CHƯƠNG I
HOÁN VỊ – CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

I. Quy tắc đếm, cộng và nhân
1. Quy tắc đếm
Trong nhiều trường hợp ta cần phải đếm số phần tử, số tập hợp, số các số hạng của tổng, … và không phải lúc nào cũng thực hiện dễ dàng. Ta xét một quy tắc rút ra từ bài toán đơn giản sau đây.

Bài toán

Người ta cần làm một hàng rào dài 20m, cứ cách 2m thì chôn 1 cọc. Tính số cọc cần dùng.

Giải

Số khoảng cách giữa các cọc là 20: 2 = 10.
Kể từ cọc thứ 2 trở đi thì số cọc bằng số khoảng cách.

Vậy số cọc là $\frac{20}{2}+1=11$.

1.1. Quy tắc

Với điều kiện là khoảng cách giữa các số bằng nhau (cách đều), ta có:

$$\text{số các số} = \frac{\text{số lớn nhất} - \text{số nhỏ nhất}}{\text{khoảng cách giữa 2 số liền kề}} + 1.$$

Ví dụ 1. Tính số các số tự nhiên có 3 chữ số chia hết cho 4.

Giải

Số có 3 chữ số lớn nhất chia hết cho 4 là 996.
Số có 3 chữ số nhỏ nhất chia hết cho 4 là 100.
Khoảng cách giữa 2 số liền kề chia hết cho 4 là 4.

Vậy có $\frac{996-100}{4}+1=225$ số.

Ví dụ 2. Tìm số hạng thứ 7 trong tổng sau:

$$(a+x)+(a+x)^4+(a+x)^7+...+(a+x)^{28}.$$

Giải

Khoảng cách giữa số mũ của 2 số hạng kề nhau là 3.
Gọi số mũ của số hạng thứ 7 là k, ta có

$$\frac{k-1}{3}+1=7 \Rightarrow k=19.$$

Vậy số hạng cần tìm là $(a+x)^{19}$.

1.2. Các dấu hiệu chia hết

+ Chia hết cho 2: số có chữ số tận cùng là 0, 2, 4, 6, 8.
+ Chia hết cho 3: số có tổng các chữ số chia hết cho 3 (ví dụ 2001).
+ Chia hết cho 4: số có 2 chữ số tận cùng lập thành số chia hết cho 4 (ví dụ 2000, 3796, 12344).
+ Chia hết cho 5: số có chữ số tận cùng là 0, 5.
+ Chia hết cho 6: số chia hết cho 2 và 3.
+ Chia hết cho 8: số có 3 chữ số tận cùng lập thành số chia hết cho 8 (ví dụ 2000, 2008, 3257016).
+ Chia hết cho 9: số có tổng các chữ số chia hết cho 9 (ví dụ 2007).
+ Chia hết cho 10: số có chữ số tận cùng là 0.
+ Chia hết cho 11: số có hiệu của tổng các chữ số ở hàng lẻ và tổng các chữ số ở hàng chẵn chia hết cho 11 (ví dụ 1345729 vì (1 + 4 + 7 + 9) – (3 + 5 + 2) = 11).
+ Chia hết cho 25: số có 2 chữ số tận cùng là 00, 25, 50, 75.

2. Quy tắc cộng

i) Nếu một quá trình (bài toán) có thể thực hiện được một trong hai cách (trường hợp) loại trừ lẫn nhau: cách thứ nhất cho m kết quả và cách thứ hai cho n kết quả. Khi đó việc thực hiện quá trình trên cho m + n kết quả.

ii) Nếu một quá trình (bài toán) có thể thực hiện được k cách (trường hợp) loại trừ lẫn nhau: cách thứ nhất cho m_1 kết quả, cách thứ hai cho m_2 kết quả, …, cách thứ k cho m_k kết quả. Khi đó việc thực hiện quá trình trên cho $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ kết quả.

