PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

CÁC PHƯƠNG PHÁP THƯỜNG DÙNG GIẢI PT NGHIỆM NGUYÊN

I/ SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CHIA HẾT:

Ví dụ 1: Giải pt với nghiệm nguyên: $3x + 17y = 159$ (1)

Giải: Giả sử x, y là các số nguyên thoả mãn pt (1).

Ta thấy 159 và 3x đều chia hết cho 3 nên 17y 3; Do đó y 3 (vì 17 và 3 nguyên tố cùng nhau)

Đặt y = 3t (t Z). Thay vào (1) ta được: $3x + 17.3t = 159$ <=> $x = 53 - 17t$

Đảo lại, thay các biểu thức x, y vào (1), pt cũng nghiệm đúng.

Vậy pt (1) có vô số nghiệm nguyên (x, y) được biểu thị bởi cộng thức:

$$\begin{matrix} \mathbf{x}\ \ 53\ \ 17\mathbf{t} \\ \mathbf{y}\ \ 3\mathbf{t} \end{matrix}\ (t\ \ Z).$$

Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên của pt: $x^2 - 2y^2 = 5$ (2)

Giải: Từ pt (2) ta suy ra x phải là số lẻ. Thay x = 2k + 1 (k Z) vào (2), ta được:

$4k^2 + 4k + 1 - 2y^2$ <=> $2(k^2 + k - 1) = y^2$ => y^2 là số chẵn. Đặt y = 2t (t Z), ta có:

$2(k^2 + k - 1) = 4t^2$ <=> $k^2 + k - 1 = 2t^2$ <=> $k(k + 1) = 2t^2 + 1$ (**)

Nhận xét: k(k + 1) là một số chẵn, $2t^2 + 1$ là số lẻ => pt (**) vô nghiệm

Vậy pt đã cho không có nghiệm nguyên.

Ví dụ 3: CMR không tồn tại các số nguyên x, y, z thoả mãn: $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z + 2000$ (3)

Giải: Ta có $(x^3 - x) = (x - 1)x(x + 1)$ là tích của 3 số nguyên liên tiếp (với x là số nguyên). Do đó: $x^3 - x$ 3

Tương tự $y^3 - y$ và $z^3 - z$ cũng chia hết cho 3. Từ đó ta có $x^3 + y^3 + z^3 - x - y - z$ chia hết cho 3.

Vì 2000 không chia hết cho 3 nên $x^3 + y^3 + z^3 - x - y - z$ 2000 với mọi số nguyên x, y, z; tức là pt (3) không có nghiệm nguyên

Ví dụ 4: Tìm nghiệm nguyên của pt: $xy + x - 2y = 3$ (4)

Giải: Ta có (4) <=> $y(x - 2) = -x + 3$

Vì x = 2 không thoả mãn phương trình nên (4) $y = \frac{\mathbf{x}\ \ 3}{\mathbf{x}\ \ 2}$ <=> $y = -1 + \frac{1}{\mathbf{x}\ \ 2}$

Ta thấy: y là số nguyên <=> x – 2 là ước của 1 <=> x – 2 = 1 <=> x = 1 hoặc x = 3. ừ đó ta có nghiệm (x, y) là (1; -2) và (3; 0)

Lưu ý: Bài này có thể dùng pp đưa về tích để đưa về dạng: $(x - 2)(y + 1) = 1$.

Ví dụ 5: Cho đa thức f(x) có các hệ số nguyên. Biết rằng f(1).f(2) = 35. CMR đa thức f(x) không có nghiệm nguyên.

Giải: Giả sử f(x) có nghiệm nguyên a. Thế thì: f(x) = (x – a).g(x); trong đó g(x) là đa thức có các hệ số nguyên.

=> f(1) = (1 – a). g(1) và f(2) = (2 – a).g(2); trong đó g(1), g(2) là các số nguyên.

Do đó: f(1).f(2) = (1 – a)(2 – a). g(1).g(2)

=> 35 = (1 – a)(2 – a). g(1).g(2) (*)

Ta thấy (1 – a)(2 – a) là tích của 2 số nguyên liên tiếp nên là số chẵn nên vế phải là số chẵn, trong khi đó vế trái là số lẻ nên không xảy ra đẳng thức (*)

Tức là đa thức f(x) không có nghiệm nguyên.

<u>II/ ĐƯA VỀ DẠNG TÍCH:</u>

Ta biến đổi pt về dạng: vế trái là tích của các đa thức chứa ẩn, vế phải là tích của các số nguyên.

<u>Ví dụ 1:</u> Tìm nghiệm nguyên của pt: $xy – x – y = 2$ (1)

Giải: Ta có (1) <=> $x(y – 1) – y = 2$ <=> $x(y – 1) – (y – 1) = 3$ <=> $(y – 1)(x – 1) = 3$

Do vai trò bình đẳng của x và y trong pt nên có thể giả sử x   y khi đó x – 1   y – 1.

Vậy ta có : $\begin{matrix} x & 1 & 3 \\ y & 1 & 1 \end{matrix}$ hay $\begin{matrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & 3 \end{matrix}$ => $\begin{matrix} x & 4 \\ y & 2 \end{matrix}$ hay $\begin{matrix} x & 0 \\ y & 2 \end{matrix}$

Vậy nghiệm nguyên của pt là (4; 2), (0; -2); (2; 4), (-2;0)

<u>Ví dụ 2:</u> Tìm nghiệm nguyên của pt: $y^3 – x^3 = 91$ (2)

Giải: (2) <=> $(y – x)(y^2 + xy + x^2) = 91$ (*)

Vì $y^2 + xy + x^2 > 0$ với mọi x, y nên từ (*) => $y – x > 0$. Mặt khác: 91 = 1.91 = 7.13 và $y – x$, $y^2 + xy + x^2$ đều nguyên dương nên ta có 4 khả năng sau:

$\begin{matrix} y & x & 91 \\ x^2 & xy & y^2 & 1 \end{matrix}$; $\begin{matrix} y & x & 1 \\ x^2 & xy & y^2 & 91 \end{matrix}$; $\begin{matrix} y & x & 13 \\ x^2 & xy & y^2 & 7 \end{matrix}$; $\begin{matrix} y & x & 7 \\ x^2 & xy & y^2 & 13 \end{matrix}$;

Giải ra ta được các nghiệm của pt là:

<=> $\begin{matrix} x & 3 \\ y & 4 \end{matrix}$; $\begin{matrix} x & 4 \\ y & 3 \end{matrix}$; $\begin{matrix} x & 5 \\ y & 6 \end{matrix}$; $\begin{matrix} x & 6 \\ y & 5 \end{matrix}$

Ví dụ 3: Tìm nghiệm nguyên của pt: $x + y + xy = 9$

HD: biến đổi pt về dạng: $(x + 1)(y + 1) = 10$ => $(x + 1)$ Ư(10)

=> $(x + 1)$ { 1; 2; 5; 10} ta tìm được các nghiệm là:

(1, 4); (4, 1); (-3, -6); (-6, -3), (9, 0); (0,9); (-2; -11); (-11, -2)

