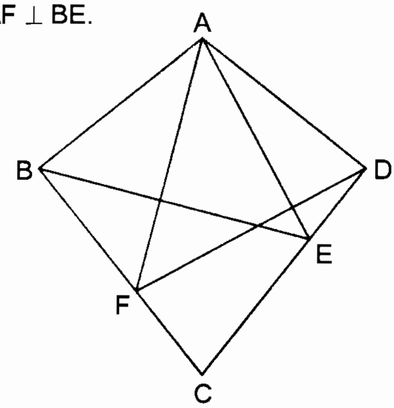
Mà $BF = AF$, $BD = CD$ và $CE = AE$ nên

$$AF^2 - AE^2 = PF^2 - PE^2.$$

Từ đó theo *bổ đề* ta được $AP \perp FE$, ta có đpcm.

**Ví dụ 2.** Cho tứ giác ABCD có $AB = AD$ và B, D là các góc vuông. E, F là hai điểm thay đổi tương ứng trên CD, BC sao cho $AE \perp DF$. Chứng minh rằng $AF \perp BE$.

**Lời giải.**




Vì $AE \perp DF$ nên $AD^2 - AF^2 = ED^2 - EF^2$. (1)

Vì $AB \perp BF$ và $AD \perp DE$ nên theo định lí Pytago ta có $AF^2 = AB^2 + BF^2$; (2)

$AD^2 = AE^2 - ED^2$. (3)

Cộng theo vế của (1), (2) và (3) ta được

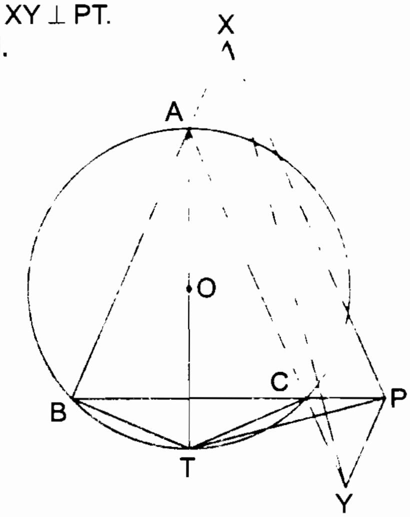
$$2AD^2 = AB^2 + BF^2 + AE^2 - EF^2.$$

Mà AB = AD nên $AB^2 - AE^2 = FB^2 - FE^2$.

Vậy $AF \perp BE$, ta có đpcm.

**Ví dụ 3.** Cho $\Delta ABC$ cân ở A có góc A nhọn. T là trung điểm của cung nhỏ BC của đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$. P là một điểm trên tia đối của tia CB. Trên AB, AC lấy tương ứng các điểm X, Y sao cho tứ giác AXPY là hình bình hành. Chứng minh rằng $XY \perp PT$.

**Lời giải.**

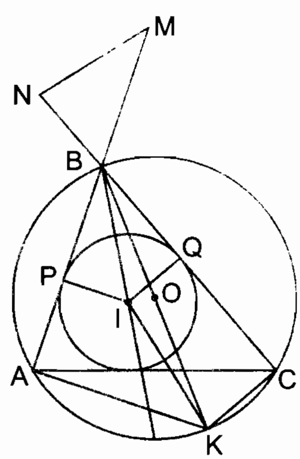



Ta có $TX^2 - TY^2 = (TB^2 + BX^2) - (TC^2 + CY^2)$ $= BX^2 - CY^2$ (vì TB = TC) $= PX^2 - PY^2$.

Từ đó $TP \perp XY$, ta có đpcm.

**Ví dụ 4.** Cho $\Delta ABC$ nội tiếp đường tròn tâm O, đường kính BK. Trên tia đối của các tia BA, BC lấy tương ứng các điểm M, N sao cho AM = CN = p (với p là nửa chu vi $\Delta ABC$). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ABC$. Chứng minh rằng $KI \perp MN$.

**Lời giải.**




Ta có $KM^2 - KN^2 = (KA^2 + AM^2) - (KC^2 + CN^2)$ $= KA^2 - KC^2$ (vì AM = CN) $= BC^2 - BA^2$. (1)

Gọi P, Q tương ứng là chân các đường vuông góc hạ từ I xuống AB, BC.

Ta có $IM^2 - IN^2 = (IP^2 + PM^2) - (IQ^2 + QN^2)$

$= PM^2 - QN^2$ (vì IP = IQ)

$= (AM - AP)^2 - (CN - CQ)^2$

$= [(p - (p - BC)]^2 - [(p - (p - AB)]^2$

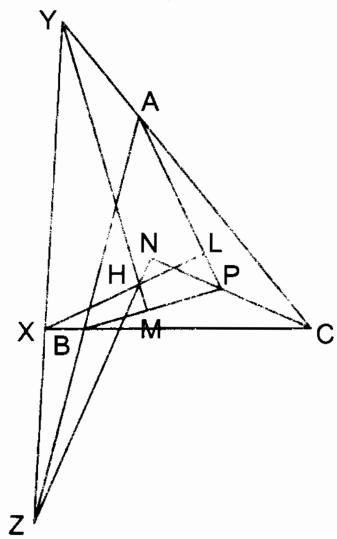
$= BC^2 - BA^2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $KM^2 - KN^2 = IM^2 - IN^2$.

Suy ra $KI \perp MN$, ta có đpcm.

**Ví dụ 5.** Cho $\Delta ABC$ có trực tâm H. P là một điểm nằm trong tam giác. Gọi L, M, N lần lượt là chân đường vuông góc vẽ từ H xuống PA, PB, PC. Giả sử X, Y, Z theo thứ tự là giao điểm của các đường thẳng HL, HM, HN với BC, CA, AB. Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng.

**Lời giải.**




Từ $XH \perp PA$, $AH \perp XB$, $BH \perp AY$, $YH \perp BP$ ta có $XP^2 - XA^2 = HP^2 - HA^2$;

$AX^2 - AB^2 = HX^2 - HB^2$;

$BA^2 - BY^2 = HA^2 - HY^2$;

$YB^2 - YP^2 = HB^2 - HP^2$.

Cộng theo vế các đẳng thức trên ta được

$$XP^2 - YP^2 = HX^2 - HY^2.$$

Do đó $PH \perp XY$.

Tương tự $PH \perp YZ$ và $PH \perp ZX$.

Vậy X, Y, Z cùng nằm trên đường thẳng vuông góc với PH nên chúng thẳng hàng, ta có đpcm.

**Bài tập tự luyện.**

**Bài 1.** Cho $\Delta ABC$ nhọn có các đường cao AD, BE, CF và trực tâm H. FD cắt AC tại N, ED cắt AB tại M. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$. Chứng minh rằng $OH \perp MN$.

**Bài 2.** Cho hình vuông ABCD. Các tia Ax, Ay nằm giữa hai tia AB và AD. Gọi M, K là hình chiếu của B, D lên Ax; L, N là hình chiếu của B, D lên Ay. Chứng minh rằng $KL \perp MN$ và KL = MN.

TRÒ CHƠI TOÁN HỌC:

# Một cách chơi cờ

**1) Bàn cờ, quân cờ**

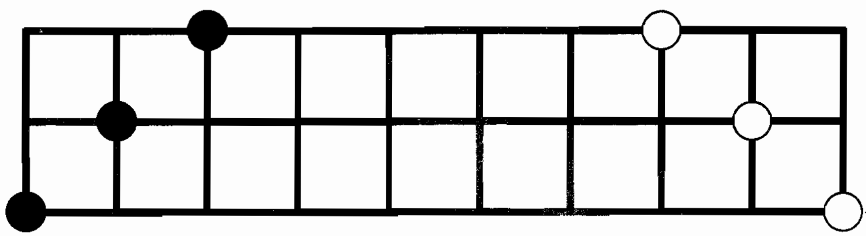
- Bàn cờ: Là một hình vẽ gồm 3 đường thẳng song song (gọi là đường cơ bản) và các đoạn thẳng vuông góc với 3 đường thẳng đó để tạo thành một lưới các hình vuông bằng nhau.

- Quân cờ: Mỗi bên có 3 quân cờ.

**Chú ý.** Bàn cờ có thể dùng vở ô li, bàn cờ tướng... , quân cờ có thể dùng viên sỏi, quân cờ...

**2) Cách đánh**

- Ban đầu, các quân cờ của mỗi bên được đặt như hình vẽ.



- Mỗi bên, khi đến lượt mình được phép di chuyển 1 quân cờ. Cách đi là chuyển quân cờ đó từ nút lưới này sang nút lưới kia sao cho quân cờ đó tiến lại gần quân cờ của đối thủ trên cùng đường thẳng cơ bản.

- Bên nào đến lượt không thể di chuyển được quân cờ sẽ thua.

**Chú ý.** Trong hình vẽ trên, ở trên 3 đường cơ bản, các quân cờ lần lượt cách nhau 8, 6, 4 nút lưới. ở lần chơi khác, ta có thể thay đổi các số này để có một ván chơi khác.

**3) Vấn đề đặt ra**

- Cần tìm một chiến lược hợp lí để đến lượt đối phương đi, dù cách nào cũng thua.

**4) Phân tích chiến lược**

a) Để tiện theo dõi, ta chuyển trò chơi trên thành bài toán bốc sỏi.

- Có 3 đống sỏi A, B, C với số viên tương ứng là 8, 6, 4.

- Đến lượt mình, người chơi chọn một đống còn sỏi, rồi bốc đi một số viên của đống sỏi đó.

- Người thua là người đến lượt mình không còn sỏi để bốc, tức là người bốc viên sỏi cuối cùng sẽ thắng cuộc.

b) Ta dùng phương pháp suy luận từ cuối.

- Ta thấy, sau một số lần bốc sỏi thì chỉ còn 2 đống còn sỏi. Ta thấy nếu số sỏi ở hai đống đó mà bằng nhau thì người chơi tiếp theo sẽ thua vì người đó cứ bốc bao nhiêu viên thì đối phương cũng sẽ bốc bấy nhiêu viên và viên cuối cùng luôn do đối phương bốc.

- Giả sử bạn là người chơi x và đối thủ là y. Bạn x muốn thắng thì theo lập luận trên, x phải bốc sỏi sao cho đến lượt y chỉ còn hai đống sỏi với số viên bằng nhau. Có hai trường hợp:

+ Đến lượt x còn đúng 2 đống còn sỏi với số viên không bằng nhau. Khi đó x chỉ cần bốc sỏi ở đống nhiều hơn, với số viên đúng bằng hiệu số sỏi của 2 đống.

+ Đến lượt x còn sỏi ở cả 3 đống, trong đó có 2 đống có cùng số sỏi. Khi đó x chỉ việc bốc hết số sỏi ở đống còn lại.

**5) Thuật toán**

- Như vậy, ta cần tính toán sao cho ở từng cặp 2 đống sỏi A và B hoặc B và C có những nhóm sỏi có số lượng như nhau. Nghĩa là tạo ra ở 2 cặp (là 2 đống sỏi) có những nhóm tương ứng (mỗi cặp một nhóm).

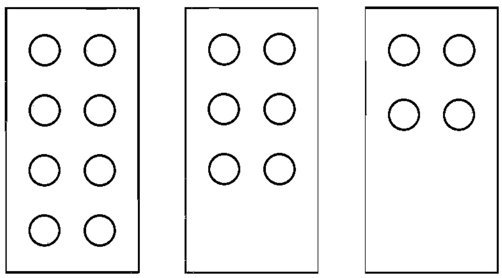
- Vì mỗi đống sỏi chỉ có thể tương ứng với một nhóm khác nên chỉ có thể có một hoặc hai nhóm khác loại nhau. Số sỏi ở mỗi nhóm này có thể bốc từ 1 viên hay bốc gọn cả nhóm. Do đó phải chọn ra các loại nhóm có số lượng khác nhau. Ta gọi số lượng bốc 1 viên là nhóm 1, số lượng bốc 2 viên là nhóm 2. Nhóm 3 không thể là 3 viên vì như thế tương ứng với 1 viên nhóm 1 cộng với 1 viên nhóm 2. Vậy chọn nhóm 3 gồm 4 viên.

- Như thế, khi bắt đầu vào cuộc chơi, ta thấy:

+ Đống A có 8 viên gồm 2 nhóm 3;

+ Đống B có 6 viên gồm nhóm 2 và nhóm 3;

+ Đống C có 4 viên gồm 1 nhóm 3.

