CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM THƯỜNG DÙNG

Phương pháp 1: Hệ số bất định.

Nguyên tắc chung:

+) Dựa vào điều kiện bài toán, xác định được dạng của f(x), thường là f(x) = ax + b hoặc f(x) = ax^2+ bx + c.

+) Đồng nhất hệ số để tìm f(x).

+) Chứng minh rằng mọi hệ số khác của f(x) đều không thỏa mãn điều kiện bài toán.

Ví dụ 1: Tìm $f: R \to R$ thỏa mãn: $f\left(xf\left(y\right)+x\right)=xy+f\left(x\right)\,\forall x,y\in R\ \left(1\right)$.

Lời giải:

Thay $\begin{cases} x=1 \\ y\in R \end{cases}$ vào (18) ta được: $f\left(f\left(y\right)+1\right)=y+f\left(1\right)\ \left(a\right)$.

Thay $y=-f\left(1\right)-1$ vào (a) suy ra: $f\left(f\left(-f\left(1\right)-1\right)+1\right)=-1$. Đặt $a=f\left(-f\left(1\right)-1\right)+1$ ta được: $f\left(a\right)=-1$.

Chọn $\begin{cases} y=a \\ x\in R \end{cases}$ ta được: $f\left(xf\left(a\right)+x\right)=xa+f\left(x\right)\Rightarrow xa+f\left(x\right)=f\left(0\right)$.

Đặt $f\left(0\right)=b\Rightarrow f\left(x\right)=-a\,x+b$. Thế vào (1) và đồng nhất hệ số ta được:

$$\begin{cases} a^2=1 \\ -ab-a=-a \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-1 \end{array}\right. \\ b=0 \end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=x \\ f\left(x\right)=-x \end{array}\right..$$

Vậy có hai hàm số cần tìm là $f\left(x\right)=x$ và $f\left(x\right)=-x$.

Ví dụ 2: Tìm $f: R \to R$ thỏa mãn: $f\left(f\left(x\right)+y\right)=y\,f\left(x-f\left(y\right)\right)\,\forall x,y\in R\left(2\right)$.

Lời giải:

Cho $y=0;\ x\in R:(2)\Rightarrow f\left(f\left(x\right)\right)=0\ \forall x\in R\left(a\right)$.

Cho $x=f\left(y\right):(2)\Rightarrow f\left(f\left(f\left(y\right)\right)+y\right)=y\,f\left(0\right)\left(a'\right)$.

$\left(a\right)+\left(a'\right)\Rightarrow f\left(y\right)=y\,f\left(0\right)$. Đặt $f\left(0\right)=a\Rightarrow f\left(y\right)=ay\ \forall y\in R$. Thử lại (2) ta được:

$a^2\left(x^2+y^2\right)+a\left(y-x\,y\right)=0\ \forall x,y\in R\Leftrightarrow a=0\Rightarrow f\left(x\right)=0\ \forall x\in R$. Vậy có duy nhất hàm số $f\left(x\right)=0$ thỏa mãn bài toán.

Ví dụ 3: Tìm f, $g: R \to R$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} 2f\left(x\right)-g\left(x\right)=f\left(y\right)-y & \forall x,y\in R & \left(a\right) \\ f\left(x\right)g\left(x\right)\geq x+1 & \forall x\in R & \left(b\right) \end{cases}.$$

Lời giải:

Cho $x=y\in R$ khi đó $\left(a\right)\Rightarrow f\left(x\right)=g\left(x\right)-x$ .Thay lại (a) ta được:

$g(x) = 2x - 2y + g(y)\ \forall x, y \in R$ (c).

Cho $y = 0$; $x \in R$: từ (c) ta được: $g(x) = 2x + g(0)$. Đặt $g(0) = a$ ta được:

$g(x) = 2x + a$, $f(x) = x + a$. Thế vào (a), (b) ta được:

(a), (b) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + a = 2x + a \\ (x+a)(2x+a) \geq x + 1 \end{cases} (\forall x \in R) \Leftrightarrow 2x^2 + (3a-1)x + a^2 - 1 \geq 0\ \forall x \in R$

$\Leftrightarrow (a-3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow a = 3$. Vậy $f(x) = x + 3$; $g(x) = 2x + 3$.

Ví dụ 4: Đa thức f(x) xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện:

$2f(x) + f(1-x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ (1). Tìm f(x).

Lời giải:

Ta nhận thấy vế trái của biểu thức dưới dấu f là bậc nhất: x, 1 – x vế phải là bậc hai x^2.

Vậy f(x) phải có dạng: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Khi đó (1) trở thành: $2(ax^2 + bx + c) + a(1 - x)^2 + b(1 - x) + c = x^2\quad \forall x \in \mathbb{R}$ do đó:

$3ax^2 + (b - 2a)x + a + b + 3c = x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Đồng nhất các hệ số, ta thu được: $\begin{cases} 3a = 1 \\ b - 2a = 0 \\ a + b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{2}{3} \\ c = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Vậy: $f(x) = \dfrac{1}{3}(x^2 + 2x - 1)$

Thử lại ta thấy hiển nhiên f(x) thỏa mãn điều kiện bài toán.

Ta phải chứng minh mọi hàm số khác f(x) sẽ không thỏa mãn điều kiện bài toán:

Thật vậy giả sử còn hàm số g(x) khác f(x) thỏa mãn điều kiện bài toán.

Do f(x) không trùng với g(x) nên $\exists x_0 \in \mathbb{R} : g(x_0) \neq f(x_0)$.

Do g(x) thỏa mãn điều kiện bài toán nên: $2g(x) + g(1-x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

Thay x bởi x_0 ta được: $2g(x_0) + g(1 - x_0) = {x_0}^2$

Thay x bởi $1 - x_0$ ta được: $2g(1 - x_0) + g(x_0) = (1 - x_0)^2$

Từ hai hệ thức này ta được: $g(x_0) = \dfrac{1}{3}({x_0}^2 + 2x_0 - 1) = f(x_0)$

Điều này mâu thuẫn với $g(x_0) \neq f(x_0)$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $f(x) = \dfrac{1}{3}(x^2 + 2x - 1)$

__Nhận xét:__ Nếu ta chỉ dự đoán f(x) có dạng nào đó thì phải chứng minh sự duy nhất của các hàm số tìm được.

Ví dụ 5: Hàm số y = f(x) xác định, liên tục với $\forall x \in \mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện:

$$f(f(x)) = f(x) + x,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Hãy tìm hai hàm số như thế.

Lời giải:

Ta viết phương trình đã cho dưới dạng f(f(x)) – f(x) = x (1).

Vế phải của phương trình là một hàm số tuyến tính vì vậy ta nên giả sử rằng hàm số cần tìm có dạng: f(x) = ax + b.

Khi đó (1) trở thành: a(ax + b) + b – (ax + b) = x , $\forall x \in \mathbb{R}$ hay $(a^2 - a)x + ab = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$

đồng nhất hệ số ta được: $\begin{cases} a^2 - a = 1 \\ ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ b = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} x.$

Hiển nhiên hai hàm số trên thỏa mãn điều kiện bài toán (việc chứng minh sự duy nhất dành cho người đọc).

Ví dụ 6: Hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$a) f(f(n)) = n, \forall n \in \mathbb{Z}$ (1)

$b) f(f(n+2)+2) = n, \forall n \in \mathbb{Z}$ (2)

$c) f(0) = 1$ (3)

Tìm giá trị f(1995), f(-2007).

Lời giải:

Cũng nhận xét và lý luận như các ví dụ trước, ta đưa đến f(n) phải có dạng: f(n) = an +b.

Khi đó điều kiện (1) trở thành: $a^2 n + ab + b = n, \forall n \in \mathbb{Z}$

Đồng nhất các hệ số, ta được: $\begin{cases} a^2 = 1 \\ ab + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$

Với $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$ ta được f(n) = n. Trường hợp này loại vì không thỏa mãn (2).

Với $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$ ta được f(n) = -n + b. Từ điều kiện (3) cho n = 0 ta được b = 1.

Vậy f(n) = -n + 1.

Hiển nhiên hàm số này thỏa mãn điều kiện bài toán.

Ta phải chứng minh f(n) = -n +1 là hàm duy nhất thỏa mãn điều kiện bài toán:

Thật vậy giả sử tồn tại hàm g(n) khác f(n) cũng thỏa mãn điều kiện bài toán.

Từ (3) suy ra f(0) = g(0) = 1, f(1) = g(1) = 0.

Sử dụng điều kiện (1) và (2) ta nhận được: g(g(n)) = g(g(n+2)+2) $\forall n \in \mathbb{Z}$.

do đó g(g(g(n))) = g(g(g(n+2)+2)) $\forall n \in \mathbb{Z}$ Hay g(n) = g(n+2)+2 $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Giả sử n_0 là số tự nhiên bé nhất làm cho $f(n_0) \neq g(n_0)$

Do f(n) cũng thỏa mãn (4) nên ta có:

$$g(n_0-2) = g(n_0)+2 = f(n_0)+2 = f(n_0-2)$$
$$\Leftrightarrow g(n_0-2) = f(n_0-2)$$

Mâu thuẫn với điều kiện n_0 là số tự nhiên bé nhất thỏa mãn (5).

Vậy f(n) = g(n), $\forall n \in \mathbb{N}$

Chứng minh tương tự ta cũng được f(n) = g(n) với mọi n nguyên âm.

Vậy f(n) = 1 – n là nghiệm duy nhất.

Từ đó tính được f(1995), f(-2007).

BÀI TẬP

Bài 1: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x+y)+f(x-y)-2f(x)f(1+y) = 2xy(3y-x^2), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp số: f(x) = x^3.

Bài 2: Hàm số $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện f(f(n)) + f(n) = 2n + 3, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tìm f(2005).

Đáp số: 2006.

Bài 3: Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ sao cho: $f(f(n))+(f(n))^2 = n^2+3n+3, \forall n \in \mathbb{N}$.

Đáp số: f(n) = n + 1.

Bài 4: Tìm các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nếu: $3f\left(\frac{x-1}{3x+2}\right)-5f\left(\frac{1-x}{x-2}\right)=\frac{8}{x-1}, \forall x \notin \left\{0, -\frac{2}{3}, 1, 2\right\}$

Đáp số: $f(x) = \frac{28x+4}{5x}$

Bài 5: Tìm tất cả các đa thức P(x) $\in \mathbb{R}[x]$ sao cho: P(x + y) = P(x) + P(y) + 3xy(x + y), $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Đáp số: P(x) = x^3 + cx.

Phương pháp 2: phương pháp thế.

2.1. Thế ẩn tạo PTH mới:

Ví dụ 1: Tìm f: R\{2} → R thỏa mãn: $f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = x^2+2x \quad \forall x \neq 1 \quad (1)$.

Lời giải: Đặt $t = \left(\frac{2x+1}{x-1}\right) \Rightarrow \underset{x\neq 1}{MGT}\, t = R\setminus\{2\}$ (tập xác định của f). Ta được:

$x = \frac{t+1}{t-2}$ thế vào (1): $f(t) = \frac{3t^2-3}{(t-2)^2} \quad \forall t \neq 2$. Thử lại thấy đúng.

Vậy hàm số cần tìm có dạng $f(x)=\dfrac{3x^2-3}{(x-2)^2}$.

Nhận xét:

+ Khi đặt t, cần kiểm tra giả thiết $\underset{x\in D_x}{MGT}\, t\supset D$. Với giả thiết đó mới đảm bảo tính chất: "*Khi t chạy khắp các giá trị của t thì x = t cũng chạy khắp tập xác định của f*".