Ví dụ 3. Có 2 cuốn sách toán A và B khác nhau, 2 cuốn sách vật lý C và D khác nhau. Cần chọn đúng 2 cuốn sách, hỏi có bao nhiêu cách.

Giải

+ Trường hợp 1: chọn 2 cuốn sách toán có 1 cách.
+ Trường hợp 2: chọn 2 cuốn sách vật lý có 1 cách.
+ Trường hợp 3: chọn 1 cuốn sách toán và 1 cuốn vật lý có 4 cách là A và C, A và D, B và C, B và D.

Vậy có 1 + 1 + 4 = 6 cách chọn.

Ví dụ 4. Từ tập hợp $X = \{a;\ b;\ c\}$ chọn ra 1 tập hợp con của A. Hỏi có mấy cách.

Giải

+ Trường hợp 1: chọn tập hợp không chứa phần tử nào cả có 1 cách là tập rỗng.
+ Trường hợp 2: chọn tập hợp chứa 1 phần tử của A có 3 cách, đó là $\{a\}$, $\{b\}$ và $\{c\}$.
+ Trường hợp 3: chọn tập hợp chứa 2 phần tử của A có 3 cách, đó là $\{a;\ b\}$, $\{a;\ c\}$ và $\{b;\ c\}$.
+ Trường hợp 4: chọn tập hợp chứa 3 phần tử của A có 1 cách, đó là $\{a;\ b;\ c\}$.

Vậy có 1 + 3 + 3 + 1 = 8 cách chọn.

2. Quy tắc nhân

i) Nếu một quá trình (bài toán) được thực hiện theo hai giai đoạn (bước) liên tiếp nhau sao cho có m cách thực hiện giai đoạn thứ nhất, đồng thời ứng với mỗi cách đó có n cách để thực hiện giai đoạn thứ hai. Khi đó có mn cách thực hiện quá trình trên.

ii) Nếu một quá trình (bài toán) được thực hiện theo k giai đoạn (bước) liên tiếp nhau sao cho có m_1 cách thực hiện giai đoạn thứ nhất, với mỗi cách đó có m_2 cách để thực hiện giai đoạn thứ hai, …, có m_k cách thực hiện giai đoạn thứ k. Khi đó, toàn bộ quá trình có $m_1.m_2\ldots m_k$ cách thực hiện.

Ví dụ 5. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 lập được mấy số tự nhiên có 3 chữ số phân biệt.

Giải

+ Bước 1: chọn chữ số hàng trăm có 7 cách (trừ chữ số 0).
+ Bước 2: chọn chữ số hàng chục có 7 cách (trừ chữ số đã chọn ở hàng trăm).
+ Bước 3: chọn chữ số đơn vị có 6 cách (trừ 2 chữ số đã chọn).

Vậy có 7.7.6 = 294 số.

Ví dụ 6. Số 12000 có bao nhiêu ước số tự nhiên.

Giải

Ta có $12000 = 2^2.3.10^3 = 2^5.3.5^3$.

Suy ra ước số của 12000 có dạng $2^m.3^n.5^k$ với

$$m \in \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\},\ n \in \{0;\ 1\} \text{ và } k \in \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}.$$

+ Bước 1: chọn m có 6 cách.
+ Bước 2: với mỗi cách chọn m có 2 cách chọn n.
+ Bước 3: với mỗi cách chọn m và n có 4 cách chọn k.

Vậy có 6.2.4 = 48 ước số.

Ví dụ 7. Từ các phần tử của $X = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 3 chữ số khác nhau.

Giải

Gọi $A = \overline{a_1a_2a_3}$ với $a_1 \neq 0$ và $a_1,\ a_2,\ a_3 \in X$ là số cần lập.

+ Trường hợp 1: $A = \overline{a_1a_20}$ $(a_3 = 0)$.

- Bước 1: chọn a_1 có 5 cách, đó là $a_1 = 1$ (hoặc 2, 3, 4, 5).
- Bước 2: chọn a_2 có 4 cách (trừ chữ số 0 và chữ số a_1 đã chọn).