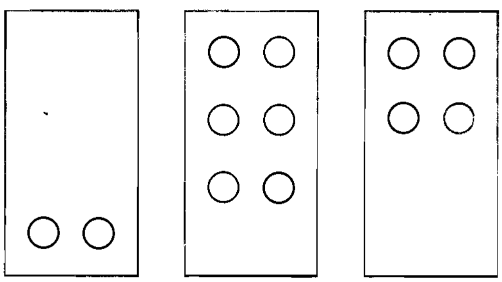


**Nhận xét.**

- Đống B và C đều có 1 nhóm 3 tương đồng, thỏa mãn yêu cầu.

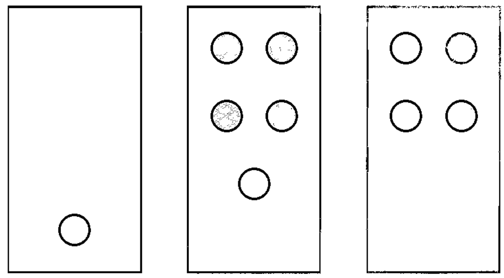
- Đống B có 1 nhóm 2, cần tìm cách xuất hiện một nhóm 2 ở đống A (vì đống A có đến 2 nhóm 3, quá thừa so với yêu cầu của chiến lược).

- Khi lấy đi 6 viên sỏi ở đống A, ta sẽ có sự tương đồng về số viên sỏi nhóm 2 ở đống A và B.

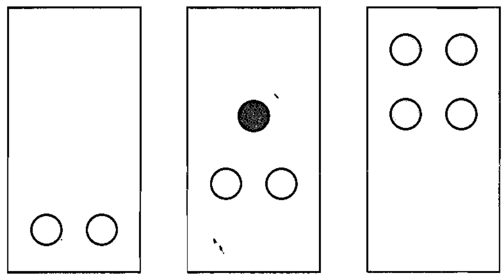


- Đến lượt đối phương đi (là người chơi y), nếu sự tương đồng ở nhóm nào (nhóm 2 hay 4) bị phá vỡ thì người chơi x sẽ khôi phục lại.

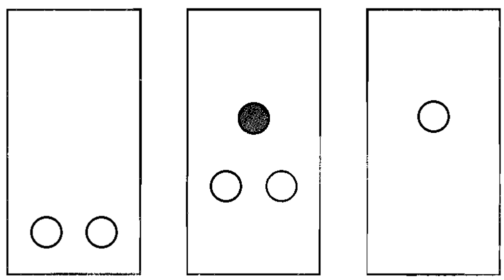
**Ví dụ 1.** Nếu người chơi y bốc 1 viên sỏi ở đống B thì người chơi x sẽ nhặt 1 viên sỏi ở đống A.



**Ví dụ 2.** Người chơi y bốc 3 viên sỏi ở đống B.



Khi đó đống A có 1 nhóm 2 tương đồng với 1 nhóm 2 ở đống B và đống B còn 1 nhóm 1. Vậy để lại tạo ra sự tương đồng giữa các nhóm, người chơi x sẽ nhặt 3 viên sỏi ở đống C và 1 nhóm 1 ở đống B sẽ tương đồng với 1 nhóm 1 của đống C.



Vậy người chơi x sẽ thắng.

TOÁN HỮU *(Hà Nội)*

**LTS.** *Trò chơi trên cho thấy với bài toán cụ thể là ba đống sỏi với số viên tương ứng là 8, 6, 4 viên thì người chơi trước luôn thắng.*

*Bạn đọc hãy thử chơi với số đống sỏi nhiều hơn 3 và mỗi lần chơi chọn số viên khác lần trước rồi tìm xem chiến lược chơi thế nào, ai là người chắc thắng, người chơi trước hay người chơi sau?*

*- Trò chơi trên rõ ràng là một thuật toán. Ta giả sử ban đầu có n đống sỏi với số viên tương ứng là $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Hỏi điều kiện cần và đủ của n và $t_1, t_2, \ldots, t_n$ để luôn có một thuật toán cho một trong hai người chơi (x hoặc y) luôn thắng.*

*Mong nhận được phản hồi từ độc giả.*

# BÀI TOÁN BIỂU DIỄN SỐ

THÂN NGỌC THÀNH *(K51A3, Toán Tin, Đại học KHTN Hà Nội)*

*Lịch sử bài toán biểu diễn số ghi nhận rất nhiều điều thú vị và một trong số đó là sự ra đời của bài toán Goldbach - Euler. Năm 1772, nhà toán học Đức Goldbach viết thư cho Euler. Trong thư, ông mạo hiểm đưa ra bài toán: Mọi số tự nhiên lớn hơn 5 đều biểu diễn được dưới dạng tổng của 3 số nguyên tố. Euler trả lời rằng, theo ông, mọi số chẵn lớn hơn 2 đều biểu diễn được dưới dạng tổng của 2 số nguyên tố.*

*Rõ ràng 2 mệnh đề là tương đương và nếu chứng minh được một trong hai mệnh đề thì sẽ chứng minh được mệnh đề còn lại.*

*200 năm sau đến năm 1937, nhà toán học Liên Xô Vinogoadov đã giải quyết gần trọn vẹn bài toán đó bằng cách chứng minh rằng mọi số lẻ đủ lớn đều có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của 3 số nguyên tố. Cho đến nay, bài toán Goldbach - Euler vẫn chưa giải được hoàn toàn.*

*Bàn thêm về giả thuyết này xin phép để dịp khác, bài viết này chỉ đề cập đến một cách tiếp cận bài toán biểu diễn số từ góc độ những hằng đẳng thức. Cũng cần nói thêm rằng, khai thác hằng đẳng thức là một trong những công việc bổ ích khi học toán.*

*Xin bắt đầu bằng những hằng đẳng thức đơn giản.*

**A. Từ những hằng đẳng thức cơ bản.**

**1. Hằng đẳng thức A:**

$$(x+1)^2 - x^2 = 2x + 1.$$

**Nhận xét 1.** Trong hằng đẳng thức A. cho x nhận giá trị là những số tự nhiên lần lượt từ 1 đến n, rồi cộng các kết quả lại, ta được

$$[2^2 - 1^2] + [3^2 - 2^2] + \ldots + [(n-1)^2 - (n-2)^2] + [n^2 - (n-1)^2] = 3 + 5 + \ldots + (2n-1).$$

Suy ra $n^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)$.

**Kết luận 1.** Mọi số chính phương $n^2$ đều viết được dưới dạng tổng của n số tự nhiên lẻ đầu tiên.

**Nhận xét 2.** Trong hằng đẳng thức A, cho x nhận giá trị lần lượt là k và k + 2, ta được

$(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$; $(k+3)^2 - (k+2)^2 = 2k + 5$.

Suy ra $4 = k^2 - (k+1)^2 - (k+2)^2 + (k+3)^2$.

Mặt khác, ta có các kết quả sau:

$1 = 1^2$;

$2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$;

$3 = -1^2 + 2^2$;

$4 = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$.

Xét số tự nhiên n > 4. Theo các kết quả trên, ta có thể biểu diễn n theo n − 4 dưới dạng

$$n = t_1 1^2 + t_2 2^2 + t_3 3^2 + \ldots + t_k k^2,$$

với $k \in \mathbb{N}^*$; $t_i \in \{1 ; -1\}$, $\forall i \in \{1 ; 2 ; \ldots ; k\}$.

Chẳng hạn, với **n** = 6 ta được 6 = 2 + 4 $= (-1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2) + (5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2)$.

Theo nguyên lí quy nạp, ta đi đến kết luận sau.

**Kết luận 2.** Mọi số tự nhiên n bất kì đều có thể biểu diễn được dưới dạng

$$n = t_1 1^2 + t_2 2^2 + t_2 2^2 + \ldots + t_k k^2,$$

với $k \in \mathbb{N}^*$; $t_i \in \{1 ; -1\}$, $\forall i \in \{1 ; 2 ; \ldots ; k\}$.

**2. Hằng đẳng thức B:**

$$6x = (x+1)^3 + (x-1)^3 - x^3 - x^3.$$

**Nhận xét 3.** Với n là một số tự nhiên bất kì, ta có

$6n = (n+1)^3 + (n-1)^3 - n^3 - n^3 + 0^3$;

$6n + 1 = (n+1)^3 + (n-1)^3 - n^3 - n^3 + 1^3$;

$6n + 2 = 6(n-1) + 2^3$
$= n^3 + (n-2)^3 - (n-1)^3 - (n-1)^3 + 2^3$;

$6n + 3 = 6(n-4) + 3^3$
$= (n-3)^3 + (n-5)^3 - (n-4)^3 - (n-4)^3 + 3^3$;

$6n + 4 = 6(n+2) - 2^3$
$= (n+3)^3 + (n+1)^3 - (n+2)^3 - (n+2)^3 - 2^3$;

$6n + 5 = 6(n+1) - 1^3$
$= (n+2)^3 + n^3 - (n+1)^3 - (n+1)^3 - 1^3$.

**Kết luận 3.** Mọi số tự nhiên đều có thể được viết dưới dạng tổng của 5 lập phương của các số nguyên.

**3. Hằng đẳng thức C:**

$(2x+1)^3-(2x-1)^3=(4x)^2+(2x+1)^2+(2x-1)^2.$

**Nhận xét 4.** Thực hiện tương tự như *nhận xét 1*, ta thu được

$$(2n+1)^3=\sum_{k=1}^{n}(4k)^2+2\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^2+(2n+1)^2.$$

**Kết luận 4.** Mọi số lập phương lẻ $(2n+1)^3$ bất kì đều có thể viết được dưới dạng tổng của $3n+1$ số chính phương khác nhau.

**4. Nhóm hằng đẳng thức D:**

$2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2;$

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2;$

$(a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2.$

**Nhận xét 5.** Gọi S là tập hợp các số tự nhiên n có dạng $p^2+q^2$. Từ 3 hằng đẳng thức trên ta có kết luận sau.

**Kết luận 5.** Nếu $x, y \in S$ thì $2x, 2y, xy, x^2, y^2 \in S$.

**B. Một số bài toán ứng dụng.**

**Bài toán 1.** Chứng minh rằng một số là lũy thừa của 2 không thể là tổng của 2010 số lẻ liên tiếp.

**Lời giải.** Theo hằng đẳng thức A, điều kiện bài toán tương đương với việc ta phải chứng minh phương trình $2^s=(n+2010)^2-n^2$ (1) vô nghiệm.

Ta thấy (1) $\Leftrightarrow 2^{s-2}=1005(n+1005)$. (2)

Rõ ràng (2) vô nghiệm, ta có đpcm.

**Chú ý.** Bạn đọc hãy thử suy nghĩ về bài toán một số là lũy thừa của 2 không thể là tổng của 2010 số tự nhiên liên tiếp.

**Bài toán 2.** Tìm số nguyên không âm n nhỏ nhất có dạng

$n=t_1 1^2+t_2 2^2+t_3 3^2+\ldots+t_{2006}2006^2+t_{2007}2007^2,$

với $t_i\in\{1;-1\}, \forall i\in\{1;2;\ldots;2007\}$.

**Lời giải.** Ta có $1^2+2^2-3^2+4^2-5^2-6^2+7^2=0.$

Theo *nhận xét 2*, ta có thể chọn 8 số chính phương liên tiếp để tổng đan dấu có giá trị 0 là

$k^2-(k+1)^2-(k+2)^2+(k+3)^2-(k+4)^2+(k+5)^2+(k+6)^2-(k+7)^2.$

Vì $2007=7+250\cdot 8$ nên n nhỏ nhất bằng 0.

**Bài toán 3.** Chứng minh rằng mọi số tự nhiên n lớn hơn 7 đều có thể viết được dưới dạng tổng của 2 số nguyên tố cùng nhau và khác 1.

*(2nd Bay Area Mathematical Olympiad)*

**Lời giải.** + Nếu n lẻ, $n=2k+1$, ta được

$$n=k+(k+1).$$

+ Nếu n chẵn, $n=2k$.

Xét k chẵn, ta được $n=(k+1)+(k-1)$.

Xét k lẻ, ta được $n=(k+2)+(k-2)$.

**Bài toán 4.** Chứng minh rằng tổng của hai lập phương liên tiếp $a=n^3+(n+1)^3$ có thể viết được dưới dạng tổng của 3n số chính phương.