+ Trong ví dụ 1, nếu f: R → R thì có vô số hàm *f* dạng: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-3}{(x-2)^2} & (x\neq 2)\\ a & (x=2)\end{cases}$ (với a∈R tùy ý).

Ví dụ 2: Tìm hàm f : $(-\infty;-1]\cup(0;1]\ \to\ R$ thỏa mãn:

$$f(x-\sqrt{x^2-1})=x+\sqrt{x^2-1}\quad \forall |x|\geq 1\ (2).$$

Lời giải: Đặt $t=x-\sqrt{x^2-1}\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}=x-t\Leftrightarrow \begin{cases}x-t\geq 0\\ x^2-1=(x-t)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq t\\ x^2-1=x^2-2xt+t^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq t\\ x=\dfrac{t^2+1}{2t}\end{cases}$. Hệ có nghiệm x $\Leftrightarrow \dfrac{t^2+1}{2t}\geq t\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t\leq -1\\ 0<t\leq 1\end{array}\right.$

$\Rightarrow t\in(-\infty;-1]\cup(0;1]$. Vậy $\underset{|x|\geq 1}{MGT}\, t=D=(-\infty;-1]\cup(0;1]$.

Với $t=x-\sqrt{x^2-1}$ thì $x+\sqrt{x^2-1}=\dfrac{1}{t}\ \Rightarrow\ f(t)=\dfrac{1}{t}$ thỏa mãn (2).

Vậy $f(x)=\dfrac{1}{x}$ là hàm số cần tìm.

Ví dụ 3: Tìm f : R\\$\left\{\dfrac{2}{3};3\right\}\to R$ thỏa mãn: $f\left(\dfrac{3x-1}{x+2}\right)=\dfrac{x+1}{x-1}\quad \forall x\neq 1, x\neq -2\ (3)$.

Lời giải: Đặt $t=\dfrac{3x-1}{x+2}\Rightarrow \underset{\binom{x\neq 1}{x\neq 2}}{MGT}\, t=R\setminus\left\{\dfrac{2}{3};3\right\}\Rightarrow x=\dfrac{2t+1}{3-t}$ thế vào (4) ta được: $f(t)=\dfrac{t+4}{3t-2}$ thỏa mãn (3). Vậy hàm số cần tìm là: $f(x)=\dfrac{x+4}{3x-2}$.

Ví dụ 4: Tìm f : $(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn:

$$x\,f(x\,f(y))=f(f(y))\quad \forall x,y\in(0;+\infty)\ (4).$$

Lời giải:

Cho y = 1, x ∈ $(0;+\infty)$ ta được: $x\,f(x\,f(1))=f(f(1))$.

Cho $x=\dfrac{1}{f(1)}$ ta được: $f(f(1)=1\Rightarrow x\,f(x\,f(1))=1\Rightarrow f(x\,f(1))=\dfrac{1}{x}$. Đặt:

$t = x.f(1) \Rightarrow f(t) = \dfrac{f(1)}{t} \Rightarrow f(t) = \dfrac{a}{t}$ (với $a = f(1)$). Vì $f(1) \in (0;+\infty) \Rightarrow \underset{x\in(0;+\infty)}{MGT}\, t = (0;+\infty)$.

Vậy $f(x) = \dfrac{a}{x}$. Thử lại thấy đúng $(a>0)$. Hàm số cần tìm là: $f(x) = \dfrac{a}{x}$ với $(a>0)$.

Ví dụ 5: Tìm hàm f: $(0;+\infty) \to (0;+\infty)$ thỏa mãn:

$$f(1) = \frac{1}{2};\ f(xy) = f(x).f\left(\frac{3}{y}\right) + f(y).f\left(\frac{3}{x}\right) \quad \forall x, y \in (0;+\infty) \ (5).$$

Lời giải:

Cho x = 1; y = 3 ta được: $f(3) = \dfrac{1}{2}$.

Cho x = 1; $y \in (0;+\infty)$ ta được: $f(y) = f\left(\dfrac{3}{y}\right)$. Thế lại (5) ta được:

$f(xy) = 2f(x)f(y) \quad \forall x, y \in (0;+\infty)$ (5'). Thay y bởi $\dfrac{3}{x}$ ta được:

$f(3) = 2f(x))f\left(\dfrac{3}{x}\right) \Rightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = (f(x))^2$. Thử lại thấy đúng.

Vậy hàm số cần tìm là: $f(x) = \dfrac{1}{2} \quad \forall x > 0$.

Ví dụ 6: Tìm hàm f: R $\to$ R thỏa mãn:

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2+y^2) \quad \forall x, y \in R \quad (6).$$

Lời giải: Ta có:

$(6) \Leftrightarrow (x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) =$

$= [(x+y)-(x-y)] + [(x+y)+(x-y)]\left[\dfrac{1}{4}[(x+y)+(x-y)]^2 - \dfrac{1}{4}[(x+y)-(x-y)]^2\right]$

Đặt $\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases}$ ta được: $v\,f(u) - u\,f(v) = \dfrac{1}{4}(u+v)(u-v)\left((u+v)^2 - (u-v)^2\right)$

$\Rightarrow v\,f(u) - u\,f(v) = u^3v - v^3u \Leftrightarrow v\left(f(u) - u^3\right) = u\left(f(v) - v^3\right)$

+ Với $uv \neq 0$ ta có:

$\dfrac{f(u)-u^3}{u} = \dfrac{f(v)-v^3}{v} \quad \forall u, v \in R^* \Rightarrow \dfrac{f(u)-u^3}{u} = a \Rightarrow f(u) = au + u^3 \quad \forall u \neq 0$.

+ Với $u = 0; v \neq 0$ suy ra: $f(u) - u^3 = 0 \Leftrightarrow f(u) = u^3 \Rightarrow f(0) = 0$.

Hàm $f(u) = au + u^3$ thỏa mãn $f(0) = 0$. Vậy $f(u) = au + u^3 \quad \forall u \in R$

Hàm số cần tìm là: $f(x) = ax + x^3 \ (a \in R)$. Thử lại thấy đúng.

2.2. Thế ẩn tạo ra hệ PTH mới:

Ví dụ 1: Tìm hàm f: R $\to$ R thỏa mãn: $f\left(x\right)+x\,f\left(-x\right)=x+1\ \ \forall x\in R\ \ \left(1\right)$.

Lời giải:

Đặt $t=-x$ ta được: $f\left(-t\right)-t\,f\left(t\right)=-t+1\ \ \forall t\in R\ \ \left(1\right)$. Ta có hệ:

$\begin{cases} f\left(x\right)+x\,f\left(-x\right)=x+1 \\ -x\,f\left(x\right)+f\left(-x\right)=-x+1 \end{cases} \Rightarrow f\left(x\right)=1$. Thử lại hàm số cần tìm là: $f\left(x\right)=1$.

Ví dụ 2: Tìm hàm số $f:R\backslash\left\{0,1\right\}\to R$ Thỏa mãn: $f\left(x\right)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=1+x\quad \forall x\in R^{*}\quad \left(2\right)$.

Lời giải: Đặt $x_1=\dfrac{x-1}{x},\left(2\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)+f\left(x_1\right)=1+x$.

Đặt $x_2=\dfrac{x_1-1}{x_1}=\dfrac{1}{x-1},\left(2\right)\Leftrightarrow f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=1+x_1$.

Đặt $x_3=\dfrac{x_2-1}{x_2}=x,\left(2\right)\Leftrightarrow f\left(x_2\right)+f\left(x\right)=1+x_2$.

Ta có hệ $\begin{cases} f\left(x_1\right)+f\left(x\right)=1+x \\ f\left(x_2\right)+f\left(x_1\right)=1+x_1 \\ f\left(x\right)+f\left(x_2\right)=1+x_2 \end{cases} \Rightarrow\ f\left(x\right)=\dfrac{1+x-x_1+x_2}{2}=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}\right)$. Thử lại thấy đúng. Vậy hàm số cần tìm có dạng: $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}\right)$.

Ví dụ 3: Tìm hàm số $f:R\backslash\left\{-1;0;1\right\}\to R$ thỏa mãn: $x\,f\left(x\right)+2f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=1\ \forall x\neq -1\ \left(3\right)$.

Lời giải:

Đặt $x_1=\dfrac{x-1}{x+1},\left(3\right)\Rightarrow x\,f\left(x\right)+2f\left(x_1\right)=1$.

Đặt $x_2=\dfrac{x_1-1}{x_1+1}=-\dfrac{1}{x},\left(3\right)\Rightarrow x_1f\left(x_1\right)+2f\left(x_2\right)=1$.

Đặt $x_3=\dfrac{x_2-1}{x_2+1}=\dfrac{x+1}{x-1},\left(3\right)\Rightarrow x_2\,f\left(x_2\right)+2f\left(x_3\right)=1$.

Đặt $x_4=\dfrac{x_3-1}{x_3+1}=x,\left(3\right)\Rightarrow x_3\,f\left(x_3\right)+2f\left(x\right)=1$.

Ta có hệ $\begin{cases} x\,f\left(x\right)+2f\left(x_1\right)=1 \\ x_1\,f\left(x_1\right)+2f\left(x_2\right)=1 \\ x_2\,f\left(x_2\right)+2f\left(x_3\right)=1 \\ x_3\,f\left(x_3\right)+2f\left(x\right)=1 \end{cases} \Rightarrow\ f\left(x\right)=\dfrac{4x^2-x+1}{5x\left(x-1\right)}$. Thử lại thấy đúng.

Vậy hàm số cần tìm là: $f(x)=\dfrac{4x^2-x+1}{5x(x-1)}$.

BÀI TẬP

1) Tìm $f: \ R\setminus\{1\}\to R$ thỏa mãn: $f\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+1 \quad \forall x\in R$.

2) Tìm $f: \ R\setminus\left\{-\dfrac{a}{b}\right\}\to R$ thỏa mãn: $f\left(\dfrac{b-ax}{bx+a}\right)=\dfrac{x^2}{x^4+1} \quad \forall x\neq -\dfrac{a}{b}$ (a, b là hằng số cho trước và $ab\neq 0$).

3) Tìm $f: \ R\to R$ thỏa mãn: $f\left(2002x-f(0)\right)=2002x^2 \quad \forall x\in R$.

4) Tìm $f: \ R\setminus\{0\}\to R$ thỏa mãn: $f(x)+\dfrac{1}{2x}f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=1 \quad \forall x\in R\setminus\{0;1\}$.

5) Tìm $f: \ R\setminus\{\pm1;0\}\to R$ thỏa mãn: $\left(f(x)\right)f\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=64x \quad \forall x\in R\setminus\{-1\}$.

6) Tìm $f: \ R\setminus\left\{\dfrac{2}{3}\right\}\to R$ thỏa mãn: $2f(x)+f\left(\dfrac{2x}{3x-2}\right)=996x \quad \forall x\neq\dfrac{2}{3}$.

7) Tìm $f: \ R\setminus\{\pm1\}\to R$ thỏa mãn: $f\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)+f\left(\dfrac{x+3}{1-x}\right)=x \quad \forall x\neq\pm1$.

8) Tìm $f: \ R\to R$ thỏa mãn: $2f(x)+f(1-x)=x^2 \quad \forall x\in R$.

9) Tìm $f: \ R\to R$ thỏa mãn: $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^{2008} \quad \forall x\in R^*$.

10) Tìm $f: \ R\setminus\left\{\pm\dfrac{1}{3}\right\}\to R$ thỏa mãn: $f(x)+f\left(\dfrac{x-1}{1-3x}\right)=x \quad \forall x\neq\dfrac{1}{3}$.

11) Tìm $f: \ R\to R$ thỏa mãn: $f(x)+f\left(\dfrac{a^2}{a-x}\right)=x \quad \forall x\neq a \quad (a>0)$.