<u>Ví dụ 4:</u> Tìm nghiệm nguyên phương trình sau: $y^2 = x(x + 1)(x + 7)(x + 8)$ (4)

Giải: (4) <=> $y^2 = (x^2 + 8x)(x^2 +8x + 7)$

Đặt $z = x^2 + 8x$; ta có $y^2 = z^2 + 7z$ <=> $4y^2 = (2z + 7)^2 – 49$

<=> $(2z – 2y + 7)(2z + 2y +7) = 49$. Chỉ có thể xảy ra trong các trường hợp sau:

a/ $\begin{matrix} 2z & 2y & 7 & 1 \\ 2z & 2y & 7 & 49 \end{matrix}$ => $\begin{matrix} y & 12 \\ z & 9 \end{matrix}$

b/ $\begin{array}{l} 2z \quad 2y \quad 7 \quad 49 \\ 2z \quad 2y \quad 7 \quad 1 \end{array}$ => $\begin{array}{l} y \quad 12 \\ z \quad 9 \end{array}$

c/ 2z – 2y + 7 = 2z + 2y +7 = 7 <=> y = z = 0

d/ 2z – 2y + 7 = 2z + 2y +7 = -7 <=> y = 0; z = -7

Trong cả 2 trường hợp đầu ta đều có z = 9 hay $x^2 + 8x = 9$, hay x = 1 hoặc x = -9

Trong trường hợp thứ 3 ta có z = 0 hay $x^2 + 8x = 0$, hay x = 0 hoặc x = -8

Trong trường hợp thứ 4 ta có z = -7 hay $x^2 + 8x = -7$, hay x = -1 hoặc x = -7

Vậy ta có các nghiệm nguyên (x, y) sau:

(1, 12); (-9, 12); (1, -12); (-9, -12); (0, 0); (0, -8); (-1, 0); (-7, 0)

<u>Ví dụ 5:</u> Tìm nghiệm nguyên của phương trình: xy = p(x + y) với p là số nguyên tố cho trước.

Giải: xy = p(x + y) <=> px + py – xy = 0 <=> x(p – y) – p(p – y) = – p^2; p là số nguyên tố. Do đó ta có: $\begin{array}{l} x \quad p \quad p^2 \\ y \quad p \quad 1 \end{array}$ (1) $\begin{array}{l} x \quad p \quad 1 \\ y \quad p \quad p^2 \end{array}$ (2) $\begin{array}{l} x \quad p \quad p^2 \\ y \quad p \quad 1 \end{array}$ (3) $\begin{array}{l} x \quad p \quad 1 \\ y \quad p \quad p^2 \end{array}$ (4)

$\begin{array}{l} x \quad p \quad p \\ y \quad p \quad p \end{array}$ (5) $\begin{array}{l} x \quad p \quad p \\ y \quad p \quad p \end{array}$ (6)

Giải ra ta được các nghiệm nguyên là: (p^2 + p; 1 + p); (1 + p; p^2 + p); (-p^2 + p; -1 + p)

(-1 + p; -p^2 + p); (2p; 2p); (0; 0)

<u>III/ SẮP THỨ TỰ CÁC ẨN</u>

Nếu các ẩn x, y, z, ... có vai trò bình đẳng, ta có thể giả sử x y z ... để tìm các nghiệm thoả mãn điều kiện này. Từ đó, dùng phép hoán vị để suy ra các nghiệm của phương trình đã cho.

<u>Ví dụ 1:</u> Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: x + y + z = xyz (1)

Giải: Do vai trò bình đẳng của x, y, z trong phương trình, trước hết ta xét x y z.

Vì x, y, z nguyên dương nên xyz 0.

Do x y z => xyz = x + y + z 3z => xy 3 => xy {1; 2; 3}

Nếu xy = 1 => x = y = 1, thay vào (1) ta có 2 + z = z; vô lí.

Nếu xy = 2, do x y nên x = 1 và y = 2, thay vào (1), suy ra z = 3

Nếu xy = 3, do x y nên x = 1 và y = 3, thay vào (1), suy ra z = 2

Vậy nghiệm nguyên dương của pt là các hoán vị của (1; 2; 3)

<u>Ví dụ 2:</u> Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $\frac{1}{x} \quad \frac{1}{y} \quad \frac{1}{z} = 2$ (2)

Giải: Do vai trò bình đẳng của x, y, z trong phương trình, trước hết ta xét x y z. Ta có:

$2 = \frac{1}{x} \quad \frac{1}{y} \quad \frac{1}{z} \quad 3.\frac{1}{x}$ => x $\frac{3}{2}$ => x = 1

Thay x = 1 vào (2) ta có: $\frac{1}{x} \quad \frac{1}{y} \quad 1 = 2$ => $1 = \frac{1}{x} \quad \frac{1}{y} \quad \frac{2}{y}$ => y 2

Suy ra y = 1 => $\frac{1}{z}$ = 0 (vô lí)

Hoặc y = 2 => $\frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ => z = 2

Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là các hoán vị của (1; 2; 2)

<u>IV/ SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC:</u>

Dùng BĐT để đánh giá một ẩn nào đó và từ sự đánh giá này suy ra các giá trị nguyên của ẩn này.

<u>Ví dụ 1:</u> Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - xy + y^2 = 3$ (1)

(1) <=> $x \quad \frac{y}{2}^{\,2} = 3 - \frac{3y^2}{4}$

Vì $x \quad \frac{y}{2}^{\,2} \quad 0 \Rightarrow 3 - \frac{3y^2}{4} \quad 0 \Rightarrow -2 \quad y \quad 2$

Lần lượt thay y = 2; y = 1; 0 vào phương trình để tính x. Ta có nghiệm nguyên của phương trình là: (-1; -2), (1; 2); (-2; -1); (2; 1), (-1; 1), (1; -1).

<u>Ví dụ 2:</u> Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình: $\frac{1}{x} \quad \frac{1}{y} \quad \frac{1}{3}$

Giải: Do vai trò bình đẳng của x và y nên giả sử: x y. Hiển nhiên ta có: $\frac{1}{y} \quad \frac{1}{3}$ nên y > 3 (1)

Mặt khác do: x y 1 nên $\frac{1}{x} \quad \frac{1}{y}$. Do đó: $\frac{1}{3} \quad \frac{1}{x} \quad \frac{1}{y} \quad \frac{1}{y} \quad \frac{1}{y} = \frac{2}{y}$

$\frac{2}{y} \quad \frac{1}{3}$ nên y 6 (2)

Ta xác định được khoảng giá trị của y là: 4 y 6

Với y = 4 ta được: $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ nên x = 12

Với y = 5 ta được: $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} \quad \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$, loại vì x không phải là số nguyên.