**Lời giải.** Sử dụng hằng đẳng thức

$(x+1)^3-(x-1)^3=(2x)^2+(x+1)^2+(x-1)^2$

và thực hiện tương tự như *nhận xét 1*, ta tính được

$$n^3+(n+1)^3=\sum_{i=1}^{n}(2k)^2+2.\sum_{i=1}^{n-1}k^2+n^2+(n+1)^2.$$

**Bài toán 5.** a) Chứng minh rằng mọi lũy thừa của 5 đều là số Pytago, nghĩa là số $5^n$, với $n\in\mathbb{N}^*$, luôn viết được dưới dạng tổng của 2 số chính phương.

b) Chứng minh rằng phương trình

$$x^2+y^2+z^2=45^{2010}$$

trong đó x, y, z là các số nguyên khác nhau đôi một, có nghiệm nguyên dương.

**Lời giải.** a) Ta có $5=1^2+2^2$.

Theo *kết luận 5*, ta suy ra đpcm.

b) Ta có $45=3^2+6^2$.

Theo *kết luận 5*, ta suy ra $45^{2010}$ cũng được viết dưới dạng $a^2+b^2$.

Hơn nữa, vì $45^{2010}$ là số lẻ nên $a\neq b$.

Theo tính chất chia hết cho 3 của một số chính phương ta suy ra cả a, b đều chia hết cho 3.

Sử dụng hằng đẳng thức

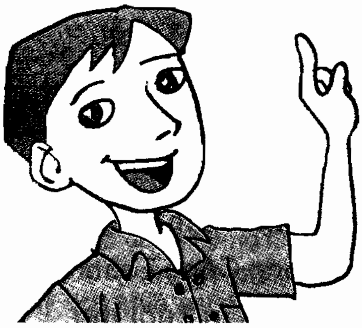
$$a^2+b^2=\left(\frac{2a-b}{3}\right)^2+\left(\frac{2b-a}{3}\right)^2+\left(\frac{2a+2b}{3}\right)^2,$$

ta thấy rõ ràng 3 số chính phương ở vế phải đều phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm là $(x;y;z)=\left(\frac{|2a-b|}{3};\frac{|2b-a|}{3};\frac{2a+2b}{3}\right)$.

Suy ra đpcm.

**Kết luận.** Có lẽ còn rất nhiều hằng đẳng thức nữa vẫn đang chứa đựng những điều thú vị chờ các bạn khám phá tiếp. Trong khuôn khổ bài viết, tôi xin phép được dừng *quá trình khai thác* ở đây. Hẹn gặp lại các bạn ở các bài viết khác.




# SỬ DỤNG KIẾN THỨC ĐẠI SỐ ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC

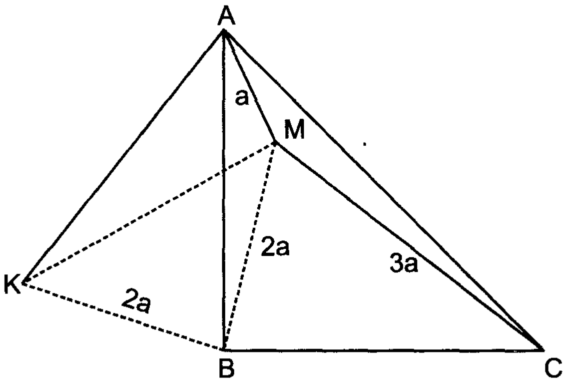
CAO QUỐC CƯỜNG *(GV. THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc)*

*Sử dụng các kiến thức đại số chúng ta có thể giải được một số bài toán hình học một cách ngắn gọn, rõ ràng. Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu với các bạn một số bài toán hình học được giải nhờ sử dụng các kiến thức đại số.*

**Bài toán 1.** Cho M là một điểm nằm trong $\Delta ABC$ sao cho $MA : MB : MC = 1 : 2 : 3$. Biết $\Delta ABC$ vuông cân tại B. Tính số đo góc AMB.

**Lời giải.** Đặt $MA = a$ thì $MB = 2a$ và $MC = 3a$.

*Cách 1.* Vẽ $\Delta MBK$ vuông cân tại B (với K, A nằm cùng phía đối với BM).




Ta thấy $\Delta ABK = \Delta CBM$ (c.g.c) $\Rightarrow AK = CM = 3a$.

Vì $\Delta MBK$ vuông cân tại B nên $\widehat{BMK} = 45^o$ và $KM = 2a\sqrt{2}$ (theo định lí Pytago).

Suy ra $AM^2 + MK^2 = 9a^2 = AK^2$.

Do đó $\widehat{AMK} = 90^o$ (theo định lí Pytago đảo).

Vậy $\widehat{AMB} = \widehat{AMK} + \widehat{KMB} = 135^o$.

*Cách 2.* Vẽ $\Delta BMP$ vuông cân tại B (với P, C nằm cùng phía đối với BM). *(Bạn đọc tự giải)*

**Bài toán 2.** Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 5 cm và BC = 2 cm. I là một điểm thay đổi trên cạnh AB. Vẽ $IN \perp DC$, $IM \perp AC$ ($N \in DC$, $M \in AC$). Xác định vị trí của I để đường thẳng AN là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\Delta BMN$.

**Lời giải.** Vì $\widehat{IBC} = \widehat{IMC} = \widehat{INC} = 90^o$ nên năm điểm B, M, N, I, C thuộc đường tròn đường kính IC. Lại vì $\widehat{BCN} = 90^o$ nên BN là đường kính của đường tròn ngoại tiếp $\Delta BMN$.

Do đó điểm I cần tìm thỏa mãn $AN \perp NB$.

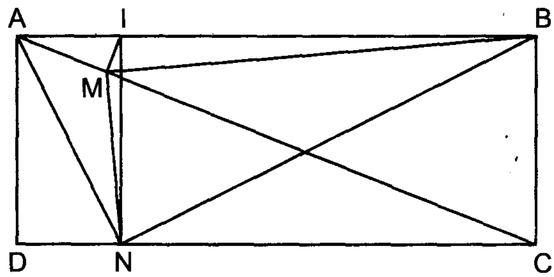
Theo định lí Pytago ta có $AN^2 + NB^2 = AB^2$

$\Leftrightarrow (AI^2 + IN^2) + (BI^2 + IN^2) = AB^2$

$\Leftrightarrow AI^2 + (AB - AI)^2 + 2BC^2 = AB^2$.

Đặt AI = a thì $a^2 + (5 - a)^2 + 8 = 25$

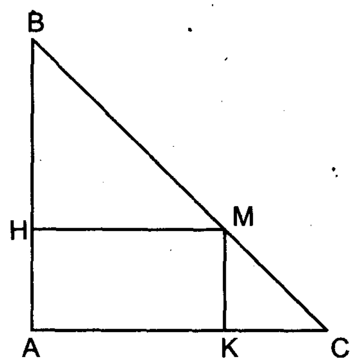
$\Leftrightarrow a^2 - 5a + 4 = 0 \Leftrightarrow a = 1; a = 4$.




Vậy có hai vị trí của điểm I trên cạnh AB thỏa mãn điều kiện bài toán là AI = 1 cm và AI = 4 cm.

**Bài toán 3.** Cho $\Delta ABC$ vuông cân tại A. M là một điểm thay đổi trên cạnh BC. Hạ $MH \perp AB$, $MK \perp AC$ ($H \in AB$, $K \in AC$). Tìm giá trị lớn nhất của tổng $S = MH^4 + MK^4$ theo AB = a.

**Lời giải.** Ta thấy $MH + MK = BH + HA = BA = a$.



Với x, y là hai số thực bất kì, ta có

$(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow 2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = y.

Áp dụng ta có $2(MH^2 + MK^2) \geq a^2$;

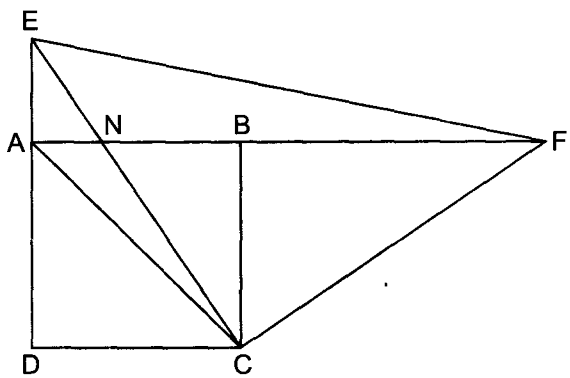
$$2(MH^4 + MK^4) \geq (MH^2 + MK^2)^2.$$

Suy ra $S \geq \dfrac{a^4}{8}$.

Từ đó $S_{min} = \dfrac{a^4}{8}$ khi MH = MK hay M là trung điểm BC.

**Bài toán 4.** Cho hình vuông ABCD cạnh a. N là một điểm thay đổi trên cạnh AB. CN cắt DA tại E. F là một điểm trên AB sao cho CF ⊥ CN. Tìm vị trí của N để $S_{ACFE} = 3S_{ABCD}$.

**Lời giải.** Đặt BN = x (với 0 < x < a).




Ta thấy ΔCBF = ΔCDE (g.c.g) ⇒ CF = CE.

Do đó $2S_{ACFE} = 2(S_{EAC} + S_{ECF})$

$= EA \cdot CD + CE \cdot CF = aEA + CE^2$. (1)

Vì AN // DC nên theo định lí Talét ta có

$$\frac{EA}{ED} = \frac{AN}{DC} \Leftrightarrow \frac{EA}{EA+a} = \frac{a-x}{a} \Leftrightarrow EA = \frac{a(a-x)}{x}. \quad (2)$$

Suy ra $ED = EA + AD = \dfrac{a(a-x)}{x} + a = \dfrac{a^2}{x}$.

Áp dụng định lí Pytago vào ΔDEC ta có

$$CE^2 = CD^2 + DE^2 = a^2 + \frac{a^4}{x^2} = \frac{a^2x^2 + a^4}{x^2}. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$2S_{ACFE} = \frac{a^2(a-x)}{x} + \frac{a^2x^2 + a^4}{x^2} = \frac{a^3(a+x)}{x^2}.$$

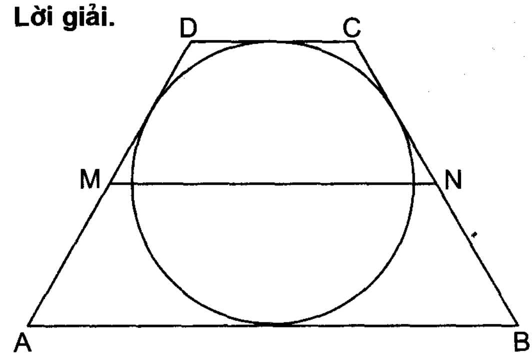
Do đó $S_{ACFE} = 3S_{ABCD} \Leftrightarrow \dfrac{a^3(a+x)}{2x^2} = 3a^2$

$\Leftrightarrow a^2 + ax - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2x$.

Vậy điểm N cần tìm là trung điểm của AB.

**Bài toán 5.** Cho hình thang ABCD ngoại tiếp đường tròn tâm O, với AB // CD, AB > CD và AD + BC = 2010 cm. Đường trung bình MN của hình thang chia hình thang đã cho thành hai hình thang có tỉ số diện tích là 3 : 7. Tính độ dài hai cạnh đáy của hình thang.

**Lời giải.**




Đặt CD = x, AB = y (0 < x < y).

Vì $MN = \dfrac{x+y}{2}$ nên từ giả thiết ta có

$$x + \frac{x+y}{2} = \frac{3}{7}\left(\frac{x+y}{2} + y\right) \Leftrightarrow y = 9x.$$

Mà ABCD là tứ giác ngoại tiếp nên

$$x + y = AD + BC = 2010.$$

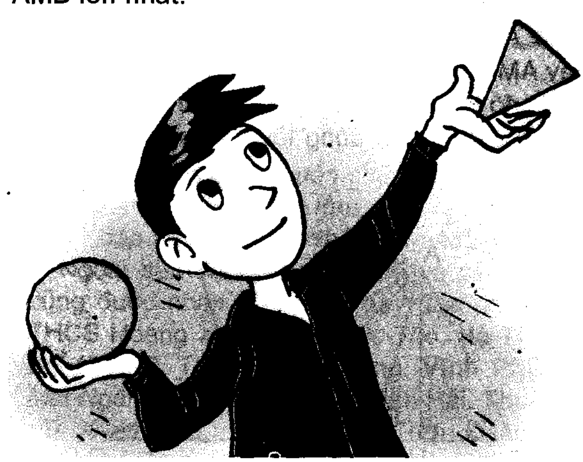
Suy ra x = 201 cm, y = 1809 cm.