12) Tìm $f,\ g: \ R\setminus\{1\}\to R$ thỏa mãn: $\begin{cases} f(2x+1)+2g(2x+1)=2x \\ f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)+g\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=x \end{cases} \quad \forall x\neq 1$.

Phương pháp 3: Phương pháp chuyển qua giới hạn.

Ví dụ 1: Tìm hàm số $f:R\to R$ liên tục, thỏa mãn: $f(x)+f\left(\dfrac{2x}{3}\right)=\dfrac{3x}{5} \ \forall x\in R \ (1)$.

Lời giải:

Đặt $x_1=\dfrac{2x}{3}$;$(1)\Rightarrow f(x)+f(x_1)=\dfrac{3}{5}x$.

Đặt $x_2=\dfrac{2x_1}{3}$;$(1)\Rightarrow f(x_1)+f(x_2)=\dfrac{3}{5}x_1$.

Đặt $x_{n+1}=\dfrac{2x_n}{3}$, $n\in N^*;(1)\Rightarrow f\left(x_n\right)+f\left(x_{n+1}\right)=\dfrac{3}{5}x_n$.

Ta có hệ $\begin{cases} f\left(x\right)+f\left(x_1\right)=\dfrac{3}{5}x & (1)\\ f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=\dfrac{3}{5}x_1 & (2)\\ \ldots\ldots & \\ f\left(x_n\right)+f\left(x_{n+1}\right)=\dfrac{3}{5}x_n & (n+1)\end{cases}$

Nhân dòng phương trình thứ (i) với $(-1)^{i+1}$ rồi cộng lại ta được:

$$f\left(x\right)+\left(-1\right)^{n+2}f\left(x_{n+1}\right)=\frac{3}{5}x\left[1-\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2-\cdots+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]\ (*).$$

Xét $\lim\left|\left[\left(-1\right)^{n+2}f\left(x_{n+1}\right)\right]\right|=\lim\left|\left[f\left(x_{n+1}\right)\right]\right|\overset{(f\,l.tục)}{=}\left|f\left(\lim x_{n+1}\right)\right|=\left|f\left(0\right)\right|$.

Mặt khác (1) suy ra f(0) = 0 nên $\lim\left(-1\right)^{n+2}f\left(x_{n+1}\right)=0$.

Lấy giới hạn hai vế của (*) ta được: $f\left(x\right)=\dfrac{3}{5}x\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{3}}=\dfrac{9x}{25}$. Thử lại thấy đúng.

Vậy hàm số cần tìm là: $f\left(x\right)=\dfrac{9x}{25}$.

Ví dụ 2: Tìm hàm số *f* liên tục tại $x_o=0$ thỏa mãn:

$$f:R\to R \text{ và } 2f\left(2x\right)=f\left(x\right)+x\quad \forall x\in R\quad (2).$$

Lời giải:

Đặt $t=2x$ ta được: $2f\left(t\right)=f\left(\dfrac{t}{2}\right)+\dfrac{t}{2}\ \forall t\in R\ \left(2'\right)$.

Xét dãy: $\begin{cases} t_{n+1}=\dfrac{1}{2}t_n\ ,\ \forall n\in N^*\\ t_1=\dfrac{1}{2}t\end{cases}$. Thay dãy $\{t_n\}$ vào (2') ta được:

$\begin{cases} f\left(t\right)=\dfrac{1}{2}f\left(t_1\right)+\dfrac{1}{4}t & (1)\\ f\left(t_1\right)=\dfrac{1}{2}f\left(t_2\right)+\dfrac{1}{4}t_1 & (2)\\ \ldots\ldots & \\ f\left(t_{n-1}\right)=\dfrac{1}{2}f\left(t_n\right)+\dfrac{1}{4}t_{n-1} & (n)\end{cases}$. Thế (n) vào $\left(n-1\right)\to\left(n-2\right)\to\cdots$ ta được:

$$f\left(t\right)=\frac{1}{2^n}f\left(t_n\right)+\frac{1}{2^{n+1}}f\left(t_{n-1}\right)+\frac{1}{2^n}f\left(t_{n-2}\right)+\cdots+\frac{1}{2^2}t\quad\left(*'\right).$$

Thay $t_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n t$ vào ($*'$) ta được: $f(t) = \frac{1}{2^n} f(t_n) + t\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{2n}}\right) \quad (*'')$.

Vì f liên tục tại $x_o = 0$ nên $\lim\left(\frac{1}{2^n} f(t_n)\right) = 0$. Lấy giới hạn 2 vế ($*''$) suy ra: $f(t) = \frac{t}{3}$. Thử lại thấy đúng.

Nhận xét:

+) Nếu dãy $\{x_n\}$ tuần hoàn thì ta giải theo phương pháp thế rồi quy về hệ pt hàm.

+) Nếu dãy $\{x_n\}$ không tuần hoàn nhưng f liên tục tại $x_o = 0$ và $\{x_n\} \to 0$ thì sử dụng giới hạn như VD1.

+ Nếu $\{x_n\}$ không tuần hoàn, không có giới hạn thì phải đổi biến để có dãy $\{t_n\}$ có giới hạn 0 và làm như ví dụ 1.

BÀI TẬP

1) Tìm $f: \quad R \to R$ thỏa mãn:

a) f liên tục tại $x_o = 0$,

b) $n f(nx) = f(x) + nx \quad \forall n \in N,\ n \geq 2;\ \forall x \in R$.

2) Tìm $f: \quad R \to R$ liên tục tại $x_o = 0$, thỏa mãn: $f(3x) + f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{10}{3}x$.

3) Tìm $f: \quad R \to R$ liên tục tại $x_o = 0$, thỏa mãn:

$m f(mx) - n f(nx) = (m+n)x \quad \forall m,n \in N^*,\ m \neq n,\ \forall x \in R$.

Phương pháp 4: Phương pháp xét giá trị.

+) Đây là phương pháp cơ sở của mọi phương pháp khác.

+) Khi vận dụng phương pháp cần chú ý sử dụng kết quả vừa có được.

Ví dụ 1: Tìm $f: R \to R$ thỏa mãn: $\begin{cases} (a)\ f(x) \geq 0 & \forall x \in R \\ (b)\ f(x+y) \geq f(x) + f(y) & \forall x, y \in R \end{cases}$.

Lời giải:

Cho $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} f(0) \geq 0 \\ f(0) \geq 2f(0) \end{cases} \Rightarrow f(0) = 0$.

Cho $y = -x \Rightarrow \begin{cases} f(0) \geq f(x) + f(-x) \\ f(x) \geq 0,\ f(-x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) + f(-x) \leq 0 \\ f(x) \geq 0,\ f(-x) \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = f(-x) = 0\ \forall x \in R$. Vậy $f(x) = 0$. Thử lại thấy đúng.

Ví dụ 2: Tìm $f: R \to R$ thỏa mãn:

$$\frac{1}{2} f(xy) + \frac{1}{2} f(yz) - f(x) f(yz) \geq \frac{1}{4} \quad \forall x, y, z \in R \quad (2).$$

Lời giải:

Cho $x=z$, $y=1$ ta được: $f(x)-(f(x))^2 \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}$. Thử lại thấy đúng.

Ví dụ 3: Tìm $f: R \to R$ thỏa mãn: $f(x)=\underset{y\in R}{Max}\{xy-f(y)\}\ \forall x\in R \quad (3)$.

Lời giải: $(3) \Rightarrow f(x) \geq xy-f(y)\ \forall x,y\in R$.

Cho $x=y=t\in R \Rightarrow f(t)=\frac{t^2}{2}\ \forall t\in R \quad (a)$.

Từ (a) suy ra:

$$xy-f(y) \leq xy-\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}(x-y)^2 \leq \frac{x^2}{2} \quad \Rightarrow f(x)=\underset{y\in R}{Max}\{xy-f(y)\} \leq \frac{x^2}{2}\ \forall x\in R \quad (b)$$

$(a)+(b) \Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{2}$. Thử lại thấy đúng.

Ví dụ 4: Tìm $f: R \to R$ thỏa mãn:

$$f(x+y) \geq f(x)f(y) \geq 2008^{x+y} \quad \forall x,y\in R \quad (4).$$

Lời giải:

Cho $x=y=0 \Rightarrow f(0) \geq (f(0))^2 \geq 1 \Rightarrow f(0)=1$.

Cho

$x=-y\in R \Rightarrow 1=f(0) \geq f(x)f(-x) \geq 1 \Rightarrow f(x)f(-x)=1 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{f(-x)}\ \forall x\in R \quad (a)$.

Cho $y=0;\ x\in R \Rightarrow f(x) \geq 2008^x \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 2008^x > 0 \\ f(-x) \geq 2008^{-x} > 0 \end{cases} \quad (b)$.

Theo $(a)+(b) \Rightarrow f(x)=\frac{1}{f(-x)} \leq \frac{1}{2008^{-x}}=2008^x \quad (c)$. $(b)+(c) \Rightarrow f(x)=2008^x$. Thử lại thấy đúng.

Ví dụ 5: Tìm $f: [a;b] \to [a;b]$ thỏa mãn:

$$|f(x)-f(y)| \geq |x-y| \quad \forall x,y\in[a;b] \quad \text{(a < b cho trước)} \qquad (5).$$

Lời giải:

Cho $x=a$; $y=b \Rightarrow |f(a)-f(b)| \geq |a-b|=b-a \quad (a)$.

vì $f(a), f(b)\in[a;b]$ nên $|f(a)-f(b)| \leq |a-b|=b-a \quad (b)$.

$$(a)+(b)\Rightarrow \left|f(a)-f(b)\right|=b-a\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(a)=a\\ f(b)=b\end{cases}\\ \begin{cases}f(a)=b\\ f(b)=a\end{cases}\end{array}\right..$$

+) Nếu $\begin{cases}f(a)=a\\ f(b)=b\end{cases}$ thì:

Chọn $y=b;\ x\in[a;b]\Rightarrow f(x)\le x\ (c)$.

Chọn $y=a;\ x\in[a;b]\Rightarrow f(x)\ge x\ (d)$.

$(c)+(d)\Rightarrow f(x)=x$.

+) Nếu $\begin{cases}f(a)=b\\ f(b)=a\end{cases}$ thì:

Chọn $y=b;\ x\in[a;b]$ rồi chọn $y=a;\ x\in[a;b]$ như trên ta được: $f(x)=a+b-x$. Thử lại thấy đúng.

Nhận xét:

+) Từ VD1 $\rightarrow$ VD5 là các BPT hàm. Cách giải nói chung là tìm các giá trị đặc biệt – có thể tính được trước. Sau đó tạo ra các BĐT "*ngược nhau*" về hàm số cần tìm để đưa ra kết luận về hàm số.

+) Việc chọn các trường hợp của biến phải có tính "*kế thừa*". Tức là cái chọn sau phải dựa vào cái chọn trước nó và thử các khả năng có thể sử dụng kết quả vừa có được.

Ví dụ 6: Tìm $f: R\rightarrow R$ thỏa mãn:

$$\begin{cases}f(0)=a\ ;\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=b\quad (a,b\ \textit{cho trước})\\ f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y\quad \forall x,y\in R\end{cases}\qquad (6).$$

Lời giải:

Cho $y=\dfrac{\pi}{2};\ x\in R$ ta được: $f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+f\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=0\quad (a)$.

Cho $x=0;\ y\in R$ ta được: $f(y)+f(-y)=2a\cos y\quad (b)$.

