Thông minh nghĩa là biết cách hỏi hợp lý, nghe chăm chú, trả lời từ tốn và ngừng nói khi cần thiết

A. Phương pháp "So sánh hai đoạn thẳng".

Để chứng minh ***hai đoạn thẳng bằng nhau*** *ta có thể sử dụng một trong các phương pháp sau đây:*

1)
- Trong một tam giác cân, hai cạnh bên bằng nhau.
- Trong một tam giác đều, các cạnh bằng nhau.
- Các cạnh của đa giác đều thì bằng nhau.

2) Trong hai tam giác bằng nhau thì các cạnh tương ứng bằng nhau.

3)
- Hai đoạn thẳng cùng bằng một đoạn thẳng thứ ba thì bằng nhau.
- Trung tuyến thuộc cạnh huyền của một tam giác vuông thì bằng một nửa cạnh huyền.
- Đường trung bình ứng với một cạnh của tam giác thì bằng một nửa cạnh ấy.
- Đường trung trực của đoạn thẳng chia đoạn thẳng ấy thành hai đoạn thẳng bằng nhau.
- Đường trung tuyến của tam giác chia cạnh tương ứng thành hai đoạn thẳng bằng nhau.

a. Trong một hình bình hành:
- Các cạnh đối diện thì bằng nhau.
- Các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

b. Trong một hình thang cân:
- Hai cạnh bên thì bằng nhau.
- Hai đường chéo thì bằng nhau.

c. Trong một hình chữ nhật:
- Các cạnh đối diện thì bằng nhau.
- Các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.
- Hai đường chéo thì bằng nhau.

d. Trong một hình thoi:
- Các cạnh bên thì bằng nhau.
- Các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

e. ***Hình vuông*** có tất cả các tính chất trên.

f. Trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau:
- Các dây cách đều tâm thì bằng nhau.
- Các dây trương các cung bằng nhau thì bằng nhau.

g. Hai tiếp tuyến phát xuất từ một điểm đến một đường tròn thì bằng nhau.

h. Một điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc ấy.

i. Hai đoạn thẳng cùng *nghiệm đúng một hệ thức* thì bằng nhau.

Để chứng minh ***đoạn thẳng a lớn hơn đoạn thẳng b****, ta có thể sử dụng một trong các phương pháp sau đây:*

1) Hai đoạn thẳng a và b là hai đoạn thẳng đối diện với hai góc A và B của tam giác ABC và $\widehat{A} > \widehat{B}$.
2) a = m + n và b, m, n là độ dài ba cạnh của tam giác.
3) a là độ dài cạnh huyền và b là độ dài của cạnh góc vuông của tam giác vuông.
4) a và b là hai dây cung của một đường tròn (hay hai đường tròn bằng nhau) mà khoảng cách từ tâm đường tròn đến a nhỏ hơn khoảng cách từ tâm đường tròn đến b.
5) Cung nhỏ của đường tròn trương dây a lớn hơn cung nhỏ của đường tròn trương dây b.

6) Góc nội tiếp của đường tròn chắn dây cung a lớn hơn góc nội tiếp của đường tròn đó chắn dây cung b.
7) Nếu a ≤ b thì sẽ đưa đến một điều vô lý.

Áp dụng:

Các Bài tập dành cho “ tất cả học sinh ”

1) Cho hình thang ABCD. Đường phân giác của góc A cắt cạnh BC tại một điểm E. ***Cm:*** AB = BE.
2) Cho tam giác ABC. Trong nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C, ta dựng đường vuông góc với AB tại A và lấy trên đó một điểm D sao cho AD = AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AC có chứa điểm B ta dựng đường vuông góc với AB tại A và lấy trên đó một điểm E sao cho AE = AC. Chứng minh CD = BE.
3) Trên tia phân giác của một góc nhọn xOy ta lấy một điểm A. Vẽ hai đường tròn bất kỳ đi qua O và A. Đường tròn thứ nhất cắt Ox ở M và cắt Oy ở P. Đường tròn thứ hai cắt Ox ở N và Oy ở Q. Chứng minh MN = PQ.
4) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Kẻ hai đường cao BI và CK. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh MI = MK.
5) Cho tam giác ABC và trung tuyến AM thuộc cạnh BC. Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho MD = MA. Chứng minh BD = AC.
6) Cho đường tròn dường kính AB. Từ A và B kẻ hai dây cung bất kỳ song song với nhau, hai dây cung này cắt đường tròn lần lượt tại C và D. Chứng minh AC = BD.
7) Hai đường tròn (O) và (O’) có bán kính bằng nhau, cắt nhau tại A và B. Đường tròn (O) cắt đường nối tâm tại C và đường tròn (O’) cắt đường nối tâm tại D. Chứng minh AC = BD.
8) Cho một đường tròn dường kính AB. M là một điểm bất kỳ trên đường tròn. Đường tròn (A; AM) cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là N. Chứng minh BM = BN.
9) Qua một điểm P nằm trong đường tròn (O), ta kẻ hai dây cung bất kỳ APB và CPD sao cho OP là tia phân giác của góc hợp bởi hai dây cung AB và CD. Chứng minh AB = CD và AD = BC.
10) Cho tam giác ABC vuông tại A và $\hat{B} > \hat{C}$. Kẻ đường cao AH. Trên tia BH lấy một điểm D sao cho HD = HB. Kẻ DI vuông góc với AC tại I và kẻ CK vuông góc với AD tại K. Chứng minh DI = DK.
11) Cho tam giác ABC. Kẻ đường cao AH và BK. Tia AH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D. Kẻ CE vuông góc với BD tại E. Chứng minh CE = CK.
12) Cho hình thang ABCD. Qua giao điểm I của hai đường chéo ta kẻ đường thẳng song song với cạnh đáy AB, đường này cắt cạnh bên AD ở E và cắt cạnh bên BC ở F. Chứng minh IE = IF.
13) Cho hình chữ nhật ABCD. Trên tia đối của tia AD, lấy điểm F sao cho AF = AB. Trên tia đối của tia AB, lấy điểm E sao cho AE = AD. Đường thẳng FC cắt AB ở N và đường thẳng EC cắt AD ở M. Chứng minh MD = BN.
14) Cho tam giác ABC. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp trong tam giác đó. Tia AI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại một điểm D. Chứng minh DC = DB = DI.
15) Cho đường tròn dường kính AB. Từ đầu mút A ta kẻ một dây cung AC và từ đầu mút B ta kẻ tiếp tuyến với đường tròn. Tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt BC ở F, cắt đường tròn ở H, và cắt tiếp tuyến tại B ở điểm D. Chứng minh BF = BD, HF = HD.
16) Cho tam giác ABC, AD là phân giác trong của góc A. Từ D kẻ đường song song với AB, cắt AC ở điểm E. Qua E kẻ đường song song với BC, cắt AB ở F. Chứng minh AE = BF.

17) Cho một đường tròn (O) và một điểm C ở ngoài đường tròn. Từ C kẻ hai tiếp tuyến CA, CB đến đường tròn (O). Lấy điểm P trên đoạn thẳng AB và kẻ đường vuông góc với OP, đường này cắt đoạn thẳng CB tại điểm D và cắt tia CA tại điểm E. Chứng minh PE = PD, AE = BD.

Biết dùng điều đã học để biết thêm điều mới
thì có thể thành Thầy thiên hạ

B. Phương pháp "So sánh hai góc – Số đo góc".

*Để chứng minh **hai góc bằng nhau** ta có thể sử dụng một trong các phương pháp sau đây:*

1) Tia phân giác của một góc chia góc ấy thành hai góc bằng nhau.
2) – Trong một tam giác cân, hai góc ở đáy bằng nhau.
 – Trong một tam giác cân, đường trung tuyến, đường cao kẻ từ đỉnh cũng đồng thời là đường phân giác của góc ở đỉnh.
 – Tam giác đều có tất cả các tính chất trên.
3) Hai đường thẳng song song hợp với một cát tuyến:
 – Những góc so le trong bằng nhau,
 – Những góc so le ngoài bằng nhau,
 – Những góc đồng vị bằng nhau.
4) – Hai góc có cạnh tương ứng song song thì bằng nhau nếu cùng nhọn hoặc cùng tù.
 – Hai góc có cạnh tương ứng vuông góc thì bằng nhau nếu cùng nhọn hoặc cùng tù
5) – Hai góc cùng bằng một góc thứ ba thì bằng nhau.
 – Hai góc cùng bù với một góc thứ ba thì bằng nhau.
 – Hai góc cùng phụ với một góc thứ ba thì bằng nhau.
 – Hai góc cùng bằng n lần với một góc thứ ba thì bằng nhau.
6) – Trong hai tam giác bằng nhau thì các góc tương ứng bằng nhau.
 – Trong hai tam giác đồng dạng thì các góc tương ứng bằng nhau.
7) Trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau, những góc nội tiếp (hoặc những góc giữa một tia tiếp tuyến và một dây cung đi qua tiếp điểm) chắn những cung bằng nhau thì bằng nhau.
8) Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì tia kẻ từ giao điểm đó qua tâm đường tròn là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.
9) – Các góc đối củahình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông thì bằng nhau.
 – Các góc ở đáy của một hình thang cân thì bằng nhau.
 – Các góc của đa giác đều thì bằng nhau.

*Để chứng minh **góc α lớn hơn góc β** ta có thể sử dụng một trong các phương pháp sau đây:*

1) Hai góc α và β là hai góc đối diện với hai cạnh a và b của một tam giác mà a > b.
2) Hai góc α và β có đỉnh chung, có một cạnh chung, nằm về một phía của cạnh chung và cạnh thứ hai của góc β nằm giữa cạnh chung và cạnh thứ hai của góc β.
3) Hai góc α và β cùng nội tiếp trong một đường tròn và dây cung (hay cung) bị chắn bởi α lớn hơn dây cung (hay cung) bị chắn bởi β.
4) Nếu $\alpha \leq \beta$ thì sẽ dẫn đến một điều vô lý.

*Để tính **số đo của một góc** trong một bài toán ta có thể sử dụng một trong các phương pháp sau đây:*

1) Tổng các góc trong một tam giác bằng 180^0.

2) Góc ngoài của một tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó.
3) Mỗi góc của tam giác đều bằng 60^0.
4) Góc lớn nhất trong tam giác vuông có số đo bằng 90^0. Các góc còn lại nhỏ hơn 90^0.
5) Hai góc kề của Hình bình hành, Hình chữ nhật, Hình thoi, Hình vuông có tổng bằng 180^0.
6) Hai góc trong cùng phía, ngoài cùng phía của hai đường thẳng song song bị cắt bởi một cát tuyến có tổng bằng 180^0.
7) Hai góc đối của một tứ giác nội tiếp được thì bù nhau.
8) Hai góc một nhọn, một tù có cạnh tương ứng song song hoặc vuông góc thì bù nhau.
9) Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông. Góc nội tiếp chắn ¼ đường tròn bằng 45^0.

Áp dụng:

Các Bài tập dành cho " tất cả học sinh "

1) Cho một tam giác ABC (AB > AC). Trên cạnh AB ta lấy một điểm D sao cho DB = AB – AC. Từ A kẻ AH ⊥ CD. Chứng minh $\widehat{DAH}=\widehat{CAH}$.
2) Cho tam giác ABC cân tại A. Kẻ đường cao AH xuống cạnh BC. Gọi M là trung điểm của cạnh AC. Chứng minh $\widehat{AHM} = \widehat{HAM}$.
3) Từ một điểm M ở ngoài một đường tròn (O), ta kẻ một tiếp tuyến MA với đường tròn và trên tia MA, lấy một điểm B sao cho AB = AM. Chứng minh $\widehat{AMO} = \widehat{ABO}$.
4) Cho tam giác ABC, trong đó $\widehat{A} = 2.\widehat{B}$. Kẻ phân giác trong AD của góc $\widehat{A}$. Từ chân D của phân giác, ta kẻ đường song song với AB, cắt AC ở E. Qua E, ta kẻ đường song song với AD, cắt BC ở F. Qua F, kẻ đường song song với AB cắt AC ở I. Tìm tất cả các góc bằng góc B.
5) Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia AB, ta lấy một điểm B' sao cho B'A = BA và trên tia đối của tia AC lấy một điểm C' sao cho C'A = CA. Chứng minh $\widehat{ACB} = \widehat{AC'B'}$.
6) Cho tam giác cân ABC và P là một điểm bất kỳ trên cạnh đáy BC. Gọi M là trung điểm của BC, N là trung điểm của PC. Qua M kẻ đường vuông góc với BC, cắt AB ở E. Qua N kẻ đường vuông góc với BC, cắt AC ở F. Chứng minh $\widehat{EPF}= \widehat{A}$.
7) Từ một điểm D trên cạnh đáy BC của một tam giác cân ABC, ta kẻ đường vuông góc DI xuống cạnh bên AC. Chứng minh $\widehat{IDC}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}$.
8) Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi H là chân đường cao kẻ từ đỉnh A đến cạnh BC. Chứng minh $\widehat{OAC}=\widehat{BAH}$.
9) Trên nửa đường tròn dường kính AB, ta lấy một điểm C và D là một điểm bất kỳ trên đoạn thẳng AB sao cho đường vuông góc kẻ từ D với đoạn AB, cắt đoạn thẳng AC tại một điểm E và cắt tiếp tuyến tại điểm C với nửa đường tròn tại một điểm F. Chứng minh $\widehat{FCE}=\widehat{FEC}$.
10) Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$. Trên tia Ox, lấy hai điểm A và B. Trên tia Oy, lấy hai điểm C, D sao cho OA = OC, OB = OD. Đoạn thẳng AC cắt BD tại M . Chứng minh điểm M nằm trên tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.
11) Cho tam giác ABC, trong đó $\widehat{B} > \widehat{C}$. Trên cạnh AC, ta lấy một điểm D sao cho hệ thức sau đây thỏa mãn: $AB^2 = AD.AC$. Chứng minh $\widehat{ABD}=\widehat{ACE}$.
12) Cho một đường tròn và hai dây cung AB = AC. Trên cung AC (không chứa điểm B), ta lấy một điểm M. Gọi S là giao điểm của AM và BC. Chứng minh $\widehat{ASC}=\widehat{MCA}$.
13) Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn. Từ điểm chính giữa M của cung AC, Ta vẽ dây cung MN // AB, dây cung này cắt BC ở I và cắt đường tròn ở N. Chứng minh tam giác BIM cân.

14) Cho tam giác ABC vuông ở A. Trên tia AB ta lấy một điểm D sao cho AD = AC và trên tia AC, ta lấy một điểm E sao cho AE = AB. Kẻ đường cao AH của tam giác ABC. Đường thẳng AH cắt DE ở điểm M. Hãy so sánh các tam giác ABC, ADE và tìm các góc tương ứng bằng nhau.
15) Trên tia phân giác Oy của góc $\widehat{xOy}$, ta lấy một điểm A và vẽ đường tròn (A; OA). Đường tròn này cắt tia Ox ở điểm B và tia Oy ở điểm C. Chứng minh $\widehat{OBA}=\widehat{OCA}$.
16) Cho một tam giác ABC, trong đó $\widehat{B}<\widehat{C}<\widehat{A}$. Lấy trên cạnh BC hai điểm M và N sao cho $\widehat{CAM}=\widehat{B}$, $\widehat{BAN}=\widehat{C}$. Chứng minh $\widehat{CMA}=\widehat{BNA}$.
17) Cho tam giác ABC. Gọi N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA và I, J, K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng NP, BP, CN. Chứng minh $\widehat{QJI}=\widehat{JQK}$.
18) Cho tam giác ABC, trong đó $\widehat{A}=2.\widehat{B}$. Lấy một điểm M bất kỳ trên cạnh AB. Trên tia CA lấy một điểm N sao cho AM = AN (điểm N ở ngoài đoạn thẳng AC). Chứng minh $\widehat{BMD}=\widehat{ABC}$.

Nuôi con chẳng răn là lỗi ở cha, Dạy trò không nghiêm là lỗi ở thầy.
Cha nghiêm, Thầy giỏi mà học không nên là Tội ở con

C. Phương pháp " Chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau "

1) Trong một tam giác cân (hay tam giác đều), đường phân giác của góc ở đỉnh hoặc đường trung tuyến thuộc cạnh đáy cũng đồng thời là đường cao thuộc cạnh đáy.
2) *Định nghĩa:* Tam giác vuông là tam giác có hai cạnh vuông góc với nhau.
Để chứng minh một tam giác là tam giác vuông, ta có thể chứng minh:
- Tam giác đó nội tiếp trong nửa đường tròn.
- Tam giác đó có tổng hai góc bằng 90^0 hoặc 1v.
- Tam giác đó có đường trung tuyến ứng với một cạnh thì bằng một nửa cạnh ấy.
- Tam giác đó có độ dài các cạnh thỏa mãn hệ thức Pytago hoặc các hệ quả.
3) Đường phân giác của hai góc kề và bù nhau thì vuông góc với nhau.
4) – Nếu a // b mà a $\perp$ c thì b $\perp$ c.
– Nếu a // b và c // d mà a $\perp$ c thì b $\perp$ d.
5) – Các đường chéo của hình thoi (hoặc hình vuông) thì vuông góc với nhau.
– Các cạnh của hình chữ nhật (hoặc hình vuông) thì vuông góc với nhau.
6) – Đường kính đi qua trung điểm của một dây cung không đi qua tâm thì vuông góc với dây cung ấy.
– Đường kính đi qua trung điểm một cung thì đi qua trung điểm của dây cung và cũng vuông góc với dây cung ấy.
7) – Tiếp tuyến của một đường tròn thì vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.
– Hai đường tròn cắt nhau thì đường nối tâm vuông góc vơí dây chung.
– Đường trung trực của đoạn thẳng thì vuông góc với đoạn thẳng đó.