**Bài tập áp dụng.**

**Bài 1.** Cho hình thang ABCD vuông tại A có đáy nhỏ AB và $BC = 2\sqrt{13}$ cm, CD = 9 cm, BD = 5 cm. Tính độ dài các đoạn thẳng AB và AD.

**Bài 2.** Cho ΔABC nhọn có AB = 15 cm, BC = 14 cm, CA = 13 cm. Tính độ dài ba đường cao của tam giác.

**Bài 3.** Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R. M là một điểm thay đổi trên nửa đường tròn. Tìm vị trí của M để chu vi tam giác AMB lớn nhất.




# PHÉP CHIA HẾT TRÊN TẬP SỐ NGUYÊN

NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG *(GV. THCS Đa Tốn, Gia Lâm, Hà Nội)*

*Các bài toán về phép chia hết trên tập số nguyên là loại toán cơ bản, hay và là trọng tâm của phần Số học. Trong các kì thi chọn học sinh giỏi các cấp cũng như thi tuyển sinh (TS) vào các lớp chuyên, chọn, các bài toán này luôn được chú trọng bởi tính lôgic cao.*

*Bài viết này sẽ hệ thống các phương pháp chứng minh chia hết trên tập hợp số nguyên và một số vấn đề liên quan.*

## I. PHƯƠNG PHÁP XÉT SỐ DƯ

Để chứng minh biểu thức A(n) chia hết cho k, ta xét mọi trường hợp về số dư khi chia n cho k.

**Ví dụ 1.** Chứng minh rằng (CMR):

a) $ab(a + b)$ chia hết cho 2, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$.

b) $A = n(n^2 + 1)(n^2 + 4)$ chia hết cho 5, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

**Lời giải.** a) Ta xét hai trường hợp sau.

+ Nếu a hoặc b chia hết cho 2 thì $ab \vdots 2$.

+ Nếu a và b cùng không chia hết cho 2 thì a, b cùng lẻ. Suy ra $(a + b) \vdots 2$.

Vậy $ab(a + b) \vdots 2$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$.

b) + Nếu $n = 5k$ thì $A \vdots 5$.

+ Nếu $n = 5k \pm 1$ thì $n^2$ chia 5 dư 1.

Suy ra $(n^2 + 4) \vdots 5$. Do đó $A \vdots 5$.

+ Nếu $n = 5k \pm 2$ thì $n^2$ chia 5 dư 4.

Suy ra $(n^2 + 1) \vdots 5$. Do đó $A \vdots 5$.

Vậy $A \vdots 5$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

**Ví dụ 2.** Cho $a, b \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $(a^2 + b^2) \vdots 3$. CMR a và b cùng chia hết cho 3.

*(TS chuyên Hà Nội - Amsterdam, vòng 2, 2003)*

**Gợi ý.** Số $a^2$, $b^2$ chia cho 3 dư 0 hoặc 1.

**Ví dụ 3.** Cho x, y, z là các số nguyên thỏa mãn

$$(x - y)(y - z)(z - x) = x + y + z. \qquad (1)$$

CMR $(x + y + z) \vdots 27$.

*(Thi HSG lớp 9, TP. Hồ Chí Minh, vòng 2, 1995)*

**Lời giải.** + Nếu ba số x, y, z khi chia cho 3 có các số dư khác nhau thì các hiệu $x - y$, $y - z$, $z - x$ cùng không chia hết cho 3.

Mà $(x + y + z) \vdots 3$ nên từ (1) suy ra vô lí.

+ Nếu trong ba số x, y, z chỉ có hai số chia cho 3 có cùng số dư thì trong ba hiệu $x - y$, $y - z$, $z - x$ chỉ có một hiệu chia hết cho 3. Mà $x + y + z$ không chia hết cho 3 nên từ (1) suy ra vô lí.

Vậy x, y, z khi chia cho 3 có cùng số dư.

Suy ra $x - y$, $y - z$, $z - x$ cùng chia hết cho 3.

Từ (1) suy $(x + y + z) \vdots 27$, ta có đpcm.

**Bài tập vận dụng.**

**Bài 1.** a) Tìm số tự nhiên n để $(2^n - 1) \vdots 7$.

b) CMR $2^n + 1$ không chia hết cho 7, $\forall n \in \mathbb{N}$.

*(Thi vô địch Toán Quốc tế, 1964)*

**Bài 2.** Cho $ab = 1991^{1992}$, với $a, b \in \mathbb{N}$. Hỏi tổng $a + b$ có thể chia hết cho 1992 hay không?

*(TS chuyên Hà Nội - Amsterdam, vòng 2, 1991)*

**Bài 3.** CMR không tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z + 2005$.

*(TS chuyên Bà Rịa - Vũng Tàu, 2005)*

**Bài 4.** CMR $(p - 1)(p + 1) \vdots 24$, với p là một số nguyên tố lớn hơn 3.

*(Thi HSG lớp 9, Phú Thọ, 2004)*

**Bài 5.** Tìm số tự nhiên n để $(n^2 + n + 1) \vdots 2010$.

## II. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH THÀNH TÍCH

Để chứng minh biểu thức A(n) chia hết cho k, ta phân tích k ra thừa số, $k = pq$.

+ Nếu $(p, q) = 1$ thì ta chứng minh A(n) chia hết cho p và A(n) chia hết cho q.

+ Nếu $(p, q) \neq 1$ thì viết $A(n) = B(n)C(n)$ và chứng minh B(n) chia hết cho p, C(n) chia hết cho q.

**Ví dụ 1.** CMR $P = a^5b - ab^5 \vdots 30$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$.

*(Thi HSG lớp 9 toàn quốc, 1985)*

**Lời giải.** Ta có $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, với 2, 3, 5 đôi một nguyên tố cùng nhau; $P = ab(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$.

Ta chứng minh P chia hết cho 2, 3, 5 bằng cách xét các trường hợp của a, b như phương pháp I.

**Ví dụ 2.** a) CMR

$$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x + y)(y + z)(z + x).$$

b) CMR $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ thì $A = (a + b + c)^3 - (a + b - c)^3 - (a - b + c)^3 - (c + b - a)^3$ chia hết cho 24.

*(TS chuyên ĐH Sư phạm ngoại ngữ, 2002)*

**Gợi ý.** b) Áp dụng a) ta được $A = 24abc$.

**Ví dụ 3.** CMR nếu n là số tự nhiên chẵn lớn hơn 4 thì $P = n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n \vdots 384$.

*(Thi HSG lớp 9 toàn quốc, 1970)*

**Gợi ý.** Đặt $n = 2k$. Ta viết $384 = 16 \cdot 24$ và $P = n(n-4)(n-2)(n+2) = 16k(k-2)(k-1)(k+1)$ rồi chứng minh $(k-2)(k-1)(k+1) \vdots 24$.

**Bài tập vận dụng.**

**Bài 1.** CMR $(a^{4k} - 1) \vdots 240$, với mọi k nguyên dương và a là số nguyên tố lớn hơn 4.

*(Thi HSG TP. Hồ Chí Minh, vòng 1, 1995)*

**Bài 2.** CMR $n^3 - n + 2$ không chia hết cho 6, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) CMR $(n^3 - n) \vdots 24$, $\forall n \in \mathbb{N}$, n lẻ.

*(TS PTNK ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, 1996)*

**Bài 3.** CMR $(2^{3n+1} + 2^n)(n^5 - n) \vdots 30$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

*(Thi HSG TP. Hồ Chí Minh, vòng 1, 1990)*

**Bài 4.** CMR $(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n) \vdots 24$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

*(Thi HSG toàn quốc, 1974)*

### III. PHƯƠNG PHÁP TÁCH TỔNG

Để chứng minh A(n) chia hết cho k, ta có thể biến đổi A(n) thành tổng của nhiều hạng tử rồi chứng minh mỗi hạng tử đều chia hết cho k.

**Ví dụ 1.** Cho $a_1, a_2, \ldots, a_{1995} \in \mathbb{N}$ có tổng bằng $1994 \cdot 1995$. CMR $P = a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_{1995}^3 \vdots 3$.

*(Thi HSG lớp 9, Hà Nội, vòng 2, 1995)*

**Gợi ý.** Xét $Q = P - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{1995})$

$$= (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \ldots + (a_{1995}^3 - a_{1995}).$$

Với $a \in \mathbb{N}$ thì $a^3 - a = (a-1)a(a+1) \vdots 3$.

**Ví dụ 2.** CMR $(a^3 + 5a) \vdots 6$, $\forall a \in \mathbb{N}$.

*(Thi HSG lớp 9, Hà Nội, 2009)*

**Gợi ý.** $a^3 + 5a = (a^3 - a) + 6a$.

**Ví dụ 3.** CMR $A \vdots 2005$, với

$$A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2004\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2004}\right).$$

*(TS chuyên Hà Nội - Amsterdam, vòng 2, 2004)*

**Gợi ý.** $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2004} =$

$$= \frac{2005}{1 \cdot 2004} + \frac{2005}{2 \cdot 2003} + \ldots + \frac{2005}{1002 \cdot 1003}.$$

**Bài tập vận dụng.**

**Bài 1.** Cho $a, b, c \in \mathbb{Z}$. CMR $(a^3 + b^3 + c^3) \vdots 3$ khi và chỉ khi $(a + b + c) \vdots 3$.

**Bài 2.** CMR $m \vdots 1997$, với $m, n \in \mathbb{N}$, thỏa mãn

$$\frac{m}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1329} - \frac{1}{1330} + \frac{1}{1331}.$$

*(Thi HSG lớp 9, Hà Nội, vòng 2, 1998)*

**Bài 3.** CMR $(n^3 + 17n) \vdots 6$, $n \in \mathbb{N}$.

*(TS THPT chuyên, ĐH Vinh, vòng 2, 2005)*

**Bài 4.** CMR $T_n \vdots S_n$, với $T_n = 1^5 + 2^5 + \ldots + n^5$, $S_n = 1 + 2 + \ldots + n$.

*(TS chuyên ĐH Sư phạm Hà Nội, vòng 2, 2001)*

**Bài 5.** Cho a, b, c, d là các số nguyên tố lớn hơn 2 và thỏa mãn $(a^5 + b^5 + c^5 + d^5) \vdots 40$. CMR $(a + b + c + d) \vdots 40$.

*(Thi HSG Q. Đống Đa, Hà Nội, 2005)*

### IV. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG HẰNG ĐẲNG THỨC

Nhiều bài toán ta có thể sử dụng kết quả của các hằng đẳng thức mở rộng sau (với $a, b \in \mathbb{N}$):

$a^n - b^n$ chia hết cho $a - b$, với $a \neq b$;

$a^n - b^n$ chia hết cho $a + b$, với n chẵn và $a \neq -b$;

$a^n + b^n$ chia hết cho $a + b$, với n lẻ và $a \neq -b$.

**Ví dụ 1.** CMR $A_n = 5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n) \vdots 91$.

*(TS chuyên ĐH Sư phạm Hà Nội, vòng 1, 1997)*

**Gợi ý.** $91 = 7 \cdot 13$; $25 - 18 = 12 - 5 = 7 \Rightarrow A_n \vdots 7$;

$25 - 12 = 18 - 5 = 13 \Rightarrow A_n \vdots 13$.

**Ví dụ 2.** CMR $2^{2n}(2^{2n+1} - 1) - 1 \vdots 9$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

*(Thi HSG lớp 9, TP. Hồ Chí Minh, vòng 2, 1991)*

**Gợi ý.** $(4^n - 1) \vdots 3 \Rightarrow 4^n - 1 = 3k + 1$.

**Ví dụ 3.** Cho số $M = 1993^{1997} + 1997^{1993}$.

a) CMR $M \vdots 15$.

b) Tìm chữ số tận cùng của M.

*(Thi HSG lớp 9, TP. Hồ Chí Minh, vòng 1, 1992)*

**Gợi ý.** a) $15 = 3 \cdot 5$; $(1993 - 1) \vdots 3$, $(1997 + 1) \vdots 3 \Rightarrow M \vdots 3$; $(1993^2 + 1) \vdots 5$, $(1997^2 + 1) \vdots 5 \Rightarrow M \vdots 5$.

b) Vì M chẵn nên chữ số tận cùng của M là 0.