Cho $x=\dfrac{\pi}{2};\ y\in R$ ta được: $f\left(\dfrac{\pi}{2}+y\right)+f\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)=2b\cos y\quad (c)$.

$$(a)+(b)+(c) \Rightarrow \begin{cases} f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+f\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \\ f\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=2a\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right). \\ f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=2b\cos x \end{cases}$$

Giải hệ ta được: $f(x)=a\cos x+b\sin x$. Thử lại thấy đúng.

Ví dụ 7: Tìm $f: R \to R$ thỏa mãn: $f(x)f(y)=f(x+y)+\sin x\sin y \quad \forall x, y\in R \quad (7)$.

Lời giải: Ta thấy $f(x)=\cos x$ là một hàm số thỏa mãn.

Cho $x=y=0 \Leftrightarrow (f(0))^2=f(0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(0)=1 \end{array}\right.$.

Nếu $f(0)=0$ thì: Cho $y=0;\ x\in R \Rightarrow f(x)=-f(0)=0\ \forall x\in R$. Thử lại ta được:

$\sin x\sin y=0\ \forall x, y\in R \Rightarrow$ vô lý. Vậy $f(x)=0$ không là nghiệm (7).

Nếu $f(0)=1$ thì cho

$x=-y \Rightarrow f(x)f(-x)=1+(-\sin^2 x)=\cos^2 x \Rightarrow f(x)f(-x)=\cos^2 x\ (a)$.

Cho $x=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \\ f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \end{array}\right.$.

Nếu $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ thì: Cho $x=\dfrac{\pi}{2};\ y\in R$ thế vào (7) suy ra:

$f\left(y+\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin y=0 \Rightarrow f(y)=\cos y\ \forall y\in R$. Thử lại thấy đúng.

Nếu $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ tương tự như trên ta được: $f(y)=\cos y\ \forall y\in R$.

Vậy hàm số cần tìm là: $f(x)=\cos x$.

Ví dụ 8: Tìm $f, g: R \to R$ thỏa mãn: $f(x)-f(y)=\cos(x+y)g(x-y)\ \forall x, y\in R\ (8)$.

Lời giải:

Chọn $x=\dfrac{\pi}{2}-y;\ y\in R\quad (8) \Rightarrow f\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)-f(y)=0 \Leftrightarrow f\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)=f(y)\ (a)$.

Chọn $x=\dfrac{\pi}{2}+y;\ y\in R\ (8) \Rightarrow f\left(\dfrac{\pi}{2}+y\right)-f(y)=-\sin 2y.g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\ (b)$.

$(a)+(b) \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}+y\right)-f\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=-\sin 2y.g\left(\frac{\pi}{2}\right)(c)$.

Theo (8): $f\left(\frac{\pi}{2}+y\right)-f\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=-g(2y)\,(d)$.

$(c)+(d) \Rightarrow g(2y)=\sin 2y.g\left(\frac{\pi}{2}\right) \forall y\in R \Rightarrow g(2x)=a\sin 2x \Rightarrow g(x)=a\sin x\ \forall x\in R$.

(với $a=g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ cho trước.)

Cho $y=0;\ x\in R \Rightarrow f(x)-f(0)=\cos x.g(x) \Rightarrow f(x)=\frac{a}{2}\sin 2x+b\ (b=f(0)),\ \forall x\in R$.

Thử lại 2 hàm số: $\begin{cases} f(x)=\frac{a}{2}\sin 2x+b \\ g(x)=a\sin x \end{cases}$ (Với a, b là hằng số cho trước). Thỏa mãn (8).

Ví dụ 9: Tìm $f: R \to R$ thỏa mãn: $\begin{cases} f(-x)=-f(x)\ \forall x\in R\ (a) \\ f(x+1)=f(x)+1\ \forall x\in R\ (b) \\ f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{f(x)}{x^2}\ \ \forall x\neq 0\ (c) \end{cases}$.

Lời giải:

Ta tính $f\left(\frac{x+1}{x}\right)$ đến $f(x)$ theo hai cách:

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right)=f\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+f\left(\frac{1}{x}\right)=1+\frac{f(x)}{x^2}\ \forall x\neq 0\ \ (a).$$

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{f\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}=\frac{f\left(1-\frac{1}{x+1}\right)}{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2\left(1+f\left(-\frac{1}{x+1}\right)\right)=$$

$$=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2\left(1+\left(-f\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)\right)=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2\left(1-\frac{f(x+1)}{(x+1)^2}\right)=$$

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^2\left(1-\frac{1+f(x)}{(x+1)^2}\right)\ \forall x\neq 0,\ x\neq 1\ (b).$$

$(a)+(b) \Rightarrow f(x)=x\ \forall x\neq 0;\ x\neq 1$.

Với $x=0;\ (a) \Rightarrow f(0)=0$ thỏa mãn $f(x)=x$.

Với $x=1;\ (a) \Rightarrow f(-1)=-f(1)$:

Cho $x=0;\ (b) \Rightarrow f(1)=1 \Rightarrow f(-1)=-1$ thỏa mãn $f(x)=x$.

Vậy $f(x)=x\ \forall x\in R$. Thử lại thấy đúng .

Ví dụ 10: Tìm $f: R\backslash\{0\}\to R$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} f(1)=1\ (a) \\ f\left(\dfrac{1}{x+y}\right)=f\left(\dfrac{1}{x}\right).f\left(\dfrac{1}{y}\right)\ \forall x,y\neq 0\ (b) \\ (x+y)f(x+y)=xyf(\mathrm{x})f(y)\ \forall x,y\ \textit{thỏa mãn}\ xy(x+y)\neq 0\ \ (c) \end{cases}.$$

Lời giải:

Cho $x=y\in R^*,(b)$ ta được: $f\left(\dfrac{1}{2x}\right)=2f\left(\dfrac{1}{x}\right)\Rightarrow f(x)=2f(2x)\ \forall x\neq 0\ \ (*)$

Cho $x=y\in R^*,(c)$ ta được: $2xf(2x)=x^2(f(x))^2\Leftrightarrow 2f(2x)=x(f(x))^2\ \ \forall x\neq 0\ \left(*'\right)$.

Thế (*) vào ($*'$) suy ra: $f(x)=x(f(x))^2\ \ \left(*''\right)$.

Giả sử: $\exists x_o\neq 1, x_o\in R^*$ sao cho: $f(x_o)=0$. Thay $x=1-x_o$; $y=x_o$ vào ($*''$) ta được: $f(1)=0$ trái với giả thiết $f(1)=1$. Vậy $f(x)\neq 0\ \forall x\neq 1;\ x\neq 0$.

Vì $f(1)=1\neq 0$ nên từ ($*''$) suy ra $f(x)=\dfrac{1}{x}\ \ \forall x\neq 0$. Thử lại thấy đúng.

Ví dụ 11: Tìm $f:\ \ R\to R$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} f(1)=1\ \ (a) \\ f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy\ \forall x,y\in R\ (b) \\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{f(x)}{x^4}\ \ \forall x\neq 0\ \ (c) \end{cases}.$$

Lời giải:

Cho $x=y=0,(b)\Leftrightarrow f(0)=0$

Cho $x=y=t\neq 0,(b)\Leftrightarrow f(2t)-2f(t)=2t^2\ (1)$.

Cho $x=y=\dfrac{1}{2t},(b)\Leftrightarrow f\left(\dfrac{1}{t}\right)-2f\left(\dfrac{1}{2t}\right)=\dfrac{1}{2t^2}\ (*)$

Từ $(c)\Rightarrow f\left(\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{f(t)}{t^4}; f\left(\dfrac{1}{2t}\right)=\dfrac{f(2t)}{(2t)^4}$. Thế vào (*) ta được: $\dfrac{f(t)}{t^4}-2\dfrac{f(2t)}{(2t)^4}=\dfrac{1}{2t^2}\quad (2)$.

$(1)+(2)\Rightarrow f(t)=t^2\ \ \forall t\neq 0$. Từ $f(0)=0\Rightarrow f(t)=t^2\ \ \forall t\in R$. Thử lại thấy đúng.

Ví dụ 12: Cho hàm số $f:\ (0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn:

$$f\left(\frac{f(x)}{y}\right)=yf(y)f(f(x))\ \forall x,y\in(0;+\infty)\ (12).$$

Lời giải: Cho:

$x=y=1 \Rightarrow f\left(f(1)\right)=f(1).f\left(f(1)\right) \Rightarrow f(1)=1$ vì $f\left(f(1)\right)\neq 0 \Rightarrow f\left(f(1)\right)=1$.

$x=1;\ y\in\left(0;+\infty\right) \Rightarrow f\left(\dfrac{f(1)}{y}\right)=yf(y)f\left(f(1)\right)=yf(y) \Leftrightarrow f(y)=\dfrac{f\left(\dfrac{1}{y}\right)}{y}\ (a)$.

Mặt

khác: $f\left(f(y)\right)=f\left(\dfrac{f\left(\dfrac{1}{y}\right)}{y}\right)=yf(y)f\left(f\left(\dfrac{1}{y}\right)\right)=yf(y)f\left(yf(y)\right)=yf(y)f\left(\dfrac{f(y)}{\dfrac{1}{y}}\right)$

$$=yf(y)\ \frac{1}{y}\ f\left(\frac{1}{y}\right)f\left(f(y)\right).$$

Vì $f\left(f(y)\right)\neq 0$ nên $yf(y)\ \dfrac{1}{y}\ f\left(\dfrac{1}{y}\right)=1 \Leftrightarrow f(y)f\left(\dfrac{1}{y}\right)=1\ (b)$.

$(a)+(b) \Rightarrow f(y)=\dfrac{1}{\sqrt{y}}\ \forall y\in(0;+\infty)$. Thử lại thấy đúng.

Ví dụ 13: Tìm $f: R\to R$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} f(0)=\dfrac{1}{2}\ (a) \\ \exists a\in R: f(a-y)f(x)+f(a-x)f(y)=f(x+y)\ \forall x,y\in R\ (b) \end{cases}.$$

Lời giải:

Cho $x=y=0, (b) \Rightarrow f(a)=\dfrac{1}{2}$.

Cho $y=0;\ x\in R$ ta được: $f(x)=f(x).f(a)+f(0).f(a-x) \Rightarrow f(x)=f(a-x)\ (c)$.

Cho $y=a-x;\ x\in R$ ta được: $f(a)=\left(f(x)\right)^2+\left(f(a-x)\right)^2\ (d)$.

$$(c)+(d) \Rightarrow 2\left(f(x)\right)^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{1}{2} \\ f(x)=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

Nếu $\exists x_o\in R$ sao cho: $f(x_o)=-\dfrac{1}{2}$ thì:

$$-\frac{1}{2}=f(x_o)\overset{(b)}{=}f\left(\frac{x_o}{2}+\frac{x_o}{2}\right)=2f\left(\frac{x_o}{2}\right).f\left(a-\frac{x_o}{2}\right)\overset{(c)}{=}2\left(f\left(\frac{x_o}{2}\right)\right)^2\geq 0 \Rightarrow \text{Vô lí.}$$

Vậy $f(x)=\dfrac{1}{2}\ \forall x\in R$. Thử lại thấy đúng.

Ví dụ 14: (VMO.1995)

Tìm $f: R \to R$ thỏa mãn: $f\left((x-y)^2\right) = x^2 - 2y f(x) + (f(y))^2 \ \forall x, y \in R \ (14)$.

Lời giải:

Cho $x = y = 0 \Rightarrow f(0) = (f(0))^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(0) = 1 \end{array}\right.$.

Nếu $f(0) = 0$: Cho $\begin{cases} y = 0 \\ x \in R \end{cases}$ ta được: $f(x^2) = x^2 \Rightarrow f(t) = t \ \forall t \geq 0$

Cho $x = y \in R$ ta được: $f(0) = x^2 - 2x f(x) + (f(x))^2 \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$.
Thử lại thấy đúng.