Suy ra có 5.4 = 20 số $A = \overline{a_1a_20}$.

+ Trường hợp 2: $A = \overline{a_1a_2a_3}$ $(a_3 \neq 0)$.

- Bước 1: chọn a_3 có 2 cách, đó là $a_3 = 2$ (hoặc $a_3 = 4$).
- Bước 2: chọn a_1 có 4 cách (trừ chữ số 0 và chữ số a_3 đã chọn).
- Bước 3: chọn a_2 có 4 cách từ 4 chữ số còn lại.

Suy ra có 2.4.4 = 32 số $A = \overline{a_1a_2a_3}$ $(a_3 \neq 0)$.

Vậy có 20 + 32 = 52 số.

Ví dụ 8. Từ các phần tử của $X = \{0;\ 2;\ 3;\ 6;\ 9\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số khác nhau.

Giải

Gọi $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ với $a_1 \neq 0$ và $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5 \in X$ là số cần lập.

+ Trường hợp 1: a_1 lẻ.

- Bước 1: do $a_1 \in \{3;\ 9\}$ nên a_1 có 2 cách chọn.
- Bước 2: do $a_5 \in \{0;\ 2;\ 6\}$ nên a_5 có 3 cách chọn.
- Bước 3: do $a_2 \in X \setminus \{a_1;\ a_5\}$ nên a_2 có 3 cách chọn.
- Bước 4: do $a_3 \in X \setminus \{a_1;\ a_2;\ a_5\}$ nên a_3 có 2 cách chọn.
- Bước 5: do $a_4 \in X \setminus \{a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_5\}$ nên a_4 có 1 cách chọn.

Suy ra có 2.3.3.2.1 = 36 số được lập.

+ Trường hợp 2: a_1 chẵn.

- Bước 1: do $a_1 \in \{2;\ 6\}$ nên a_1 có 2 cách chọn.
- Bước 2: do $a_5 \in \{0;\ 2;\ 6\} \setminus \{a_1\}$ nên a_5 có 2 cách chọn.
- Bước 3: do $a_2 \in X \setminus \{a_1;\ a_5\}$ nên a_2 có 3 cách chọn.
- Bước 4: do $a_3 \in X \setminus \{a_1;\ a_2;\ a_5\}$ nên a_3 có 2 cách chọn.
- Bước 5: do $a_4 \in X \setminus \{a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_5\}$ nên a_4 có 1 cách chọn.

Suy ra có 2.2.3.2.1 = 24 số được lập.

Vậy có 36 + 24 = 60 số.

Ví dụ 9. Từ các chữ số 1, 2, 3 có thể lập được bao nhiêu số gồm 2 chữ số.

Giải

Gọi $A = \overline{a_1a_2}$ với $a_1,\ a_2$ không phân biệt là số cần lập.

+ Bước 1: chọn 1 chữ số để xếp vào a_1 có 3 cách.

+ Bước 2: chọn 1 chữ số để xếp vào a_2 có 3 cách (do các chữ số không phân biệt).

Vậy có 3.3 = 9 số.

Ví dụ 10. Cần sắp xếp 3 người A, B, C lên 2 toa tàu (mỗi toa có thể chứa được 3 người). Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp.

Giải

+ Bước 1: người A có 2 sự lựa chọn toa tàu.

+ Bước 2: với mỗi cách chọn của A thì người B có 2 sự lựa chọn toa tàu.
+ Bước 3: với mỗi cách chọn của A và B thì người C có 2 sự lựa chọn toa tàu.

Vậy có 2.2.2 = 8 cách sắp xếp.