Với y = 6 ta được: $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ nên x = 6

Vậy các nghiệm của phương trình là: (4; 12), (12; 4), (6; 6)

Ta có thể đưa về pt tích: $\frac{y \quad x}{xy} \quad \frac{1}{3}$ <=> xy – 3x – 3y = 0 <=> (x – 3)(y – 3) = 9

<u>Bài tương tự:</u> 1/ Tìm các số nguyên dương thoả: $\frac{1}{x} \quad \frac{1}{y} \quad \frac{1}{2}$ ĐS: (6; 3), (4; 4), (3; 6)

2/ Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thoả: $\frac{1}{x} \quad \frac{1}{y} \quad \frac{1}{z}$ = 2; ĐS (1, 2, 3) và các hoán vị

<u>Ví dụ 3:</u> Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $\frac{yz}{x}\quad\frac{xz}{y}\quad\frac{xy}{z} = 3$

Giải: Điều kiện x, y, z   0. Ta có: $y^2x^2 + z^2x^2 + x^2y^2 = 3xyz$ => xyz >0. Áp dụng BĐT Cosi ta có: $y^2x^2 + z^2x^2 + x^2y^2 \quad 3\sqrt{x^4y^4z^4}$

=> 3xyz $3\sqrt{x^4y^4z^4}$ => xyz   1 => xyz = 1 (do xyz >0)

Vậy ta có các nghiệm: (1, 1, 1); (1, -1, -1); (-1, 1, -1); (-1, -1, 1);

<u>V/ ĐƯA VỀ DẠNG TỔNG:</u>

Biến đổi phương trình về dạng: vế trái là tổng các bình phương, vế phải là tổng các số chính phương hay bằng 0.

<u>Ví dụ 1:</u> Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + y^2 - x - y = 8$ (1)

Giải: (1) <=> $4x^2 + 4y^2 - 4x - 4y = 32$ <=> $(4x^2 - 4x + 1) + (4y^2 - 4y + 1) = 34$

<=> $|2x - 1|^2 + |2y - 1|^2 = 3^2 + 5^2$

Do đó phương trình thoả mãn chỉ 2 khả năng:

$|2x\quad 1|\quad 3$ $|2x\quad 1|\quad 5$

$|2y\quad 1|\quad 5$ $|2y\quad 1|\quad 3$

Giải các hệ trên => phương trình đã cho có nghiệm là: (2; 3), (3; 2), (-1; -2), (-2; -1)

<u>Ví dụ 2:</u> $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2y + 2z + 2 = 0$

HD: Ta biến đổi về dạng: $(x - y)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 0$

=> x – y = 0; y – 1 = 0; z + 1 = 0 => có nghiệm (1; 1; -1)

<u>Ví dụ 3:</u> Giải phương trình trên tập số nguyên Z: $x^2 - 6xy + 13y^2 = 100$

Giải: Ta biến đổi phương trình về dạng: $(x - 3y)^2 = 4(25 - y^2)$ (1)

Từ (1) => $25 - y^2 \quad 0$ <=> $y^2 \quad 25$ và $25 - y^2$ là một số chính phương. Vậy:

$y^2 \quad \{0, 9, 16, 25\}$ => y   {0,   3,   4,   5}. Thay vào ta tìm được các giá trị của x.

<u>VI/ LÙI VÔ HẠN:</u>

<u>Ví dụ 1:</u> Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - 5y^2 = 0$ (1)

Giải: Giả sử (x_0; y_0) là nghiệm của (1) thì:

$x_0^2 - 5y_0^2 = 0$ => $x_0 \quad 5$; Đặt $x_0 = 5x_1$; ($x_1 \quad Z$).

Ta có: $25x_1^2 - 5y_0^2 = 0$ <=> $5x_1^2 - y_0^2 = 0$ => $y_0 \quad 5$; Đặt $y_0 = 5y_1$ ($y_1 \quad Z$).

Từ đó ta có: $5x_1^2 - 25y_1^2 = 0$ <=> $x_1^2 - 5y_1^2 = 0$.

Vậy nếu (x_0; y_0) là nghiệm của (1) thì $\frac{x_0}{5};\frac{y_0}{5}$ cũng là nghiệm nguyên của (1).

Tiếp tục lập luận tương tự, ta có $\frac{x_0}{5^k};\frac{y_0}{5^k}$ với k nguyên dương bất kỳ, cũng là nghiệm nguyên của (1): hay x_0; y_0 đều chia hết cho 5^k với mọi k là số nguyên dương tuỳ ý. Điều này chỉ xảy ra khi $x_0 = y_0 = 0$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất lá x = y = 0

Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^3 = 2y^3 + 4z^3$

Giải: Từ phương trình đã cho ta suy ra x chẵn, hay $x = 2x_1$ (x_1 Z)

Thay vào ta được $4x_1^3 = y^3 + 2z^3$. Ta lại suy ra y chẵn, $y = 2y_1$ (y_1 Z).

Thay vào ta được: $2x_1^3 = 4y_1^3 + z^3$. Do đó z chẵn, $z = 2z_1$ (z_1 Z). Thay vào ta được:

$x_1^3 = 2y_1^3 + 4z_1^3$. Vậy nếu (x, y, z) là nghiệm của phương trình đã cho thì $\frac{x}{2};\frac{y}{2};\frac{z}{2}$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho. Một cách tổng quát, ta suy ra $\frac{x}{2^n};\frac{y}{2^n};\frac{z}{2^n}$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho, với mọi n N, hay x, y, z chia hết cho 2^n với mọi n,

Do đó x = y = z = 0

VII/ XÉT CHỮ SỐ TẬN CÙNG:

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $1! + 2! + ... + x! = y^2$ (1)

Giải: Cho lần lượt x bằng 1; 2; 3; 4 ta có ngay 2 nghiệm nguyên dương (x, y) của phương trình (1) là (1; 1) và (3; 3)

Nếu x > 4 thì dễ thấy k! với k > 4 đều có chữ số tận cùng bằng 0

=> $1! + 2! + ... + x! = 33 + 5! + ... + x!$ có chữ số tận cùng bằng 3.

Mặt khác vế phải là số chính phương nên không thể có chữ số tận cùng là 3. Vậy phương trình (1) chỉ có 2 nghiệm nguyên dương là (1; 1) và (3; 3)

Ví dụ 2: Tìm x, y nguyên dương thoả mãn phương trình: $x^2 + x - 1 = 3^{2y+1}$ (2)

Giải: Cho x các giá trị từ 0 đến 9, dễ dàng xác định chữ số tận cùng của $x^2 + x - 1$ chỉ nhận các giá trị 1; 5; 9. Mặt khác ta thấy 3^{2y+1} là luỹ thừa bậc lẻ của 3 nên chữ số tận cùng của nó chỉ có thể 3 hoặc 7, khác với 1; 5; 9.

Vậy (1) không thể xảy ra. Nói cách khác, phương trình không có nghiệm nguyên dương.

Lưu ý: Bài này có thể giải theo cách đưa về phương trình tích.

VIII/ SỬ DỤNG TÍNH CHẤT NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2

Biến đổi phương trình về dạng phương trình bậc 2 của ẩn, coi các ẩm khác là tham số, sử dụng các tính chất về nghiệm của phương trình bậc 2 để xác định giá trị của tham số.

Ví dụ 1: Giải phương trình nghiệm nguyên: $3x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y + 5 = 0$ (1)

Giải: (1) <=> $y^2 + (4x + 2)y + 3x^2 + 4x + 5 = 0$. Nếu phương trình có nghiệm nguyên thì y nguyên => $-4x - 2$ $\sqrt{{}'_{x}}$ nguyên, mà x nguyên nên $\sqrt{{}'_{x}}$ nguyên.