Nếu $f(0) = 1$: Cho $\begin{cases} y = 0 \\ x \in R \end{cases}$ ta được: $f(x^2) = x^2 + 1 \Leftrightarrow f(t) = t + 1 \ \forall t \geq 0$.

Cho $x = 0$; $y \in R$ ta được: $f(y^2) = -2y + (f(y))^2 \Rightarrow (f(y))^2 = f(y^2) + 2y$

$$= y^2 + 1 + 2y = (y+1)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(y) = y + 1 \\ f(y) = -y - 1 \end{array}\right..$$

Giả sử $\exists y_o \in R$ sao cho: $f(y_o) = -y_o - 1$. Chọn $x = y = y_o$ ta được:

$1 = y_o^2 - 2y_o f(y_o) + (f(y_o))^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(y_o) = y_o - 1 \\ f(y_o) = y_o + 1 \end{array}\right.$.

Nếu $f(y_o) = y_o - 1 \Rightarrow -y_o - 1 = y_o - 1 \Rightarrow y_o = 0$ *và* $f(0) = -1$ *(loại)*.

Nếu $f(y_o) = y_o + 1 \Rightarrow -y_o - 1 = y_o + 1 \Rightarrow y_o = -1 \Rightarrow f(-1) = 0$.

Thỏa mãn: $f(y_o) = y_o + 1$. Vậy $f(y) = y + 1 \ \forall y \in R$. Thử lại thấy đúng.

Ví dụ 15: (VMO.2005)

Tìm $f: R \to R$ thỏa mãn: $f(f(x-y)) = f(x) f(y) - f(x) + f(y) - xy \ \forall x, y \in R \ (15)$.

Lời giải:

Cho $x = y = 0 \Rightarrow f(f(0)) = (f(0))^2$. Đặt $f(0) = a \Rightarrow f(a) = a^2$.

Cho $x = y \in R \Rightarrow (f(x))^2 = x^2 + f(a) \Rightarrow (f(x))^2 = x^2 + a^2 \ (*)$.

$\Rightarrow (f(x))^2 = (f(-x))^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = f(-x) \\ f(x) = -f(-x) \end{array}\right.$.

Nếu $\exists x_o \in R^*$ sao cho $f(x_o) = f(-x_o)$:

+ Chọn $x = 0$; $y = -x_o \Rightarrow f(f(x_o)) = a f(-x_o) - a + f(-x_o) \ (a)$.

+ Chọn $y=0;\ x=-x_o \Rightarrow f\left(f\left(x_o\right)\right)=a f\left(x_o\right)+a-f\left(x_o\right)(b)$.

$(a)+(b) \Rightarrow a\left(f\left(x_o\right)-f\left(-x_o\right)\right)-\left(f\left(x_o\right)+f\left(-x_o\right)\right)+2a=0\,(c)$.

Vì $f\left(x_o\right)=f\left(-x_o\right)$ nên $f\left(x_o\right)=a \overset{(*)}{\Rightarrow}\left(f\left(x_o\right)\right)^2=x_0^2+a^2 \Rightarrow a^2=x_0^2+a^2 \Rightarrow x_o=0$ trái với giả thiết $x_o \in R^*$.

Vậy $f(x)=-f(-x)\ \forall x \in R$. Ta thấy (c) không phụ thuộc vào x_o nên ta có:

$a\left(f(x)-f(-x)\right)-\left(f(x)+f(-x)\right)+2a=0\,(c)$. Thay $f(x)=-f(-x)$ suy ra:

$a\left(f(x)+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ f(x)=-1 \end{array}\right.$.

+ Nếu $a=0 \overset{(*)}{\Rightarrow}\left(f(x)\right)^2=x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=x \\ f(x)=-x \end{array}\right.$.

Giả sử tồn tại $x_o \in R^*$ để $f\left(x_o\right)=x_o$. Khi đó (b) suy ra:

$x_o=f\left(x_o\right)=a x_o+a-x_o \Rightarrow x_o=0$ trái giả thiết $x_o \in R^*$.

Vậy $f(x)=-x\ \forall x \in R$. Thử lại thấy đúng

+ Nếu $f(x)=-1\ \forall x \in R$. Thử lại ta được $(15) \Leftrightarrow xy=2\ \forall x, y \in R$. Vô lí.

Vậy hàm số cần tìm là: $f(x)=-x$.

Nhận xét: Có một suy luận hay nhầm lẫn được sử dụng các VD:

VD13 $\left(\left(f(x)\right)^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=\frac{1}{2} \\ f(x)=-\frac{1}{2} \end{array}\right)\right.$; VD14 $\left(\left(f(y)\right)^2=(y+1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(y)=y+1 \\ f(y)=-y-1 \end{array}\right)\right.$;

VD15 $\left(\left(f(x)\right)^2=x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=x \\ f(x)=-x \end{array}\right)\right.$, đó là hiểu sai:

$$\left(f(x)\right)^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=\frac{1}{2} \quad \forall x \in R \\ f(x)=-\frac{1}{2} \quad \forall x \in R \end{array}\right.;$$

$$\left(f(y)\right)^2=(y+1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(y)=y+1 \quad \forall x \in R \\ f(y)=-y-1 \quad \forall x \in R \end{array}\right.;$$

$$\left(f(x)\right)^2=x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=x \quad \forall x \in R \\ f(x)=-x \quad \forall x \in R \end{array}\right..$$

Thực tế thường là như vậy nhưng về mặt logic thì không đúng. $\left(f\left(x\right)\right)^2=\frac{1}{4}$ thì $f\left(x\right)$ có thể là hàm khác nữa như $f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \left(x\geq 0\right)\\ -\frac{1}{2} & \left(x<0\right)\end{cases}$. Như vậy $\left(f\left(x\right)\right)^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=\frac{1}{2}\\ f\left(x\right)=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$ chỉ đúng với mỗi x cụ thể chứ không thể kết luận chỉ có hai hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{2}\ \forall x\in R$ hoặc $f\left(x\right)=-\frac{1}{2}\ \forall x\in R$.

Để giải quyết vấn đề này ta thường "*thử*" $f\left(x\right)=\frac{1}{2}\ \forall x\in R$ hoặc $f\left(x\right)=-\frac{1}{2}\ \forall x\in R$ vào đề bài để tìm hàm số không thỏa mãn (trong VD13 thì $f\left(x\right)=\frac{1}{2}$ không thỏa mãn) sau đó lập luận phủ định là $\exists x_o: f\left(x_o\right)=-\frac{1}{2}$ để dẫn đến vô lí!

Ví dụ 16: Tìm $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ thỏa mãn: f(xyz) = xf(x) + yf(y) +zf(z) $\forall x,y,z\in(0,1)$.

Lời giải:

Chọn x = y = z: $f(x^3) = 3xf(x)$.

Thay x, y, z bởi x^2: $f(x^6) = 3x^2 f(x^2)$.

Mặt khác: $f(x^6) = f(x.\ x^2 .x^3) = xf(x) + x^2 f(x^2) + x^3 f(x^3)$.

$\Rightarrow 3x^2 f(x^2) = xf(x) + x^2 f(x^2) + 3x^4 f(x) \Leftrightarrow 2x^2 f(x^2) = xf(x) + 3x^4 f(x)$

$\Rightarrow f(x^2)=\frac{3x^3+1}{2}f(x),\forall x\in\mathbb{R}$

Thay x bởi x^3 ta được :

$f(x^6)=\frac{3x^9+1}{2}f(x^3),\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow 3x^2 f(x^2)=\frac{3x^9+1}{2}3xf(x),\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow 3x^2\frac{3x^3+1}{2}f(x)=\frac{3x^9+1}{2}3xf(x),\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)=0,\forall x\neq 0$

Vậy f(x) = 0 với mọi x $\in$(0; 1).

BÀI TẬP

1) Tìm $f:N\to R$ thỏa mãn: $f\left(0\right)\neq 0;\ f\left(1\right)=\frac{5}{2}$;

$$f\left(x\right)f\left(y\right)=f\left(x+y\right)+f\left(x-y\right)\quad\forall x,y\in N,\ x\geq y.$$

2) Tìm $f:N\to R$ thỏa mãn: $f\left(m+n\right)+f\left(n-m\right)=f\left(3n\right)\quad\forall m,n\in N,\ n\geq m$.

3) Tìm $f: R \to R$ thỏa mãn: $f\left(x f\left(y\right)\right) = y f\left(x\right) \quad x, y \in R$.

4) Tìm $f: R \to R$ thỏa mãn: $f\left(\left(x+1\right) f\left(y\right)\right) = y\left(f\left(x\right)+1\right) \quad x, y \in R$.

5) Tìm $f: \left(0; +\infty\right) \to \left(0; +\infty\right)$ thỏa mãn:

$f\left(x\right) = \underset{y \in \left(0;+\infty\right)}{Max}\left[x^2 y + y^2 x - f\left(y\right)\right] \forall x \in \left(0;+\infty\right)$.

6) Tìm $f: R \to R$ thỏa mãn: $f\left(xy\right) - f\left(x-y\right) + f\left(x+y+1\right) = xy + 2x + 1 \quad \forall x, y \in R$.

7) Tìm $f: \left[1;+\infty\right) \to \left[1;+\infty\right)$ thỏa mãn: $\begin{cases} f\left(xy\right) = f\left(x\right) f\left(y\right) \\ f\left(f\left(x\right)\right) = x \end{cases} \quad \forall x, y \in \left[1; +\infty\right)$.

8) Tìm $f: R \to R$ thỏa mãn: $f\left(xy\right) = f\left(x\right) f\left(y\right) - f\left(x+y\right) + 1 \quad \forall x, y \in R$.

9) Tìm $f: R \to R$ thỏa mãn:

$$\left(f\left(x\right) + f\left(z\right)\right)\left(f\left(y\right) + f\left(t\right)\right) = f\left(xy - zt\right) + f\left(xt + zy\right) \quad \forall x, y, z, t \in R.$$

10) Tìm $f: R \to R$ thỏa mãn: $f\left(x^2 - y^2\right) = x f\left(y\right) - y f\left(x\right) \quad \forall x, y \in R$.

11) Tìm $f: N \to \left[0;+\infty\right)$ thỏa mãn:

$$f\left(1\right) = 1;\ f\left(m+n\right) + f\left(m-n\right) = \frac{1}{2}\left(f\left(2m\right) + f\left(2n\right)\right) \quad \forall m, n \in N, m \geq n.$$

12) Tìm $f: Z \to R$ thỏa mãn: $f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f\left(x\right) + f\left(y\right)}{2} \quad \forall x, y \in Z; \left(x+y\right) \vdots 3$.

13) Tìm $f: N \to N$ thỏa mãn: $3f\left(n\right) - 2f\left(f\left(n\right)\right) = n \quad \forall n \in N$.

14) Tìm $f: Z \to Z$ thỏa mãn:

$$f\left(1\right) = a \in Z;\ f\left(m+n\right) + f\left(m-n\right) = 2\left(f\left(m\right) + f\left(n\right)\right) \quad \forall m, n \in Z.$$

15) Tìm $f: R \to R$ thỏa mãn: $f\left(x^3 + 2y\right) = f\left(x+y\right) + f\left(3x+y\right) + 1 \quad \forall x, y \in R$.

16) Tìm $f: R \to R$ thỏa mãn: $x^2 f\left(x\right) + f\left(1-x\right) = 2x - x^4 \quad \forall x \in R$.

Phương pháp 4: Sử dụng tính chất nghiệm của một đa thức.