**Bài tập vận dụng.**

**Bài 1.** Tổng $21^{39} + 39^{21}$ có chia hết cho 45 không? Giải thích.

*(TS chuyên toán, Quốc học Huế, 1986)*

**Bài 2.** CMR $(46^n + 296 \cdot 13^n) \vdots 1947$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, n lẻ.

*(Thi vô địch Hunggary, 1947)*

*(Xem tiếp trang 19)*

# PHÉP CHIA HẾT ... *(Tiếp theo trang 7)*

**Bài 3.** CMR $(2^{105} + 3^{105})$ chia hết cho 7, 11, 463.

*(Thi HSG lớp 9, Hậu Giang, 1990)*

**Bài 4.** CMR $(5^{3n+2} + 2^{2n+3}) \vdots 11$.

*(TS chuyên toán, Đại học Vinh, 2004)*

**Bài 5.** CMR $(2903^n - 803^n - 464^n + 261^n) \vdots 1897$.

*(Thi Vô địch toán Hunggary, 1978)*

**V. PHƯƠNG PHÁP DÙNG NGUYÊN LÍ ĐIRÍCHLÊ**

**Ví dụ 1.** CMR tồn tại số tự nhiên n khác 0 thỏa mãn $(13579^n - 1) \vdots 3^{13579}$.

*(Thi HSG lớp 9, Hà Nội, 2006)*

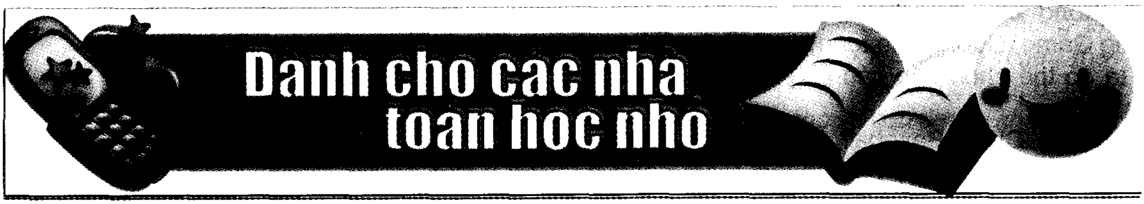
**Lời giải.** Xét $3^{13579}$ số có dạng $13579^t$, với t = 1, 2,... , $3^{13579}$. Khi chia các số này cho $3^{13579}$ ta nhận được $3^{13579}$ số dư đều khác 0. Do đó tồn tại hai số $13579^i$, $13579^j$ $(i > j)$ có cùng số dư.

Suy ra $n = i - j$ thỏa mãn (vì (13579, 3) = 1).

**Ví dụ 2.** Chứng minh rằng trong 52 số nguyên dương bất kì luôn luôn tìm được 2 số có tổng hoặc hiệu chia hết cho 100.

*(TS chuyên ĐH quốc gia Hà Nội, vòng 1, 1989)*

**Lời giải.** 52 số khi chia cho 100 có số dư thuộc 51 nhóm là {0}, {1; 99}, {2; 98},... , {49; 51}, {50}. Do đó tồn tại hai số có số dư cùng nhóm. Hai số này có hiệu chia hết cho 100 (nếu số dư bằng nhau) hoặc có tổng chia hết cho 100 (nếu số dư khác nhau).




# TIẾP TỤC BẮC NHỮNG NHỊP CẦU NỐI ĐÔI BỜ LƯỢNG GIÁC VÀ HÌNH HỌC

*PGS.* LÊ QUỐC HÁN *(Khoa Toán, Đại học Vinh)*

*Trong những năm gần đây trên hai tạp chí **Toán học & Tuổi trẻ** và **Toán Tuổi thơ** xuất hiện một số bài báo bàn về mối liên hệ giữa Lượng giác và Hình học. Nội dung của các bài báo đó tập trung vào hai vấn đề chính:*

***1)** Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác và trong đường tròn để suy ra các công thức lượng giác **đơn giản.***

*2) Sử dụng định nghĩa hàm số lượng giác của góc nhọn và các **hệ thức cơ bản** (chẳng hạn $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{cotg}\alpha = 1$...) để giải một số bài toán hình học **đơn giản.***

*Trong bài báo này, thông qua việc giải một số bài toán hình học hay lượng giác **tương đối phức tạp,** chúng tôi muốn giúp độc giả thấy rõ hơn mối liên hệ hai chiều giữa Lượng giác và Hình học.*

*Để hiểu sâu sắc bài báo này độc giả cần hiểu khái niệm lượng giác của góc $\alpha$ bất kì.*

*Trước hết, xin nhắc lại một số kết quả sau.*

**Kết quả 1**. Nếu điểm M thuộc cung nhỏ BC của đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$ đều thì $MA = MB + MC$.

**Kết quả 2**. Cho $\Delta ABC$ có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Thế thì

a) $a^2 = b^2 + c^2 - bc \Leftrightarrow \widehat{BAC} = 60^o$.

b) $a^2 = b^2 + c^2 + bc \Leftrightarrow \widehat{BAC} = 120^o$.

**Kết quả 3**. Giả sử AB là dây cung của đường tròn (O ; R) căng cung $2\alpha$. Khi đó $AB = 2R\sin\alpha$.

Các kết quả 1 và 2 đã được chứng minh trong tạp chí *Toán Tuổi thơ* ở những số trước.

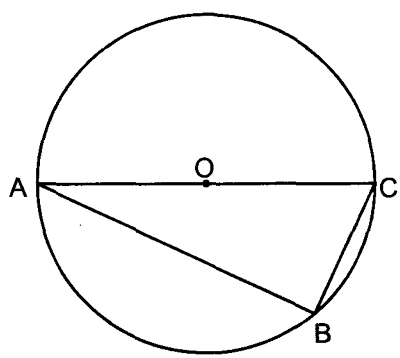
Ta chứng minh kết quả 3.

Vẽ đường kính AC.

Khi đó $AC = 2R$ và $\widehat{ABC} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Theo giả thiết $\widehat{ACB} = \alpha$ nên $\sin\alpha = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AB}{2R}$.

Do đó $AB = 2R\sin\alpha$ (đpcm).




**Bài toán 1**. Giả sử M là một điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC cạnh bằng a. Đặt $MA = x$, $MB = y$, $MC = z$. Chứng minh rằng

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$.

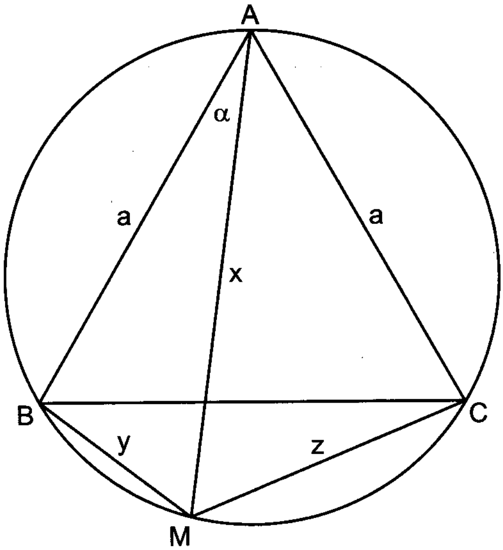
b) $x^4 + y^4 + z^4 = 2a^4$.

**Lời giải.** a) Không mất tổng quát, giả sử M nằm trên cung nhỏ BC. Theo kết quả 1, ta có $x = y + z$.

Mà $\widehat{AMB} = \widehat{ACB} = 60^o = \widehat{ABC} = \widehat{AMC}$

nên $a^2 = x^2 + y^2 - xy$, $a^2 = x^2 + z^2 - xz$ (do áp dụng kết quả 2 cho các tam giác MAB và MAC).

Do đó $2a^2 = 2x^2 + y^2 + z^2 - x(y + z)$
$= 2x^2 + y^2 + z^2 - x^2 = x^2 + y^2 + z^2$ (đpcm).




b) Áp dụng hằng đẳng thức

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

ta được

$$a^4 = (x^2 + y^2 - xy)^2 = x^4 + y^4 + 3x^2y^2 - 2x^3y - 2xy^3;$$
$$a^4 = (x^2 + z^2 - xz)^2 = x^4 + z^4 + 3x^2z^2 - 2x^3z - 2xz^3.$$

Từ đó $2a^4 = 2x^4 + y^4 + z^4 + 3x^2(y^2 + z^2) - 2x^3(y + z) - 2x(y^3 + z^3)$. (1)

Chú ý rằng $x = y + z$ nên $2x^3(y + z) = 2x^4$ và

$3x^2(y^2 + z^2) - 2x(y^3 + z^3)$
$= 3x^2(y^2 + z^2) - 2x(y + z)(y^2 + z^2 - yz)$
$= 3x^2(y^2 + z^2) - 2x^2(y^2 + z^2 - yz)$
$= x^2(y^2 + z^2 + 2yz) = x^2(y + z)^2 = x^4$.

Do đó từ (1) suy ra $2a^4 = x^4 + y^4 + z^4$ (đpcm).

**Nhận xét**. Gọi R là bán kính của (O).

Khi đó $R = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = R\sqrt{3}$.

Đặt $\widehat{MAB} = \alpha$ thì

$$\widehat{MAC} = 60^\circ - \alpha;\ \widehat{MCA} = 60^\circ + \alpha.$$

Theo kết quả 3, ta có

$$x = 2R\sin(60^\circ + \alpha) = \frac{2a}{\sqrt{3}}\sin(60^\circ + \alpha).$$

Tương tự: $y = \frac{2a}{\sqrt{3}}\sin\alpha;\ z = \frac{2a}{\sqrt{3}}\sin(60^\circ - \alpha)$.

Thay vào các hệ thức trong bài toán 1, ta được

$$\sin^2\alpha + \sin^2(60^\circ - \alpha) + \sin^2(60^\circ + \alpha) = \frac{3}{2};$$
$$\sin^4\alpha + \sin^4(60^\circ - \alpha) + \sin^4(60^\circ + \alpha) = \frac{9}{4}. \quad (*)$$

**Bài toán 2**. Qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp ΔABC đều cạnh a dựng một đường thẳng d tùy ý. Gọi x, y, z là các khoảng cách từ A, B, C đến d.

Chứng minh các hệ thức:

a) $2(x^2 + y^2 + z^2) = a^2$.

b) $2(x^4 + y^4 + z^4) = a^4$.

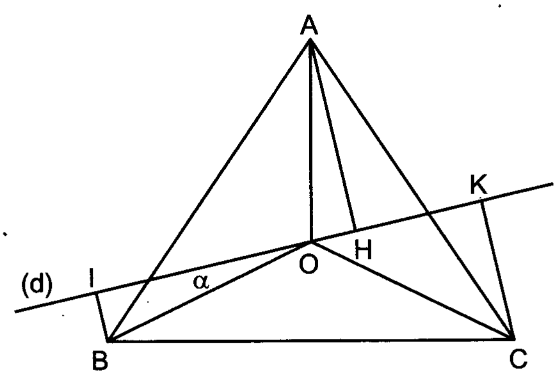
**Lời giải**. Ta có $OA = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Đặt $\widehat{BOI} = \alpha$.

Ta được $\widehat{COK} = 60^\circ - \alpha;\ \widehat{AOH} = 60^\circ + \alpha$

$\Rightarrow x = AH = OA\sin(60^\circ + \alpha) = \frac{a}{\sqrt{3}}\sin(60^\circ + \alpha)$.

Tương tự: $y = \frac{a}{\sqrt{3}}\sin\alpha;\ z = \frac{a}{\sqrt{3}}\sin(60^\circ - \alpha)$.

Thay vào (*) ta được đpcm.




Kết quả trên không phải là ngoại lệ. Hãy xét thêm bài toán sau để củng cố niềm tin của bạn.

**Bài toán 3**. Giả sử d là một đường thẳng tùy ý trong mặt phẳng chứa tam giác đều ABC cạnh bằng a. Gọi $A_1$, $B_1$, $C_1$ là chân các đường vuông góc hạ từ A, B, C xuống d. Đặt $A_1B_1 = x$, $B_1C_1 = y$, $C_1A_1 = z$.

Chứng minh các hệ thức:

a) $2(x^2 + y^2 + z^2) = 3a^2$.

b) $2(x^4 + y^4 + z^4) = 9a^4$.

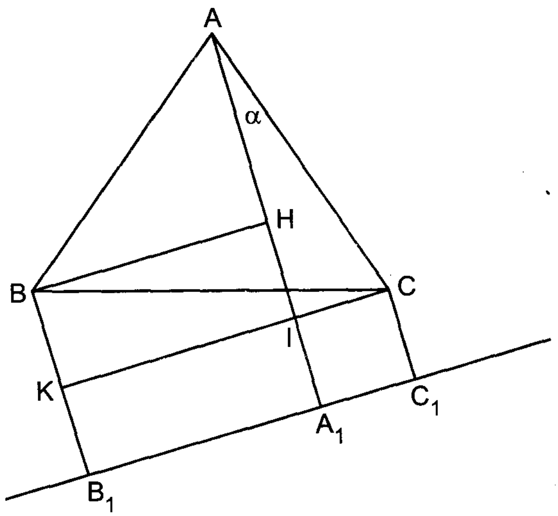
**Lời giải.** Kẻ $BH \perp AA_1$, $CK \perp BB_1$. Gọi I là giao điểm của CK với $AA_1$. Đặt $\widehat{CAH} = \alpha$.