=> ${}'_{y} = x^2 - 4 = n^2$ với n Z

<=> $(x - n)(x + n) = 4$, ta xác định được x = 2

Vậy phương trình (1) có 2 nghiệm nguyên là (2; -5), (-2; 3)

Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - (y + 5)x + 5y + 2 = 0$ (2)

Giải: Giả sử phương trình ẩn x có nghiệm nguyên x_1, x_2 thì theo định lý Viet ta có:

$$\begin{matrix} x_1 \quad x_2 \quad y \quad 5 \\ x_1.x_2 \quad 5y \quad 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 5x_1 \quad 5x_2 \quad 5y \quad 25 \\ x_1.x_2 \quad 5y \quad 2 \end{matrix}$$

=> $(x_1 - 5)(x_2 - 5) = 2 = 1.2 = (-1).(-2)$

=> $x_1 + x_2 = 13$ hoặc $x_1 + x_2 = 7$ => $y = 8$ hoặc $y = 2$. Thay vào (2) phương trình này có 4 nghiệm: (7; 8), (6; 8), (4; 2), (3; 2)

Ví dụ 3: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $x + y + xy = x^2 + y^2$ (3)

Giải: Viết (3) thành phương trình bậc 2 đối với x là: $x^2 - (y + 1)x + (y - y) = 0$ (4)

Điều kiện để (4) có nghiệm là 0

$= (y + 1)^2 - 4(y^2 - y) = -3y^2 + 6y + 1 \quad 0$

=> $3y^2 - 6y - 1 \quad 0 \Leftrightarrow 3(y - 1)^2 \quad 4 \Rightarrow (y - 1)^2 \quad 1$

=> y {-1; 0; 1} thay vào ta tìm được x {0; 1; 2}. Nên ta có các nghiệm nguyên là: (0; 0), (1; 0), (0; 1), (2; 1), (1; 2), (2; 2)

BÀI TẬP:

Bài 1: Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thoả mãn đẳng thức: $y(x - 1) = x^2 + 2$

Bài 2: Tìm các chữ số a,b,c biết rằng $\sqrt{\overline{abc}} = (a+b)\sqrt{c}$.

Bài 3: Tìm các giá trị nguyên x, y thoả mãn đẳng thức: $(y + 2)x^2 + 1 = y^2$

Bài 4: Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ có tính chất: f(x) nhận giá trị nguyên khi x là số nguyên. Hỏi các hệ số a, b, c có nhất thiết là các số nguyên không? Vì sao?

Bài 5: Tìm các số nguyên không âm x, y thoả mãn đẳng thức: $x^2 = y^2 + \sqrt{y \quad 1}$

Bài 6: Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $n^2 + 2002$ là một số chính phương

Bài 7: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x + xy + y = 9$

Bài 8: Tìm tất cả các số nguyên m để phương trình: $x^2 - mx + 2002 = m$ (1) có nghiệm nguyên.

Bài 9: Tìm số n nguyên dương thoả mãn: $\sqrt{(3 \quad 2\sqrt{2})^n} + \sqrt{(3 \quad 2\sqrt{2})^n} = 6$

Bài 10: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^6 - 2x^3y + y^2 = 64$.

Bài 11: Tìm các số nguyên x, y thoả mãn đẳng thức: $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$

Bài 12: Tìm các số nguyên x, y thoả mãn đẳng thức: $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

Bài 13: Hãy tìm cặp số (x, y) sao cho y nhỏ nhất và thoả mãn: $x^2 + 5y^2 + 2y - 4xy - 3 = 0$

Bài 14: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + 17y^2 + 34xy + 51(x + y) = 1740$.

Bài 15: Tìm giá trị nguyên của x và y trong đẳng thức: $2x^3 + xy = 7$

Bài 16: Hai đội bóng bàn của hai trường A và B thi đấu giao hữu. Biết rằng mỗi đối thủ của đội A phải lần lượt gặp các đối thủ của đội B một lần và số trận đấu gấp đôi tổng số đấu thủ của hai đội. Tính số đấu thủ của mỗi đội.

Bài 17: Tìm tất cả các cặp số tự nhiên x, y sao cho: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1989}$

Bài 18: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - y^2 = 1999$

Bài 19: Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng khi tăng thêm mỗi chữ số một đơn vị thì số mới được tạo thành cũng là một số chính phương.

Bài 20: Tìm tất cả bộ ba số nguyên tố (a, b, c) sao cho: abc < ab + bc + ca

Bài 21: Tìm tất cả các số tự nhiên a, b sao cho (a, b) = 1 và $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2} \begin{matrix}\mathbf{b}\\ \mathbf{b}\end{matrix} \frac{7}{25}$

Bài 22: Có 480 học sinh dự trại hè tại 3 địa điểm: 10% số học sinh của địa điểm (I), 8,5% số học sinh của địa đuiểm (II) và 15% số học sinh của địa điểm (III) đi thăm một viện bảo tàng. Viện bảo tàng cách địa điểm (I) 60km, cách địa điểm (II) 40km và cách địa điểm (III) 30km. để trả vừa đủ tiền xe (100đ cho mỗi người đi 1km) số người đi thăm viện bảo tàng đã góp đồng đều mỗi người là 4000đ. Hỏi có bao nhiêu người ở mỗi đại điểm đã đi thăm viện bảo tàng.

Bài 23: Tìm tất cả các số nguyên tố p để tổng các ước số của p^4 là một số chính phương.

Bài 24: Chứng minh rằng nếu P(x) là một đa thức với hệ số nguyên, thêm vào đó P(0) và P(1) là các số lẻ thì đa thức P(x) không thể có nghiệm nguyên

Bài 25: a/ Hãy chỉ ra 2 số nguyên dương khác nhau x và y nào đó sao cho xy + x và xy + y đều là bình phương của 2 số nguyên dương khác nhau.

b/ Có hay không 2 số nguyên dương khác nhau x và y trong khoảng (998; 1994) sao cho xy + x và xy + y đều là bình phương của 2 số nguyên dương khác nhau.

Bài 26: a/ Tìm 4 số tự nhiên liên tiếp sao cho lập phương của một số bằng tổng lập phương ba số kia.

b/ Có thể tìm được 5 số tự nhiên liên tiếp sao cho lập phương của một số bằng tổng lập phương bốn số kia hay không? Hãy chứng tỏ điều khẳn định ấy.

Bài 26: Tìm các số nguyên x để biểu thức sau là số chính phương: $x^4 - x^2 + 2x + 2$

Bài 27: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2^x + 2^y + 2^z = 1184$ với x < y < z

BÀI GIẢI

Bài 1: Nếu x = 1 thì phương trình trở thành 0 = 3; vô lí

Nếu x   1 thì ta biến đổi: $y = \frac{x^2 \quad 2}{x \quad 1} = x + 1 + \frac{3}{x \quad 1}$

Vì x, y   Z <=> $\frac{3}{x \quad 1}$ Z <=> x – 1 là ước của 3; từ đó suy ra x – 1 =   1;   3

Giải ra ta có các nghiệm (-2; -2), (0; -2), (2; 6), (4, 6)

Bài 2: $\sqrt{\overline{abc}} = (a+b)\sqrt{c}$ <=> $\overline{abc} = (a + b)^2c$ <=> $10\overline{ab} = c[(a + b)^2 - 1]$ (1)

+ Nếu $\overline{ab}$ không chia hết cho 3 thì a + b cũng không chia hết cho 3 => $(a + b)^2 - 1$ 3, như vậy vế trái của (1) chia hết cho 3, còn vế phải của (1) khôgn chia hết cho 3, n mâu thuẫn.