Ví dụ 1: Tìm P(x) với hệ số thực, thỏa mãn đẳng thức:

$(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)P(x-1) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 2)P(x), \forall x \quad (1)$

Lời giải:

$(1) \Leftrightarrow (x+2)(x^2 + x + 1)P(x-1) = (x-2)(x^2 - x + 1)P(x), \forall x$

Chọn: $x = -2 \Rightarrow P(-2) = 0$

$x = -1 \Rightarrow P(-1) = 0$

$x = 0 \Rightarrow P(0) = 0$

$x = 1 \Rightarrow P(1) = 0$

Vậy: P(x) = x(x – 1)(x + 1)(x + 2)G(x).

Thay P(x) vào (1) ta được:

$$(x+2)(x^2+x+1)(x-1)(x-2)x(x+1)G(x-1)=(x-2)(x^2-x+1)x(x-1)(x+1)(x+2)G(x),\forall x$$

$$\Rightarrow \left(x^2+x+1\right)G(x-1)=(x^2-x+1)G(x),\forall x$$

$$\Leftrightarrow \frac{G(x-1)}{x^2-x+1}=\frac{G(x)}{x^2+x+1},\forall x$$

$$\Leftrightarrow \frac{G(x-1)}{(x-1)^2+(x-1)+1}=\frac{G(x)}{x^2+x+1},\forall x$$

Đặt $R(x)=\dfrac{G(x)}{x^2+x+1}$ $(x \neq 0, \pm 1, -2)$

$$\Rightarrow R(x)=R(x-1) \quad (x \neq 0, \pm 1, -2)$$

$$\Rightarrow R(x)=C$$

Vậy $P(x)=C(x^2+x+1)x(x-1)(x+1)(x+2)$

Thử lại thấy P(x) thỏa mãn điều kiện bài toán.

Chú ý: Nếu ta xét $P(x) = (x^3 + 1)(x - 1)$ thì $P(x + 1) = (x^3 + 3x^2 + 3x + 2)x$.

Do đó $(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)xP(x) = (x^2 - 1)(x^2 - x + 1)P(x + 1)$. Từ đó ta có bài toán sau:

Ví dụ 2: Tìm đa thức P(x) với hệ số thực, thỏa mãn đẳng thức:

$(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)xP(x) = (x^2 - 1)(x^2 - x + 1)P(x + 1)$ với mọi x.

Giải quyết ví dụ này hoàn toàn không có gì khác so với ví dụ 1.

Tương tự như trên nếu ta xét: $P(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 3x + 2)$ thì ta sẽ có bài toán sau:

Ví dụ 3: Tìm đa thức P(x) với hệ số thực thỏa mãn đẳng thức:

$$(4x^2+4x+2)(4x^2-2x)P(x)=(x^2+1)(x^2-3x+2)P(2x+1),\forall x\in \mathbb{R}$$

Các bạn có thể theo phương pháp này mà tự sáng tác ra các đề toán cho riêng mình.

<u>Phương pháp 5</u>: Sử dụng phương pháp sai phân để giải phương trình hàm.

1. Định nghĩa sai phân:

Xét hàm $x(n) = x_n$:

Sai phân cấp 1 của hàm x_n là: $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$

Sai phân câp 2 của hàm x_n là: $\Delta^2 x_n = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n$

Sai phân câp k của hàm x_n là: $\Delta^k x_n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i x_{n+k-i}$

2. Các tính chất của sai phân:

+) Sai phân các cấp đều được biểu thị qua các giá trị hàm số.

+) Sai phân có tính tuyến tính: $\Delta^k(af+bg)=a\Delta^k f+b\Delta^k g$

+) Nếu x_n đa thức bậc m thì $\Delta^k x_n$:

Là đa thức bậc m – k nếu m > k.

Là hằng số nếu m = k.

Là 0 nếu m < k.

3. Nội dung của phương pháp này là chuyển bài toán phương trình hàm sang bài toán dãy số và dùng các kiến thức dãy số để tìm ra các hàm số cần tìm.

Ví dụ 1: Tìm f: $N \to R$ thoả mãn : f(1) = 1 và

2f(n).f(n+k) = 2f(k-n) + 3f(n).f(k) $\forall$ k, n$\in$N, k$\geq$ n.

Lời giải:

Cho n = k = 0 ta được: $(f(0))^2 + 2f(0) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(0)=-2 \end{array}\right.$.

+ Nếu f(0) = 0 thì chọn n = 0, k$\in$ N ta được: f(k) = 0 trái giả thiết f(1) = 1.

+ Nếu f(0) = - 2 thì chọn n = 1, k$\in$ N^* ta được: 2.f(k+1) - 3.f(k) - 2.f(k-1) = 0.

Đặt u_k = f(k) ta được dãy số: $\begin{cases} u_0=-2; u_1=1 \\ 2u_{k+1}-3u_k-2u_{k-1}=0 \ \forall k\in\mathbb{N}^* \end{cases}$.

Từ đây tìm được u_k = f(k) = $-2.(-\frac{1}{2})^k \ \forall k\in N$. Thử lại thấy đúng.

Ví dụ 2 (Dự tuyển IMO 1992): Cho a, b> 0. Tìm f: $[0; +\infty) \to [0; +\infty)$ thoả mãn :

f(f(x))+a.f(x) = b.(a+b).x $\forall$x$\in$ $[0; +\infty)$ (2)

Lời giải:

Cố định x$\in$ $[0; +\infty)$ và đặt u_0 = x, u_1 = f(x), u_{n+1} = f(u_n). Từ (2) ta được :

u_{n+2} + a.u_{n+1} - b.(a + b).u_n = 0. Giải dãy số trên ta được: $u_n = c_1.b^n + c_2.(-a-b)^n$ (*).

Vì $u_n \geq 0$ $\forall$n$\in$N nên ta có: $0\leq\frac{u_n}{(a+b)^n}=c_1.(\frac{b}{a+b})^n+c_2.(-1)^n$. Mặt khác: $0<\frac{b}{a+b}<1$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{b}{a+b})^n=0$. Do đó, nếu $c_2 > 0$ thì khi n lẻ và n đủ lớn thì $\frac{u_n}{(a+b)^n}<0$ vô lí !; còn nếu $c_2 < 0$ thì khi n chẵn và n đủ lớn thì $\frac{u_n}{(a+b)^n}<0$ vô lí !. Vậy $c_2 = 0$. Thay vào (*) ta được $u_n = c_1.b^n$. Từ u_0 = x suy ra c_1 = x và f(x) = bx. Do đó f(x) = bx $\forall$x$\in$$[0;+\infty)$. Thử lại thấy đúng.

Ví dụ 3: Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

f(f(x)) = 3f(x) – 2x , $\forall x\in\mathbb{R}$

Lời giải :

Thay x bởi f(x) ta được:

f(f(f(x))) = 3f(f(x)) – 2f(x) , $\forall x\in\mathbb{R}$

………………………..

$$\underbrace{f(...f(x))}_{n+2}=3\underbrace{f(...f(x))}_{n+1}-2\underbrace{f(...f(x))}_{n}$$

Hay $f_{n+2}(x)=3f_{n+1}(x)-2f_n(x), n\geq 0$

Đặt $x_n=f_n(x), n\geq 0$ ta được phương trình sai phân: $x_{n+2}=3x_{n+1}-2x_n$

Phương trình đặc trưng là: $\lambda^2-3\lambda+2=0\Leftrightarrow\lambda=1\vee\lambda=2$

Vậy $x_n = c_1 + c_2 2^n$

Ta có: $\begin{cases} x_0 = c_1 + c_2 = x \\ x_1 = c_1 + 2c_2 = f(x) \end{cases}$

Từ đó ta được $c_1 = 2x - f(x), c_2 = f(x) - x$

Vậy $f(x) = x + c_2$ hoặc $f(x) = 2x - c_1$

Phương pháp 6: Phương pháp sử dụng ánh xạ.

Ví dụ 1: Tìm f: $N^* \to N^*$ thoả mãn:

$f(f(n)+m) = n+f(m+2007)\ \forall\ m, n\in N^*$ (1).

Lời giải:

Trước hết ta chứng minh f là đơn ánh.

Thật vậy: $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow f(f(n_1)+1) = f(f(n_2)+1) \Rightarrow n_1 + f(1+2007) = n_2 + f(1+2007) \Rightarrow n_1 = n_2$. Vậy f là đơn ánh.

Mặt khác từ (1) suy ra: $\forall$ m, n $\in N^*$, $f(f(n) + f(1)) = n + f(f(1) + 2007) \Rightarrow f(f(n)+f(1)) = n + 1 + f(2007+2007) = f(f(n+1)+2007)$. Vì f là đơn ánh nên ta có: $f(n) + f(1) = f(n+1) + 2007 \Rightarrow f(n+1) - f(n) = f(1) - 2007$. Đặt $f(1) - 2007 = a$. Khi đó ta có $f(n) = n.a + 2007$. Thay lại (10) ta được $a^2n = n\ \forall n\in N^* \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(n) = n+2007$.

Ví dụ 2: Tìm f: $R \to R$ thoả mãn: $f(xf(x)+f(y)) = (f(x))^2+y\ \forall\ x, y\in R$ (2).

Lời giải:

Dễ ràng chứng minh f là đơn ánh.

Mặt khác, cố định x thì $\forall t\in R$ tồn tại $y = t - (f(x))^2$ để $f(xf(x) + f(y)) = t$. Vậy f là toàn ánh, do đó f là song ánh. Suy ra tồn tại duy nhất $a\in R$ sao cho $f(a) = 0$.

Cho $x = y = a$ ta được $f(0) = a$.

Cho $x = 0, y = a$ ta được $f(0) = a^2 + a$. Vậy $a = a^2 + a$ hay $a = 0 \Rightarrow f(0) = 0$.

Cho $x = 0, y\in R$ ta được $f(f(y)) = y$ (a).

Cho $y = 0, x\in R$ ta được $f(x.f(x)) = (f(x))^2 \Rightarrow f(f(x).f(f(x))) = (f(f(x)))^2$. Theo (a) ta được $f(f(x).x)) = x^2 \Rightarrow (f(x))^2 = x^2 \Rightarrow f(x) = x$ hoặc $f(x) = -x$.

Giả sử tồn tại $a, b\in R^*$ để $f(a) = a, f(b) = -b$. Khi đó thay $x = a, y = b$ thì từ (2) suy ra: $f(a^2 - b) = a^2 + b$. Mà $(a^2 + b)^2 \neq (a^2 - b)^2$ với $a, b\in R^*$ trái với khẳng định $(f(x))^2 = x^2$. Vậy có hai hàm số là $f(x) = x, \forall x\in R$ hoặc $f(x) = -x\ \forall x\in R$. Thử lại thấy đúng.

Phương pháp 7: phương pháp điểm bất động.

1. Đặc trưng của hàm:

Như ta đã biết, phương trình hàm là một phương trình thông thường mà nghiệm của nó là hàm. Để giải quyết tốt vấn đề này, cần phân biệt tính chất hàm với đặc trưng hàm. Những tính chất quan trắc được từ đại số sang hàm số, được gọi là những đặc trưng hàm.

+) Hàm tuyến tính $f(x) = ax$, khi đó $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Vậy đặc trưng hàm tuyến tính là: $f(x + y) = f(x) + f(y)$ với mọi x, y.

+) Hàm bậc nhất f(x) = ax + b, khi đó f(x) + f(y) = 2 $f(\frac{x+y}{2})$. Vậy đặc trưng hàm ở đây là

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Đến đây thì ta có thể nêu ra câu hỏi là: Những hàm nào có tính chất $f(x+y)=f(x)+f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Giải quyết vấn đề đó chính là dẫn đến phương trình hàm. Vậy phương trình hàm là phương trình sinh bởi đặc trưng hàm cho trước.