Cách giải sai:
Toa tàu thứ nhất có 3 cách chọn người, toa thứ hai có 3 cách chọn người. Do đó có 3.3 = 9 cách. Sai ở chỗ là toa thứ nhất có nhiều cách chọn (không chọn ai cả hoặc chọn 1 người, 2 người, cả 3 người) đồng thời khi chọn người A thì toa thứ hai không thể chọn người A được nữa! Cụ thể các trường hợp đó là

Toa	Các trường hợp							
	1	2	3	4	5	6	7	8
I	ABC		AB	AC	BC	C	B	A
II		ABC	C	B	A	AB	AC	BC

<u>Nhận xét:</u>
Chỉ dùng các quy tắc đếm, cộng và nhân thì ưu điểm là ít sai sót nhưng nhược điểm là lời giải dài dòng.

II. Hoán vị – Chỉnh hợp – Tổ hợp

1. Hoán vị

Định nghĩa
Cho tập hợp X gồm n phần tử phân biệt $(n \geq 0)$. Mỗi cách sắp xếp n phần tử của X theo một thứ tự nào đó được gọi là một hoán vị của n phần tử. Số các hoán vị của n phần tử được ký hiệu là P_n.

$P_n = n! = 1.2...n$. Quy ước: 0! = 1.

Ví dụ 11. Sắp xếp 5 người vào một băng ghế có 5 chỗ. Hỏi có bao nhiêu cách.

<u>Giải</u>

Mỗi cách đổi chỗ 1 trong 5 người trên băng ghế là 1 hoán vị.

Vậy có P_5 = 5! = 120 cách sắp.

Ví dụ 12. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể lập được mấy số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau.

<u>Giải</u>

Gọi $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ với $a_1 \neq 0$ và $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ phân biệt là số cần lập.
+ Bước 1: chữ số $a_1 \neq 0$ nên có 4 cách chọn a_1.
+ Bước 2: sắp 4 chữ số còn lại vào 4 vị trí có 4! = 24 cách.

Vậy có 4.24 = 96 số.

2. Chỉnh hợp

Định nghĩa
Cho tập hợp X gồm n phần tử phân biệt $(n \geq 0)$. Mỗi cách chọn ra k $(0 \leq k \leq n)$ phần tử của X và sắp xếp theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử. Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử được ký hiệu là A_n^k.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Nhận xét:

$$A_n^n = n! = P_n.$$

Ví dụ 13. Sắp xếp 5 người vào một băng ghế có 7 chỗ. Hỏi có bao nhiêu cách.

<u>**Giải**</u>

Mỗi cách chọn ra 5 chỗ ngồi từ băng ghế để sắp 5 người vào và có hoán vị là một chỉnh hợp chập 5 của 7.

$$\text{Vậy có } A_7^5 = \frac{7!}{(7-5)!} = 2520 \text{ cách sắp.}$$

Ví dụ 14. Từ tập hợp $X = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$ có thể lập được mấy số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau.

<u>**Giải**</u>

Gọi $A = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ với $a_1 \neq 0$ và $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ phân biệt là số cần lập.

+ Bước 1: chữ số $a_1 \neq 0$ nên có 5 cách chọn a_1.

+ Bước 2: chọn 3 trong 5 chữ số còn lại để sắp vào 3 vị trí A_5^3 cách.

$$\text{Vậy có } 5A_5^3 = 300 \text{ số.}$$

3. Tổ hợp

Định nghĩa

Cho tập hợp X gồm n phần tử phân biệt $(n \geq 0)$. Mỗi cách chọn ra k $(0 \leq k \leq n)$ phần tử của X được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử. Số các tổ hợp chập k của n phần tử được ký hiệu là C_n^k.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ví dụ 15. Có 10 cuốn sách toán khác nhau. Chọn ra 4 cuốn, hỏi có bao nhiêu cách.

<u>**Giải**</u>

Mỗi cách chọn ra 4 trong 10 cuốn sách là một tổ hợp chập 4 của 10.

$$\text{Vậy có } C_{10}^4 = 210 \text{ cách chọn.}$$

Ví dụ 16. Một nhóm có 5 nam và 3 nữ. Chọn ra 3 người sao cho trong đó có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách.

<u>**Giải**</u>

+ Trường hợp 1: chọn 1 nữ và 2 nam.