Vậy $\overline{ab}$ 3 suy ra (a + b)   3 nên $[(a + b)^2 - 1]$ không chia hết cho 3, từ đó c   3 .

Do đó c   {0; 3; 6; 9}

* Nếu c = 0 thì a = b = c = 0 điều này không xảy ra vì a   0

* Nếu c = 3 thì $\overline{ab3} = (a + b)^2.3$ nên $(a + b)^2$ tận cùng bởi 1; mà 1   a + b   18

Nên (a + b)   {1; 0; 11}

_ Nếu a + b = 1 thì $\overline{ab3}$ = 3 suy ra $\overline{ab}$ = 0, không thích hợp.

_ Nếu a + b = 9 thì $\overline{ab3} = 9^2.3$ = 243 suy ra $\overline{ab}$ = 24 khi đó a + b   9 (loại)

_ Nếu a + b = 11 thì $\overline{ab3} = 11^2.3$ = 363 suy ra $\overline{ab}$ = 36 khi đó a + b   11 (loại)

* Nếu c = 6 thì $\overline{ab6} = (a + b)^2.6$, suy ra $(a + b)^2$ tận cùng bằng 1 hoặc 6

_ Nếu $(a + b)^2$ tận cùng bằng 1 thì a + b   {1; 9; 11}, thay lần lượt giá trị của a + b vào $\overline{ab6} = (a + b)^2.6$, không có các chữ số a, b thoả mãn.

_ Nếu $(a + b)^2$ tận cùng bằng 6 thì a + b   {4; 6}. Tương tự như trên cũng không có các chữ số a, b thoả mãn.

* Nếu c = 9 thì $\overline{ab9} = (a + b)^2.9$ suy ra $(a + b)^2$ tận cùng bởi 1 suy ra a + b   {1; 9; 11}.

_ Nếu a + b = 1 thì $\overline{ab9}$ = 9, không thích hợp

_ Nếu a + b = 9 thì $\overline{ab9}$ = 81.9 = 729 suy ra $\overline{ab}$ = 72 thoả mãn đề bài

_ Nếu a + b = 11 thì $\overline{ab9}$ = 121.9 = 1089, vô lí. Vậy a = 7; b = 2; c = 9

Bài 3: $(y + 2)x^2 + 1 = y^2$ <=> $(y + 2)x^2 = y^2 - 1$

+Nếu x = -2 thì 0 = 3; vô lí.

+ Nếu x   -2 thì $x^2 = \frac{y^2 \quad 1}{y \quad 2} = y - 2 + \frac{3}{y \quad 2}$

Với y   Z, để x   Z thì $\frac{3}{y \quad 2}$ Z suy ra y + 2 là ước của 3

Từ đó thay vào tìm được cặp số (x, y) là (0, -1), (0; 1)

Bài 4: Theo đề bài $f(x) = ax^2 + bx + c$ là các số nguyên với mọi x là số nguyên. Suy ra f(0) Z;

$$\mathbf{c \quad Z} \qquad\qquad \mathbf{c \quad Z}$$

f(1) Z và f(-1) Z, ta có: $\mathbf{a \quad b \quad c \quad Z}$ <=> $\mathbf{a \quad b \quad c \quad Z}$

$$\mathbf{a \quad b \quad c \quad Z} \qquad\qquad 2\mathbf{a \quad Z}$$

$$2\mathbf{a \quad Z}$$

Ta chỉ cần chứng minh: $\mathbf{a \quad b \quad c \quad Z}$ là đủ.

$$\mathbf{c \quad Z}$$

Thật vậy, với mọi x Z, ta có: $f(x) = ax^2 - ax + (a + b + c)x + c - cx$

$= ax(x - 1) + (a + b + c)x + c - cx$

Do x(x – 1) 2 với mọi x Z nên x(x – 1) = 2k (k Z) mà 2a Z nên ax(x – 1) Z

a + b + c Z và x Z nên (a + b + c)x Z

c Z, x Z nên c – cx Z với mọi x Z

Như vậy không nhất thiết các hệ số a, b, c là các số nguyên.

Bài 5: $x^2 = y^2 + \sqrt{y \quad 1}$ (1) <=> $x^2 - y^2 = \sqrt{y \quad 1}$

Do x^2 Z, y^2 Z nên $x^2 - y^2$ Z, suy ra $\sqrt{y \quad 1}$ Z, mà $\sqrt{y \quad 1}$ 0;

suy ra $\sqrt{y \quad 1} = k$ N <=> $y + 1 = k^2 \Rightarrow y^2 =$ (với k N và k 1)

Phương trình (1) <=> $x^2 = k^4 - 2k^2 + 1 = k$ (2)

Do k N* nên $k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 > k^4 - 2k + k + 1$ hay $x^2 < (k + 1)^4$

Ta có $k^4 - 2k + k + 1 - (k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 4k + 1) = 4k^3 - 8k^2 + 5k = 4k(k - 1)^2 + k > 0$, suy ra $k^4 - 2k + k + 1 >$ hay $x^2 > (k - 1)^4$

Vậy $(k - 1)^4 < x < (k + 1)^4$. Mà x^2 là một số chính phương, do đó $x^2 = k^4$. Thay vào (2) ta được: (2) <=> $2k^2 - k - 1 = 0$

Phương trình này có 2 nghiệm k = 1 và k = 1/2 (loại)

Với k = 1 thì $\begin{matrix} \sqrt{y \quad 1} & 1 \\ x^2 & 1 \end{matrix}$ <=> $\begin{matrix} y & 0 \\ x & 1 \end{matrix}$ (vì x N)

Các số phải tìm là (x; y) = (1; 0)

Bài 6: Giả sử có số chính phương thì $n^2 + 2002 = k$ (x N) <=> 2002 = (k + n)(k – n) (1)

Suy ra (k + n) và (k – n) là ước của 2002. Mà (k + n) + (k – n) = 2klà số chẵn, nên (k + n) và (k – n) cùng tính chẵn lẻ. Do 2002 là số chẵn nên (k + n) và (k – n) đều là số chẵn;

Suy ra (k + n)(k – n) 4. Khi đó từ (1) ta lại có 2002 4. Điều này vô lí.

Vậy không có số nguyên n nào để $n^2 + 2002$ là số chính phương.