+) Hàm lũy thừa $f(x)=x^k, x>0$ Đặc trưng là f(xy) = f(x)f(y).

+) Hàm mũ $f(x)=a^x (a>0, a\neq 1)$ Đặc trưng hàm là f(x + y) = f(x)f(y), $\forall x, y \in \mathbb{R}$

+) Hàm Lôgarit $f(x)=\log_a x$ (a>0,a $\neq 1$) Đặc trưng hàm là f(xy) = f(x) + f(y).

+) f(x) = cosx có đặc trưng hàm là f(x + y) + f(x – y) = 2f(x)f(y).

Hoàn toàn tương tự ta có thể tìm được các đặc trưng hàm của các hàm số f(x) =sinx, f(x) = tanx và với các hàm Hypebolic:

+) Sin hypebolic $shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

+) cos hypebolic $chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

+) tan hypebolic $thx=\frac{shx}{chx}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

+) cot hypebolic $cothx=\frac{chx}{shx}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

+) shx có TXĐ là $\mathbb{R}$ tập giá trị là $\mathbb{R}$

chx có TXĐ là $\mathbb{R}$ tập giá trị là $[1,+\infty)$

thx có TXĐ là $\mathbb{R}$ tập giá trị là (-1,1)

cothx có TXĐ là $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ tập giá trị là $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

Ngoài ra bạn đọc có thể xem thêm các công thức liên hệ giữa các hàm hypebolic, đồ thị của các hàm hypebolic.

2. Điểm bất động:

Trong số học, giải tích, các khái niệm về điểm bất động, điểm cố định rất quan trọng và nó được trình bày rất chặt chẽ thông qua một hệ thống lý thuyết. Ở đây, tôi chỉ nêu ứng dụng của nó qua một số bài toán về phương trình hàm.

Ví dụ 1: Xác định các hàm f(x) sao cho: f(x+1) = f(x) + 2 $\forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải:

Ta suy nghĩ như sau: Từ giả thiết ta suy ra c = c + 2 do đó $c=\infty$

Vì vậy ta coi 2 như là f(1) ta được f(x + 1) = f(x) + f(1) (*)

Như vậy ta đã chuyển phép cộng ra phép cộng. Dựa vào đặc trưng hàm, ta phải tìm a: f(x) = ax để khử số 2. Ta được (*) $\Leftrightarrow a(x+1)=ax+2 \Leftrightarrow a=2$

Vậy ta làm như sau: Đặt f(x) = 2x + g(x). Thay vào (*) ta được:

2(x + 1) + g(x + 1) = 2x + g(x) + 2, $\forall x \in \mathbb{R}$

Điều này tương đương với g(x + 1) = g(x), $\forall x \in \mathbb{R}$ Vậy g(x) là hàm tuần hoàn với chu kì 1.

Đáp số f(x) = 2x + g(x) với g(x) là hàm tuần hoàn với chu kì 1.

Nhận xét: Qua ví dụ 1, ta có thể tổng quát ví dụ này, là tìm hàm f(x) thỏa mãn:

f(x + a) = f(x) + b, $\forall x \in \mathbb{R}$, a, b tùy ý.

Ví dụ 2: Tìm hàm f(x) sao cho: f(x + 1) = - f(x) + 2, $\forall x \in \mathbb{R}$ (2).

Lời giải:

ta cũng đưa đến c = -c + 2 do đó c = 1.

vậy đặt f(x) = 1 + g(x), thay vào (2) ta được phương trình: g(x + 1) = - g(x), $\forall x \in \mathbb{R}$

Do đó ta có: $\begin{cases} g(x+1) = -g(x) \\ g(x+2) = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = \frac{1}{2}\left[g(x) - g(x+1)\right] \\ g(x+2) = g(x) \end{cases}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (3).

Ta chứng minh mọi nghiệm của (3) có dạng: $g(x) = \frac{1}{2}\left[h(x) - h(x+1)\right], \forall x \in \mathbb{R}$ ở đó h(x) là hàm tuần hoàn với chu kì 2.

Nhận xét: Qua ví dụ này, ta có thể tổng quát thành: f(x + a) = - f(x) + b, $\forall x \in \mathbb{R}$, a, b tùy ý.

Ví dụ 3: Tìm hàm f(x) thỏa mãn: f(x + 1) = 3f(x) + 2, $\forall x \in \mathbb{R}$ (3).

Giải:

Ta đi tìm c sao cho c = 3c + 2 dễ thấy c = -1. Đặt f(x) = -1 + g(x). Lúc đó (3) có dạng:

g(x + 1) = 3g(x) $\forall x \in \mathbb{R}$

Coi 3 như g(1) ta được: g(x + 1) = g(1).g(x) $\forall x \in \mathbb{R}$ (*).

Từ đặc trưng hàm, chuyển phép cộng về phép nhân, ta thấy phải sử dụng hàm mũ:

$a^{x+1} = 3a^x \Leftrightarrow a = 3$

Vậy ta đặt: $g(x) = 3^x h(x)$ thay vào (*) ta được: h(x + 1) = h(x) $\forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy h(x) là hàm tuần hoàn chu kì 1.

Kết luận: $f(x) = -1 + 3^x h(x)$ với h(x) là hàm tuần hoàn chu kì 1.

Nhận xét: Ở ví dụ 3 này, phương trình tổng quát của loại này là: f(x + a) = bf(x) + c $\forall x \in \mathbb{R}$; a, b, c tùy ý.

+) Với 0< b $\neq$ 1: chuyển về hàm tuần hoàn.

+) Với 0< b $\neq$ 1: chuyển về hàm phản tuần hoàn.

Ví dụ 4: Tìm hàm f(x) thỏa mãn f(2x + 1) = 3f(x) – 2 $\forall x \in \mathbb{R}$ (4)

Giải:

Ta có: c = 3c – 2 suy ra c = 1. Đặt f(x) = 1 + g(x). Khi đó (4) có dạng:

g(2x + 1) = 3g(x) $\forall x \in \mathbb{R}$ (*)

Khi biểu thức bên trong có nghiệm $\neq \infty$ thì ta phải xử lý cách khác.

Từ 2x + 1 = x suy ra x = 1. Vậy đặt x = -1 + t ta có 2x + 1 = -1 + 2t. Khi đó (*) có dạng:

g(-1 + 2t) = 3g(-1 + t) $\forall t \in \mathbb{R}$.

Đặt h(t) = g(-1 + 2t), ta được h(2t) = 3h(t) (**). Xét $2t = t \Leftrightarrow t = 0$, $(2t)^m = 3.t^m \Leftrightarrow m = \log_2 3$

Xét ba khả năng sau:

+) Nếu t = 0 ta có h(0) = 0.

+) Nếu t> 0 đặt $h(t)=t^{\log_2 3}\varphi(t)$ thay vào (3) ta có: $\varphi(2t)=\varphi(t),\forall t>0$. Đến đây ta đưa về ví dụ hàm tuần hoàn nhân tính.

+) Nếu t < 0 đặt $h(t)=|t|^{\log_2 3}\varphi(t)$ thay vào (3) ta được $\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi(2t)=-\varphi(t),\forall t<0\\ \varphi(4t)=\varphi(t),\forall t<0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi(t)=\dfrac{1}{2}\left[\varphi(t)-\varphi(2t)\right],\forall t<0\\ \varphi(4t)=\varphi(t),\forall t<0\end{cases}.$$

Nhận xét: Bài toán tổng quát của dạng này như sau: $f(\alpha x+\beta)=f(ax)+b\quad \alpha\neq 0,\pm 1$. Khi đó từ phương trình $\alpha x+\beta=x$ ta chuyển điểm bất động về 0, thì ta được hàm tuần hoàn nhân tính.

+) Nếu a = 0 bài toán bình thường.

+) Nếu a = 1 chẳng hạn xét bài toán sau: ***"Tìm f(x) sao cho f(2x + 1) = f(x) – 2,*** $\forall x\neq -1$ ***(1)".***

Xét: 2x + 1 = x $\Leftrightarrow x=-1$ nên đặt x = -1 + t thay vào (1) ta được: f(-1 + 2t) = f(-1 + t) + 2, $\forall t\neq 0$. Đặt g(t) = f(- 1 + t) ta được: g(2t) = g(t) + 2 $\forall t\neq 0$ (2). Từ tích chuyển thành tổng nên là hàm logarit.

Ta có $\log_a(2t)=\log_a t-2\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Vậy đặt $g(t)=\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}|t|+h(t)$. Thay vào (2) ta có $h(2t)=h(t),\forall t\neq 0$. Đến đây bài toán trở nên đơn giản.

<u>Phương pháp 8</u>: phương pháp sử dụng hệ đếm.

Ta quy ước ghi m = $(b_ib_{i-1}...b_1)_k$ nghĩa là trong hệ đếm cơ số k thì m bằng $b_ib_{i-1}...b_1$.

Ví dụ 1 (Trích IMO năm 1988):

Tìm f: $N^*\to N^*$ thoả mãn: f(1) = 1, f(3) = 3, f(2n) = f(n),

f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n); f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n) $\forall n\in N^*$ (12).

Lời giải:

Tính một số giá trị của hàm số và chuyển sang cơ số 2 ta có thể dự đoán được:

"$\forall n\in N^*$, n = $(b_ib_{i-1}...b_1)_2$ thì f(n) = $(b_1b_2...b_i)_2$" (*). Ta sẽ chứng minh (*) bằng quy nạp.

+ Với n = 1, 2, 3, 4 dễ kiểm tra (*) là đúng.

+ Giả sử (*) đúng cho k < n, ta sẽ chứng minh (*) đúng cho n (với n $\geq$ 4). Thật vậy, ta xét các khả năng sau:

• Nếu n chẵn, n = 2m. Giả sử m = $(b_ib_{i-1}...b_1)_2$, khi đó n = 2m = $(b_ib_{i-1}...b_10)_2\Rightarrow$

f(n) = f($(b_ib_{i-1}...b_10)_2$) = f(2m) = f(m) = f($(b_ib_{i-1}...b_1)_2$) = $(b_1b_2...b_i)_2$ = $(0b_1b_2...b_i)_2\Rightarrow$ (*) đúng.

• Nếu n lẻ và n = 4m + 1. Giả sử m = $(b_ib_{i-1}...b_1)_2$, khi đó n = $(b_ib_{i-1}...b_101)_2\Rightarrow$

f(n) = f($(b_ib_{i-1}...b_101)_2$) = f(4m+1) = 2.f(2m+1) - f(m) = 2.f($(b_ib_{i-1}...b_11)_2$) - f($(b_ib_{i-1}...b_1)_2$) = $(10)_2.(1b_1b_2...b_i)_2$ - $(b_1b_2...b_i)_2$ = $(1b_1b_2...b_i0)_2$ - $(b_1b_2...b_i)_2$ = $(10b_1b_2...b_i)_2\Rightarrow$ (*) đúng.

• Nếu n lẻ và n = 4m + 3. Giả sử m = $(b_ib_{i-1}...b_1)_2$, khi đó n = $(b_ib_{i-1}...b_111)_2 \Rightarrow$

f(n) = $f((b_ib_{i-1}...b_111)_2)$ = f(4m+3) = 3f(2m+1) - 2f(m) = $3f((b_ib_{i-1}...b_11)_2) - 2f((b_ib_{i-1}...b_1)_2)$ = $(11)_2.(1b_1b_2...b_i)_2 - (10)_2.(b_1b_2...b_i)_2 = (11b_1b_2...b_i)_2 \Rightarrow$ (*) đúng.

Vậy (*) đúng và hàm f được xác định như (*).