Áp dụng:

Các Bài tập dành cho " tất cả học sinh "

1. Cho một tam giác ABC vuông góc ở A và trên BC có một điểm D sao cho CD = CA. Trên cạnh AB ta lấy một điểm E sao cho AE = AH (AH là đường cao của ΔABC). Chứng minh:
a) AD $\perp$ EH   b) DE $\perp$ AB

2. Cho một góc xOy và một điểm M nằm trong góc ấy. Từ M kẻ $MB \perp Oy$. Gọi A là trung điểm của OM và H là trung điểm của BC. Chứng minh $AH \perp BC$
3. Cho một nửa đường tròng đường kính AB. Trong cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, có chứa nửa đường tròn ta kẻ các tia Ax, By vuông góc với AB. Tại một điểm C bất kì trên nửa đường tròn, ta dựng tiếp tuyến với nửa đường tròn. Tiếp tuyến này cắt tia Ax ở điểm D và cắt tia By ở điểm E. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB. Chứng minh $OE \perp OD$
4. Cho ba điểm B, H, C sao cho BC = 13 cm; BH = 9 cm, HC = 4 cm. Từ H ta dựng đường vuông góc với đường thẳng BC và trên đường thẳng vuông góc này, chọn một điểm A sao cho AH = 6 cm. Chứng minh $AB \perp AC$
5. Cho hình vuông ABCD. Trên tia BC, ta lấy một điểm M nằm ngoài các điểm B,C và trên tia CD ta lấy một điểm N sao cho DN = BM.. đường vuông góc với MA tại M và đường vuông góc với NA tại N cắt nhau ở F. Chứng minh: $CF \perp CA$
6. Cho ΔABC vuông góc ở A, đường cao AH. M là trung điểm của cạnh BC và N là trung điểm của cạnh AC. Đường thẳng MN cắt tia AH ở điểm D. Chứng minh $AM \perp DC$
7. Tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O , H là chân đường cao kẻ từ A. Tia phân giác của góc OAH cắt đường tròn tại điểm M. Chứng minh $OM \perp BC$
8. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh AD lấy một điểm E và trên cạnh DC lấy một điểm F sao cho AE = DF. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng EF và BF. Chứng minh $AF \perp MN$
9. Cho một hình bình hành ABCD có AB = AC. Đường thẳng đi qua B và song song với AC, cắt đường thẳng chứa cạnh DC tại điểm E. Chứng minh $AE \perp BC$
10. Cho một hình vuông ABCD. Trên tia BC ta lấy một điểm M nằm ngoài đoạn thẳng BC và trên tia CD ta lấy một điểm N sao cho DN = BM. Kẻ từ M một đường thẳng song song với AN và kẻ từ N một đường thẳng song song với AM. Hai đường thẳng này cắt nhau tại một điểm F. Chứng minh $AM \perp AN$ và $AF \perp MN$
11. Từ một điểm P ở ngoài một đường tròn tâm O, ta kẻ một tiếp tuyến PA và một cát tuyến PCD đến đường tròn . Phân giác của góc CAD cắt đường tròn ở điểm E. Chứng minh $OE \perp CD$
12. Cho bốn điểm A, B, C, D theo thứ tự ấy sao cho AB = BC = CD. Gọi M là đỉnh của một tam giác đều đáy BC và P là giao điểm của đường thẳng AM với đường vuông góc với đường thẳng AD kẻ từ điểm D. Chứng minh rằng:
    a) $AM = MP$ b) $BM // CP$ c) $MC \perp AM$ d) $PC \perp MD$
13. Cho hai đường tròn tam O và O’ ngoài nhau. Kẻ các tiếp tuyến chung và tiếp tuyến chung ngoài, chúng cắt nhau ở M và N. Chứng minh: a) $OM \perp O'M$ b) $ON \perp O'N$
14. Cho ΔABC, kẻ đường cao BH, CH’. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Chứng minh: $OA \perp HH'$
15. Cho một hình vuông ABCD. Trên cạnh AD lấy một điểm M và trên cạnh DC lấy 1 điểm N sao cho AM = DN. Chứng minh: a) BM = AN. b) $BM \perp AN$ và $BN \perp CM$.
    c) Hai đường CM và AN cắt nhau tại I . Chứng minh $BI \perp MN$
16. Cho một tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau ở một điểm N. Các đường thẳng AD và CB cắt nhau ở một điểm M. Chứng minh rằng các đường phân giác của các góc AMB và AND vuông góc với nhau.
17. Cho tam giác cân ABC nội tiếp trong một đường tròn. D là một điểm trên cung nhỏ BC. Nối CD và DB. Trên tia DB ta lấy một đoạn DE = CD. Nối CE cắt AD ở I và cắt đường tròn ở một điểm F. Gọi M là trung điểm của AC. Chứng minh
    a) AD là phân giác của góc BDC. b) $AD \perp CE$ c) $MI \perp FD$

Sự tiến bộ là một từ ngữ đẹp, song động cơ của sự tiến bộ là sự thay đổi và sự thay đổi nào cũng có những kẻ thù của nó.

D. Phương pháp "Chứng minh các đường thẳng song song"

1) Khi hai đường thẳng tạo với một cát tuyến:
   - Hai góc ở vị trí so le trong (hoặc so le ngoài) bằng nhau, hoặc
   - Hai góc ở vị trí đồng vị thì bằng nhau, hoặc
   - Hai góc ở vị trí trong cùng phía (hoặc ngoài cùng phía) bằng nhau

   thì hai đường thẳng đó song song với nhau.
2) – Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
   - Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
   - Đường trung bình ứng với một cạnh của một tam giác thì song song với cạnh ấy.
   - Đường trung bình của một hình thang thì song song với hai cạnh đáy.
3) Các cạnh đối của hình bình hành (hoặc hình chữ nhật, hoặc hình thoi, hoặc hình vuông) thì song song với nhau.
4) Nếu một đường thẳng chia hai cạnh của một tam giác thành những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ thì nó song song với cạnh còn lại.

Áp dụng:

Các Bài tập dành cho " tất cả học sinh "

1. Cho một góc xOy. Trên tia Ox ta lấy hai điểm A và B. Trên tia Oy ta lấy hai điểm C và D sao cho OC = OA và OD = OB. Chứng minh AC// BD
2. Hai đường tròn tâm O và O' cắt nhau tại hai điểm A và B. Qua A kẻ một cát tuyến cắt đường tròn tâm O tại M và đường tròn tâm O' tại M'. Qua B ta cũng kẻ một cát tuyến cắt đường tròn tâm O tại điểm M và đường tròn tâm O' tại N'. Chứng minh MN// M'N'.
3. Cho một đường tròn tâm O. Lấy trên đó ba điểm A, B, C . Vẽ đường tròn đường kính BC, đường này cắt đường thẳng AB tại một điểm I. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Chứng minh OM// CI
4. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH . Từ H ta kẻ $HF \perp AB$ và $HE \perp AC$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là trung điểm của cạnh AB. Đường thẳng MN cắt đường thẳng AH tại điểm D. Chứng minh EF// DB.
5. Cho một tứ giác lồi ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh MN // QP
6. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF có chung nhau một cạnh AB. Chứng minh DE // CF
7. Cho ΔABC, M là một điểm bất kì trên cạnh AB, N là trung điểm cạnh AC. Trên tia MN ta lấy một điểm sao cho $NP = MN$. Chứng minh: MC // AP và CP // AB.
8. Cho tam giác ABC và trung tuyến AM thuộc cạnh BC. Tia phân giác của góc AMB cắt cạnh AB ở điểm P và tia phân giác của góc AMC cắt cạnh AC ở điểm Q. Chứng minh PQ // BC
9. Cho ba tia Ox, Oy, Oz cùng xuất phát từ điểm O. Từ các điểm B và B' nằm trên tia Oy, ta kẻ các đường $BA \perp Ox$, $B'A' \perp Ox$ và $BC \perp Oz$, $B'C' \perp Oz$. Chứng minh AC // A'C'
10. Chứng minh rằng các dây không bằng nhau nối những đấu mút của một cung với các đầu mút của một cung khác bằng cung ấy, thì song song với nhau.
11. Cho tam giác ABC. Kẻ đường cao AH. Tia AH cắt đường tròn tại một điểm H'. Đường kính qua A cắt đường tròn tại điểm thứ hai A'. Chứng minh A'H' // BC

12. Cho hai đường tròn đồng tâm. Từ một điểm I nằm trong đường tròn lớn và nằm ngoài đường tròn nhỏ, ta kẻ hai tiếp tuyến đến đường tròn nhỏ. Tiếp tuyến thứ nhất cắt đường tròn lớn tại A và C. Tiếp tuyến thứ hai cắt đường tròn lớn tại B và D. Chứng minh AB // CD
13. Cho một góc xOy. Kẻ tia phân giác Ot và lấy trên đó một điểm I. Đường tròn tâm I, bán kính OI cắt Ox ở điểm A, cắt Ot ở điểm B và cắt Oy ở điểm C. Đường thẳng AB cắt cạnh Oy ở E. Đường thẳng CB cắt cạnh Ox ở điểm D. Chứng minh: a) CE = AD b) AC // DE
14. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Kẻ các tiếp tuyến Ax, By và tiếp tuyến tại một điểm M trên nửa đường tròn. Tiếp tuyến này cắt Ax ở C và By ở D. Gọi N là giao điểm của AD và BC, P là giao điểm của OC và AM, Q là giao điểm của OD và BM.
    a) Chứng minh MN// AC b) Chứng minh PQ//AB
15. Cho hình bình hành ABCD. Đường phân giác của góc A cắt đường chéo BD ở điểm M và đường phân giác góc D cắt đường chéo AC ở điểm N. Chứng minh MN// AD.
16. Cho một phần tư đường tròn tâm O, giới hạn bởi hai bán kính vuông góc OA, OB. Trên cung AB ta lấy hai điểm M và N sao cho AM = BN. Các đường thẳng AM và BN giao nhau tại điểm C. Chứng minh: a) MN // AB b) $OC \perp MN$
17. Cho tứ giác ABCD trong đó AB = AD, BC = CD. Kéo dài các cạnh cắt nhau ở M và N . Chứng minh: MN// BD
18. Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn tâm O, kéo dài các cạnh AB và CD cho gặp nhau tại một điểm M. Chứng minh đường phân giác của góc M song song với một phân giác của góc họp thành bởi hai đường chéo.

Không có kho báu nào quý bằng học thức. Hãy tích lũy lấy nó, lúc còn đủ sức.

E. Phương pháp "Chứng minh ba điểm thẳng hàng"

1) Điểm M được gọi là điểm nằm giữa hai điểm A, B nếu ta có AM + MB = AB
2) Nếu hai góc ở vị trí đối đỉnh mà bằng nhau và có hai cạnh cùng nằm trên một đường thẳng thì hai cạnh còn lại cũng nằm trên cùng một đường thẳng.
3) Hai góc kề và bù nhau thì có một cạnh chung và hai cạnh còn lại nằm trên cùng một đường thẳng. Hai góc kề và bù nhau thì có tổng số đo bằng 180^0 (hoặc là 2v)
4) Để chứng minh ba điểm A, B, M thẳng hàng, ta có thể chứng minh:
   - MA, MB cùng song song với một đường thẳng.
   - MA, MB cùng vuông góc với một đường thẳng (hoặc hai đường thẳng song song).
   - Đường thẳng AB đi qua M.
   - $\widehat{AMB} = 180^0 = 2v$
   - MA, MB là hai tia phân giác của hai góc đối đỉnh.
5) Các điểm A, M, B cùng thuộc một tập hợp điểm là đường thẳng (như là đướng cao, đường trung trực, đường trung tuyến, đường phân giác, đường trung bình...)

Áp dụng:

Các Bài tập dành cho " tất cả học sinh "

1. Cho một điểm M nằm giữa hai điểm A, B và một điểm O không nằm trên đường thẳng AB. Gọi A', B' và M' lần lượt là các điểm đối xứng của các điểm A, B, M qua điểm O. chứng minh rằng A', B', M' thẳng hàng.

2. Cho tam giác ABC. Gọi H là trực tâm của tam giác và A là điểm đối xứng của đỉnh A qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. I là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng điểm đối xứng của trực tâm H qua cạnh BC thì nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác và chứng minh rằng ba điểm A', I, H thẳng hàng.
3. ***Chứng minh đường thẳng Simson trong tam giác:*** Cho tam giác ABC nội tiếp trong một đường tròn. Từ một điểm M bất kì trên đường tròn ta kẻ các đường vuông góc MI, MJ, MK lần lượt xuống các đường thẳng AB, AC, BC. Chứng minh rằng ba điểm I, J, K thẳng hàng.
4. ***Chứng minh đường thẳng Euler trong tam giác:*** Cho tam giác ABC. Gọi H là trực tâm, G là trọng tâm, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác, M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC. Chứng minh: a) $\Delta ABH \backsim \Delta MNO$ b) $\Delta AHG \backsim \Delta MOG$ c) Ba điểm H, G, O thẳng hàng
5. Trong một nửa đường tròn đường kính AB, ta lấy một dây BC. Từ một điểm H nằm giữa hai điểm A, B ta kẻ đường vuông góc với AB, đường này cắt đường thẳng BC tại một điểm E. đường tròn đường kính BE cắt nửa đường tròn đường kính AB ở một điểm D. Chứng minh rằng ba điểm A, D, E thẳng hàng.
6. Cho tam giác ABC vuông góc ở A. lấy AB, AC làm cạnh huyền, ta vẽ các tam giác vuông cân ABD, ACE ở phía ngoài tam giác ABC. Chứng minh rằng ba điểm D, A, E thẳng hàng.
7. Cho hình thang cân ABCD (AD = BC), các đường chéo AC và BD cắt nhau tại điểm I; E là trung điểm của CD; F là trung điểm của AB. Chứng minh rằng ba điểm E, I, F thẳng hàng.
8. Cho một đường tròn tâm O, đường kính AB. Lấy một điểm C nằm giữa hai điểm A, B. Vẽ đường tròn đường kính BC, tâm O'. Đường trung trực của đoạn thẳng AC cắt đường tròn O tại hai điểm D, E. Đường thẳng DB cắt đường tròn O' tại điểm F. Chứng minh rằng ba điểm E, C, F thẳng hàng.
9. Cho ΔABC. Kẻ đường cao BP và CQ cắt nhau tại điểm H. gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH, PQ, BC. Chứng minh rằng ba điểm I, J, K thẳng hàng.
10. Cho hai đường tròn tâm O và O' cắt nhau tại hai điểm A, B. Đường thẳng OA cắt đường tròn O tại điểm C và đường tròn O' tại điểm F. Đường thẳng O'A cắt đường tròn O tại điểm E và đường tròn O' tại điểm D. Hai đường thẳng CE và DF cắt nhau tại điểm H. Chứng minh:
    a) Ba điểm C, B, D thẳng hàng.
    b) Ba điểm H, A, B thẳng hàng.
11. Cho tam giác ABC vuông góc tại A. Gọi O là tâm đường tròn đi qua A và tiếp xúc với đường thẳng BC tại điểm B; O' là tâm đường tròn đi qua A và tiếp xúc với đường thẳng BC tại điểm C. Đường thẳng CA cắt đường tròn O tại điểm E và đường thẳng BA cắt đường tròn O' tại điểm D. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh:
    a) Ba điểm O, A, O' thẳng hàng. b) Ba điểm B, O, E thẳng hàng. c) $\Delta OMO'$ vuông
12. Cho một góc xOy. Trên cạnh Ox ta đặt một đoạn AB. Trên cạnh Oy ta đặt một đoạn CD = AB. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AC và BD. Dựng các hình bình hành BAMP và DCMP. Chứng minh:
    a) Ba điểm P, N, O thẳng hàng. b) MN song song với phân giác của góc $\widehat{xOy}$
13. Cho hình chữ nhật ABCD. Nối C với một điểm E trên đoạn thẳng DO và lấy một điểm F trên tia CE sao cho EF = CE. Từ F kẻ $FH \perp DA$ và FG vuông góc với đường thẳng AB. Chứng minh:
    a) AF // DB b) E, H, G thẳng hàng.
14. Cho hình vuông ABCD. Lấy một điểm E trong hình vuông sao cho tam giác CED là tam giác đều. Lấy về phía ngoài hình vuông hai điểm F và G sao cho ΔFCB đều và tam giác AGD cân tại G. Chứng minh:
    a) A, E, F thẳng hàng. b) G, F và tâm O của hình vuông thẳng hàng.

15. Cho một hình thang ABCD. Các đường thẳng AD và BD giao nhau tại một điểm E. Giao điểm của hai đường chéo AC và BD là G. Gọi F và H lần lượt là trung điểm của hai cạnh đáy DC và AB. Chứng minh:
    a) Các điểm F, G, H thẳng hàng. b) Các điểm E, F, G, H thẳng hàng.

Người hỏi về điều mình chưa biết là nhà Bác học. Người xấu hổ không dám hỏi là kẻ thù của chính mình.

F. Phương pháp "Chứng minh chứng minh các đường đồng quy"

1) – Đưa về phương pháp chứng minh các điểm thẳng hàng.
   – Chứng minh đường thẳng thứ ba đi qua giao điểm của hai đường thẳng kia.
2) Trong một tam giác:
   – Ba đường trung tuyến đồng quy tại một điểm (trọng tâm)
   – Ba đường cao đồng quy tại một điểm (trực tâm)
   – Ba đường phân giác đồng quy tại một điểm (tâm đường tròn nội tiếp tam giác)
   – Ba đường trung trực đồng quy tại một điểm (tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác)
3) "Nếu nhiều đường thẳng định ra trên hai đường thẳng song song những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì chúng đồng quy"
4) Định lý Ceva: "Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC ta lấy các điểm tương ứng P, Q, R. Điều kiện cần và đủ để ba đường thẳng AP, BQ, CR đồng quy là $\frac{PB}{PC}+\frac{QC}{QA}+\frac{RA}{RA}=-1$ "
5) ***Chú ý:*** ***Việc chứng minh một đường thẳng đi qua một điểm cố định thường đưa về việc chứng minh các đường thẳng đồng quy hoặc chứng minh 3 điểm thẳng hàng.***

Áp dụng:

Các Bài tập dành cho " tất cả học sinh "

1. Cho một hình bình hành ABCD. Trên cạnh AB ta lấy một điểm M và trên cạnh CD ta lấy một điểm N sao cho DN = BM. Chứng minh ba đường thẳng MN, DB, AC đồng quy tại một điểm
2. Cho hình thang ABCD, M và N lần lượt là trung điểm của hai đáy AB và CD. Chứng minh các đường thẳng MN, AD và BC đồng quy tại một điểm.
3. Cho tam giác ABC vuông góc ở A; AH là đường cao và AM là đường trung tuyến thuộc cạnh huyền. Từ H ta kẻ $HD\perp AB$; $HE\perp AC$. Gọi Q là trung điểm cạnh AC. Qua C kẻ Cx // DE. Chứng minh: a) $AM\perp DE$ b) các đường thẳng AH, QM và Cx đồng quy tại một điểm.
4. Cho một hình bình hành ABCD. Trên tia AD ta lấy một điểm E sao cho DE = AD. Trên tia AB ta lấy một điểm F sao cho BF = AB. Chứng minh:
   a) Ba điểm E, C, F thẳng hàng. b) Ba đường thẳng AC, EB, FD đồng quy.
5. Cho tam giác ABC. Các tia phân giác trong của các góc B và C giao nhau tại điểm E. Các tia phân giác ngoài của các góc B và C giao nhau tại một điểm F. Chứng minh rằng các đường thẳng AB, EF, AC đồng quy.
6. Cho tam giác ABC. Đường tròn đường kính AC và đường tròn đường kính AB cắt nhau tại một điểm D (khác điểm A).Nửa đường tròn đường kính BC cắt cạnh AB tại điểm E và cắt cạnh AC ở điểm F. Chứng minh: a) Ba điểm B, D, C thẳng hàng. b) Ba đường thẳng AD, BE, CF đồng quy.
7. Cho hình thang ABCD. Từ đỉnh D của đáy nhỏ ta kẻ đường thẳng song song với cạnh bên BC, đường này cắt đường chéo AC tại điểm M. Qua đỉnh C ta kẻ đường song song với cạnh bên AD,

đường này cắt cạnh đáy AB tại điểm F. Qua F ta lại kẻ đường song song với đường chéo AC, đường này cắt cạnh bên BC tại điểm P. Chứng minh:

a) MP // AB b) Ba đường thẳng MP, CF, DB đồng quy.