Bài 7: Có thể đưa về phương trình tích (x + 1)(y + 1) = 10 hặoc biểu diễn x theo y để tìm
ĐS: (-11; -2), (-6; -3), (-3; -6), (-2; -11), (0; 9), (1; 4), (4; 1), (9; 0)

Bài 8: Giả sử x_0 Z là một nghiệm của (1). Khi đó:

(1) <=> $x_0{}^2 + 2002 = m (x_0 + 1)$ (2)

$x_0 = -1$ không là nghiệm của (2). Vậy $x_0 \quad -1$, ta có:

(2) <=> $m = \frac{x_0 \quad 2002}{x_0 \quad 1} = x_0 - 1 + \frac{2003}{x_0 \quad 1}$, suy ra $(x_0 + 1)$ là ước của 2003. Từ đó ta tìm được giá trị nguyên của m là -2006 và 2002.

Bài 9: Do $3 + 2\sqrt{2} > 0$, $3 - 2\sqrt{2} > 0$ nên các căn bậc 2 có nghĩa. Và $\sqrt{(3 \quad 2\sqrt{2})}.\sqrt{(3 \quad 2\sqrt{2})} = 1$

Đặt $\sqrt{(3 \quad 2\sqrt{2})^n} = a$ $(a > 0)$ thì $\sqrt{(3 \quad 2\sqrt{2})^n} = 1/a$. phương trình đã cho tương đương với:

$a + 1/a = 6$ <=> $a^2 - 6a + 1 = 0$ có nghiệm $a_1 = 3 - 2\sqrt{2}$; $a_2 = 3 + 2\sqrt{2}$

+ Nếu $a_1 = 3 - 2\sqrt{2}$ => $\sqrt{(3 \quad 2\sqrt{2})^n} = 3 - 2\sqrt{2} = \frac{1}{3 \quad 2\sqrt{2}} = (3 + 2\sqrt{2})^{-1} = \sqrt{(3 \quad 2\sqrt{2})^{\;2}}$

=> n = 2 (loại)

+ Nếu: $a_2 = 3 + 2\sqrt{2}$ => $\sqrt{(3 \quad 2\sqrt{2})^n} = 3 + 2\sqrt{2} = \sqrt{(3 \quad 2\sqrt{2})^2}$ => n = 2

Vậy n = 2

Bài 10: Đặt $x^3 = t$; (t Z), ta có:

$2t^2 - 2tx + y^2 = 64$ <=> $4t^2 - 4tx + 2y^2 = 128$ <=> $(2t - y)^2 + y^2 = 128$ (*)

Các số chính phương chỉ có thể tận cùng bởi: 0; 1; 4; 5; 6; 9. Theo (*) tổng 2 số cính phương có tận cùng bởi 8, nên 2 số đó có cùng tận cùng bằng 4. Mặt khác tổng 2 số chính phương này bằng 128 nên 2 số này bằng nhau và bằng 64, nên:

$\begin{matrix} (2t \quad y)^2 \quad 64 \\ y^2 \quad 64 \end{matrix}$ <=> $\begin{matrix} (2t \quad y)^2 \quad 64 \\ y \quad 8 \end{matrix}$

+ Với y =8 thì $(2t - 8)^2 = 64$ <=> $\begin{matrix} 2t \quad 8 \quad 8 \\ 2t \quad 8 \quad 8 \end{matrix}$ <=> $\begin{matrix} t \quad 8 \\ t \quad 0 \end{matrix}$ <=> $\begin{matrix} x \quad 2 \\ x \quad 0 \end{matrix}$

Với y = -8 thì $(2t + 8)^2 = 64$ <=> $\begin{matrix} 2t \quad 8 \quad 8 \\ 2t \quad 8 \quad 8 \end{matrix}$ <=> $\begin{matrix} t \quad 0 \\ t \quad 8 \end{matrix}$ <=> $\begin{matrix} x \quad 0 \\ x \quad 2 \end{matrix}$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm: (2; 8), (0; 8), (0; -8), (-2; -8).

Bài 11: $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$ (1)

$x^2 + 2y^2 + xy - 2y^2x - x - y = 1$ <=> $(x - 1)(-2y^2 + y + x) = 1$ (2)

Do x, y là các số nguyên nên vế trái của (2) là tích của 2 số nguyên. Mà 1 = 1.1 = (-1).(-1). Xét 2 trường hợp: a) $\begin{matrix} x \quad 1 \quad 1 \\ 2y^2 \quad y \quad x \quad 1 \end{matrix}$ và b) $\begin{matrix} x \quad 1 \quad 1 \\ 2y^2 \quad y \quad x \quad 1 \end{matrix}$ ta tìm được 2 nghiệm của phương trình đã cho: (x; y) = (2; 1), (0; 1)

Bài 12: Đặt a = x + y, b = xy (a, b Z). Phương trình đã cho có dạng:

$a^2 - b = b^2$ <=> $b^2 + b - a^2 = 0$ (1)

$\quad = 1 + 4a^2$

Để phương trình (1) có nghiệm nguyên thì là số chính phương, suy ra:

$4a^2 + 1 = k^2$ (k N) <=> (k – 2a)(k + 2a) = 1. Ta có bảng sau:

k – 2a	1	-1

k + 2a	1	-1
a	0	0

Thay a = 0 vào (1) ta có: $b^2 + b = 0$ <=> $b(b + 1) = 0$ <=> b = 0 hay b = 1

+ Với a = 0; b = 0 <=> x + y = 0 và xy = 0 <=> x = 0 và y = 0

+ Với a = 0; b = -1 <=> x + y = 0 và xy = -1 <=> x = 1; y = -1 hay x = -1, y = 1

Vậy phương trình có 3 nghiệm là: (0; 0), (1; -1), (-1; 1)

Bài 13: $x^2 + 5y^2 + 2y - 4xy - 3 = 0$ (1)

<=> $x^2 - 4xy + 5y^2 + 2y - 3 = 0$ (2)

Vì (x, y) thoả mãn (1) nên phương trình (2) ẩn x phải có nghiệm.

<=> $\quad = 4y^2 - 5y^2 - 2y + 3 \quad 0$ <=> $y^2 + 2y - 3 \quad 0$ <=> $-3 \quad y \quad 1$

Với y = -3 thì (1) <=> $x^2 + 12x + 36 = 0$, phương trình có nghiệm x = -6. Vậy y nhỏ nhất bằng -3 ứng với cặp số (x, y) = (-6; -3)

Bài 14: Phương trình đã cho trở thành: $17(x + y)^2 + 17.3(x + y) - 17x^2 - 1734 = 6 - x^2$

Suy ra $(x^2 - 6) \quad 17$ (*)

Đặt x = 17 k + r (k Z, r Z; 0 r 16) Suy ra $x^2 = r^2$(mod17); không có r nào thoả mãn (*). Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Bài 15: $2x^3 + xy = 7$ (x, y Z) <=> $x(2x^2 + y) = 7$; Mà 7 = (–1). (–7) = 1.7

Ta có các trường hợp sau: $\begin{matrix} x & 1 \\ 2x^2 & y & 7 \end{matrix}$; $\begin{matrix} x & 7 \\ 2x^2 & y & 1 \end{matrix}$; $\begin{matrix} x & 1 \\ 2x^2 & y & 7 \end{matrix}$; $\begin{matrix} x & 7 \\ 2x^2 & y & 1 \end{matrix}$;