- Bước 1: chọn ra 1 trong 3 nữ có 3 cách.
- Bước 2: chọn ra 2 trong 5 nam có C_5^2.

$$\text{Suy ra có } 3C_5^2 \text{ cách chọn.}$$

+ Trường hợp 2: chọn 2 nữ và 1 nam.

- Bước 1: chọn ra 2 trong 3 nữ có C_3^2 cách.
- Bước 2: chọn ra 1 trong 5 nam có 5.

$$\text{Suy ra có } 5C_3^2 \text{ cách chọn.}$$

+ Trường hợp 3: chọn 3 nữ có 1 cách.

$$\text{Vậy có } 3C_5^2 + 5C_3^2 + 1 = 46 \text{ cách chọn.}$$

Ví dụ 17. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số sao cho trong mỗi số đó, chữ số hàng ngàn lớn hơn hàng trăm, chữ số hàng trăm lớn hơn hàng chục và chữ số hàng chục lớn hơn hàng đơn vị.

<u>**Giải**</u>

Gọi $A = \overline{a_1a_2a_3a_4}$ với $9 \geq a_1 > a_2 > a_3 > a_4 \geq 0$ là số cần lập.

$X = \{0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ 8;\ 9\}$.

Từ 10 phần tử của X ta chọn ra 4 phần tử bất kỳ thì chỉ lập được 1 số A. Nghĩa là không có hoán vị hay là một tổ hợp chập 4 của 10.

$$\text{Vậy có } C_{10}^4 = 210 \text{ số.}$$

Nhận xét:
i/ Điều kiện để xảy ra hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp là n phần tử phải phân biệt.
ii/ Chỉnh hợp và tổ hợp khác nhau ở chỗ là sau khi chọn ra k trong n phần tử thì chỉnh hợp có sắp thứ tự còn tổ hợp thì không.

4. Phương pháp giải toán

4.1. Phương pháp 1.

Bước 1. Đọc kỹ các yêu cầu và số liệu của đề bài. Phân bài toán ra các trường hợp, trong mỗi trường hợp lại phân thành các giai đoạn.
Bước 2. Tùy từng giai đoạn cụ thể và giả thiết bài toán để sử dụng quy tắc cộng, nhân, hoán vị, chỉnh hợp hay tổ hợp.
Bước 3. Đáp án là tổng kết quả của các trường hợp trên.

Ví dụ 18. Một nhóm công nhân gồm 15 nam và 5 nữ. Người ta muốn chọn từ nhóm ra 5 người để lập thành một tổ công tác sao cho phải có 1 tổ trưởng nam, 1 tổ phó nam và có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập tổ công tác.

Giải

+ Trường hợp 1: chọn 1 nữ và 4 nam.
- Bước 1: chọn 1 trong 5 nữ có 5 cách.
- Bước 2: chọn 2 trong 15 nam làm tổ trưởng và tổ phó có A_{15}^2 cách.
- Bước 3: chọn 2 trong 13 nam còn lại có C_{13}^2 cách.

Suy ra có $5A_{15}^2.C_{13}^2$ cách chọn cho trường hợp 1.

+ Trường hợp 2: chọn 2 nữ và 3 nam.
- Bước 1: chọn 2 trong 5 nữ có C_5^2 cách.
- Bước 2: chọn 2 trong 15 nam làm tổ trưởng và tổ phó có A_{15}^2 cách.
- Bước 3: chọn 1 trong 13 nam còn lại có 13 cách.

Suy ra có $13A_{15}^2.C_5^2$ cách chọn cho trường hợp 2.

+ Trường hợp 3: chọn 3 nữ và 2 nam.
- Bước 1: chọn 3 trong 5 nữ có C_5^3 cách.
- Bước 2: chọn 2 trong 15 nam làm tổ trưởng và tổ phó có A_{15}^2 cách.

Suy ra có $A_{15}^2.C_5^3$ cách chọn cho trường hợp 3.

Vậy có $5A_{15}^2.C_{13}^2 + 13A_{15}^2.C_5^2 + A_{15}^2.C_5^3 = 111300$ cách.