Điều mà anh biết là thế giới của anh, điều mà anh không biết lại là thế giới của người khác.

G. Phương pháp "Xác định hình dạng các hình"

1. *Xác định tam giác cân:*

Một tam giác cân thì:

– Hai góc đáy bằng nhau.
– Hai cạnh bên bằng nhau.
– Đường trung tuyến thuộc cạnh đáy cũng đồng thời là đường cao, đường phân giác của góc ở đỉnh.
– Muốn chứng minh một tam giác là cân, ta chỉ cần chỉ rõ nó thỏa mãn một trong ba điều kiện trên.

2. *Xác định tam giác đều:*

Tam giác đều là một tam giác:

– Có ba cạnh bằng nhau.
– Có ba góc bằng nhau.
– Là tam giác cân có một góc bằng 60^0

3. *Xác định tam giác vuông:*

Định nghĩa: Tam giác vuông là tam giác có hai cạnh vuông góc với nhau.

Để chứng minh một tam giác là tam giác vuông, ta có thể chứng minh:

– Tam giác đó nội tiếp trong nửa đường tròn.
– Tam giác đó có tổng hai góc bằng 90^0 hoặc 1v.
– Tam giác đó có đường trung tuyến ứng với một cạnh thì bằng một nửa cạnh ấy.
– Tam giác đó có độ dài các cạnh thỏa mãn hệ thức Pytago hoặc các hệ quả.

4. *Xác định hình thang:*

– Hình thang là một tứ giác lồi có hai cạnh đối song song.
– Hình thang cân là hình thang có:

✓ Hai góc đáy bằng nhau.
✓ Hai cạnh bên bằng nhau.
✓ Hai đường chéo bằng nhau.

5. *Xác định hình bình hành, hình thoi, hình vuông, hình chữ nhật:*

a) Một tứ giác là hình bình hành khi có một trong các tính chất:

– Có các cặp cạnh đối diện song song.
– Có một cặp cạnh đối diện song song và bằng nhau.
– Có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.
– Có hai cặp góc đối bằng nhau.
– Có hai cặp cạnh đối diện bằng nhau.

b) Một tứ giác là hình chữ nhật khi có một trong các tính chất.

– Có bốn góc vuông (hoặc ba góc vuông)
– Là một hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau.
– Là một hình bình hành có hai góc bằng nhau.

c) Một tứ giác là hình thoi khi có một trong các tính chất :

- Có bốn cạnh bằng nhau.
- Là một hình bình hành có hai cạnh liên tiếp bằng nhau.
- Là một hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau.
- Là một hình bình hành có đường chéo là phân giác của góc ở đỉnh.

d) Một tứ giác là hình vuông khi có một trong các tính chất:

- Là một hình chữ nhật có hai đường chéo bằng nhau.
- Là một hình thoi có hai đường chéo bằng nhau.
- Là một hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau.
- Là một hình thoi có một góc vuông.

Áp dụng:

Các Bài tập dành cho " tất cả học sinh "

1. Cho một đường tròn tâm O và ba điểm A, B, C trên đường tròn sao cho AB = BC. Từ điểm B kẻ $BM \perp OA$. Từ điểm C kẻ $CN \perp OB$.
   a) Chứng minh: ΔOMN cân b) Gọi I là điểm chính giữa của cung AB. Chứng minh $OI \perp MN$
2. Cho một tam giác ABC nội tiếp trong một đường tròn tâm O. Gọi I là điểm chính giữa của cung BAC. Nối AI và từ điểm C ta kẻ đường vuông góc với đường thẳng AI, đường này cắt tia BA ở điểm D. chứng minh ΔACD cân tại A.
3. Cho một tam giác đều ABC. Trên các cạnh AB, BC, CA ta lấy lần lượt các điểm P, Q, R sao cho AP = BQ = CR. Chứng minh ΔPQR đều.
4. Trên một đường thẳng có ba điểm A, B, C theo thứ tự ấy. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng đã cho, ta vẽ các tam giác đều DAB và EBC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DC và AE. Chứng minh ΔBMN đều.
5. Cho một tứ giác lồi ABCD, trong đó AD = DC và đường chéo AC là phân giác của góc $\widehat{DAB}$. Chứng minh tứ giác đó là hình thang.
6. Cho tam giác ABC (AB > AC). Gọi H là chân đường cao kẻ từ đỉnh A; M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC.
   a) Chứng minh tứ giác MNHP là hình thang cân.
   b) Có nhận xét gì khi ABC là tam giác cân?
7. Cho tam giác ABC. Tia phân giác của góc B cắt cạnh AC tại D. Qua D kẻ đường thẳng song song với cạnh BC, đường này cắt cạnh AB tại E. Kẻ đường thẳng $EH \perp BD$, đường này cắt cạnh BC tại F. a) Chứng minh ΔBED cân. b) Chứng minh tứ giác BEDF là hình thoi
   c) Tam giác ABC phải thỏa mãn điều kiện nào để tứ giác BEDF là hình vuông?
8. Cho một đường tròn tâm O và một dây AB. Gọi M là điểm chính giữa cung lớn AB và N điểm chính giữa của cung nhỏ AB. Tia phân giác của góc $\widehat{MAB}$ cắt đường tròn ở điểm P và tia phân giác của góc $\widehat{MBA}$ cắt đường tròn ở điểm Q. Gọi I là giao điểm của AP và BQ. Chứng minh:
   a) Tứ giác ABPQ là hình thang cân. b) Từ giác PIQM là hình bình hành.
   c) Các đường thẳng AP, BQ, MN đồng quy.
9. Cho một góc nhọn xOy. Trên cạnh Ox ta lấy hai điểm A và B (A ở giữa O và B) và trên cạnh Oy ta lấy hai điểm C và D (C ở giữa O và D). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AC, AD, BD, BC.
   a) Chứng minh tứ giác MNPQ là hình bình hành.
   b) Với điều kiện nào của giả thiết thì:
   ♣MNPQ là hình chữ nhật. ♦MNPQ là hình thoi ♥MNPQ là hình vuông.

10. Cho hai đường tròn có bán kính bằng nhau, tâm O và O', cắt nhau tại hai điểm A, B. Qua A kẻ một cát tuyến cắt đường tròn O ở điểm C và cắt đường tròn O' ở điểm D.
    a) Chứng minh ΔBCD cân
    b) Xét hình dạng của ΔBCD và tứ giác AOBO' trong trường hợp điểm O' nằm trên đường tròn O.
11. Cho tam giác ABC. Đường phân giác trong của góc $\hat{B}$ và đường phân giác trong của góc $\hat{C}$ cắt đường trung bình ứng với cạnh BC tại các điểm M vàP. Các đường phân giác ngoài của các góc $\hat{B}$ và $\hat{C}$ cắt đường trung bình ấy tại các điểm N và Q. Chứng minh: a) $AP \perp CP$
    b) Các tứ giác APCQ và AMBN là hình chữ nhật. c) Tứ giác APIM nội tiếp được.
12. Cho ba điểm A, B, C theo thứ tự ấy trên một đường thẳng d nào đó. Trong cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d, ta dựn g các nửa đường tròn đường kính AB và đường kính BC. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài của hai nửa đường tròn có tiếp điểm là M trên đường tròn đường kính AB và N trên đường tròn đường kính BC. Tiếp tuyến chung tại điểm B của hai nửa đường tròn cắt MN tại điểm I. Trên tia BI, lấy một điểm D sao cho ID = BI. Chứng minh:
    a) Tứ giác MBND là hình chữ nhật
    b) Các điểm A, M, D thẳng hàng và các điểm C, N, D thẳng hàng.
    c) Điểm D nằm trên đường tròn đường kính AC
    d) Xác định vị trí điểm B trên đoạn AC để tứ giác MBND là hình vuông.
13. Cho hình bình hành ABCD. Giao điểm của hai đường chéo AC và BD là điểm O. Một đường tròn tâm O cắt cạnh AB ở E, cạnh BC ở F, cạnh CD ở G và cạnh DA ở H.
    a) Chứng minh: ♣Các điểm F, O, H thẳng hàng ♥Các điểm E, O, G thẳng hàng.
    b) Chứng minh O là trung điểm của FH, EG. c) Tứ giác EFGH là hình gì ?
14. Cho một đường tròn tâm O và một bán kính DA. Ta vẽ ba góc ở tâm $\widehat{AOB} = 60^0$, $\widehat{BOC} = 90^0$ và $\widehat{COD} = 20^0$
    a) Chứng minh tứ giác ABCD là hình thang cân
    b) Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, BC, CD, AD. Xác định hình tính của tứ giác MNPQ.
    c) Chứng minh các đường chéo của MNPQ hoặc đi qua điểm I, giao điểm của BD và AC hoặc đi qua trung điểm của đoạn IO.

Hãy học suy nghĩ bằng trái tim và hãy học cảm xúc bằng lý trí

H. Phương pháp "Chứng minh nhiều điểm nằm trên một đường tròn. Chứng minh tứ giác nội tiếp"

1) Định nghĩa: Tập hợp tất cả các điểm cách điểm O cho trước một khoảng cách không đổi R > 0 gọi là đường tròn tâm O bán kính R. Ký hiệu (O;R).

– Muốn chứng minh nhiều điểm nằm trên một đường tròn, ta chứng minh chúng cách đều một điểm cho trước gọi là tâm.

– Muốn chứng minh nhiều điểm nằm trên một đường tròn, ta chứng minh chúng cùng nằm trên một đường thẳng mà bờ là đường thẳng đi qua hai điểm đã cho và các điểm còn lại cùng nhìn hai điểm đó dưới góc bằng nhau.

2) – Một tứ giác có tổng hai góc đối diện nhau bằng 2v (hay 180^0) thì tứ giác đó nội tiếp dược trong một đường tròn.

– Sử dụng cung chứa góc.

– Trong các đa giác thì hình thang cân, hình chữ nhật, hình vuông, đa giác đều nội tiếp được trong một đường tròn.

Áp dụng:

Các Bài tập dành cho " tất cả học sinh "

1. Cho tam giác ABC, đường cao AH. Từ trung điểm M của cạnh BC, ta kẻ $MD \perp AB$ và $ME \perp AC$. Chứng minh rằng năm điểm A, D, H, M, E nằm trên một đường tròn.
2. Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp trong tâm giác; D là giao điểm của tia AI với đường tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi J là giao điểm của các đường phân giác ngoài của các góc B và C
   a) Chứng minh ba điểm B, I, C nằm trên một đường tròn tâm là điểm D
   b) Chứng minh ba điểm A, I, J thẳng hàng và bốn điểm B, I, C, J nằm trên một đường tròn.
3. Cho một đường tròn tâm O và hai bán kính vuông góc OA, OB. Trên cung nhỏ AB ta lấy một điểm M và trên cung lớn BA, lấy một điểm N sao cho BN = AM.. Các tia AM và NB cắt nhau tại một điểm C.
   a) Chứng minh các tứ giác BOAC và NOMC nối tiếp được. b) Chứng minh $NB \perp AM$
4. Cho một tứ giác lồi ABCD. Các tia đối của tia AB và của tia DC cắt nhau tại một điểm P. Biết rằng, các đoạn thẳng PA, PB, PC, PD thoả mãn hệ thức: PA . PB = PC. PD. Chứng minh tứ giác ABCD nội tiếp.
5. Cho một tam giác ABC. Gọi A', B', C' là chân các đường cao hạ xuống các cạnh BC, CA, AB và M, N, L lần lượt là trung điểm của các cạnh ấy. Chứng minh rằng sáu điểm A', B', C', M, N, L nằm trên một đường tròn.
6. Cho một tam giác ABC, các đường cao AA', BB', CC' giao nhau tại trực tâm H; M, N, L lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và P, Q, R lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH, BH, CH. Chứng minh rằng năm điểm L, Q, R, N, B' nằm trên một đường tròn.
7. Cho một tam giác ABC vuông tại A (AB < AC). Kẻ đường cao AH. Trên đoạn HC, lấy một điểm D sao cho HD = HB. Đường tròn tâm H, bán kính AH cắt tia AD tại một điểm E. Chứng minh:
   a) Tứ giác AHEC nội tiếp b) $CE \perp AC$
8. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^0$. Chứng minh rằng các đỉnh B, C, trực tâm H của tam giác và điểm I, tâm đường tròn nội tiếp trong tam giác cùng nằm trên một đường tròn.
9. Cho M là một điểm nằm trên nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Kẻ $MH \perp AB$. Từ H kẻ $HC \perp MA$ và $HD \perp MB$. Chứng minh: a) Tứ giác MCHD là hình chữ nhật
   b) Tứ giác ABCD nội tiếp được c) $MO \perp CD$
10. Cho một tam giác vuông ABC, cạnh huyền BC và đường cao AH. Một góc vuông xHy có tia Hx cắt cạnh AB ở điểm P và tia Hy cắt cạnh AC ở điểm R. Chứng minh:
    a) Tứ giác APHR nội tiếp được.
    b) Đường tròn ngoại tiếp tứ giác APHR cắt cạnh BC tại một điểm thứ hai H'. Chứng minh các điểm A, H' là trung điểm M của đoạn PR nằm trên một đường thẳng.
11. Cho một tam giác ABC. Kẻ các đường cao AD, BE, CF. Gọi H là trực tâm. Chứng minh:
    a) $\widehat{ABE} = \widehat{ACF}$ b) Các tứ giác BFHD, DHEC và BFED nội tiếp được.
12. Cho hai đường tròn tâm O và O'cắt nhau tại hai điểm A và B. Kẻ một cát tuyến qua B và vuông góc với AB, cắt đường tròn O tại điểm C, cắt đường tròn O' tại điểm D.

a) Chứng minh các điểm A, O, C thẳng hàng; các điểm A, O', D thẳng hàng.
b) Tia CA cắt đường tròn O' ở điểm I, tia DA cắt đường tròn O ở điểm K. Chứng minh tứ giác CKID nội tiếp được. c) Chứng minh các đường thẳng BA, CK, DI đồng quy.

13. Cho một đường tròn tâm O và A là một điểm ở ngoài đường tròn. Từ A, ta kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (B và C là các tiếp tuyến). Ta kẻ $BH \perp AC$, cắt OA ở điểm I. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng OA và IA. Chứng minh:
a) Ba điểm A, B, C nằm trên đường tròn tâm là điểm M và tứ giác ABOC nội tiếp.
b) BI = BO c) NH // MC d) Tứ giác BICH là hình thoi
e) BC cắt OA ở K. Chứng minh tứ giác BKHA nội tiếp được; tứ giác KIHC cũng nội tiếp được.

Khoa học giúp ta trở nên một nhà thông thái, Lý trí giúp ta nên người.

I. Phương pháp "Chứng minh tính chất của các phần tử"

1. ***Chứng minh đường trung tuyến:***

– Đưa về việc chứng minh sự bằng nhau của hai đoạn thẳng.

– Dựa vào tính chất của trọng tâm (giao điểm của ba đường trung tuyến), đưa bài toán về việc chứng minh ba điểm thẳng hàng hoặc ba đường thẳng đồng quy.

2. ***Chứng minh đường phân giác:***

– Dựa vào định nghĩa của tia phân giác: là tia nằm giữa hai cạnh của góc, hợp với hai cạnh ấy những góc bằng nhau.

– Dựa vào tính chất của tia phân giác: một điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc ấy.

3. ***Chứng minh đường cao, đường trung trực:***

– Việc chứng minh đường cao thường đưa về việc chứng minh các đường thẳng vuông góc với nhau, đôi lúc có thể sử dụng đến tính chất của trực tâm(giao điểm của ba đường cao trong tam giác)

– Việc chứng minh đường trung trực thường cũng quy về việc chứng minh các đường thẳng vuông góc với nhau.

4. ***Chứng minh tính chất tiếp xúc:***

– Chứng minh đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (tiếp tuyến): tiếp tuyến với đường tròn thì vuông góc với bán kính tại tiếp điểm.

– Chứng minh hai đường tròn tiếp xúc: hai đường tròn tâm O và O' có bán kính R và R' tiếp xúc ngoài với nhau khi: OO' = R + R'

5. ***Chứng minh phân tử cố định:*** Muốn chứng minh một đường thẳng hoặc một đường tròn đi qua một điểm cố định, ta xác định vị trí của điểm ấy.

Áp dụng:

Các Bài tập dành cho " tất cả học sinh "

1. Cho tam giác ABC nội tiếp trong một đường tròn tâm O; H là trực tâm của tam giác và D là điểm đối xứng của đỉnh A qua tâm O. Đường thẳng HD cắt đoạn thẳng BC tại một điểm M. Chứng minh rằng AM là trung tuyến của các tam giác ABC và AHD.