<=> $\begin{matrix} x & 1 \\ y & 9 \end{matrix}$; $\begin{matrix} x & 7 \\ y & 99 \end{matrix}$; $\begin{matrix} x & 1 \\ y & 5 \end{matrix}$; $\begin{matrix} x & 7 \\ y & 97 \end{matrix}$

Lưu ý: Bài này có thể giải theo cách biểu thị y theo x sau đó tìm giá trị của x => giá trị của y

Bài 16: Gọi a, b là số đấi thủ của mỗi đội, với a, b N*. Theo đề bài ta có:

ab = 2(a + b) <=> (a – 2)(b – 2) = 4

Do a, b N* nên (a – 2) Z; (b – 2) Z.Vì vai trò của a, b bình đẳng nên không mất tính tổng quát, giả sử a b => (a – 2) (b – 2). Ta có:

a – 2	-1	-2	2	4
b – 2	-4	-2	2	1
a	1	0	4	6
b	-2	0	4	3
	loại	loại		

Vậy (a, b) = (4; 4), (6; 3), (3; 6)

Trả lời: Số đấu thủ của mỗi đội có th6ẻ là: (4; 4), (6; 3) hoặc (3; 6)

Bài 17: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1989}$ <=> $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3\sqrt{221}$

$3\sqrt{221}$ là số vô tỉ, suy ra $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ là các căn thức đồng dạng chứa $\sqrt{221}$. Đặt $x = a\sqrt{221}$ và $y = b\sqrt{221}$ với a, b   N. Ta có: a + b = 3. Do đó:

$\begin{matrix} a & 1 \\ b & 2 \end{matrix}$; $\begin{matrix} a & 2 \\ b & 1 \end{matrix}$; $\begin{matrix} a & 0 \\ b & 3 \end{matrix}$; $\begin{matrix} a & 3 \\ b & 0 \end{matrix}$; . Từ đó các cặp số tự nhiên x, y cần tìm là:

(221, 884); (884; 221); (0; 1989); (1989; 0)

Bài 18: $x^2 - y^2 = 1999$ <=> $(x + y)(x - y) = 1999$

Vì 1999 là một số nguyên tố nên chỉ có các ước số là: 1;   1999

Suy ra: $\begin{matrix} x & y & 1 \\ x & y & 1999 \end{matrix}$ hay $\begin{matrix} x & y & 1 \\ x & y & 1999 \end{matrix}$ hay $\begin{matrix} x & y & 1999 \\ x & y & 1 \end{matrix}$ hay $\begin{matrix} x & y & 1999 \\ x & y & 1 \end{matrix}$. Giải mỗi hệ ta được nghiệm nguyên của phương trình là: (1000; -999), (-1000; 999), (1000; 999), (-1000; -999)

Bài 19: Gọi số cần tìm là: $x^2 = \overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$; với x   N   (1)

Thì số chính phương mới lập thành từ giả thiết là:

$y^2 = \overline{(a \;\; 1)(b \;\; 1)(c \;\; 1)(d \;\; 1)} = 1000(a + 1) + 100(b + 1) + 10(c + 1) + d + 1$

(2)

Với y N^* và a, b, c, d   N thoả: 1   a   8; 0   b, c, d   8

Trừ (2) cho (1) ya được: $y^2 - x^2 = 1000 + 100 + 10 + 1 = 1111$

<=> $(y + x)(y - x) = 101.\ 11$ (3)

Mà y + x > y – x > 0 và 101; 11 là 2 số nguyên tố, nên từ (3) ta có:

$\begin{matrix} y & x & 101 \\ y & x & 11 \end{matrix}$ <=> $\begin{matrix} x & 45 \\ y & 56 \end{matrix}$

Vậy số chính phương cần tìm là $x^2 = 45^2 = 2025$

Bài 20: Vai trò a, b, c bình đẳng, không mất tính tổng quát, giả sử a   b   c   2

Từ ab + bc + ca > abc <=> $\frac{1}{c} \;\; \frac{1}{a} \;\; \frac{1}{b} > 1$

Ta có $\frac{3}{c} > 1$ => c = 2 (Vì c nguyên tố)

Do đó $\frac{1}{2} < \frac{1}{a} \;\; \frac{1}{b} \quad \frac{2}{b}$ => b< 4; mà b nguyên tố nên b = 2 hoặc b = 3

+ Với b = 2 thì $\frac{1}{2} < \frac{1}{a} \;\; \frac{1}{2}$ <=> $\frac{1}{a} > 0$ <=> a tuỳ ý, a nguyên tố

+ Với b = 3 thì $\frac{1}{2} < \frac{1}{a} \;\; \frac{1}{3}$ <=> $\frac{1}{6} < \frac{1}{a}$; suy ra a = 3 hoặc a = 5

Tóm lại: các bộ ba số nguyên tố (a, b, c) cần tìm là (2; 2; x), (3; 3; 2), (5; 3; 2) (x là số nguyên tố bất kỳ) và các hoán vị của chúng.

Bài 21: Gọi d = ƯCLN$(a + b; a^2 + b^2)$, d   N => d\ a + b và d\ $a^2 + b^2$

=> d\ $(a + b)(a - b) + (a^2 + b^2)$ và d\$(a^2 + b^2) - (a + b)(a - b)$ => d\ $2a^2$ và d\ $2b^2$

=> d\ $(2a^2, 2b^2)$ mà (a, b) = 1 => $(a^2, b^2) = 1$

Do đó d\ 2 => d = 1 hoặc d = 2

+ Nếu d = 1; Ta có: $\begin{array}{l} \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad 7 \\ \mathbf{a}^2 \quad \mathbf{b}^2 \quad 25 \end{array}$ Giải ra ta được: $\begin{array}{l} \mathbf{a} \quad 4 \\ \mathbf{b} \quad 3 \end{array}$; $\begin{array}{l} \mathbf{a} \quad 3 \\ \mathbf{b} \quad 4 \end{array}$

+ Nếu d = 2; ta có: $\begin{array}{l} \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad 14 \\ \mathbf{a}^2 \quad \mathbf{b}^2 \quad 50 \end{array}$ <=> $\begin{array}{l} \mathbf{a} \quad 14 \quad \mathbf{b} \\ (14 \quad \mathbf{b})^2 \quad \mathbf{b}^2 \quad 50 \end{array}$ <=> $\begin{array}{l} \mathbf{a} \quad 14 \quad \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^2 \quad 14\mathbf{b} \quad 73 \quad 50 \end{array}$

<=> $\begin{array}{l} \mathbf{a} \quad 14 \quad \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \end{array}$ (Vì ' = -24 < 0); Không tồn tại a, b

Tóm lại: $\begin{array}{l} \mathbf{a} \quad 4 \\ \mathbf{b} \quad 3 \end{array}$ hoặc $\begin{array}{l} \mathbf{a} \quad 3 \\ \mathbf{b} \quad 4 \end{array}$

Bài 22: Gọi x, y, z (người) lần lượt là số người của các đại điểm (I), (II), (III) đi thăm việc bảo tàng (x, y, z nguyên dương)

Tổng số tiền xe: 100(60x + 40y + 30z) =4000(x + y + z) => 2x = z

Tổng số học sinh dự trại: $10x + \frac{200}{17}y + \frac{20}{3}z = 480$

=> x < 48 và $y = 40 - 2x + \frac{48 \quad \mathbf{x}}{60}$

Do đó 48 + x 60 mà 48 + x < 96; Nên 48 + x = 60 <=> x = 12

Vậy $z = 2x = 24$ và $y = 40 - 2.12 + \frac{48 \quad 12}{60} = 17$

Số người của các địa điểm (I), (II), (III) đi thăm viện bảo tàng là 12 học sinh, 17 học sinh, 24 học sinh.