Ví dụ 2 (Trích đề thi của Trung Quốc):

Tìm hàm số f: $N^* \rightarrow N^*$ thỏa mãn:

1) f(1) =1;

2) f(2n) < 6f(n);

3) 3f(n)f(2n+1) = f(2n)(3f(n)+1) $\forall n \in N^*$.

Lời giải:

Vì $f(n) \in N^*$ nên (3f(n), 3f(n)+1) = 1. Từ 3) suy ra 3f(n) | f(2n). Kết hợp với 2) suy ra f(2n) = 3f(n) và f(2n+1) = 3f(n)+1 $\forall n \in N^*$.

Thử một số giá trị ta thấy f(n) được xác định như sau:

"Với n = $(b_1b_2...b_i)_2$ thì f(n) = $(b_1b_2...b_i)_3$ $\forall n \in N^*$" (*). Ta chứng minh (*) bằng quy nạp.

+ Với n = 1, 2, 3, 4 thì hiển nhiên (*) đúng.

+ Giả sử (*) đúng cho k < n (với $n \geq 4$). Ta chứng minh (*) đúng cho n.

• Nếu n chẵn: n = 2m. Giả sử m = $(c_1c_2...c_j)_2$ thì n = 2m = $(c_1c_2...c_j0)_2$. Khi đó:

f(n) = f(2m) = 3f(m) = $3.f((c_1c_2...c_j)_2) = (10)_3.(c_1c_2...c_j)_3 = (c_1c_2...c_j0)_3 \Rightarrow$ (*) đúng cho n chẵn.

• Nếu n lẻ: n = 2m + 1 $\Rightarrow$ n = $(c_1c_2...c_j1)_2$. Khi đó:

f(n) = f(2m+1) = 3f(m) + 1 = $3f((c_1c_2...c_j)_2) + 1 = (10)_3.(c_1c_2...c_j)_3 + 1_3 = (c_1c_2...c_j1)_3 \Rightarrow$ (*) đúng cho n lẻ.

Vậy (*) đúng cho mọi $n \in N^*$ và f(n) được xác định như (*).

<u>Phương pháp 9</u>: phương pháp sử dụng đạo hàm.

Ví dụ 1: Tìm f: R $\rightarrow$ R thoả mãn: $|f(x)- f(y)|^2 \leq |x- y|^3$ $\forall x, y \in R$ (14).

Lời giải: Cố định y, với $x \in R$, $x \neq y$ từ (14) ta được:

$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|^2 \leq |x-y| \Rightarrow 0 \leq \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq \sqrt{|x-y|}$. Vì $\lim\limits_{x\to y} 0 = \lim\limits_{x \to y}\sqrt{|x-y|} = 0$ nên suy ra

$\lim\limits_{x\to y}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = 0 \Rightarrow$ f'(y) = 0 $\Rightarrow$ f(y) = c $\forall y \in R$ (với c là hằng số). Thử lại thấy đúng.

Ví dụ 2: Tìm f: R $\rightarrow$ R có đạo hàm trên R và thoả mãn:

f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy $\forall x, y \in R$ (15)

Lời giải:

+ Cho x = y = 0 ta được f(0) = 0.

+ Với $y \neq 0$, cố định x ta được: $\frac{f(x+y)-f(x)}{y} = \frac{f(y)+2xy}{y} = \frac{f(y)-f(0)}{y-0} + 2x$ (*). Vì f(x) có đạo hàm trên R nên từ (*), cho $y \to 0$, suy ra $f'(x) = f'(0) + 2x = 2x + c \Rightarrow f(x) = x^2+cx+b$ $\forall x\in R$; b, c là các hằng số thực. Thử lại thấy đúng.

<u>Phương pháp 10</u>: phương pháp đặt hàm phụ.

Mục đích chính của việc đặt hàm phụ là làm giảm độ phức tạp của phương trình hàm ban đầu và chuyển đổi tính chất hàm số nhằm có lợi hơn trong giải toán.

Ví dụ 1: Tìm f: $R \to R$ thoả mãn: $f(x) \geq 2007x$ và $f(x+y) \geq f(x)+f(y)$ $\forall x, y\in R$ (1).

Lời giải:

Dễ thấy f(x) = 2007x là một hàm số thoả mãn (1). Đặt g(x) = f(x) - 2007x và thay vào (1) ta được: $g(x) \geq 0$ (a) và $g(x+y) \geq g(x) + g(y)$ (b) $\forall x, y\in R$.

+ Cho x = y = 0, từ (b) ta được $g(0) \leq 0$, kết hợp với (a) suy ra g(0) = 0.

+ Cho x = -y, $x\in R$, từ (a) và (b) ta được $g(x) \geq 0$, $g(-x) \geq 0$, $0 \geq g(x) + g(-x)$; suy ra :

$g(x) = g(-x) = 0 \Rightarrow h(x) = 2007x$, $\forall x\in R$. Thử lại thấy đúng.

Ví dụ 2: Tìm f: $R \to R$ liên tục trên R thoả mãn:

$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$ $\forall x, y\in R$ (2).

Lời giải:

Xét phương trình: $\lambda = 2\lambda + \lambda^2$ có nghiệm $\lambda = -1$ khác 0.

Đặt g(x) = f(x) - (-1) = f(x) + 1. Thế vào (18) ta được:

$g(x+y) = g(x).g(y)$ $\forall x, y\in R$ (*).

Cho $x = y = \frac{t}{2}$ ta được $g(t) \geq 0$ $\forall t\in R$.

Cho x = y = 0 ta được: g(0) = 0 hoặc g(0) = 1.

+ Nếu g(0) = 0 thì (*) suy ra $g(x) = 0$ $\forall x\in R \Rightarrow f(x) = -1$ $\forall x\in R$. Thử lại thấy đúng.

+ Nếu g(0) = 1: Giả sử tồn tại a để g(a) = 0 thì (*) suy ra g(x) = 0 $\forall x\in R$. Trái với giả thiết g(0) = 1. Vậy $g(x) > 0$ $\forall x\in R$. Đặt h(x) = lng(x) ta được :

h(x+y) = h(x) + h(y) (**). Từ f(x) liên tục trên R suy ra h(x) liên tục trên R. Theo phương trình hàm Côsi ta được h(x) = cx (với c là hằng số) $\Rightarrow f(x) = e^{cx} - 1$ $\forall x\in R$. Khi c = 0 thì f(x) = -1. Vậy trong mọi trường hợp $f(x) = e^{cx} - 1$ $\forall x\in R$ thử lại thấy đúng.

<u>Phương pháp 11</u>: Sử dụng tính liên tục của hàm số.

Sử dụng tính liên tục của hàm số có 3 con đường chính: Xây dựng biến từ N đến R, chứng minh hàm số là hằng số, sử dụng phương trình hàm Côsi.

Ví dụ 1 (xây dựng biến từ N đến R):

Tìm hàm $f: R \to R$ thỏa mãn:

1) f(x) liên tục trên R;

2) f(1) = 2;

3) f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) +1 $\forall$x,y$\in$R.

Lời giải:

Cho x = y = 0 ta được: f(0) = 1.

Cho x = 1, y$\in$R ta được: f(y+1) = f(y) +1 (a).

Từ f(0) = 1, f(1) = 2 và (a) quy nạp ta suy ra f(n) = n+1 $\forall$n$\in$N.

Với n$\in$N, (a) $\Rightarrow$ f(-n) = f(-n+1) - 1 = f(-n+2) - 2 =…= f(0) -n = -n + 1.

Vậy f(z) = z +1 $\forall$z$\in$Z.

Với $\forall$n$\in$N*, 2 = f(1) = $f(n.\frac{1}{n}) = f(n)f(\frac{1}{n}) - f(n+\frac{1}{n}) + 1$ (b). Mặt khác từ (a) ta có:

$f(n+\frac{1}{n}) = 1 + f(n-1+\frac{1}{n}) = 2 + f(n-2+\frac{1}{n}) = ... = n + f(\frac{1}{n})$. Thế vào (b) ta được:

$f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + 1$.

Với $q \in \mathbb{Q}, q = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$ ta có: $f(q) = f(\frac{m}{n}) = f(m.\frac{1}{n}) = f(m)f(\frac{1}{n}) - f(m+\frac{1}{n}) + 1$ =

= $(m+1)(\frac{1}{n}+1) - f(m+\frac{1}{n}) + 1$ (c). Từ (a) ta dễ dàng chứng minh được:

$f(m+\frac{1}{n}) = m + f(\frac{1}{n})$. Thế vào (c) ta được f(q) = q +1 $\forall$q$\in$Q.

Với r$\in$R, tồn tại dãy {r_n} với $r_n \in$Q thỏa mãn $\lim r_n = r$. Khi đó, do f liên tục nên ta có:

f(r) = f(limr_n) = limf(r_n) = lim(r_n+1) = limr_n + 1 = r + 1. Vậy f(x) = x + 1 $\forall$x$\in$R. Thử lại thấy đúng.

Ví dụ 2 (chứng minh hàm số là hằng số):

Tìm hàm f: [0;$\frac{1}{2}$] $\rightarrow$ [0;$\frac{1}{2}$] thỏa mãn:

1) f(x) liên tục trên [0;$\frac{1}{2}$]

2) $f(x) = f(x^2 + \frac{1}{4})\ \forall x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$.

Lời giải:

Với a$\in$[0;$\frac{1}{2}$], xét dãy số: $\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4}\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Dễ chứng minh {x_n} không âm (a).

$x_0 \le \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 \le x_0^2 + \frac{1}{4} \le \frac{1}{2}$. Quy nạp suy ra $x_n \le \frac{1}{2}$ (b).

$x_{n+1} - x_n = (x_n - \frac{1}{2})^2 \geq 0 \Rightarrow x_{n+1} \geq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ (c).

Từ (a), (b), (c) suy ra $x_n \in [0; \frac{1}{2}]$ và $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn là $\lim x_n = \frac{1}{2}$.

Vậy với mọi $a \in [0; \frac{1}{2}]$, $f(a) = f(x_1) = f(x_2) = \ldots = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(\frac{1}{2}) = c$ (c là hằng số).

Thử lại thấy đúng.

Ví dụ 3 (sử dụng phương trình hàm côsi - VMO năm 2006(bảng B)):

Tìm f: $R \to R$ liên tục trên R thoả mãn: $f(x-y).f(y-z).f(z-x)+8 = 0 \ \forall x, y, z \in R$ (3).

Lời giải:

Cho x = t, z = -t, y = 0, $x \in R$ ta được: $f(t).f(t).f(-2t) = -8 \Rightarrow f(-2t) = \frac{-8}{(f(t))^2} < 0 \Rightarrow f(t) < 0$ $\forall t \in R$. Đặt $g(x) = \ln(\frac{f(x)}{-2}) \Rightarrow f(x) = -2.e^{g(x)}$. Thế vào (3) ta được:

$-8.e^{g(x-y)+g(y-z)+g(z-x)} = -8 \Leftrightarrow g(x-y) + g(y-z) + g(z-x) = 0$ (*).

+ Cho x = y = z = 0, từ (*) ta được g(0) = 0 (a).

+ Cho y = z = 0, $x \in R$, từ (a) ta được g(x) = g(-x) (b).

Từ (*) và (b) suy ra $g(x-y) + g(y-z) = -g(z-x) = -g(x-z) = g(x-y+y-z) \Rightarrow g(t+t') = g(t) + g(t')$ $\forall t, t' \in R$ (**). Vì f liên tục trên R nên g(x) cũng liên tục trên R. Từ (**), theo phương trình hàm Côsi ta được $g(x) = ax \Rightarrow f(x) = -2.e^{ax} = -2.b^x$ (Với $b = e^a > 0$). Thử lại thấy đúng.

--Hết--