2. Cho một hình bình hành ABCD. Lấy trên cạnh AB một điểm E sao cho $BE = \frac{1}{3}BA$ và lấy trên DC một điểm F sao cho $DF = \frac{1}{3}DC$.

a) Chứng minh tâm O của hình bình hành là trung điểm của đoạn thẳng EF.
b) Tia EF cắt đường thẳng BC tại điểm G và cắt đường thẳng AD tại điểm H. Chứng minh $HF = FE = EG$
c) Chứng minh rằng CE là trung tuyến của ΔACG
d) Hình bình hành ABCD phải thỏa mãn điều kiện gì để ta có góc GAC là một góc vuông

3. Cho tam giác ABC vuông và không cân. Từ đỉnh góc vuông A, ta kẻ đường cao AH và trung tuyến AM và đường phân giác AD của góc A. Chứng minh AD cũng là phân giác của góc $\widehat{HAM}$
4. Cho một góc xOy. Trên tia Ox ta lấy một đoạn OA và trên tia Oy ta lấy một đoạn OB = OA. Kẻ đường vuông góc tại A với Ox và đường vuông góc tại B với Oy. Hai đường này cắt nhau tại I. Chứng minh tia OI là phân giác của góc xOy.
5. Cho một đường tròn tâm O, đường kính AB. Trên đường tiếp tuyến với đường tròn O tại điểm B, ta lấy một điểm M. Từ A kẻ đường song song với OM, đường này cắt đường tròn tại điểm T. Chứng minh rằng MT là tiếp tuyến của đường tròn.
6. Cho tam giác ABC vuông tại đỉnh A, chiều cao AH. Vẽ đường tròn tâm A, bán kính AH. Kẻ từ B và C các tiếp tuyến BD và CE với đường tròn này. Chứng minh:
   a) Ba điểm D, A, E thẳng hàng và BD // CE
   b) Chứng minh đường thẳng DE tiếp xúc với đường tròn đường kính BC tại điểm A.
7. Trên một đường thẳng d, cho hai điểm A, B. Trong cùng nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d, ta dựng các tia vuông góc Ax, By với đường thẳng d. Trên tia Ax lấy một điểm C và trên tia By lấy một điểm D sao cho: $AC.BD = \frac{AB^2}{4}$. Lấy C và D làm tâm, ta vẽ các đường tròn tiếp xúc với đường thẳng d tại A và B. Chứng minh các đường tròn này tiếp xúc với nhau.
8. Cho tam giác ABC vuông góc ở A. Vẽ các đường tròn qua A và tiếp xúc với BC tại B và tại C. Chứng minh các đường tròn này tiếp xúc với nhau.
9. Trên một đường thẳng cho hai điểm cố định A, B. Trong cùng nửa mặt phẳng bờ AB, ta vẽ hai đường tròn lần lượt tiếp xúc với đường thẳng tại A và tại B. Hai đường tròn này tiếp xúc ngoài với nhau tại M. Chứng minh rằng tiếp tuyến chung ở điểm M của hai đường tròn luôn luôn đi qua một điểm cố định.
10. Cho hai điểm cố định A, B và một điểm M bất kì trên đoạn thẳng AB. Trong nửa mặt phẳng bờ AB, ta dựng các tam giác vuông cân MAD (vuông tại A) và MBC (vuông tại B). Chứng minh đường thẳng DC luôn luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi vị trí trên đoạn AB.
11. Cho một đường tròn tâm O và đường kính cố định AB; C là điểm chính giữa của cung AB. M làmột điểm di động trên cung AC. Kẻ $MH \perp AB$ và gọi D là giao điểm của đường phân giác của góc $\widehat{AMB}$ với đường tròn . Chứng minh điểm D là điểm cố định khi điểm M vạch cung AC
12. Cho tam giác ABC có trực tâm H. Hai đường thẳng song song(Δ) và (Δ') lần lượt đi qua A và H. các điểm B và C có hình chiếu vuông góc xuống (Δ) là M và N, có hình chiếu vuông góc xuống (Δ') là Q và P. Gọi A’ là chân đường cao xuất phát từ A của tam giác.
    a) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật MNPQ đi qua một điểm cố định.
    b) Chứng minh các đường chéo MP và NQ lần lượt đi qua các điểm cố định mà ta phải tìm.
13. Cho tam giác ABC vuông góc ở A và nội tiếp trong nửa đường tròn tâm O, đường kính BC. Đường tròn đường kính AO cắt cạnh AB ở điểm P và cạnh AC ở điểm Q
    a) Xác định hình tính tứ giác APOQ
    b) Chứng minh rằng đoạn PQ có độ dài và phương không đổi khi điểm A di chuyển trên nửa đường tròn.

14. Cho một tam giác ABC. Trên tia đối của tia AB, ta đặt một đoạn AD = AC và kẻ tia Ax// DC. Chứng minh tia Ax là phân giác của góc BAC
15. Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia CB ta lấy một điểm M và trên tia CD ta lấy một điểm N sao cho DN = BM. Đường song song với AN kẻ qua M và đường song song với AM kẻ qua N cắt nhau ở điểm F. Chứng minh điểm F nằm trên phân giác của góc MCN.
16. Trên một đường thẳng d, cho ba điểm cố định A, B, C theo thứ tự ấy. Một đường tròn thay đổi luôn luôn đi qua B và C. Kẻ tiếp tuyến AM. Chứng minh rằng đường tròn tâm A, bán kính AM luôn luôn đi qua hai điểm cố định.
17. Cho tam giác ABC vuông góc ở A, đường cao AH và AC > AB. Trên đoạn CH ta lấy một điểm D sao cho DH = BH. Đường tròn tâm H, bán kính AH cắt tia AD ở một điểm E. Chứng minh:
    a) Tứ giác ACEH nội tiếp được
    b) $CE \perp AE$
    c) Tia CB là phân giác của góc ACE.
18. Cho một tam giác cân ABC, nội tiếp trong một đường tròn. Lấy một điểm D trên cung BC. Chứng minh tia AD là phân giác của góc $\widehat{BDC}$.
19. Cho (I) và (J) là hai đường tròn tâm I, tâm J tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm A; đường tiếp tuyến chung ngoài tiếp xúc với (I) tại B và với (J) tại C. Tiếp tuyến chung ở điểm A cắt BC ở điểm E
    a) Chứng minh E là trung điểm của BC
    b) Chứng minh $\widehat{BAC} = 1v$ và IJ tiếp xúc với đường tròn đường kính BC.
    c) Chứng minh $\widehat{IEJ} = 1v$,đường tròn đường kính IJ tiếp xúc với BC.
20. Cho tam giác ABC vuông góc tại A, đường cao AH. Từ H kẻ $HE \perp AC$ và $HD \perp AB$. Gọi M và N là các trung điểm của các đoạn thẳng HB, HC. Chứng minh đường thẳng DE tiếp xúc với đường tròn đường kính MN.
21. Cho một tâm giác cân ABC(AB = AC), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại điểm O
    a) Chứng minh tứ giác AEOF nội tiếp được. Xác định tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác này.
    b) Chứng minh tứ giác DE, DF là các tiếp tuyến kẻ từ D đến đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEOF.
22. Cho hai đường thẳng x'x // y'y. Một điểm M di động trên x'x và một điểm N di động trên y'y. Tia phân giác của góc x'MN và y'NM cắt nhau tại điểm P; tia phân giác của các góc xMN và yNM cắt nhau tại điểm Q. Chứng minh đoạn thẳng PQ có phương không đổi khi M, N di chuyển.
23. Cho một đoạn thẳng AB có độ dài 2a và hai đường thẳng Ax, By vuông góc với AB và ở trong cùng một nửa mặt phẳng bờ AB. Một điểm M di động trên Ax và một điểm N di động trên By sao cho diện tích hình thang vuông AMNP luôn luôn là một số không đổi và bằng $2a^2\sqrt{3}$. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.
24. Trên hai cạnh AB và AC của một tam giác vuông ABC và về phía ngoài tam giác, ta vẽ các nửa đường tròn đường kính AB, AC. Một cát tuyến thay đổi đi qua A, cắt các nửa đường tròn này tại D và E. Chứng minh rằng đường thẳng vuông góc với DE tại trung điểm của nó luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Tất cả mọi chiến thắng bắt đầu từ sự chiến thắng chính bản thân mình.

J. Phương pháp "Chứng minh các hệ thức trong Tam giác, trong Đường tròn"

1) Sử dụng các liên hệ trong tam giác:
   Đối với đẳng thức: đưa về việc chứng minh các đoạn thẳng (hoặc các góc bằng nhau)
   Đối với bất đẳng thức: sử dụng các định lý:
   – Trong một tam giác, một cạnh bao giờ cũng nhỏ hơn tổng và lớn hơn hiệu của hai cạnh khác.
   – Góc ngoài của một tam giác thì bằng tổng hai góc trong không kề với nó(Do đó, nó lớn hơn mỗi góc trong không kề với nó)
   – Trong một tam giác, đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn và ngược lại (Áp dụng đối với trường hợp tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau và cạnh thứ ba không bằng nhau)
   – Trong hai đường xiên đường nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn và ngược lại.
   – Trong một đường tròn, dây lớn hơn thì trương cung lớn hơn và ngược lại; dây nào nhỏ hơn thì cách xa tâm hơn và ngược lại (áp dụng cho cả hai đường tròn có bán kính bằng nhau)
2) Sử dụng định lý Thalès:
   Khi một bài toán, việc chứng minh hệ thức liên hệ với các đường thẳng song song thì ta nên sử dụng định lí Thalès trong tam giác: "Một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh thứ ba thì nó định ra trên hai đoạn đó những cặp đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ"
3) Sử dụng việc tính toán các diện tích:
4) Sử dụng định lý Pythagore và các hệ quả: trong tam giác ABC vuông góc tại A, AH là đường cao thì: $BC^2 = AB^2 + AC^2$; $AH^2 = BH.CH$; $AC^2 = BC.CH$; $AB^2 = BC.BH$
5) Sử dụng các tam giác đồng dạng: Trong hai tam giác đồng dạng thì các cạnh tương ứng tỉ lệ với nhau.

Áp dụng:

Các Bài tập dành cho " tất cả học sinh "

1. Cho một nửa đường tròn đường kính AB. Tiếp tuyến tại một điểm M trên nửa đường tròn cắt tiếp tuyến với đường tròn tại hai điểm A, B ở các điểm D và E. Chứng minh : DE = DA + EB
2. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, nếu M là trung điểm của cạnh BC thì: $AM < \dfrac{AB + AC}{2}$
3. Cho một đường tròn O và hai dây AB, CD (AB > CD) cắt nhau tại một điểm P ở ngoài đường tròn. Gọi H là trung điểm của AB, K là trung điểm của CD. Chứng minh: $\widehat{HPO} < \widehat{KPO}$ và $PH > PK$
4. Cho một tam giác ABC. Kẻ trung tuyến AD. Từ một điểm P trên đoạn BC, ta kẻ đường song song với AD, đường này cắt cạnh AB ở điểm M và cắt tia đối của tia AC tại điểm N. Chứng minh $PM + PN = 2AD$
5. Cho một tứ giác lồi ABCD, trong đó $\hat{B} = \hat{D} = 1v$. Từ một điểm M trên đường chéo AC, ta kẻ $MN \perp BC$ và $MP \perp AD$. Chứng minh $\dfrac{MN}{AB} + \dfrac{MP}{CD} = 1$
6. Cho tam giác cân ABC. Từ một điểm M trên cạnh đáy BC, ta kẻ $MD \perp AB$ và $ME \perp AC$. Kẻ đường cao BH. Chứng minh ME + MD = BH
7. Cho hình bình hành ABCD. Trên cạnh BC lấy một điểm M và trên cạnh AB lấy một điểm N sao cho AM = CN. Từ D kẻ $DI \perp AM$ và $DK \perp BN$. Chứng minh rằng DI = DK
8. Cho một hình chữ nhật ABCD và một điểm O bất kì trong hình chữ nhật ấy. Chứng minh: $OA^2 + OC^2 = OD^2 + OB^2$
9. Cho hình chữ nhật ABCD. Nối đỉnh A với một điểm P bất kì của đường chéo BD và kẻ đường vuông góc với AP tại điểm P; đường này cắt cạnh BC tại điểm E và cắt đường thẳng CD tại điểm F. Chứng minh hệ thức: $AP^2 = PE + PF$

10. Từ một điểm A ở ngoài một đường tròn, ta kẻ hai tiếp tuyến AB, AC và một cát tuyến ADE. Chứng minh hệ thức: BD . EC = EB. CD
11. Cho một hình bình hành ABCD. Từ đỉnh C, ta kẻ một cát tuyến cắt đường chéo DB tại điểm E, cắt cạnh AB tại điểm G và cắt tia đối của tia AD tại điểm F. Chứng minh hệ thức : $EC^2 = EF.EG$
12. Cho một tam giác ABC và một điểm M ở trong tam giác ấy. Đường thẳng AM cắt cạnh BI tại điểm I. Chứng minh các hệ thức:
    a) MA + MB + MC < AB + BC + CA
    b) MA + MB > AB; MB + MC > BC; MC + MA > AC
    c) $\dfrac{AB+BC+CA}{2} < MA+MB+MC < AB+BC+CA$
    d) IC + IB = BC; IA < IC + CA; IA + IB < CA + CB
    e) MA + MB < IA + IB f) MA + MB < CA + CB
13. Cho một tam giác đều ABC và một điểm M trong tam giác đó. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ điểm M đến ba cạnh của tam giác không phụ thuộc vào vị trí điểm M.
14. Trên đáy của một tam giác cân ABC, đường cao AH, ta lấy một điểm P. Kẻ đường thẳng vuông góc tại P với BC, cắt cạnh AC ở N và cắt tia đối của tia AB tại M. Chứng minh:
    a) AM = AN b) $AH = \dfrac{PM+PN}{2}$. Từ đó, suy ra tổng PM + PN không phụ thuộc vị trí điểm P.
15. Cho một góc xOy. Trên cạnh Ox ta lấy hai điểm D, E và kẻ các đường thẳng song song với nhau đi qua D và E. Các đường này cắt cạnh Oy ở F và G. Nối FE và từ G kẻ đường song song với FE, đường này cắt cạnh Ox tại điểm H. Chứng minh: $OE^2 = OD . OH$
16. Cho tứ giác ABCD. Các đường chéo AC, BD cắt nhau tại điểm O. Qua O kẻ OE // BC và OF//AB. Chứng minh: a) $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AD}$ b) EF // BD
17. Cho tam giác ABC vuông góc tại đỉnh A và AB = c; AC = b; AD là đường phân giác của góc A.
    a) Chứng minh D cách đều AB, AC
    b) Gọi khoảng cách từ điểm D đến cạnh góc vuông là d. Chứng minh hệ thức $\dfrac{1}{d} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$
18. Cho tam giác ABC vuông tại A (AC > AB). Từ trung điểm I của cạnh AC, ta kẻ $ID \perp BC$. Chứng minh : $BD^2 - CD^2 = AB^2$
19. Cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm P bất kì cố định ở trong đường tròn. Qua P kẻ hai dây thay đổi AB, CD vuông góc với nhau (A, B, C, D là các điểm nằm trên đường tròn). Chứng minh:
    a) Tổng $AB^2 + CD^2$ là một số không đổi, không phụ thuộc vào vị trí của các dây AB, CD.
    b) $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4R^2$.
20. Cho tam giác ABC nội tiếp trong nửa đường tròn đường kính BC. Từ một điểm D trên BC, ta kẻ đường vuông góc với BC, đường này cắt AC ở E, cắt đường tròn ở F và cắt tia đối của tia AB ở G. Chứng minh hệ thức: $DF^2 = DB. DC = DE. DG$
21. Cho tam giác vuông cân BAC, vuông tại A. Kẻ trung tuyến BD. Từ điểm E, giao điểm của BD với đường tròn ngoại tiếp tam giác, ta kẻ $EF \perp AC$. Chứng minh hệ thức: AF = 3EF.
22. Cho tam giác ABC nội tiếp trong một đường tròn. Đường phân giác của góc A cắt đường tròn tại E. Chứng minh hệ thức: $BE^2 = ED . AE$
23. Cho tam giác ABC, kẻ đường phân giác AD của góc A. Kẻ đường tròn đi qua điểm A và tiếp xúc với cạnh AC tại điểm F. Chứng minh:
    a) ED // BC b) Ta có hệ thức $AD^2 = AE. AC = AF. AB$

24. Cho một đường tròn tâm O, bán kính R. người ta dựng hình bình hành ngoại tiếp đường tròn đó.
   a) Chứng minh rằng hình bình hành này là một hình thoi
   b) Tìm một hệ thức liên hệ giữa độ dài các đường chéo AC, BD với độ dài của cạnh hình thoi và bán kính R
   c) Chứng minh rằng ta có hệ thức: $\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{BD^2}=\frac{1}{4R^2}$

Khó khăn không phải để quật ngã ta, mà là để ta quật ngã chúng.

K.Phương pháp "Bất đẳng thức hình học"

1) Một số kí hiệu sau đây được dùng để chỉ các yếu tố của một tam giác:

– a, b, c tương tự là độ dài ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC.

– α, β, γ tương ứng là độ lớn các góc tại ba đỉnh A, B, C.

– m_a, m_b, m_c tương ứng là độ dài của các trung tuyến dựng từ các đỉnh A, B, C.

– h_a, h_b, h_c tương ứng là độ dài các đường cao dựng từ các đỉnh A, B, C.

– l_a, l_b, l_c tương ứng là độ dài các phân giác dựng từ ba đỉnh A, B, C.

– R và r tương ứng là độ dài các bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

– S_{ABC} là diện tích tam giác ABC.

– r_a, r_b, r_c tương ứng là bán kính các đường tròn bàng tiếp trong góc A, B, C của tam giác ABC.

2) Kiến thức cơ bản:

– Với ba điểm bất kì A, B, C ta có $AB \le AC + CB$. Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi điểm C nằm giữa hai điểm A và B.

– Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn. Cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

– Trong tam giác vuông, cạnh huyền lớn hơn mỗi cạnh góc vuông.

– Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh nhỏ nhất là góc nhọn.

– Trong hai đường xiên kẻ từ một điểm đến một đường thẳng, đường nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn. Ngược lại, đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn.

– Trong một tam giác, mỗi cạnh nhỏ hơn tổng của hai cạnh kia và lớn hơn hiệu của hai cạnh đó.

– Trong một đường tròn hoặc hai đường tròn bằng nhau:

✓ Cung lớn hơn khi và chỉ khi dây trương cung lớn hơn.

✓ Đường kính là dây cung lớn nhất.

– $S_{ABC} \le \frac{1}{2}AB.AC$; $S_{ABC} \le \frac{1}{2}BC.BA$; $S_{ABC} \le \frac{1}{2}CA.CB$

Áp dụng:

Các Bài tập dành cho "Học sinh Giỏi"

1. Chứng minh rằng trong một tam giác bất kì ta có: $\frac{b+c-a}{2} < m_a < \frac{b+c}{a}$
2. Chứng minh rằng trong tứ giác lồi ABCD ta có bất đẳng thức AB + CD < AC + BD.
3. Chứng minh rằng nếu một tam giác có hai cạnh bằng nhau thì tổng của cạnh lớn hơn và đường cao tương ứng lớn hơn tổng của cạnh nhỏ và đường cao tương ứng.