Khi đó $\widehat{BAH} = 60^o - \alpha$; $\widehat{CBK} = 60^o + \alpha$.

Do đó $A_1B_1 = BH = a\sin(60^o - \alpha)$;

$B_1C_1 = CK = a\sin(60^o + \alpha)$; $C_1A_1 = CI = a\sin\alpha$.

Thay vào (*) ta được đpcm.




**Bài tập tự luyện.**

**Bài 1.** Chứng minh các hệ thức:

a) $\cos^2\alpha + \cos^2(60^o - \alpha) + \cos^2(60^o + \alpha) = \dfrac{3}{2}$.

b) $\cos^4\alpha + \cos^4(60^o - \alpha) + \cos^4(60^o + \alpha) = \dfrac{9}{4}$.

**Bài 2.** Từ kết quả bài toán sau, hãy suy ra các hệ thức lượng giác tương ứng:

"Nếu M là một điểm trên cung nhỏ BC của đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC$ đều và H, I, K là chân đường vuông góc hạ từ M xuống BC, CA, AB thì

$$\frac{1}{MH} = \frac{1}{MI} + \frac{1}{MK}\text{"}.$$

**Bài 3.** Cho H là trực tâm $\Delta ABC$ đều, nội tiếp đường tròn (O ; R). Chứng minh rằng:

a) $OH^2 = R^2(1 - 8\cos A\cos B\cos C)$.

b) $\cos A\cos B\cos C \le \dfrac{1}{8}$.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

**Bài 4.** Cho $\Delta ABC$ nội tiếp đường tròn (O ; R) và ngoại tiếp đường tròn (I ; r). Chứng minh rằng:

a) $OI^2 = R^2\left(1 - 8\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\right)$.

b) $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \le \dfrac{1}{8}$.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

**Bài 5.** Cho $\Delta ABC$ nội tiếp đường tròn (O ; R) và G là trọng tâm tam giác đó. Chứng minh rằng:

a) $OG^2 = R^2\left[1 - \dfrac{4}{9}(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)\right]$.

b) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \ge \dfrac{3}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

**Bài 6.** M là một điểm tùy ý trên đường tròn ngoại tiếp lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Chứng minh các hệ thức:

a) $MA_1^2 + MA_3^2 + MA_5^2 = MA_2^2 + MA_4^2 + MA_6^2$.

b) $MA_1^4 + MA_3^4 + MA_5^4 = MA_2^4 + MA_4^4 + MA_6^4$.

Giải bài toán tương tự, tổng quát hóa.


# TAM GIÁC CÂN VÀ TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC

NGUYỄN ĐỨC TẤN *(TP. Hồ Chí Minh)*

*Tam giác vuông được coi là bửu bối của tỉ số lượng giác. Tuy nhiên, một số bài toán liên quan đến tỉ số lượng giác lại được hỗ trợ đắc lực bởi tam giác cân.*

*Bài viết này sẽ trao đổi với bạn đọc một số bài toán về tỉ số lượng giác có lời giải đẹp nhờ sự có mặt của tam giác cân.*

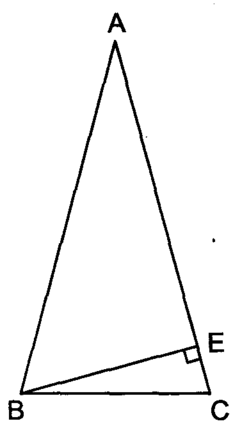
*Sau đây là một số ví dụ.*

**Bài toán 1.** Tính $\text{tg}15^\circ$ mà không dùng bảng số và máy tính.

**Lời giải.**

*Cách 1.* Xét tam giác ABC cân tại A có AB = 2 và $\widehat{A} = 30^\circ$.

Hạ $BE \perp AC$ ($E \in AC$).



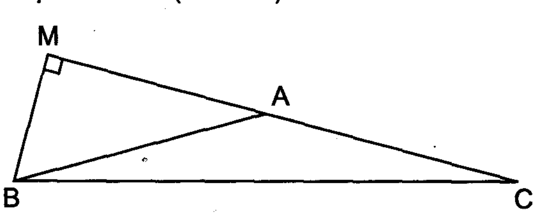

Ta có $BE = 1$ và $AE = \sqrt{3} \Rightarrow EC = 2 - \sqrt{3}$.

Vì $\widehat{EBC} = 90^\circ - \widehat{C} = \dfrac{\widehat{A}}{2} = 15^\circ$ nên

$$\text{tg}15^\circ = \frac{EC}{BE} = 2 - \sqrt{3}.$$

*Cách 2.* Xét tam giác ABC cân tại A có AB = 2 và $\widehat{C} = 15^\circ$.

Hạ $BM \perp AC$ ($M \in AC$).




Ta có $\widehat{MAB} = 2\widehat{C} = 30^\circ$.

Suy ra $BM = 1$ và $AM = \sqrt{3}$.

Từ đó $MC = \sqrt{3} + 2$.

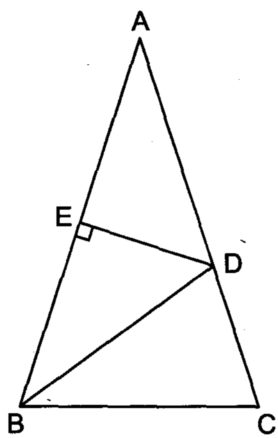
Vậy $\text{tg}15^\circ = \text{tg}C = \dfrac{MB}{MC} = \dfrac{1}{\sqrt{3}+2} = 2 - \sqrt{3}$.

**Bài toán 2.** Tính $\cos 36^\circ$ mà không dùng bảng số và máy tính.

**Lời giải.** Xét tam giác ABC cân tại A có BC = 1 và $\widehat{A} = 36^\circ$.

Kí hiệu BD là đường phân giác của góc B.

Hạ $DE \perp AB$ ($E \in AB$).




Ta thấy $\widehat{B} = \widehat{C} = \dfrac{180^\circ - \widehat{A}}{2} = 72^\circ$.

Suy ra $\widehat{DBC} = \widehat{DBA} = 36^\circ$.

Từ đó các tam giác DAB, BCD tương ứng cân tại D, B.

Suy ra $AD = DB = BC = 1$.

Đặt $AB = AC = 2x$ ($x > 0$).

Vì BD là đường phân giác của góc B nên

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Leftrightarrow \frac{1}{2x-1} = \frac{2x}{1}$$

$\Rightarrow 4x^2 - 2x = 1 \Leftrightarrow (4x-1)^2 = 5$

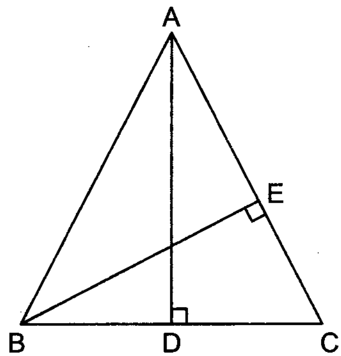
$\Leftrightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ (thỏa mãn); $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ (loại).

Vậy $\cos 36^{\circ} = \cos\widehat{EAD} = \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{x}{1} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

**Bài toán 3.** Cho góc $\alpha$, với $\alpha < 45^{\circ}$. Chứng minh rằng $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

**Lời giải.** Xét tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = 1$ và $\widehat{A} = 2\alpha$.

Hạ $AD \perp BC$, $BE \perp AC$ ($D \in BC$, $E \in AC$).




Vì $\widehat{DAB} = \dfrac{\widehat{A}}{2} = \alpha$ và $BD = \dfrac{BC}{2}$ nên xét tam giác ABD vuông tại D, ta có

$$\sin\alpha = \frac{BD}{AB} = BD,\ \cos\alpha = \frac{AD}{AB} = AD.$$

Suy ra $2\sin\alpha\cos\alpha = 2BD\cdot AD = BC\cdot AD = 2S_{ABC}$.

Mặt khác ta có

$$\sin 2\alpha = \sin\widehat{BAE} = \frac{BE}{AB} = BE = BE\cdot AC = 2S_{ABC}.$$

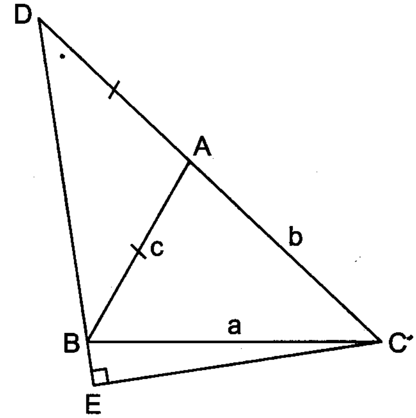
Suy ra đpcm.

**Bài toán 4.** Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \le \dfrac{1}{8}$.

**Lời giải.** Kí hiệu a, b, c là chiều dài tương ứng của các cạnh BC, CA, AB.

Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho $DA = c$.

Hạ $CE \perp BD$ ($E \in BD$).




Vì $\widehat{ADB} = \widehat{ABD} = \dfrac{\widehat{A}}{2}$ nên

$$\sin\frac{A}{2} = \sin D = \frac{CE}{CD} \le \frac{BC}{CD} = \frac{a}{b+c}.$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có $b + c \ge 2\sqrt{bc}$.

Suy ra $\sin\dfrac{A}{2} \le \dfrac{a}{2\sqrt{bc}}$.

Tương tự $\sin\dfrac{B}{2} \le \dfrac{b}{2\sqrt{ca}}$; $\sin\dfrac{C}{2} \le \dfrac{c}{2\sqrt{ab}}$.

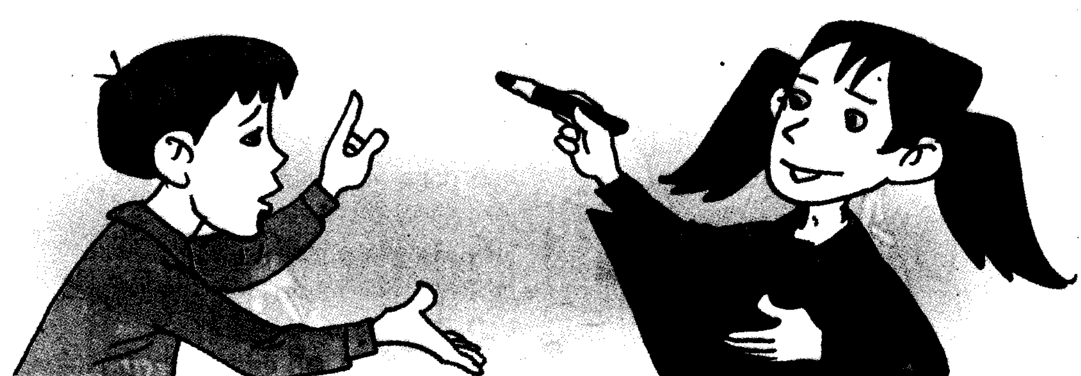
Nhân theo vế của ba bất đẳng thức trên ta được $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \le \dfrac{a}{2\sqrt{bc}}\cdot\dfrac{b}{2\sqrt{ca}}\cdot\dfrac{c}{2\sqrt{ab}} = \dfrac{1}{8}$.

Từ đó suy ra đpcm.

**Bài tập tự luyện.**

**Bài 1.** Tính $\sin 15^{\circ}$, $\cos 15^{\circ}$, $\sin 22^{\circ}30'$, $\cos 22^{\circ}30'$, $\mathrm{tg}\, 67^{\circ}30'$, $\cos 72^{\circ}$ mà không dùng bảng số và máy tính.

**Bài 2.** Cho góc $\alpha$, với $\alpha < 45^{\circ}$. Chứng minh rằng $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.