Bài 23: Theo đầu bài ta có: $n^2 = 1 + p + p^2 + p^3 + p^4$ (n nguyên dương, p nguyên tố)

<=> $4n^2 = 4 + 4p + 4p^2 + 4p^3 + 4p^4 = (2p^2 + p)^2 + 3p^2 + 4p + 4 = (2p^2 + p + 1)^2 + 3 + 2p - p^2$

Vì $3p^2 + 4p + 4 = 2p^2 + (p + 2)^2 > 0$ nên $4n^2 > (2p^2 + p)^2$

Nếu $3 + 2p - p^2 < 0$ thì $4n^2 < (2p^2 + p + 1)^2$

Vậy $(2p^2 + p)^2 < (2n)^2 < (2p^2 + p + 1)^2$ => 2n không là số nguyên (loại)

Do đó: $3 + 2p - p^2 \quad 0$ => $(p - 1)^2 \quad 4$ => $-2 \quad p - 1 \quad 2$ => $-1 \quad p \quad 3$

Vì p là số nguyên tố nên p = 2 hoặc p = 3

Thử lại chỉ có p = 3 thoả mãn . Vậy p = 3

Bài 24: Giả sử đa thức P(x) có nghiệm số nguyên là a, ta có P(x) x – a.

Do đó P(x)= (x – a).g(x) (g(x) là đa thức có hệ số nguyên)

Ta có: P(0) = -a.g(0) là số lẻ => a là số lẻ

Mặt khác P(1) = (1 – a)g(1) là số lẻ => 1 – a là số lẻ => a chẵn (Mâu thuẫn)

Vậy P(x) có nghiệm số nguyên là sai. Do đó đa thức P(x) không thể có nghiệm nguyên

Bài 25: a/ Với x = 1; y = 8 thì $xy + x = 9 = 3^2$ và $xy + y = 16 = 4^2$

b/ Giả sửcó 2 số nguyên dương khác nhau trong khoảng (998; 1994) sao cho xy + x và xy + y đều là bình phương của 2 số nguyên dương khác nhau.

Đặt $xy + x = a^2$ và $xy + y = b^2$ (a, b nguyên dương, a b)

Giả sử 998 < x < y < 1994 nên b > a. Suy ra $xy > x^2 \Rightarrow a^2 > x^2 \Rightarrow a > x$

Ta có $y - x = (xy + y) - (xy + x) = b^2 - a^2 > 0 \Rightarrow b^2 > a^2 \Rightarrow b^2 \quad (a + 1)^2$

$b^2 - a^2 \quad (a + 1)^2 - a^2 = 2a + 1$

Do đó $y - x \quad 2a + 1 > 2x + 1 \Rightarrow y > 3x + 1 > 3.998 + 1 = 2965$.

Vô lí vì theo giả thiết y < 1994

Vậy không tồn taài số nguyên dương khác nhau x và y trong khoảng (998; 1994) sao cho xy + x và xy + y đều là bình phương của 2 số nguyên dương khác nhau.

Bài 26: a/ Gọi 4 số tự nhiên liên tiếp là: x, x + 1, x + 2, x + 3. Ta có:

$x^3 + (x + 1)^3 + (x + 2)^3 = (x + 3)^3 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^3 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + 3x + 3) = 0$

$\begin{matrix} \mathbf{x} \quad 3 \quad 0 \\ \mathbf{x}^2 \quad 3\mathbf{x} \quad 3 \quad 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \mathbf{x} \quad 3 \\ \mathbf{x} \end{matrix}$

Do đó 4 số tự nhiên liên tiếp là: 3; 4; 5; 6

b/ Giả sử tìm được 5 số tự nhiên liên tiếp là: x, x + 1, x + 2, x + 3, x + 4

mà: $x^3 + (x + 1)^3 + (x + 2)^3 + (x + 3)^3 = (x + 4)^3 \Leftrightarrow 3x^3 + 6x^2 - 6x - 28 = 0$

Điều này vô lý vì $3x^3 \quad 3$; $6x^2 \quad 3$; $6x \quad 3$; nhưng 28 không chia hết cho 3

Vậy không tìm được 5 số tự nhiên liên tiếp sao cho lập phương của số này bằng tổng lập phương của 4 số kia.

Bài 27: $x^4 - x^2 + 2x + 2 = (x^4 - 2x^2 + 1) + (x^2 + 2x + 1) = (x^2 - 1)^2 + (x + 1)^2 =$

$= (x + 1)^2(x - 1)^2 + (x + 1)^2 = (x + 1)^2[(x - 1)^2 + 1]$ là số chính phương thì $(x + 1)^2 = 0$ và $(x - 1)^2 + 1$ tuỳ ý hoặc $(x + 1)^2 \quad 0$ và $(x - 1)^2 + 1$ là số chính phương

+ Nếu $(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

+ Nếu $(x + 1)^2 \quad 0$

Ta có $(x - 1)^2 + 1$ là số chính phương, nên đặt $(x - 1)^2 + 1 = y^2$ (y N)

Nên $y^2 - (x - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow (y + |x - 1|)(y - |x - 1|) = 1$

Vì y N, $|x - 1|$ N nên chỉ xảy ra: $y + |x - 1| = 1$; $y - |x - 1| = 1$

Vậy $|x - 1| = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Thử lại thấy x = 1, x = -1 thì $x^4 - x^2 + 2x + 2$ là số chính phương.

Bài 28: $2^x + 2^y + 2^z = 1184 \Leftrightarrow 2^x(1 + 2^{y-x} + 2^{z-x}) = 2^5.37$

$1 + 2^{y-x} + 2^{z-x}$ là số lẻ lớn hơn 1; 2^x là luỹ thừa của 2

Ta có: $\begin{matrix} 2^x \quad 2^5 \\ 1 \quad 2^{y\ x} \quad 2^{z\ x} \quad 37 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \mathbf{x} \quad 5 \\ 2^{y\ 5} \quad 2^{z\ 5} \quad 36 \end{matrix}$

$2^{y-5} + 2^{z-5} = 36 \Leftrightarrow y^{y-5}(1 + 2^{z-5-y+5}) = 2^2.3^2$

Lập luận tương tự như trên có: $\begin{matrix} \mathbf{y} \quad 5 \quad 2 \\ 2^{z\ y} \quad 3^2 \quad 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \mathbf{y} \quad 7 \\ 2^{z\ y} \quad 2^3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \mathbf{y} \quad 7 \\ \mathbf{z} \quad 10 \end{matrix}$

Vậy (x = 5; y = 7; z = 10) là nghiệm của phương trình.