4. Cho một hình vuông có độ dài đường chéo là 1. Trên mỗi cạnh lấy một điểm bất kỳ nối lại để được một tứ giác lồi. Chứng minh rằng chu vi tứ giác này không nhỏ hơn 2.
5. Chứng minh rằng trong: một tam giác, một góc sẽ là góc nhọn, góc vuông hoặc góc tù tuỳ theo cạnh đối diện nhỏ hơn, bằng hay lớn hơn hai lần trung tuyến kẻ tới cạnh đó.
6. Chứng minh rằng trong một tam giác ABC, trung tuyến AM:
   a) Nếu $\widehat{A} < 90^0$ thì BC < 2 AM
   b) Nếu $\widehat{A} > 90^0$ thì BC > 2 AM
   c) Nếu $\widehat{A} = 90^0$ thì BC = 2AM
7. Cho tam giác ABC có đường cao BH không nhỏ hơn cạnh AC, đường cao CK không nhỏ hơn cạnh A B. tính các góc của ΔABC. Từ đó, chứng minh rằng trong một tam giác khoảng cách từ trực tâm đến đỉnh bằng hai lần khoảng cách từ giao điểm các đường trung trực tới cạnh đối diện.
8. Chứng minh rằng trong một tam giác vuông độ dài đường phân giác trong của góc vuông không vượt quá một nửa độ dài hình chiếu vuông góc của cạnh huyền lên đường thẳng vuông góc với đường phân giác ấy.
9. cho tam giác ABC có $\widehat{C} < \widehat{B} < 90^0$. Đường cao AH, trung tuyến AM và phân giác AD.
   a) Chứng minh rằng D nằm giữa H và M.
   b) Cho biết $S_{ADM} = \frac{S_{ABC}}{14}$ và $S_{AHM} = \frac{7S_{ABC}}{50}$. Tính $\widehat{BAC}$.
10. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. K là chân đường cao vẽ từ A của ΔABC. Chứng minh rằng: $KH.KA \le \frac{BC^2}{4}$.
11. Cho tam giác đều ABC. Trên các cạnh BC, CA, AB lấy ba điểm bất kỳ I, J, K sao ch K khác A, B và. Chứng minh $AJ.BI \le \frac{AB^2}{4}$.Dấu (=) xảy ra khi nào?
12. Cho (O; R) và dây cung AB với $\widehat{AOB} = -120^0$. Hai tiếp tuyến tại A và B của (O; R) cắt nhau tại C
   a) Chứng minh rằng ΔABC đều. Tính S_{ABC} theo r.
   b) Lấy điểm M thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$. Vẽ tiếp tuyến tại M của (O; r) cắt AC tại D và cắt BC tại E. Chứng minh AD + BE = DE.
   c) Trên các đoạn BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm I, J, K sao cho K khác A, B và $\widehat{IKJ} = 60^0$. Chứng minh $AJ.BI \le \frac{AB^2}{4}$
13. Cho tứ giác ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh BC và CD. Gọi P là trung điểm của AB. Chứng minh rằng:
   a) $S_{ABCD} \le \frac{1}{2}(AM + AN)^2$
   b) $PN \le \frac{1}{2}\left(AD + BC\right)$. Dấu (=) xảy ra khi nào?
14. Cho ΔABC có ba góc nhọn. Gọi H là trực tâm của ΔABC. Các đường cao AM, BN, CL. Chứng minh : a) $\frac{HM}{AM} + \frac{HN}{BN} + \frac{HL}{CL} = 1$ b) $\frac{AM}{HM} + \frac{BN}{HN} + \frac{CL}{HL} \ge 9$
15. Cho hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn (O; r). m là một điểm bất kì trên đường tròn. Chứng minh rằng: a) $MA^4 + MB^4 + MC^4 + MD^4 = 24R^2$ b) $MA.MB.MC.MD < 6R^2$

16. Cho có trung tuyến CM vuông góc với trung tuyến BN. Chứng minh:
    a) $\cot gB + \cot gC \geq \frac{2}{3}$
    b) $AC^2 + AB^2 = 5BC^2$
17. Cho tứ giác ABCD có AB = a; CD = c. AD = BC, $\widehat{ADC} + \widehat{DCB} = 90^0$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AC, CD và BD. Chứng minh rằng: $S_{MNPQ} \geq \frac{(a-c)^2}{8}$. Dấu (=) xảy ra khi nào?
18. Cho tam giác đều ABC nội tiếp (O; R). chứng minh rằng với mọi điểm M nằm trong mặt phẳng tam giác ABC, ta đều có bất đẳng thức: $MA + MB \geq MC$. Dấu (=)xảy ra khi nào?
19. Cho tứ giác ABCD có AC = AD. Chứng minh rằng BC < BD.
20. Cho tứ giác ABCD có $AB + BD \leq AC + CD$. Chứng minh rằng AB < AC.
21. Cho ΔABC và O là một điểm bất kì nằm trong tam giác. Các tia AO, BO, CO cắt BC, CA, AB lần lượt tại P, Q, R. Chứng minh rằng:
    a) $\frac{OP}{AP} + \frac{OQ}{BQ} + \frac{OR}{CR} = 1$ b) $\frac{AP}{OP} + \frac{BQ}{OQ} + \frac{CR}{OR} \geq 9$. Dấu (=) xảy ra khi nào?
    c) Trong ba tỉ số $\frac{OA}{OP}; \frac{OB}{OQ}; \frac{OC}{OR}$ có một tỉ số không nhỏ hơn 2, một tỷ số không lớn hơn 2.
22. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng: $AB.CD + AD.BC \geq AC.BD$. Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi tứ giác ABCD nội tiếp được.
23. cho tứ giác ABCD nội tiếp được trong đường tròn (O). lấy điểm E trên đường chéo AC sao cho $\widehat{ABE} = \widehat{DAC}$. Chứng minh rằng:
    a) AB . DC = DB . AE   b) AB . CD + AD . BC = AC . BD
24. Cho đường tròn tâm P bán kính R và đường tròn tâm O bán kính r cắt nhau tại A và B(R khác r). kẻ tiếp tuyến chung CD của (P) và (Q), C thuộc (P), D thuộc (Q). CD cắt AB tại K. Đường thẳng qua C và song song với AD cắt đường thẳng qua D và song song với AC tại E. Chứng minh rằng:
    a) Ba điểm A, B, E thẳng hàng.   b) BE < R +r
25. Cho tứ giác ABCD. Gọi O là giao điểm AC và BD. Kí hiệu $S_1 = S_{AOB}$; $S_2 = S_{COD}$; $S = S_{ABCD}$
    a) Chứng minh rằng: $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} \leq \sqrt{S}$
    b) Khi ABCD là hình thang thì hệ thức trên sẽ như thế nào?
26. Cho tam giác ABCD. Chứng minh rằng $S_{ABCD} \leq \frac{1}{8}(AC + BD)^2$. Dấu (=) xảy ra khi nào?
27. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh: AB = c; BC = a; CA = b. Gọi l_a, l_b, l_c là độ dài ba đường phân giác ứng với các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c}$
28. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}$. O là một điểm bất kỳ trong tam giác. Vẽ AO, BO, CO lần lượt cắt BC, CA, AB tại P, Q, R. Chứng minh rằng OP + OQ + OR < BC.
29. Cho tứ giác ABCD có đường chéo AC = 2a; BD = 2b. Chứng minh rằng một trong các cạnh của tứ giác là không bé hơn $\sqrt{a^2 + b^2}$.
30. Cho ΔABC. O là một điểm bất kỳ nằm trong tam giác. Các tia AO, BO, CO cắt BC, CA và AB tại P, Q, R. Chứng minh: $\sqrt{\frac{OA}{OP}} + \sqrt{\frac{OB}{OQ}} + \sqrt{\frac{OC}{OR}} \geq 3\sqrt{2}$.
31. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Chứng minh rằng:

a) $h_a + h_b + h_c \geq 9r$. Dấu (=) xảy ra khi nào? b) $\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \geq \frac{2}{R}$

32. Cho tứ giác ABCD và một điểm O bên trong tứ giác. Gọi S là diện tích tứ giác ABCD. Chứng minh rằng: $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 \geq 2S$. Dấu (=) xảy ra khi nào?
33. Chứng minh rằng trong hai hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình chữ nhật nào có hiệu độ dài các cạnh nhỏ hơn thì hình chữ nhật đó có diện tích lớn hơn.
34. Xét một hình vuông và một hình tam giác. Nếu hai hình có diện tích bằng nhau thì hình nào có chu vi lớn hơn?
35. Cho tam giác ABC có diện t ích là S và một hình chữ nhật MNPQ nột tiếp tam giác ABC. (M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC, P và Q thuộc cạnh BC). Gọi diện tích hình chữ nhật MNPQ là S_1. Chứng minh rằng $S \geq 2S_1$
36. a)Chứng minh rằng trong hình thang cân ABCD với hai đáy AB// CD, ta có $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2AB.CD$.

    b) Chứng minh rằng với mọi tứ giác lồi ABCD ta có: $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2AB.CD$
37. Bên trong tam giác ABC lấy một điểm O tuỳ ý. Tia AO, BO, CO cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Chứng minh rằng:

    a) $\frac{OA}{AD} + \frac{OB}{BE} + \frac{OC}{CF} = 2$ b) $\frac{OA}{OD} + \frac{OB}{OE} + \frac{OC}{OF} \geq 6$ c) $\frac{OA}{OD}.\frac{OB}{OE}.\frac{OC}{OF} \geq 8$. Dấu (=) xảy ra khi nào?
38. Cho tam giác ABC có góc B tù. Trên cạnh BC lấy 2 điểm M và N sao cho BM = CN. Chứng minh rằng: AB + AC > AM + AN.
39. Trên dây cung không qua tâm O của (O; R) lấy hai điểm C và D sao cho AC = CD = DB. Kẻ bán kính OE qua C và kẻ bán kính OF qua D. Chứng minh rằng: a) $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BF}$ b) $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EF}$
40. Trên các cạnh của tam giác ABC lấy A_1 thuộc cạnh BC, B_1 thuộc cạnh CA và C_1 thuộc cạnh AB. Chứng minh rằng: diện tích của một trong ba tam giác AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 không vượt quá một phần tư diện tích tam giác ABC. Với điều kiện nào các tam giác này có diện tích bằng nhau và bằng một phần tư diện tích tam giác ABC?

Cần phải học nhiều để nhận thức được rằng mình biết còn ít.

L. Phương pháp "Tam giác đồng dạng"

Muốn chứng minh hai tam giác ABC và A'B'C' đồng dạng,ta cần nhớ các tính chất sau đây:

1) Hai tam giác có một góc bằng nhau xen giữa hai cạnh tương ứng tỉ lệ thì đồng dạng nhau:

$$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$$

2) Hai tam giác có hai góc bằng nhau từng đôi một thì đồng dạng với nhau:

$$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$$

3) Hai tam giác có ba cạnh tỉ lệ với nhau từng đôi một thì đồng dạng với nhau:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$$

Áp dụng:

Các Bài tập dành cho " tất cả học sinh "

1. Giả sử AC là đường chéo lớn nhất của hình bình hành ABCD. Từ C kẻ CE vuông góc với AB và CF vuông góc với AD. Chứng minh rằng: $AB.AE + AD.AF = AC^2$
2. Cho hai đường tròn tâm O và O' có bán kính khác nhau. Hai đường tròn này cắt nhau ở A và B. tiếp tuyến của đường tròn (O') tại B cắt đường tròn (O) ở C và tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B cắt đường tròn (O') ở D.
   a) Chứng minh rằng hai tam giác ABC và ADB đồng dạng.
   b) Chứng minh: $AB^2 = AC.AD$ và $\dfrac{BC^2}{BD^2} = \dfrac{AC}{AD}$
   c) Tính tỉ số $\dfrac{BC}{BD}$ theo các bán kính của hai đường tròn (O) và (O')
3. Cho tam giác ABC vuông, cân đỉnh A. Trên cạnh AB kéo dài ta đặt các đoạn BD = AB vàDE = AB. Chứng minh: $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} + \widehat{AEC}$
4. Cho tam giác ABC vuông tại đỉnh A. Kẻ đường cao AH và vẽ đường tròn tâm A, bán kính AH. Từ B và C kẻ tiếp tuyến BD và CE với đường tròn.
   a) Chứng minh rằng BD // CE. b) Chứng minh rằng $BD.CE = \dfrac{DE^2}{4}$
   c) Đường thẳng HD cắt đường thẳng AB tại M và đường thẳng HE cắt đường thẳng AC tại N. Chứng minh rằng các đoạn thẳng MN và AH bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.
   d) Tính diện tích tam giác DHE, biết AB = 3 cm; AC = 4 cm.
5. Cho hình thang ABCD, các đường chéo AC và BD cắt nhau tại điểm I và các góc A và D vuông. Gọi a, b, c lần lượt là độ dài của các cạnh AD, AB, DC.
   a) Chứng minh rằng nếu hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau thì ta có hệ thức: $a^2 = bc$
   b) Chứng minh rằng hệ thức trên đây là điều kiện cần và đủ để hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau.
   c) Chứng minh rằng đường thẳng nối các trung điểm M, N của các đáy DC, AB tiếp xúc tại I với đường tròn đường kính AD nếu các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau.
   d) Biết b = 12cm; c = 8 cm và các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Tính cạnh BC.

M. Phương pháp "Tứ giác"

Chúng ta đã học các tứ giác sau đây: hình bình hành; hình thoi; hình chữ nhật; hình vuông; hình thang; tứ giác nội tiếp được; tứ giác ngoại tiếp được. Sau đây là một số tính chất cần nhớ của mỗi loại tứ giác ấy:

1. Hình bình hành:

1. Hình bình hành là tứ giác (lồi) có hai cặp cạnh song song với nhau từng đôi một.
2. Hình bình hành làtứ giác (lồi) có hai cạnh song song và bằng nhau.
3. Hình bình hành có hai góc đối bằng nhau, có hai góc kề bù nhau.
4. Hai đường chéo của hình bình hành cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Chú ý: hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông là các hình bình hành đặc biệt. Vì vậy, bốn tính chất nói trên của hình bình hành cũng là các tính chất của hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông. Ngoài ra, hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông còn có các tính chất khác.

2. Hình thoi:

1. Hình thoi là hình bình hành có hai cạnh liền nhau bằng nhau.
2. Hình thoi là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau.
3. Mỗi đường chéo của hình thoi là đường phân giác của hai góc của hình thoi có hai đỉnh nằm trên đường chéo ấy.
4. Diện tích hình thoi có hai đường chéo d_1 và d_2 là $S = \frac{1}{2}d_1d_2$

3. Hình chữ nhật:

1. Hình chữ nhật là hình bình hành có một góc vuông.
2. Mọi hình bình hành nội tiếp được đều là hình chữ nhật.
3. Diện tích hình chữ nhật có hai kích thước a và b là S = ab.

4. Hình vuông:

1. Hình vuông là hình chữ nhật có hai cạnh liền nhau bằng nhau.
2. Hai đường chéo của hình vuông vuông góc với nhau và bằng nhau.
3. Diện tích hình vuông có cạnh a là $S = a^2$

5. Hình thang:

1. Hình thang là tứ giác (lồi) có hai cạnh song song với nhau.
2. Đường trung bình của hình thang bằng nửa tổng hai đáy
3. Hình thang cân là tứ giác nội tiếp được.
4. Diện tích hình thang có hai đáy a,b và đường cao h là: $S = \frac{1}{2}(a+b)h$

Chú ý: theo định nghĩa trên đây của hình thang thì hình bình hành là một hình thang đặc biệt

6. Tứ giác nội tiếp được:

1. Một tứ giác (lồi) nội tiếp được nếu nó có hai góc đối bù nhau.
2. Tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ấy là giao điểm của bốn đường trung trực của bốn cạnh.

7. Tứ giác ngoại tiếp được:

1. Một tứ giác (lồi) ngoại tiếp được nếu nó có tổng hai cặp cạnh đối bằng nhau, nói cách khác tứ giác (lồi) ABCD ngoại tiếp được nếu: AB + CD = AD + BC
2. Cho tứ giác ABCD có chu vi p, ngoại tiếp đường tròn bán kính r. thế thì: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}pr$

Áp dụng:

Các Bài tập dành cho " tất cả học sinh "

1. Cho tứ giác lồi ABCD nội tiếp trong một đường tròn. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại E còn các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại F. Đường phân giác của góc AEC cắt BC tại M và AD tại N. Đường phân giác của góc BFD cắt AB tại P và CD tại Q. Chứng minh rằng hình MPNQ là một hình thoi.
2. Cho tam giác cân ABC (AB = AC) và đường tròn đi qua ba đỉnh của tam giác. Vẽ đường kính PQ song song với BC. Từ P và Q vẽ các dây PN và QM nằm cùng phía đối với đường kính PQ và theo thứ tự song song với các cạnh bên của tam giác ABC.
   a) Tứ giác MNPQ là hình gì? Tại sao?
   b) Chứng minh rằng khoảng cách giữa MN và PQ bằng một nửa cạnh đáy BC của tam giác ABC.
3. Cho tứ giác lồi ABCD, ngoại tiếp đường tròn tâm O. Chứng minh rằng đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác ACD.
4. Cho tứ giác lồi ABCD thỏa các điều kiện sau đây:

♣AB // CD ♦AB > CD ♥BC = CD = DA ♠ AC ⊥ BC

Ta kí hiệu $\alpha = \widehat{DAB}$ và F_1 và F_2 lần lượt là diện tích các tam giác ABC và ACD. Tính α và tỉ số F_1 ; F_2

5. Cho tứ giác lồi ABCD có hai đường chéo AC và BC cắt nhau ở E. Chứng minh rằng nếu các bán kính của các đường tròn nội tiếp các tam giác EAB, EBC, ECD, EDA bằng nhau thì tứ giác ABCD là hình thoi.
6. Chứng minh rằng các hình tròn nhận các cạnh của một tứ giác lồi làm đường kính thì phủ kín tứ giác.
7. Chứng minh rằng khoảng cách từ một điểm tuỳ ý nằm trong hình bình hành ABCD tới đỉnh gần nhất của hình bình hành ấy không vượt quá bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

N. Phương pháp "Diện tích"

Muốn tìm diện tích các hình ta cần nhớ một số tính chất và công thức sau đây:

1) Hai hình bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.
2) Hình (H) được phân hoạch thành hai hình (H_1) và (H_2) thì diện tích hình (H) bằng tổng diện tích hai hình (H_1) và (H_2)
3) Diện tích tam giác: $S_\Delta = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ch_c$; $S\Delta = \frac{1}{2}pr$
4) Diện tích tam giác đều cạnh a: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
5) Diện tích hình bình hành: S = ah
6) Diện tích hình thoi: $S = \frac{1}{2}d_1d_2$
7) Diện tích hình chữ nhật: S = ab
8) Diện tích hình vuông cạnh a: $S = a^2$
9) Diện tích hình thang: $S = \frac{1}{2}(a+b)h$
10) Diện tích hình tròn bán hình R: $S_o = \pi R^2$
11) Diện tích hình quạt tương ứng với cung n^0 : $S = \frac{\pi R^2 n}{360^0}$
12) Hai tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng k thì tỉ số các diện tích của chúng bằng k^2 .

$$\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'; \frac{AB}{A'B'} = k \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = k^2$$

<u>*Áp dụng:*</u>

Các Bài tập dành cho " tất cả học sinh "

1. Cho lục giác đều ABCDEF. Gọi M và K là trung điểm các cạnh CD và DE; L là giao điểm của AM và BK. Chứng minh rằng diện tích tam giác ABL bằng diện tích tứ giác MDKL. Tính độ lớn của góc giữa AM và BK.
2. Qua điểm O cho trước trong một tam giác vẽ ba đường thẳng song song với ba cạnh của tam giác. Các đường thẳng này chia tam giác thành sáu phần ,ba phân trong số đó là các tam giác có diện tích S_1, S_2, S_3. Tính diện tích của tam giác đã cho.
3. Cho biết diện tích S và góc ở đỉnh C của tam giác ABC. Với các cạnh AC và BC nào thì tam giác ABC sẽ có cạnh AB bé nhất?