# MỘT SỐ CÁCH ĐỔI BIẾN

TRẦN BÁ DUY LINH *(Đại học Kinh tế TP. Hồ Chí Minh)*

*Từ những điều kiện ban đầu của bài toán, bằng một số phép đổi biến ta có thể làm cho bài toán cần giải quyết trở nên đơn giản hơn. Bài viết này sẽ điểm lại một số cách đổi biến từ quen đến lạ.*

**Dạng 1.** Khi gặp điều kiện bài toán là $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ và $x_1x_2\ldots x_n = 1$ thì phép đổi biến mà chúng ta hay liên tưởng tới nhất là: Đặt

$$x_1 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^\alpha; x_2 = \left(\frac{a_3}{a_2}\right)^\alpha; \ldots; x_n = \left(\frac{a_1}{a_n}\right)^\alpha$$

với $a_1, a_2, \ldots, a_n, \alpha > 0$.

**Ví dụ 1.** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng (CMR):

$$\frac{a}{ab+1} + \frac{b}{bc+1} + \frac{c}{ca+1} \geq \frac{3}{2}. \quad (1)$$

**Lời giải.** Đặt $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ (với $x, y, z > 0$).

Biến đổi (1) ta được

$$(1) \Leftrightarrow \frac{zx}{xy+yz} + \frac{xy}{yz+zx} + \frac{yz}{zx+xy} \geq \frac{3}{2}. \quad (1')$$

Đặt $u = yz + zx$, $v = zx + xy$, $t = xy + yz$. Khi đó $2xy = v + t - u$, $2yz = t + u - v$, $2zx = u + v - t$.

Ta được $(1') \Leftrightarrow \frac{u+v-t}{t} + \frac{v+t-u}{u} + \frac{t+u-v}{v} \geq 3$

$\Leftrightarrow \left(\frac{u}{v} + \frac{v}{u}\right) + \left(\frac{u}{t} + \frac{t}{u}\right) + \left(\frac{v}{t} + \frac{t}{v}\right) \geq 6$: đúng do bất đẳng thức (BĐT) Côsi.

**Ví dụ 2.** Cho a, b, c và d là các số thực dương thỏa mãn $abcd = 1$. CMR:

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+d)} + \frac{1}{d(1+a)} \geq 2. \quad (2)$$

**Lời giải.** Đặt $a = \frac{x}{y}, b = \frac{z}{x}, c = \frac{t}{z}, d = \frac{y}{t}$ (với $x, y, z, t > 0$). Biến đổi ta được

$$(2) \Leftrightarrow \frac{y}{x+z} + \frac{x}{z+t} + \frac{z}{y+t} + \frac{t}{x+y} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{xy+zy} + \frac{x^2}{zx+tx} + \frac{z^2}{yz+tz} + \frac{t^2}{xt+yt} \geq 2.$$

Ta có $(x+y+z+t)^2 \leq$

$$[(xy+zy) + (zx+tx) + (yz+tz) + (xt+yt)] \times$$
$$\times \left(\frac{y^2}{xy+zy} + \frac{x^2}{zx+tx} + \frac{z^2}{yz+tz} + \frac{t^2}{xt+yt}\right).$$

Suy ra $\frac{y^2}{xy+zy} + \frac{x^2}{zx+tx} + \frac{z^2}{yz+tz} + \frac{t^2}{xt+yt} \geq$

$$\geq \frac{(x+y+z+t)^2}{(xy+zy)+(zx+tx)+(yz+tz)+(xt+yt)}.$$

Ta chứng minh

$$\frac{(x+y+z+t)^2}{(xy+zy)+(zx+tx)+(yz+tz)+(xt+yt)} \geq 2. \quad (a)$$

Thật vậy, biến đổi (a) thành

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq 2(yz + xt)$$

$\Leftrightarrow (x-t)^2 + (y-z)^2 \geq 0$: đúng.

**Ví dụ 3.** Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$. CMR: $\frac{1}{(x+1)^2 + y^2 + 1} +$

$$+ \frac{1}{(y+1)^2 + z^2 + 1} + \frac{1}{(z+1)^2 + x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}. \quad (3)$$

**Lời giải.** Ta có

$$\frac{1}{(x+1)^2 + y^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + y^2 + 2x + 2} \leq \frac{1}{2(xy + x + 1)}.$$

Viết hai BĐT tương tự, suy ra VT(3) $\leq$

$$\leq \frac{1}{2(xy+x+1)} + \frac{1}{2(yz+y+1)} + \frac{1}{2(zx+z+1)}. \quad (b)$$

Đặt $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}$ (với $a, b, c > 0$) ta được VP(b) $= \frac{1}{2}$, suy ra đpcm.

**Ví dụ 4.** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. CMR:

$$a(b^2 - \sqrt{b}) + b(c^2 - \sqrt{c}) + c(a^2 - \sqrt{a}) \geq 0. \quad (4)$$

**Lời giải.**

Đặt $a=\frac{x^2}{y^2}, b=\frac{y^2}{z^2}, c=\frac{z^2}{x^2}$ (với x, y, z > 0).

Biến đổi, nhân hai vế của BĐT với $x^2y^2z^2$, ta được

$$(4)\Leftrightarrow \frac{1}{x^6}+\frac{1}{y^6}+\frac{1}{z^6}\ge\frac{1}{x^3y^3}+\frac{1}{y^3z^3}+\frac{1}{z^3x^3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}\right)^2+\left(\frac{1}{y^3}-\frac{1}{z^3}\right)^2+\left(\frac{1}{z^3}-\frac{1}{x^3}\right)^2\ge 0: \text{ đúng.}$$

**Dạng 2.** Khi bài toán cho điều kiện x, y, z > 0 và x + y + z + 2 = xyz, ta biến đổi thành

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=1,$$

rồi đặt $a=\frac{1}{x+1}, b=\frac{1}{y+1}, c=\frac{1}{z+1}$.

Khi đó a + b + c = 1 và $x=\frac{1-a}{a}=\frac{b+c}{a}$;

$y=\frac{1-b}{b}=\frac{c+a}{b}$; $z=\frac{1-c}{c}=\frac{a+b}{c}$.

**Ví dụ 5.** Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn xy + yz + zx + 2xyz = 1. CMR:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 4(x+y+z). \quad (5)$$

**Lời giải.** Từ giả thiết suy ra $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+2=\frac{1}{xyz}$.

Đặt $x=\frac{a}{b+c}, y=\frac{b}{c+a}, z=\frac{c}{a+b}$, với a, b, c > 0 và a + b + c = 1. Khi đó (5) trở thành

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\ge 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right).$$

Vì $(b+c)^2\ge 4bc$ nên $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{4}{b+c}$.

Suy ra $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\ge\frac{4a}{b+c}$.

Viết hai BĐT tương tự rồi cộng theo vế, suy ra đpcm.

**Ví dụ 6.** Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn x + y + z + 2 = xyz. CMR:

$$2(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})\le x+y+z+6. \quad (6)$$

**Lời giải.** Với chú ý

$$2(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})=(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2-x-y-z$$

ta đưa (6) về dạng

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\sqrt{2(x+y+z+3)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\sqrt{2[(x+1)+(y+1)+(z+1)]}.$$

Theo cách đặt ẩn phụ trên, ta được BĐT tương đương là $\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}+\sqrt{\frac{a+b}{c}}\le$

$$\le\sqrt{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)[(b+c)+(c+a)+(a+b)]}: \text{ đúng.}$$

**Ví dụ 7.** Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn xy + yz + zx + xyz = 4. CMR:

$$x+y+z\ge xy+yz+zx. \quad (7).$$

**Lời giải.** Biến đổi giả thiết trở thành

$$\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}+\frac{y}{2}\cdot\frac{z}{2}+\frac{z}{2}\cdot\frac{x}{2}+2\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}\cdot\frac{z}{2}=1.$$

Từ đó, đặt $x=\frac{2a}{b+c}, y=\frac{2b}{c+a}, z=\frac{2c}{a+b}$, với a, b, c > 0 và a + b + c = 1. Khi đó (7) trở thành

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

$$\ge\frac{2ab}{(b+c)(c+a)}+\frac{2bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{2ca}{(a+b)(b+c)}.$$

Biến đổi ta được a(a – b)(a – c) + b(b – c)(b – a) + c(c – a)(c – b) ≥ 0: đúng (vì đây là BĐT Schur).

**Bài tập tự luyện.**

**Bài 1.** Cho n ≥ 3 và $x_1x_2\ldots x_n=1$. CMR:

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2}+\frac{1}{1+x_2+x_2x_3}+\ldots+\frac{1}{1+x_n+x_nx_1}\ge 1.$$

**Bài 2.** Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn x + y + z + 2 = xyz. CMR:

a) xy + yz + zx ≥ 2(x + y + z).

b) $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\frac{3}{2}\sqrt{xyz}$.

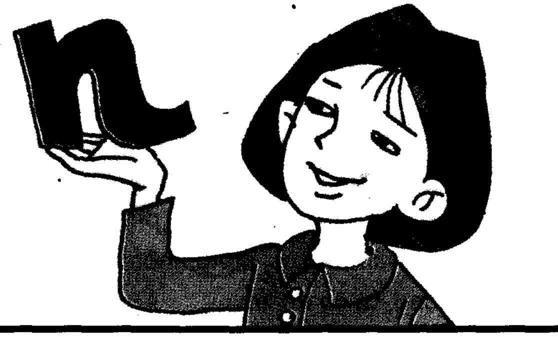
**Bài 3.** Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn xy + yz + zx + 2xyz = 1. CMR:

a) $xyz\le\frac{1}{8}$.

b) $xy+yz+zx\ge\frac{3}{4}$.

**Bài 4.** Cho a, b, c là các số thực dương. CMR:

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\ge\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{9}{2}.$$




# Ứng dụng của định lí Phéc ma nhỏ vào bài toán chia hết

PHẠM HUY HOÀNG
*(HS. 9A5, THCS Giảng Võ, Ba Đình, Hà Nội)*

*Trong quá trình học toán ở cấp THCS, chúng ta được học những dạng toán về chia hết. Định lí Phéc ma nhỏ là một công cụ rất tốt để giải những bài toán dạng này. Sau đây tôi sẽ giới thiệu định lí đó cùng một số ứng dụng vào những dạng toán trên.*

Trước hết xin nhắc lại lí thuyết.

**Định nghĩa.** Cho a, b, n là các số tự nhiên và $n > 0$. Hai số a, b được gọi là đồng dư với nhau theo môđun n nếu $(a - b) \vdots n$.

Kí hiệu là $a \equiv b \pmod{n}$.

*Bây giờ, xin phát biểu, không chứng minh định lí Phéc ma nhỏ.*

**Định lí.** Cho p là một số nguyên tố và n là một số tự nhiên. Thế thì $n^p \equiv n \pmod{p}$.

Đặc biệt, khi $(n, p) = 1$ thì $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

**Bài toán 1.** Cho hai số tự nhiên a, b nguyên tố cùng nhau. Giả sử p là một ước nguyên tố lẻ của $a^2 + b^2$. Chứng minh rằng $p \equiv 1 \pmod{4}$.

**Lời giải.** Ta chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử $p \equiv 3 \pmod{4}$. Đặt $p = 4k + 3$.

Nếu $a \vdots p$ hoặc $b \vdots p$ thì cả a và b đều chia hết cho p (vì $a^2 + b^2 \vdots p$ và p là số nguyên tố): vô lí vì $(a, b) = 1$.

Vậy a, b đều không chia hết cho p.

Do đó $(a, p) = (b, p) = 1$.

Theo định lí Phéc ma nhỏ, ta có $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ hay $a^{4k+2} \equiv 1 \pmod{p}$.

Tương tự $b^{4k+2} \equiv 1 \pmod{p}$.

Suy ra $a^{4k+2} + b^{4k+2} \equiv 2 \pmod{p}$.

Mặt khác $a^{4k+2} + b^{4k+2} = (a^2)^{2k+1} + (b^2)^{2k+1}$, là số chia hết cho $a^2 + b^2$, tức là chia hết cho p.

Do đó $2 \vdots p$: vô lí vì p là số nguyên tố lẻ.

Vậy $p \equiv 1 \pmod{4}$, ta có đpcm.

**Chú ý.** Từ bài toán trên ta thu được một kết quả tương tự:

Nếu p là một số nguyên tố lẻ có dạng $4k + 3$ và $a^2 + b^2 \vdots p$ thì cả a và b đều chia hết cho p.

**Bài toán 2.** Cho hai số tự nhiên a, b thỏa mãn $a > b$ và $a + b \vdots 2$. Chứng minh rằng $a^2 - a - b^2$ không phải là số chính phương.

**Lời giải.** Giả sử $a^2 - a - b^2 = n^2$ (với $n \in \mathbb{N}$).

Suy ra $4a^2 - 4a - 4b^2 = 4n^2$ hay

$(2a - 1)^2 - (2b)^2 = 4n^2 + 1$

$\Leftrightarrow (2a - 1 + 2b)(2a - 1 - 2b) = 4n^2 + 1$.