4. Gọi K và M là trung điểm các cạnh AB và CD của tứ giác lồi ABCD; L và N nằm trên hai cạnh kia của tứ giác sao cho KLMN là một hình chữ nhật. Chứng minh rằng diện tích hình chữ nhật KLMN bằng một nửa diện tích tứ giác ABCD.
5. Hãy tìm trong tứ giác lồi một điểm sao cho các đoạn thẳng nối điểm ấy với các trung điểm của các cạnh chia tứ giác đã cho thành bốn phần có diện tích bằng nhau.
6. Cho tam giác ABC có diện tích bằng 1. Hai người chơi một trò chơi như sau: Người thứ nhất chọn một điểm X trên cạnh AB, người thứ hai chọn một điểm Y trên cạnh BC và người thứ nhất tiếp tục chọn một điểm Z trên cạnh CA. Mục tiêu của người thứ nhất là làm cho diện tích tứ giác XYZ lớn nhất. Mục tiêu của người thứ hai là làm cho diện tích tam giác XYZ nhỏ nhất có thể được. Hỏi người thứ nhất có thể làm cho diện tích tam giác XYZ đạt được giá trị lớn nhất là bao nhiêu?
7. Cho đường chéo của một hình thang chia hình thang ấy thành 4 tam giác. Tìm diện tích của hình thang biết diện tích của các tam giác kề với đáy là S_1 và S_2
8. Các cạnh đối AB và DE, BC và EF, CD và FA của lục giác ABCDEF song song với nhau. Chứng minh rằng hai tam giác ACE và BDF có diện tích bằng nhau.
9. Cho một tập hợp hữu hạn các điểm trên mặt phẳng, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Biết rằng diện tích của một tam giác bất kì với các đỉnh tại các điểm đó không vượt quá 1 đơn vị. Chứng minh rằng tất cả các điểm của tập hợp được phân bố bên trong một tam giác nào đó có diện tích bằng 4 đơn vị.
10. Chứng minh rằng diện tích của tam giác nội tiếp trong hình bình hành không thể lớn hơn một nửa diện tích của hình bình hành đó.
11. Cho điểm P trong tam giác ABC. Tìm trên các cạnh của tam giác một điểm Q sao cho đường gấp khúc APQ chia tam giác thành hai phần có diện tích bằng nhau.
12. Cho tứ giác lồi ABCD có diện tích bằng 1. Trên các cạnh AB và CD lấy các điểm A', B' và C', D' sao cho $\frac{AA'}{AB}=\frac{CC'}{CD}=a;\ \frac{BB'}{AB}=\frac{DD'}{CD}=b$ trong đó $a + b < 1$. Xác định diện tích A'B'C'D'.
13. Điểm S được chọn trong tam giác ABC sao cho các tam giác ABS, BCS, CAS có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng S là trọng tâm của tam giác ABC.
14. Trên các cạn AB, BC, CA của tam giác đều ABC chọn các điểm C; A; B sao cho $AC_1 = 2C_1B; BA_1 = 2A_1C; CB_1 = 2B_1A$. Chứng minh rằng diện tích tam giác tạo bởi các đường thẳng AA_1; BB_1; CC_1 bằng $\frac{1}{7}$ diện tích tam giác ABC.
15. Từ một tam giác đã cho hãy cắt ra một hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.
16. Chứng minh rằng nếu mỗi cạnh của tam giác nhỏ hơn 1 thì diện tích tam giác nhỏ hơn $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

O. Phương pháp "Các bài toán cực trị trong Hình học phẳng"

Các bài toán cực trị trong Hình học là các bài toán đòi hỏi tìm điều kiện của một hình để cho một đại lượng Hình học nào đó đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất. Để giải các bài toán này ta thường sử dụng các kiến thức sau:

1) Trong một tam giác, một canh lớn hơn hiệu của hai cạnh kia và nhỏ hơn tổng của chúng.
2) Độ dài đường gấp khúc nối hai điểm lớn hơn độ dài đoạn thẳng nối hai điểm đó.
3) Cho các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm tới một đường thẳng:
   - ✓ Đường vuông góc ngắn hơn mọi đường xiên
   - ✓ Đường xiên nào có hình chiếu hơn thì lớn hơn.

4) Đường kính là dây cung lớn nhất của đường tròn

Áp dụng:

Các Bài tập dành cho " tất cả học sinh "

1. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng d. Tìm điểm $M \in d$ sao cho $|MA - MB|$ có giá trị lớn nhất.
2. Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn bán kính R. một điểm M chạy trên cung bé AB. Hãy chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ M đến A và B không lớn hơn đường kính của đường tròn đó.
3. Tìm một hình chữ nhật nội tiếp trong đường tròn có chu vi lớn nhất. Chứng minh rằng hình chữ nhật đó có diện tích lớn nhất.
4. Tam giác DMN gọi là nội tiếp tam giác ABC nếu ba đỉnh của tam giác DMN nằm trên ba cạnh của tam giác ABC. Hãy tìm tam giác nội tiếp tam giác ABC cho trước sao cho nó có chu vi nhỏ nhất.
5. Qua đỉnh A của tam giác ABC dựng đường thẳng d sao cho tổng khoảng cách từ các đỉnh B và C tới d là lớn nhất.
6. Cho điểm M nằm trong tam giác ABC có các cạnh a, b, c. Gọi các khoảng cách từ điểm M đến các cạnh a, b, c tương ứng là x,y, z. Hãy xác định vị trí điểm M trong tam giác sao cho biểu thức: $P = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ đạt giá trị nhỏ nhất.
7. Cho tam giác ABC cân đỉnh A nội tiếp trong đường tròn (O; R). Một tia Ax nằm giữa hai tia AB, AC cắt BC tại D và (O; R) tại E. Tìm vị trí của tia Ax sao cho độ dài DE lớn nhất.
8. Cho đường tròn (O; R) có AB là dây cung cố định không đi qua tâm O, C là điểm di động trên cung lớn AB (C không trùng với A và B). Gọi D là tiếp tuyến tại C của đường tròn (O;R); M , N lần lượt là chân các đường vuông góc vẽ từ A và B đến d. Tìm vị trí của C sao cho khoảng cách MN dài nhất, ngắn nhất.
9. Cho đường tròn (O; R) và một dây BC cố định biết $BC = R\sqrt{3}$. Một điểm A di động trên cung lớn BC. Tìm vị trí của A sao cho diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi cung nhỏ BC, dây AB và dây AC lớn nhất. Tính diện tích ấy theo R.
10. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Xét các hình thang có bốn đỉnh ở trên bốn cạnh của hình vuông và hai đáy song song với một đường chéo của hình vuông. Tìm hình thang có diện tích lớn nhất và tìm diện tích lớn nhất ấy.
11. Trong các tứ giác ABCD có AB = AD = a, BC = CD = b tứ giác nào có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất? Tính bán kính đó theo a và b.
12. Trong các tam giác có đáy a và đường cao tương ứng h_a cho trước. Hãy tìm tam giác có chu vi nhỏ nhất.

D. Phương pháp "Nguyên tắc cực hạn"

Trong quá trình tìm kiếm lời giải nhiều bài toán Hình học, sẽ rất có lợi nếu chúng ta xem xét các phần tử biên, phần tử giới hạn nào đó, tức là phần tử mà tại đó mỗi đại lượng Hình học có thể nhận giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất, chẳng hạn như cạnh lớn nhất, cạnh nhỏ nhất của một tam giác; góc lớn nhất hay góc nhỏ nhất của một đa giác ...v.v... Những tính chất của phần tử biên, phần tử giới hạn nhiều khi giúp chúng ta tìm được lời giải thu gọn của bài toán. Phương pháp tiếp cận như vậy tới lời giải bài toán được gọi là "Nguyên tắc cực hạn".

Áp dụng:

Các Bài tập dành cho " tất cả học sinh "

1. Một nước có 80 sân bay, mà khoảng cách giữa hai sân bay nào cũng khác nhau. Mỗi máy bay cất cánh từ một sân bay và bay đến sân bay nào gần nhất. Chứng minh rằng trên bất kỳ sân bay nào cũng không thể có quá 5 máy bay.
2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Lấy một điểm P bất kỳ, chứng minh rằng khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách từ P đến các đỉnh A, B, C của tam giác không nhỏ hơn 2 lần khoảng cách bé nhất trong các khoảng cách từ điểm P đến các cạnh của tam giác đó.
3. Cho tứ giác lồi ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Chứng minh rằng nếu các bán kính của bốn đường tròn nội tiếp các tam giác EAB, EBC, ECD, EDA mà bằng nhau thì tứ giác ABCD là hình thoi.
4. Chứng minh rằng nếu tất cả các cạnh của một tam giác đều nhỏ hơn 1 thì diện tích tam giác nhỏ hơn $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
5. Chứng minh rằng bốn hình tròn đường kính là bốn cạnh của một tứ giác thì phủ kín miền tứ giác ABCD.
6. Gọi O là giao điểm của tứ giác lồi ABCD. Chứng minh rằng nếu các tam giác AOB, BOC, COD, DOA có chu vi bằng nhau thì tứ giác ABCD là hình thoi.
7. Trên mặt phẳng cho 2×2000 điểm, trong đó không có bất kỳ ba điểm nào thẳng hàng. Người ta tô 2000 điểm bằng màu đỏ và tô 2000 điểm còn lại bằng màu xanh. Chứng minh rằng bao giờ cũng tồn tại một cách nối tất cả các điểm màu đỏ với tất cả các điểm màu xanh bởi 2000 đoạn thẳng không có điểm nào chung.
8. Cho tứ giác ABCD thoả mãn bán kính các đường tròn nội tiếp bốn tam giác ABC, BCD, CDA và DAB bằng nhau. Chứng minh rằng ABCD là hình chữ nhật.
9. Cho 2000 đường thẳng phân biệt trong đó ba đường thẳng bất kì trong số chúng thì đồng quy. Chứng minh rằng cả 2000 đường thẳng đã cho đồng quy tại một điểm.
10. Trên mặt phẳng đã cho 2000 điểm, khoảng cách giữa chúng đôi một khác nhau. Với mỗi điểm trong số 2000 điểm này với điểm ở gần nhất. Chứng minh rằng với cách nối đó không thể nhận được một đường gấp khúc khép kín.
11. Trên mặt phẳng cho 2000 điểm thoả mãn ba điểm bất kì trong số chúng đều thẳng hàng. Chứng minh rằng 2000 điểm đã cho thẳng hàng.
12. Bên trong đường tròn tâm O bán kính R = 1 có 8 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai điểm trong số chúng mà khoảng cách giữa hai điểm này nhỏ hơn 1.
13. Trên các cạnh của tam giác ABC lấy điểm C_1 thuộc cạnh AB, A_1 thuộc cạnh BC và B_1 thuộc cạnh CA. Biết rằng độ dài các đoạn thẳng AA_1; BB_1; CC_1 không lớn hơn 1. Chứng minh rằng $S_{ABC} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$ (đơn vị diện tích).
14. Trên mặt phẳng cho 2000 điểm không thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua 3 trong số 2000 điểm đã cho mà đường tròn này không chứa bên trong bất kì đường thẳng nào trong số 1997 điểm còn lại.
15. Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn tâm O. Chứng minh rằng nếu các đường chéo AC và BD giao nhau tại O thì tứ giác ABCD là hình thoi.

Q. Phương pháp "Nguyên tắc Dirichlet"

Peter Gustav Lejeune Dirichlet là nhà toán học người Đức sống ở thế kỉ 19 (1805 – 1859). Ông phát biểu một nguyên tất về phân chia phần tử vào các lớp, mà cách phát biểu phổ thông nhất của nguyên tắc này là: “Nếu nhốt m con thỏ vào n chuồng (m > n) thì phải có ít nhất là một chuồng chứa từ 2 con trở lên”. Việc chứng minh nguyên tắc này rất đơn giản (bằng phương pháp phản chứng). Tuy nhiên, đây lại là một phương pháp rất có hiệu quả để giải nhiều bài toán hình học phức tạp. Nguyên tắc Dirichlet cho chúng ta một kiểu chứng minh không kiến thiết, tức là chúng ta không thể nói chắc chắn được rằng 2 con thỏ được nhốt chung vào 1 chuồng cụ thể nào mà chỉ cần biết là chắc chắn phải có 1 chuồng như vậy. Việc vận dụng nguyên tắc Dirichlet vào giải toán còn giúp các bạn học sinh bước đầu làm quen với khái niệm ***đẳng cấu*** trong toán học. Để áp dụng nguyên tắc Dirichlet cần phải làm xuất hiện tình huống nhốt thỏ vào chuồng thỏa mãn điều kiện:

- Số thỏ nhiều hơn số chuồng.
- Thỏ phải được nhốt hết vào chuồng, nhưng không bắt buộc là chuồng nào cũng phải có thỏ.

Áp dụng:

Các Bài tập dành cho “ tất cả học sinh ”

1. Trong hình vuông mà độ dài mỗi cạnh là 4 cho trước 33 điểm phân biệt, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Người ta vẽ các đường tròn có bán kính đều bằng $\sqrt{2}$, có tâm là các điểm đã cho. Hỏi có hay không ba điểm trong số các điểm nói trên sao cho chúng đều thuộc vào phần chung của ba hình tròn có các tâm cũng chính là ba điểm đó.
2. Trên mặt phẳng cho 25 điểm sao cho từ 3 điểm bất kì trong số chúng đều tìm được 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1 chứa không ít hơn 13 điểm.
3. Cho hình vuông ABCD và 9 đường thẳng phân biệt thỏa mãn mỗi một đường thẳng đều chia hình vuông thành 2 tứ giác có diện tích tỉ lệ với 2 và 3. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất là 3 đường thẳng đồng quy tại 1 điểm.
4. Cho đa giác đều gồm 1999 cạnh. Người ta sơn các đỉnh của đa giác bằng 2 màu xanh và đỏ. Chứng minh rằng ắt phải tồn tại 3 đỉnh được sơn cùng 1 màu tạo thành 1 tam giác cân.
5. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 1. Đánh dấu 5 điểm phân biệt bất kì trong tam giác ABC. Chứng minh rằng ắt phải tồn tại ít nhất là 2 điểm trong số đó mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 0,5.
6. Bên trong hình vuông có cạnh bằng 1, lấy bất kì 51 điểm phân biệt. Chứng minh rằng phải tồn tại ít nhất là 3 điểm trong số 51 điểm này nằm trong một hình tròn có bán kính bằng $\frac{1}{7}$.
7. Bên trong hình tròn (O; R) có diện tích bằng 8. người ta lấy 17 điểm phân biệt bất kỳ. Chứng minh rằng bao giờ cũng tìm được ít nhất là ba điểm tạo thành 1 tam giác có diện tích bé hơn 1.
8. Bên trong một cái sân hình chữ nhật có chiều dài 4m và chiều rộng 3m có 6 con chim đang ăn. Chứng minh rằng phải có ít nhất là 2 con chim mà khoảng cách đậu giữa chúng nhỏ hơn là $\sqrt{5}$ m.
9. Các điểm trên mặt phẳng được tô bằng 1 trong 3 màu: xanh, đỏ, vàng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất là 2 điểm được tô bởi cùng một màu mà khoảng cách giữa chúng là một.
10. Trên mặt phẳng cho 100 điểm phân biệt bất kì. Nối mỗi điểm với ít nhất là 66 điểm trong số 99 điểm còn lại bằng 1 đoạn thẳng. Chứng minh rằng có thể xảy ra trường hợp có 2 điểm trong số 4 điểm bất kì của 100 điểm đã cho không được nối với nhau.
11. Cho 5 điểm phân biệt nằm bên trong hình vuông ABCD có cạnh bằng $35+\sqrt{3}$. Chứng minh rằng ắt tìm được ít nhất là 1 điểm trong hình vuông đã cho sao cho khoảng cách từ nó đến 5 điểm đã cho lớn hơn 10.
12. Mỗi điểm của mặt phẳng được tô bằng 1 trong 2 màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng ắt tìm được ít nhất là 3 điểm được tô bởi cùng một màu tạo thành 1 tam giác đều có cạnh là 1 hoặc $\sqrt{3}$.

13. Mỗi điểm của mặt phẳng được tô bằng một trong hai màu đen và đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác đều mà các đỉnh của nó chỉ được tô bằng 1 màu.
14. Trên mặt phẳng cho 2000 đường thẳng phân biệt đôi một cắt nhau. Chứng minh rằng tồn tại là ít nhất 2 đường thẳng mà góc tạo bởi chúng không lớn hơn $\frac{180^0}{2000}$.
15. Bên trong đường tròn có bán kính là 2000 có 8000 đoạn thẳng có độ dài là 1. Chứng minh rằng có thể dựng được 1 đường thẳng d hoặc là song song hoặc là vuông góc với 1 đường thẳng l cho trước, sao cho d cắt ít nhất là 2 đoạn thẳng đã cho.

R. Phương pháp "Tìm tập hợp điểm"

Khi giải bài toán về "tập hợp điểm" ta thường làm như sau: nếu tập hợp điểm M có tính chất α là một hình (H) thì tập hợp các điểm có tính chất α và tập hợp các điểm thuộc hình (H) là hai tập hợp bằng nhau. Muốn vậy ta phải chứng minh 2 phần.