$\Leftrightarrow [2(a + b) - 1][2(a + b) - 4b - 1] = 4n^2 + 1$.

Vì $a + b \vdots 2$ nên $2a - 1 + 2b$, $2a - 1 - 2b$ đều là các số lẻ chia 4 dư 3. Do đó tồn tại ước nguyên tố lẻ của mỗi số có dạng $4k + 3$.

Tức là $4n^2 + 1^2$ có ước nguyên tố lẻ có dạng $4k + 3$: vô lí do *bài toán 1*.

Vậy $a^2 - a - b^2$ không phải là số chính phương, ta có đpcm.

**Nhận xét.** Từ *bài toán 2*, ta có bài toán hệ quả sau.

**Bài toán 3.** Cho hai số tự nhiên a, b thỏa mãn $a > b > 0$ và $a + b \vdots 2$. Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm tự nhiên và các nghiệm đều không phải là số chính phương

$$x^2 - (a^2 - a + 1)(x - b^2 - 1) - (b^2 + 1)^2 = 0. \quad (1)$$

**Lời giải.** Ta có

$(1) \Leftrightarrow x^2 - (a^2 - a + 1)x + (a^2 - a + 1)(b^2 + 1) - (b^2 + 1)^2 = 0$

*(Xem tiếp trang 8)*


# GIỚI THIỆU

## Cuộc thi Toán tại Canada
## (Canadian Open Mathematics Challenge)

*ThS.* NGUYỄN VĂN NHO *(NXBGDVN)*

*Trong một số báo TTT2 ở năm đầu tiên (năm 2003), chúng tôi có giới thiệu cuộc thi này. Đây là cuộc thi được Hội Toán học Canada và Trung tâm Giáo dục Toán học và Máy tính Canada phối hợp tổ chức, với sự tài trợ của tập đoàn tài chính Sun Life. Cuộc thi này dành cho tất cả các học sinh THPT (Senior high school) tại Canada.*

*Trong số báo này và hai số báo sau, chúng tôi tuyển chọn những bài phù hợp từ các năm 2006, 2007, 2008 và 2009 để giới thiệu cùng các bạn.*

**Bài 1.** *(2006)* Cho f(x) là hàm số thỏa mãn $f(2x + 1) = (x - 12)(x + 13)$, với mọi số thực x. Hãy tính giá trị của f(31).

**Bài 2.** *(2006)* Cho tam giác ABC với M là trung điểm BC. Biết $\widehat{ABM} = 15^o$ và $\widehat{AMC} = 30^o$. Tính số đo góc BCA.

**Bài 3.** *(2006)* Xác định tất cả các nghiệm (x, y) của hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{4}{x} + \dfrac{5}{y^2} = 12 \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{7}{y^2} = 22. \end{cases}$

**Bài 4.** *(2006)* Tìm số các số nguyên n thỏa mãn đồng thời 3 điều kiện sau đây :
- n gồm toàn các chữ số 0 và 1;
- n chia hết cho 6;
- $0 < n < 10^7$.

**Bài 5.** *(2006)* Giả sử n và D là các số nguyên sao cho $n > 0$ và $0 \le D \le 9$.

Tìm số n, nếu biết $\dfrac{n}{180} = 0,(9D5) = 0,9D59D59D59D59D5...$

---

*(Tiếp theo trang 20)*

$\Leftrightarrow x^2 - (a^2 - a + 1)x + (b^2 + 1)(a^2 - a - b^2) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - [(b^2 + 1) + (a^2 - a - b^2)]x + (b^2 + 1)(a^2 - a - b^2) = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = b^2 + 1;\ x_2 = a^2 - a - b^2$.

Vì $a > b$ nên $a^2 - a - b^2 = (a + b)(a - b) - a \ge a + b - a = b > 0$ nên $x_2 > 0$.

Vậy (1) có 2 nghiệm đều là số tự nhiên.

Nếu $x_1$ là số chính phương thì tồn tại số tự nhiên n để $b^2 + 1 = n^2$ hay $(n + b)(n - b) = 1$.

Suy ra $n + b = n - b = 1$.

Do đó $b = 0$: vô lí.

Vậy $x_1$ không phải là số chính phương.

Theo *bài toán 2* thì $x_2$ cũng không phải là số chính phương, ta có đpcm.

**Bài toán 4.** (TTT2 số 82) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2$, ở đó x, y là các số nguyên dương thỏa mãn $A \,\vdots\, 2010$.

**Lời giải.** Ta có $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$.

Vì 3 và 67 là những số nguyên tố dạng $4k + 3$ nên x và y đều chia hết cho 3 và 67.

Suy ra $x \,\vdots\, 201$, $y \,\vdots\, 201$.

Đặt $x = 201m$, $y = 201n$.

Suy ra $A = 201^2(m^2 + n^2)$.

Mà $A \,\vdots\, 2010$ nên $m^2 + n^2 \,\vdots\, 10$.

Suy ra $m^2 + n^2 \ge 10$.

Do đó $A \ge 201^2 \cdot 10$.

Ta thấy $m^2 + n^2 = 10$ khi $(m; n) = (1; 3)$.

Vậy $A_{min} = 201^2 \cdot 10 = 404010$, xảy ra khi $(x; y) = (201; 603)$.

# VẺ ĐẸP CỦA SỐ HỒI QUY

NGUYỄN MINH HIẾU
*(HS. 12A1, trường THPT chuyên Đại học Khoa học Tự nhiên Hà Nội)*

*TTT2 đã nhiều lần đề cập đến vẻ đẹp của các con số như số thân thiện, số hồi quy... Bài viết này tiếp tục trình bày một số vẻ đẹp khác của số hồi quy.*

Trong tập các số tự nhiên ta gặp rất nhiều số có tính chất thú vị: Lấy tất cả các chữ số của nó rồi thực hiện một số phép tính toán số học theo đúng thứ tự của các chữ số đó thì lại được số ban đầu. Người ta gọi những số này là số hồi quy.

Chẳng hạn $24 = 2^3 + 4^2$;

$81 = (8 + 1)^2$;

$145 = 1! + 4! + 5!$;

$2427 = 2^1 + 4^2 + 2^3 + 4^7$.

**Số hồi quy dạng lũy thừa**

Nhà toán học Hardy đã phát hiện các số hồi quy đặc biệt sau

$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$;

$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$;

$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$;

$407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$.

Các số này đều có 3 chữ số và bằng tổng các lập phương của 3 chữ số của nó.

Sự trùng hợp này làm người ta kinh ngạc. Và ngạc nghiên hơn là sau khi được xem kết quả trên của Hardy, một người đã tìm được kết quả tương tự cho số có 4, 5, 6 chữ số là

$1634 = 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4$;

$54748 = 5^5 + 4^5 + 7^5 + 4^5 + 8^5$;

$548834 = 5^6 + 4^6 + 8^6 + 8^6 + 3^6 + 4^6$.

Người ta gọi những số tự nhiên có n chữ số thỏa mãn tính chất: bằng tổng các lũy thừa bậc n của các chữ số của nó là số hồi quy dạng lũy thừa.

Vấn đề đặt ra là với số tự nhiên n như thế nào thì tồn tại số hồi quy dạng này và với số n đó thì có bao nhiêu số hồi quy thỏa mãn?

Năm 1986, giáo sư Diluna người Mĩ đã khéo léo chứng minh được sự hữu hạn của số n như sau.

Giả sử $A_n = \overline{a_1a_2\ldots a_n}$ là một số hồi quy dạng lũy thừa. Như thế $A_n \geq 10^{n-1}$ và

$$A_n = a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n \leq n9^n.$$

Suy ra $10^{n-1} \leq n9^n$ hay $\left(\frac{10}{9}\right)^n \leq 10n$.

Khi n rất lớn thì sự tăng của $\left(\frac{10}{9}\right)^n$ sẽ nhanh hơn 10n.

Hơn nữa ta có $\left(\frac{10}{9}\right)^{60} < 556,4798 < 10 \cdot 60$;

$\left(\frac{10}{9}\right)^{61} > 618,3109 > 10 \cdot 61$.

Vậy với $n \geq 61$ thì $\left(\frac{10}{9}\right)^n > 10n$. (*)

Vậy số hồi quy dạng lũy thừa có tối đa 60 chữ số.

**Chú ý.** Ta có thể chứng minh (*) bằng phương pháp quy nạp toán học.

Nhờ máy tính, năm 1975, Diluna đã thống kê các số hồi quy dạng lũy thừa đầu tiên là: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 153, 370, 371, 407, 1634, 8208, 9674, 54748, 92727, 93084, 548834, 1741725, 4210818, 9800817, 9926315, 24678050, 24678051.

Tuy nhiên, cho đến nay, người ta vẫn chưa tìm được hết các số hồi quy dạng này.

**Số hồi quy dạng đối xứng**

Người ta thường gọi những số hồi quy loại này là số hồi văn. Đó là những số tự nhiên đọc xuôi hay ngược thứ tự đều cho cùng một số. Chẳng hạn như các số 121, 2442,...

Người ta nhận thấy có những số tự nhiên đem cộng với số viết theo thứ tự ngược lại của số đó để được số mới, rồi lại tiếp tục thực hiện quá trình đó thì sau một số lần thực hiện ta sẽ được số hồi quy dạng đối xứng.

Chẳng hạn $83 + 38 = 121$;

$68 + 86 = 154$, $154 + 451 = 605$, $605 + 506 = 1111$.

Câu hỏi đặt ra là: Có phải tất cả các số tự nhiên đều có tính chất trên?

Bài toán này vẫn chưa có câu trả lời.

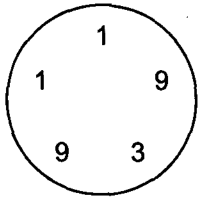
Ban đầu, người ta kiểm tra từng số một, từ nhỏ đến lớn. Tuy nhiên, khi tính đến số 196 thì đã thực hiện tới 5000 bước mà vẫn chưa được số hồi quy.

Sau này, người ta phát hiện ra rằng trong 100000 số tự nhiên đầu tiên, có 5996 số sau nhiều bước thực hiện cũng vẫn chưa ra được số hồi quy.

Tuy thế, cùng với sự phát triển của công nghệ thông tin, người ta tin rằng càng ngày sẽ càng tìm được nhiều số hồi quy dạng đối xứng này.

Một vấn đề khác liên quan đến số hồi quy đối xứng là mối liên hệ của số này với số nguyên tố. Ta thấy, các số hồi quy đối xứng có nhiều hơn 1 chữ số mà là số nguyên tố thì đều phải có lẻ chữ số (vì nếu có chẵn chữ số thì số này sẽ chia hết cho 11). Việc nghiên cứu về số hồi quy đối xứng là số nguyên tố vẫn chưa đạt được nhiều thành tựu. Người ta đã tìm ra được một số tính chất đặc trưng của dạng số này. Vấn đề đặt ra là có hữu hạn hay vô hạn số hồi quy đối xứng là số nguyên tố? Câu hỏi này cũng chưa có lời giải.

Các nhà toán học đã tìm ra một số hồi quy đối xứng đặc biệt là số 19391. Số này là số nguyên tố và khi viết 5 chữ số của nó (theo đúng thứ tự) trên một mặt đồng hồ thì dù đọc các số có 5 chữ số theo chiều nào, bắt đầu từ số nào cũng đều được một số nguyên tố.




Một vấn đề khác là mối liên quan của số hồi quy đối xứng với số là lũy thừa của một số tự nhiên.

Có những số hồi quy đối xứng khi bình phương hay lũy thừa bậc cao cũng thu được số hồi quy đối xứng.

Chẳng hạn như

$11^2 = 121$;

$22^2 = 484$;

$111^2 = 12321$;

$1111^2 = 1234321$;

$11^3 = 1331$;

$111^3 = 1367631$.

Một tính chất nữa được nêu ra là: tích hai số hồi quy đối xứng là số hồi quy đối xứng.

Chẳng hạn

$111 \cdot 121 = 13431$;

$111 \cdot 131 = 14541$;

$121 \cdot 212 = 25652$;

$121 \cdot 141 = 29892$.

Tuy nhiên có bao nhiêu cặp số thỏa mãn tính chất này vẫn là câu hỏi còn bỏ ngỏ.

Các bạn thấy đấy, có những vấn đề trong toán học tưởng như đơn giản nhưng thật khó giải quyết. Biết đâu sẽ có bạn đọc của TTT sau này sẽ trả lời được những câu hỏi trên.