1) ***Phần thuận:***
Lấy một điểm M bất kì có tính chất α, ta chứng minh M thuộc hình (H): $M(\alpha) \Rightarrow M \in (H)$. Sau đó phải xét xem điểm M nằm trên toàn bộ hay 1 phần của hình (H). Phần này gọi là phần giới hạn, cần trình bày ở cuối phần thuận trước khi chứng minh phần đảo.
2) ***Phần đảo:***
Lấy một điểm M' bất kì thuộc hình (H) (hoặc phần của hình (H)) đã được giới hạn rồi chứng minh M' có tính chất α : $M' \in (H) \Rightarrow M'(\alpha)$.
Chỉ sau khi đã chứng minh cả phần thuận lẫn phần đảo (hoặc cặp mệnh đề tương đương) ta mới được phép kết luận tập hợp điểm M có tính chất α là hình (H) (hoặc 1 phần của hình đó).
3) Trong thực hành, việc giải bài toán về tập hợp điểm được quy về việc phân tích bài toán sao cho có thể đưa về 1 trong các tập hợp điểm cơ bản đã biết. Với những bài toán phức tạp, quá trình phân tích trên phải kéo dài rồi mới đưa về 1 trong các tập hợp điểm cơ bản. Ta có thể minh hoạ bằng sơ đồ sau:

- ***Phần thuận:*** $M(\alpha) \Rightarrow M(\beta) \Rightarrow ... \Rightarrow M(\gamma) \Rightarrow M \in (H)$
- ***Phần đảo:*** $M' \in (H) \Rightarrow M'(\gamma) \Rightarrow ... \Rightarrow M'(\beta) \Rightarrow M'(\alpha)$ trong đó γ là tính chất xác định một tập hợp điểm cơ bản. ***Những tập hợp điểm cơ bản*** trong chương trình toán phổ thông cơ sở là:

✓ Tập hợp các điểm cách đều hai điểm A và B cho trước là đường trung trực của đoạn thẳng AB.
✓ Tập hợp các điểm cách đều hai cạnh của một góc là tia phân giác của góc ấy.
✓ Tập hợp các điểm có khoảng cách l không đổi đến đường thẳng cố định xy là hai đường thẳng song song với xy.
✓ Cho tia Ox, tập hợp các điểm M sao cho $\widehat{MOx}$ có số đo bằng α không đổi ($0^0 < \alpha < 180^0$) là hai tia Oy và Oy' sao cho các góc xOy và xOy' có số đo là α.
✓ Tập hợp điểm M cách điểm O cố định một đoạn OM = R (không đổi) là đường tròn (O; R).
✓ Tập hợp điểm M nhìn đoạn thẳng AB cho trước dưới góc α ($\widehat{AMB} = \alpha = \text{không đổi}$) là hai cung tròn đối xứng nhau qua AB (gọi là cung chứa góc α vẽ trên đoạn AB)

Áp dụng:

Các Bài tập dành cho " tất cả học sinh "

1. Cho một góc vuông xOy. Một điểm M di động trên cạnh Oy. Nối M với hai điểm cố định A, B trên cạnh Ox. Các đường vuông góc với MA tại A và với MB tại B cắt nhau ở một điểm N

a) Chứng minh bốn điểm M, A, B, N nằm trên cùng một đường tròn và tìm tập hợp tâm I của đường tròn đó.
b) Tìm tập hợp các điểm N

2. Cho hai điểm A, B cố định trên một đường thẳng d. Trong cùng nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d, ta kẻ các tia Ax, By vuông góc với d và lấy trên Ax một điểm C, trên By một điểm D thoả mãn hệ thức: $AB^2 = 4AC . BD$. Gọi O là trung điểm của AB. Chứng minh:
   a) Hệ thức $CD^2 = OC^2 + OD^2$.
   b) Các cặp tam giác sau đây đồng dạng ODC và AOC; ODC và BOD.
   c) Giả sử C, D thay đổi nhưng các đoạn thẳng AB, AC, BD luôn luôn thoả mãn hệ thức (1). Tìm tập hợp hình chiếu của trung điểm O lên đoạn CD.
3. Cho một góc vuông xOy. Trên cạnh Oy lấy một điểm A cố định và trên cạnh Ox có một điểm B di động. Dựng hình vuông ABCD (nằm trong góc vuông xOy). Tìm tập hợp tâm I của hình vuông.
4. Cho nửa đường tròn đường kính AB và một điểm M di động trên nửa đường tròn ấy. Tiếp tuyến tại M cắt đường song song với AM, kẻ từ tâm O, tại điểm P. Tìm tập hợp điểm P.
5. Cho một góc vuông xOy và một điểm P trên tia phân giác Oz. Một đường tròn thay đổi tâm I, đi qua O và P, cắt Ox ở A và Oy ở B.
   a) Chứng minh I là trung điểm của AB. Tìm tập hợp điểm I.
   b) Chứng minh $PI \perp AB$
   c) Gọi Q là điểm đối xứng của P qua điểm I.. Tìm tập hợp điểm Q
6. Cho hai đường tròn tâm O và O’ có bán kính bằng nhau và tiếp xúc ngoài với nhau tại một điểm B. Đường thẳng nối tâm OO’ cắt đường tròn tâm O tại điểm A và cắt đường tròn tâm O’ tại điểm C. Ta kẻ hai dây AP thuộc đường tròn tâm O, BM thuộc đường tròn tâm O’, song song với nhau. Các tia AP và CM cắt nhau tại điểm H.
   a) Chứng minh $PM = BH$ b) Tìm tập hợp điểm H c) Tìm tập hợp trung điểm I của PM
7. Cho một góc xOy, một điểm B cố định trên Oy và một điểm C cố định trên Ox sao cho OC = OB, M là một điểm di động trên tia BC (M ở phía ngoài góc xOy). Kẻ $ME \perp Oy$ và $MF \perp Ox$
   a) So sánh các góc $\widehat{BME}; \widehat{BMF}$ và $\widehat{xOy}$
   b) Từ đây suy ra tập hợp những điểm có hiệu các khoảng cách đến hai cạnh của một tam giác bằng một độ dài l cho trước .
8. Cho hình chữ nhật ABCD và một góc vuông xAy quay xung quanh đỉnh A. Tia Ax cắt đường thẳng BC ở điểm M và tia Ay cắt đường thẳng CD ở điểm P. Dựng hình chữ nhật PAMN.
   a) Chứng minh tâm O của hình chữ nhật cách đều ba điểm M, P, C. Từ đó suy ra tập hợp các điểm O.
   b) Chứng minh góc $\widehat{ACN} = 1v$. Tìm tập hợp các điểm N.
9. Trên một đường thẳng d có hai điểm cố định A, B. Từ một điểm C thuộc đường thẳng AB, ta kẻ đường vuông góc Cx với đường thẳng d và lấy trên Cx một đoạn CM = AC
   a) Tìm tập hợp các điểm M khi C di chuyển trên AB.
   b) Từ B kẻ đường thẳng vuông góc với AB và lấy trên đó một đoạn BD = BA. Gọi H là hình chiếu của D lên MB. Tìm tập hợp các điểm H
   c) Từ A và B kẻ các đường vuông góc với MA, MB, các đường này cắt nhau tại P. Chứng minh rằng tứ giác AMBP nội tiếp trong một đường tròn. Xác định tâm O của đường tròn này và tìm tập hợp các điểm O
10. Cho một đường tròn tâm O và một điểm A cố định trên đường tròn. Một góc $\widehat{xAy}$ có số đo không đổi, quay xung quanh điểm A. Hai tia Ax, Ay cắt đường tròn tại các điểm B, C.

a) Tìm tập hợp trung điểm I của BC.
b) Kẻ từ C đường vuông góc với CA, đường này cắt tia Ox tại một điểm M. Tìm tập hợp các điểm M

11. Cho nửa đường tròn ANB, tâm O, đường kính AB, và M là điểm chính giữa của cung AB. Kẻ hai bán kính vuông góc OC, OD (điểm C ở giữa hai điểm A, M). Gọi C'và D' là các hình chiếu của C và D trên AB
    a) So sánh các tam giác OCC' và ODD'
    b) Chứng minh đường phân giác của góc C'CO đi qua một điểm cố định F. Tính góc CFD.
    c) Xác định hình tính tứ giác CDBF.
    d) Chứng minh: $CB \perp DF$
    e) Tìm tập hợp giao điểm N của CB và AD khi điểm C di chuyển trên cung AM.
12. Cho một đường tròn tâm O, đường kính AB và tiếp tuyến Ax tại điểm A. Từ một điểm M di chuyển trên Ax, ta kẻ tiếp tuyến MC đến đường tròn.
    a) Chứng minh tứ giác AOCM nội tiếp.
    b) Tìm tập hợp tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAMC
    c) Tìm tập hợp trực tâm của ΔABC
    d) Tìm tập hợp tâm I của đường tròn nội tiếp trong ΔABC
13. Cho một điểm M di động trên một đoạn thẳng cố định AB. Gọi Bx là đường vuông góc với AB tại B. Dựng tam giác đều AMN. Đường vuông góc với MN tại N cắt Bx ở điểm P.
    a) Tìm tập hợp các điểm N
    b) Tìm tập hợp trung điểm I của BN
    c) Tìm tập hợp tâm O các đường tròn ngoại tiếp tứ giác BPNM.
14. Cho ba điểm cố định A, B, C theo thứ tự ấy ở trên một đường thẳng d. Một đường tròn thay đổi đi qua hai điểm B, C. Từ A ta kẻ tiếp tuyến AM với đường tròn này. Tìm tập hợp các điểm M.

S. Phương pháp "Dựng hình"

Giải một bài toán dựng hình thỏa một số điều kiện cho trước bằng thước và compa. (nếu chỉ được phép sử dụng 1 trong 2 dụng cụ ấy thì đề bài cần nói rõ). Muốn giải một bài toán dựng hình ta cần chỉ ra trình tự thực hiện các phép dựng hình cơ bản (dựng đường thẳng đi qua hai điểm đã biết, dựng đường tròn biết tâm và bán kính của nó, ...) để tạo nên hình thỏa các điều kiện của đề bài. Nói chung, lời giải một bài toán dựng hình được chia làm 4 phần:

1) ***Phân tích:*** giả sử đã dựng được hình thỏa điều kiện của đề bài. Phân tích hình ấy để tìm cách đưa bài toán đã cho về các bài toán dựng hình cơ bản đã biết.
2) ***Cách dựng:*** trình bày lần lượt các phép dựng cơ bản tạo nên hình cần dựng.
3) ***Chứng minh:*** chứng tỏ rằng hình vừa dựng thoả các điều kiện của đề bài.
4) ***Biện luận:*** xét xem trong trường hợp nào bài toán có nghiệm và có bao nhiêu nghiệm, trường hợp nào bài toán vô nghiệm

Sau đây là ***các bài toán dựng hình cơ bản***:

1. Dựng một đoạn thẳng bằng đoạn thẳng a cho trước.
2. Dựng một đoạn thẳng có độ dài bằng tổng (hiệu) các độ dài của hai đoạn thẳng cho trước.
3. Dựng trung điểm của một đoạn thẳng cho trước.
4. Dựng một góc bằng một góc cho trước.
5. Dựng đường phân giác của một góc cho trước.
6. Dựng đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với 1 đường thẳng cho trước.
7. Dựng đường thẳng đi qua một điểm cho trước và song song với 1 đường thẳng cho trước không đi qua điểm ấy.
8. Dựng tam giác biết hai cạnh và góc xen giữa hai cạnh ấy, biết 1 cạnh và 2 góc kề cạnh ấy, biết ba cạnh.

9. Dựng tam giác vuông biết cạnh huyền và 1 cạnh góc vuông.
10. Dựng các điểm chia một đoạn thẳng cho trước thành nhiều phần bằng nhau.

Áp dụng:

Các Bài tập dành cho " tất cả học sinh "

1. Dựng 1 tam giác vuông biết 1 cạnh góc vuông và hiệu giữa cạnh huyền và cạnh góc vuông kia.
2. Cho đường tròn đường kính AB và một điểm C ở ngoài đường tròn. Chỉ dùng thước thẳng, hãy dựng một đường thẳng đi qua điểm C và vuông góc với đường thẳng AB.
3. Dựng hình bình hành ABCD biết AB = a, tổng của hai đường chéo AC + BD = m và góc α tạo bởi hai đường chéo ấy.
4. Dựng một tam giác biết tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp và 1 tâm của một đường tròn bàng tiếp của nó.
5. Cho đường tròn tâm O, bán kính R và một điểm M ở trong đường tròn. Hãy dựng một dây cung đi qua M và có độ dài bằng a cho trước.
6. Dựng tam giác ABC biết cạnh BC và đường cao, đường phân giác, đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A chia góc BAC thành 4 góc bằng nhau.
7. Cho bốn đường tròn(O_1;r_1); (O_2; r_2); (O_3; r_3); (O_4; r_4). Hãy dựng hình vuông sao cho mỗi cạnh (hay cạnh kéo dài) của nó tiếp xúc với 1 trong 4 đường tròn đã cho.
8. Dựng hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau, có 2 tâm là hai điểm cố định cho trước và 1 trong 2 tiếp tuyến chung ngoài của chúng đi qua một điểm cố định cho trước.
9. Dựng tam giác vuông ABC biết cạnh huyền BC = a và khoảng cách giữa tâm đường tròn nội tiếp tam giác và trọng tâm của tam giác là nhỏ nhất.
10. Cho trước 1 góc bằng 19^0. Hãy dùng thước thẳng và compa để vẽ 1 góc bằng 1^0.

T. Phương pháp "Các phép biến hình"

Phép đối xứng trục

1) *Hình đối xứng qua một đường thẳng:*

a) Định nghĩa 1: hai điểm M và M' gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng NM'.

Kí hiệu: phép đối xứng qua trục d là S_d

$$M' = S_d(M) \xleftrightarrow{\text{định nghĩa}} \begin{cases} MM' \perp d\,(\text{tại } H) \\ HM = HM' \end{cases}$$

b) Định nghĩa 2: hai hình F và F' gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng với một điểm thuộc hình kia qua d và ngược lại.

$$F' = S_d(F) \xleftrightarrow{\text{định nghĩa}} (M \in F \Leftrightarrow M' = S_d(M) \in F')$$

c) Định lý: nếu hai đường thẳng AB và A'B' có các điểm A và A'; B và B' đối xứng với nhau qua đường thẳng d thì hai đoạn thẳng đó bằng nhau và đối xứng nhau qua đường thẳng d.

$$\begin{cases} A' = S_d(A) \\ B' = S_d(B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'B' = AB \\ A'B' = S_d(AB) \end{cases}$$

Từ định lý trên ta suy ra:

Nếu các đỉnh của tam giác ABC lần lượt đối xứng với các đỉnh của tam giác A'B'C' qua trục d thì hai tam giác đó đối xứng với nhau.

Nếu hai điểm của đường thẳng này đối xứng với hai điểm của đường thẳng khác qua trục d thì hai đường thẳng đó đối xứng với nhau.

2) *Trục đối xứng của một hình:*

Định nghĩa: đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình F nếu điểm đối xứng của mỗi điểm thuộc hình F qua trục d cũng thuộc hình F.

$$F_{\text{có trục đối xứng d}} \xLeftrightarrow{\text{định nghĩa}} F = S_d(F) \begin{cases} A' = S_d(A) \\ B' = S_d(B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'B' = AB \\ A'B' = S_d(AB) \end{cases}$$

3) *Trục đối xứng của một số hình:*

a) Một góc có trục đối xứng là đường phân giác của góc ấy.

b) Một đoạn thẳng có trục đối xứng là đường trung trực của đoạn thẳng ấy.

c) Một tam giác cân có trục đối xứng là đường trung trực (cũng là đường cao, đường phân giác, đường trung tuyến ứng với cạnh đáy)

d) Một hình thang cân có trục đối xứng là đường thẳng đi qua trung điểm của hai đáy.

e) Hình chữ nhật có hai trục đối xứng là hai đường thẳng đi qua giao điểm của 2 đường chéo và vuông góc với các cạnh của các hình chữ nhật.

f) Hình vuông có bốn trục đối xứng, đó là hai đường chéo và hai đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường chéo và vuông góc với các cạnh của hình vuông

g) Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.

Phép đối xứng tâm

1) *Hình đối xứng qua một điểm:*

a) Điểm đối xứng qua một điểm: $M' = S_o(M) \xLeftrightarrow{\text{định nghĩa}} OM = OM' = \dfrac{MM'}{2}$

b) Hình đối xứng qua một điểm: $F' = S_O(F) \xLeftrightarrow{\text{định nghĩa}} (M \in F \Leftrightarrow M' = S_O(M) \in F')$

c) Định lí: $\begin{cases} A' = S_O(A) \\ B' = S_O(B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'B' = AB \\ A'B' = S_O(AB) \end{cases}$

d) Hệ quả: $\left.\begin{matrix} A' = S_O(A) \\ B' = S_O(B) \\ C' = S_O(C) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta A'B'C' = S_O(\Delta ABC)$

2) *Tâm đối xứng của một hình:*

Định nghĩa: Hình $F_{\text{có tâm đối xứng}} \xLeftrightarrow{\text{định nghĩa}} F = S_O(F)$

Một số hình có tâm đối xứng:

Hình bình hành, hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông có tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo. Đường tròn có tâm đối xứng là tâm của nó.

Phép tịnh tiến

1) *Khái niệm vectơ:*

Vectơ là một đoạn thẳng có định hướng tức là đoạn thẳng trên đó đã chỉ rõ thứ tự của các điểm mút. Điểm mút đầu gọi là gốc, điểm mút thứ hai gọi là ngọn của vectơ.

Kí hiệu: $\overrightarrow{AB}$ hay $\vec{a}$. Đường thẳng AB gọi là giá của $\overrightarrow{AB}$. Độ dài của đoạn thẳng AB gọi là môđun của $\overrightarrow{AB}$ và được kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Vectơ bằng nhau: Hai vectơ cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau. Các véctơ $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{EF}$ trong hình bên đều cùng phương.

Hai vectơ cùng phương có thể cùng hướng ($\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$) kí hiệu $\overrightarrow{AB} \nearrow\nearrow \overrightarrow{CD}$ hay ngược hướng ($\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EF}$) kí hiệu là $\overrightarrow{AB} \nearrow\swarrow \overrightarrow{EF}$

Định nghĩa: hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng môđun và cùng hướng.

$$\vec{a} = \vec{b} \xleftrightarrow{\text{định nghĩa}} \begin{cases} \vec{a} \nearrow\nearrow \vec{b} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases}$$

2) *Phép tịnh tiến:*

a) Định nghĩa: Trong mặt phẳng P cho vectơ $\vec{V}$. Phép biến hình của mặt phẳng P biến mỗi điểm M thuộc P thành điểm M' thuộc P sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$ gọi phép tịnh tiến theo $\vec{V}$ và kí hiệu là $T_{\vec{V}}$

b) Cách viết: $T_{\vec{V}} : M \mapsto M'$

3) *Một số tính chất của phép tịnh tiến:*

Phép tịnh tiến biến:

a) Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó và cùng phương.
b) Đường thẳng thành đường thẳng cùng phương, tia thành tia cùng phương.
c) Góc thành góc bằng nó và có các cạnh tương ứng cùng phương.
d) Đường tròn thành đường tròn bằng nó.

Phép quay

1) *Phép quay:*

Cho điểm O và một góc $\alpha\,(O^0 \le \alpha \le 180^0)$. Ta quy ước chiều quay ngược chiều kim đồng hồ là chiều dương, thuận chiều kìm đồng hồ là chiều âm. Phép biến hình biến điểm M tuỳ ý trong mặt phẳng thành điểm M' sao cho: $\begin{cases} OM' = OM \\ \widehat{MOM'} = \alpha \end{cases}$ gọi là phép quay tâm O, góc quay α. Điểm M' gọi là ảnh của điểm M trong phép quay ấy.

Kí hiệu: $M' = Q_{O,\alpha}(M)$ Hoặc $Q_{O,\alpha} : M \mapsto M'$.

Trong hình bên ta có: $M' = Q_{O,60^0}(M)$ Hoặc $Q_{O,60^0} : M \mapsto M'$

$N' = Q_{O,-90^0}(N)$ Hoặc $Q_{O,-90^0} : N \mapsto N'$

Ảnh của một hình trong phép quay:

a) Trong phép quay, tập hợp các ảnh của tất cả các điểm của hình (H) tạo thành hình (H') gọi là ảnh của hình (H)

b) Nếu: $\left.\begin{matrix} A' = Q_{O,\alpha}(A) \\ B' = Q_{O,\alpha}(B) \end{matrix}\right\} \Rightarrow A'B' = Q_{O,\alpha}(AB)$

2) ***Các tính chất của phép quay:*** Phép quay biến:

a) Một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng nó.
b) Một đường thẳng thành một đường thẳng, một tia thành một tia.
c) Một góc thành một góc bằng nó.
d) Một đường tròn thành một đường tròn bằng nó.
e) Nếu góc quay $\alpha = 180^0$ phép quay trở thành phép đối xứng tâm(tâm quay là tâm đối xứng)

3) *Cách xác định tâm quay*

a) Trường hợp cho biết ảnh của một điểm A' = Q(A) và góc quay là α. Gọi O là tâm quay ta có: OA = OA' nên O thuộc đường trung trực d của đoạn AA'. Vậy tâm quay O là giao điểm của đường trung trực d và cung chứa góc α

b) Trường hợp cho biết ảnh của hai điểm A' = Q(A); B' = Q(B).

- Nếu AA' không song song với BB': tâm quay O là giao điểm của hai đường trung trực d_1, d_2 của hai đoạn thẳng AA' và BB'
- Nếu AA'// BB' tâm quay O là giao điểm của hai đường thẳng AB và A'B'

Áp dụng:

Các Bài tập dành cho " tất cả học sinh "

1. Trong tất cả các tam giác có chung 1 cạnh và diện tích bằng nhau, tìm tam giác có chu vi nhỏ nhất.
2. Cho trực tâm H của tam giác ABC và H' là điểm đối xứng của H qua BC.
   a) Chứng minh rằng H' nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
   b) Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AHB, BHC, CHA có bán kính bằng nhau.
   c) Gọi (O; R) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Cho B, C cố định còn A di động trên (O; R). Tìm tập hợp trực tâm H của tam giác ABC.
   d) Cho trước đường tròn (O; R), một điểm A nằm trên đường tròn và 1 điểm H ở trong đường tròn. Dựng tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O;R) nhận A làm một đỉnh và H là trực tâm.
3. Dựng tam giác ABC biết đường tròn ngoại tiếp tam giác, trực tâm H của tam giác và một điểm E trên cạnh BC.
4. Cho đường thẳng d và hai điểm E, F nằm trên hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ là đường thẳng d. Hãy dựng tam giác nhận E, F là chân hai đường cao và đường cao thứ ba nằm trên đường thẳng d.
5. Cho tam giác cân ABC (CA = CB) có $\widehat{ACB} = 100^0$. Qua A và B vẽ các tia AL và BK(L thuộc BC, K thuộc AC) sao cho $\widehat{LAB} = 30^0$; $\widehat{KBA} = 20^0$. AL cắt BK ở M. tính các góc ACM, BCM.
6. Cho ba điểm O_1; O_2; O_3 và một điểm M (trong 4 điểm O_1; O_2; O_3; M không có ba điểm nào thẳng hàng). Gọi M_1 là điểm đối xứng của M qua O_1; M_2 là điểm đối xứng của M_1 qua O_2; M_3 là điểm đối xứng của M_2 qua O_3; M_4 là điểm đối xứng của M_3 qua O_1; M_5 là điểm đối xứng của M_4 qua O_2; M_6 là điểm đối xứng của M_5 qua O_3. Chứng minh rằng M_6 trùng M.
7. Cho ba đường tròn bằng nhau (O_1; R);(O_2; R);(O_3; R) tiếp xúc ngoài nhau từng đôi 1: (O_1) tiếp xúc với (O_2) tại A; (O_2) tiếp xúc với (O_3) tại B; (O_3) tiếp xúc với (O_1) tại C và một điểm M tuỳ ý ở trên đường tròn (O_1; R). gọi $M_1 = S_A(M)$; $M_2 = S_B(M_1)$; $M_3 = S_C(M_2)$. Chứng minh rằng $M_3 = S_{O_1}(M)$ và $M_3 \in (O_1;R)$
8. Cho đường tròn (O) đường kính AB cố định và một điểm C di động trên đường tròn. Trên tia AC lấy một điểm D sao cho AC = CD. Vẽ hình bình hành ADBE. Tìm tập hợp điểm E.
9. Dựng hình bình hành nội tiếp trong một tứ giác cho trước và nhận điểm O cho trước làm tâm đối xứng.
10. Dựng hình bình hành biết ba trung điểm của ba cạnh của nó.
11. Cho tam giác ABC. Dựng hình vuông BCDE nằm trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng BC không chứa đỉnh A. Gọi AH là đường cao của tam giác ABC. Từ D và E dựng $DI \perp AB$, $EK \perp AC$. Chứng minh rằng ba đường thẳng EK, DI, AH đồng quy.

12. Cho hình thang ABCD (BC// AD) có tổng hai đáy lớn hơn tổng hai cạnh bên. Gọi M là giao điểm các đường phân giác trong của hai góc A và B, N là giao điểm các đường phân giác trong của hai góc C và D. Chứng minh rằng: $2MN = (BC + AD) - (AB + CD)$.
13. Cho hình vuông ABCD tâm O. gọi M và N là các điểm theo thứ tự nằm trên cạnh AB và CD. Hãy xác định M và N sao cho đường gấp khúc OMNB có độ dài nhỏ nhất và MN // BC. Tính độ dài ấy theo cạnh của hình vuông bằng a. Giải bài toán trên khi đường gấp khúc OMNB có độ dài lớn nhất.
14. Qua giao điểm A của hai đường tròn bằng nhau, người ta vẽ một cát tuyến di động cắt hai đường tròn tại B và C. Từ B vẽ $Bx \perp BC$ và từ C vẽ Cy song song với đường nối tâm OO' cắt Bx tại M. Tìm tập hợp điểm M.
15. Cho đường tròn(O; R), dây cung AB cố định và một điểm M di động trên đường tròn.
    a) Tìm tập hợp trực tâm H của tam giác MAB
    b) Tìm tập hợp các giao điểm E và F của đường tròn tâm M bán kính MH và đường tròn tâm H bán kính HM.
16. Cho đường tròn (O) đường kính EF và hai điểm A, B trên đường tròn. Dựng góc nội tiếp $\widehat{ACB}$ sao cho hai cạnh góc ấy chắn trên EF một đoạn thẳng có độ dài bằng l cho trước.
17. Trên các cạnh của tam giác ABC và ở miền ngoài của tam giác, vẽ các tam giác đều ABC_1, BCA_1, CAB_1. Chứng minh rằng:
    a) $AA_1 = BB_1 = CC_1$ b) Ba đường thẳng AA_1; BB_1; CC_1 đồng quy tại một điểm.
18. Cho tam giác đều ABC và một điểm M tuỳ ý.
    a) Chứng minh rằng một trong các khoảng cách từ điểm M đến ba đỉnh của tam giác ABC không lớn hơn tổn các khoảng cách đến hai đỉnh còn lại.
    b) Tìm điều kiện cần và đủ để M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
19. Cho một góc vuông xOy và một điểm A cố định trên đường phân giác của góc đó. Một đường tròn thay đổi đi qua hai điểm O và A, cắt Ox ở C và cắt Oy ở D. Chứng minh rằng OC + OD là một hằng số.
20. Cho góc vuông xOy và một điểm A cố định trên Ox. Tam giác đều ABC nằm ở miền trong của góc xOy và có đỉnh B thuộc Oy. Tìm tập hợp đỉnh C.
21. Cho đường tròn (O) đường kính AB và một điểm C di động trên đường tròn. Trên tia AC lấy đoạn AD = BC.
    a) Xác định phép quay biến BC thành AD. b) Tìm tập hợp điểm D.

U. Phương pháp "Hình học Không gian".

A. *Phần đại cương:*

1. Cách xác định một mặt phẳng và biểu diễn một mặt phẳng:

a) Cách biểu diễn một mặt phẳng: dùng hình bình hành.

b) Các cách xác định một mặt phẳng:

- Hai đường thẳng cắt nhau xác định một mặt phẳng.
- Một đường thẳng và một điểm nằm ngoài đường thẳng xác định một mặt phẳng.
- Ba điểm không thẳng hàng xác định một mặt phẳng.
- Hai đường thẳng song song xác định một mặt phẳng.

2. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng:

a) Vị trí tương đối của đường thẳng với đường thẳng trong không gian:

- Hai đường thẳng trùng nhau.
- Hai đường thẳng song song.

- Hai đường thẳng cắt nhau. *Đặc biệt:* Hai đường thẳng vuông góc với nhau.
- Hai đường thẳng chéo nhau.

b) Vị trí tương đối của đường thẳng với mặt phẳng trong không gian:

- Đường thẳng nằm trong mặt phẳng.
- Đường thẳng cắt mặt phẳng. *Đặc biệt:* Đường thẳng và mặt phẳng vuông góc với nhau.
- Đường thẳng song song với mặt phẳng.

c) Vị trí tương đối của hai mặt phẳng trong không gian:

- Hai mặt phẳng trùng nhau.
- Hai mặt phẳng song song với nhau.
- Hai mặt phẳng cắt nhau. *Đặc biệt:* Hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

3. Phương pháp chứng minh:

- Hai đường thẳng trùng nhau, ta chứng minh chúng có hai điểm chung.
- Hai đường thẳng song song, dùng các phương pháp trong hình học phẳng.
- Hai đường thẳng cắt nhau, ta chứng minh chúng có một điểm chung.

Đặc biệt: Hai đường thẳng vuông góc với nhau, ta chứng minh chúng tạo thành một góc vuông.

- Hai đường thẳng chéo nhau, ta chứng minh chúng không đồng phẳng và không có điểm chung.

  Đặc biệt: Đường thẳng và mặt phẳng vuông góc với nhau, ta chứng minh: Đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng đó.
- Đường thẳng song song với mặt phẳng, ta chứng minh:
  + Đường thẳng và mặt phẳng không có điển chung.
  + Đường thẳng song song với một đường thẳng nằm trong mặt phẳng đã cho.
- Hai mặt phẳng trùng nhau, ta chứng minh bằng 4 cách xác định mặt phẳng.
- Hai mặt phẳng song song với nhau, ta chứng minh:
  + Hai mặt phẳng không có điển chung.
  + Hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng này cùng song song với mặt phẳng kia.
- Hai mặt phẳng cắt nhau, ta chứng minh chúng có một đường thẳng chung.

  Đặc biệt: Hai mặt phẳng vuông góc với nhau, ta chứng minh đường thẳng nằm trong mặt phẳng này vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Phần công thức tính diện tích các hình hình học:

1. Diện tích xung quanh hình lăng trụ đứng là:

   $\boxed{S_{xq} = p \cdot l}$ Với p là chu vi đáy, l là độ dài cạnh bên.

   Diện tích toàn phần hình lăng trụ bằng tổng diện tích xung quanh với hai lần diện tích đáy.

   Thể tích của hình lăng trụ đứng:

   $\boxed{V = B \cdot h}$ Với B là diện tích đáy, h là độ dài đường cao.

2. Diện tích xung quanh hình chóp đều được tính theo công thức:

   $\boxed{S_{xq} = \frac{1}{2} p \cdot d}$ Với p là chu vi đáy, d là độ dài đường cao của mặt bên.

   Thể tích hình chóp được tính theo công thức:

   $\boxed{V = \frac{1}{3} B \cdot h}$ Với B là diện tích đáy, h là độ dài đường cao.

   Diện tích xung quanh hình chóp cụt: $\boxed{S_{xq} = \frac{1}{2}(p + p')d}$

Thể tích hình cóp cụt được tính theo công thức: $\boxed{V = \frac{1}{3}h\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)}$

3. Diện tích xung quanh hình trụ là: $\boxed{S_{xq} = 2\pi Rh}$

   Thể tích hình trụ là: $\boxed{V = \pi R^2 h}$

4. Diện tích xung quanh hình nón là: $\boxed{S_{xq} = \pi Rl}$

   Thể tích hình nón là: $\boxed{V = \frac{1}{3}\pi R^2 h}$

   Diện tích xung quanh hình nón cụt là: $\boxed{S_{xq} = \pi(R + r)l}$

   Thể tích hình nón cụt là: $\boxed{V = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 + r^2 + Rr\right)h}$

5. Hình cầu:

   Diện tích mặt cầu là: $\boxed{S_{xq} = 4\pi R^2}$; Thể tích hình cầu là: $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$

Áp dụng:

Các Bài tập dành cho " tất cả học sinh "

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, một đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A. Trên đường thẳng d lấy một điểm K.
   a) Chứng minh $BC \perp KH$.
   b) Kẻ AI là đường cao của tam giác KAH. Chứng minh rằng $AI \perp (KBC)$.
   c) Cho AB = 15 cm, AC = 20 cm, AK = 16 cm. Tính độ dài các đoạn thẳng BC, KH, IH, IK và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (KBC).
2. Cho hình vuông ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Một đường thẳng d vuông góc với mp (ABCD) tại O. Lấy một điểm S trên đường thẳng d, nối SA, SB, SC và SD.
   a) Chứng minh $AC \perp (SBD)$.
   b) Chứng minh mp (SAC) $\perp$ mp (ABCD) và mp (SAC) $\perp$ mp (SBD).
   c) Tính SO biết AB = a và SA = $a\sqrt{3}$.
   d) Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp S.ABCD.
3. Cho tam giác ABC đều có độ dài mỗi cạnh là a. Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại trọng tâm G của tam giác ABC. Trên đường thẳng d lấy một điểm S. nối SA, SB, SC.
   a) Chứng minh rằng SA = SB = SC.
   b) Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp S.ABC, cho biết SG = 2a.
4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O (như hình vẽ).
   a) Tìm trên hình vẽ các đường thẳng chéo nhau với đường thẳng SA.
   b) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD).
   c) Gọi M; N lần lượt là trung điểm của SC; SD; chứng minh rằng:
      - ✓ MN//AB và MN song song với mặt phẳng (ABCD).
      - ✓ Bốn điểm A; B; M; N đồng phẳng.
   d) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng (ABMN), suy ra giao điểm của mặt phẳng (SBD) với đường thẳng AM. Không xét mặt phẳng (ABMN) có tìm được giao điểm này không?
5. Cho 3 tia Sx; Sy; Sz vuông góc nhau đôi một và lần lượt lấy 3 điểm A; B; C trên các tia ấy (khác S).

a) Chứng minh rằng SC vuông góc với mặt phẳng (SAB); SB vuông góc với mặt phẳng (SAC); SA vuông góc với mặt phẳng (SBC);
b) Chứng minh rằng các mặt phẳng (SAB); mặt phẳng (SBC); mặt phẳng (SCA) vuông góc với nhau từng đôi một.
c) Vẽ CH $\perp$ AB. Chứng minh SH vuông góc với AB. Tính SH theo SA, SB, SC.

6. Cho hình chữ nhật ABCD có AB=2cm; AD=4cm. Từ A dựng AA' vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và AA'=5cm.
a) Chứng tỏ ΔACA' vuông, tính độ dài A'C.
b) Chứng tỏ ΔBCA' vuông và tìm lại độ dài A'C.
c) Hãy vẽ thêm các đỉnh B'; C'; D' để được hình hộp chữ nhật ABCD, A'B'C'D'.
d) Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật trên.

7. Cho ΔABC vuông tại B có cạnh huyền AC = 6cm và $\widehat{A} = 30^0$. Từ A dựng AA' vuông góc với mặt phẳng (ABC) và AA'=4cm.
a) Tính độ dài BA; BC; A'B; A'C.
b) Tính thể tích ABCA' bằng hai cách khác nhau.
c) Hãy vẽ thêm hai đỉnh nữa để được hình lăng trụ có đáy là ΔABC. Tính thể tích của hình lăng trụ này.

8. Cho ΔABC đều cạnh a có trực tâm H; từ H dựng HS vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $HS = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
a) Chứng tỏ S.ABC là hình chóp tam giác đều.
b) Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp đều này.
c) Gọi A'; B'; C' lần lượt là các trung điểm của SA; SB; SC:
- ✓ Chứng tỏ ABC, A'B'C' là hình chóp cụt đều có chiều cao bằng $\frac{1}{2}SH$.
- ✓ Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp cụt đều này.

9. Cho hình chữ nhật ABCD có AB=3cm; AD=4cm, quay một vòng quanh cạnh BC.
a) Xác định tên gọi của hình được sinh ra và các yếu tố.
b) Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình ấy.

10. Cho tam giác vuông ABC có hai cạnh góc vuông AB = 4cm; AC = 3cm, quay quanh AB một vòng.
a) Xác định tên gọi của hình được sinh ra và các yếu tố.
b) Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình ấy.
c) Cắt hình này bởi mặt phẳng đi qua trung điểm I của AB và song song với mặt phẳng sinh ra bởi đường thẳng CA. Hãy gọi tên và tính diện tích xung quanh, thể tích của hai hình vừa được cắt ra.

11. Cho một nửa hình tròn có đường kính AB quay một vòng quanh AB.
a) Gọi tên hình được sinh ra và các yếu tố của nó.
b) Cho AB=10cm, tính diện tích và thể tích của hình trên.