Cách khác:
+ Bước 1: chọn 2 trong 15 nam làm tổ trưởng và tổ phó có A_{15}^2 cách.
+ Bước 2: chọn 3 tổ viên, trong đó có nữ.
- Trường hợp 1: chọn 1 nữ và 2 nam có $5.C_{13}^2$ cách.
- Trường hợp 2: chọn 2 nữ và 1 nam có $13.C_5^2$ cách.
- Trường hợp 3: chọn 3 nữ có C_5^3 cách.

Vậy có $A_{15}^2\left(5.C_{13}^2 + 13.C_5^2 + C_5^3\right) = 111300$ cách.

4.2. Phương pháp 2.

Đối với nhiều bài toán, phương pháp 1 rất dài. Do đó ta sử dụng phương pháp loại trừ (phần bù) theo phép toán $A \cup \overline{A} = X \Rightarrow A = X \setminus \overline{A}$.
Bước 1: chia yêu cầu của đề thành 2 phần là yêu cầu chung X (tổng quát) gọi là **loại 1** và yêu cầu riêng A. Xét $\overline{A}$ là phủ định của A, nghĩa là không thỏa yêu cầu riêng gọi là **loại 2**.

Bước 2: tính số cách chọn loại 1 và loại 2.
Bước 3: đáp án là số cách chọn loại 1 trừ số cách chọn loại 2.

Chú ý:
Cách phân loại 1 và loại 2 có tính tương đối, phụ thuộc vào chủ quan của người giải.

Ví dụ 19. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể lập được mấy số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau.

Giải

+ Loại 1: chữ số a_1 tùy ý, ta có 5! = 120 số.
+ Loại 2: chữ số a_1 = 0, ta có 4! = 24 số.

Vậy có 120 – 24 = 96 số.

Ví dụ 20. Một nhóm có 7 nam và 6 nữ. Chọn ra 3 người sao cho trong đó có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách.

Giải

+ Loại 1: chọn 3 người tùy ý trong 13 người có C_{13}^3 cách.
+ Loại 2: chọn 3 nam (không có nữ) trong 7 nam có C_7^3 cách.

Vậy có $C_{13}^3 - C_7^3 = 251$ cách chọn.

Ví dụ 21. Từ 20 câu hỏi trắc nghiệm gồm 9 câu dễ, 7 câu trung bình và 4 câu khó người ta chọn ra 10 câu để làm đề kiểm tra sao cho phải có đủ cả 3 loại dễ, trung bình và khó. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra.

Giải

+ Loại 1: chọn 10 câu tùy ý trong 20 câu có C_{20}^{10} cách.
+ Loại 2: chọn 10 câu có không quá 2 trong 3 loại dễ, trung bình và khó.
- Trường hợp 1: chọn 10 câu dễ và trung bình trong 16 câu có C_{16}^{10} cách.
- Trường hợp 2: chọn 10 câu dễ và khó trong 13 câu có C_{13}^{10} cách.
- Trường hợp 3: chọn 10 câu trung bình và khó trong 11 câu có C_{11}^{10} cách.

Vậy có $C_{20}^{10} - \left(C_{16}^{10} + C_{13}^{10} + C_{11}^{10}\right) = 176451$ đề kiểm tra.

Chú ý:
Giải bằng phương pháp phần bù có ưu điểm là ngắn tuy nhiên nhược điểm là thường sai sót khi tính số lượng từng loại.

Ví dụ 22. Từ 20 câu hỏi trắc nghiệm gồm 9 câu dễ, 7 câu trung bình và 4 câu khó người ta chọn ra 7 câu để làm đề kiểm tra sao cho phải có đủ cả 3 loại dễ, trung bình và khó. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra.

Cách giải sai:
+ Loại 1: chọn 7 câu tùy ý trong 20 câu có C_{20}^7 cách.
+ Loại 2: chọn 7 câu không thỏa yêu cầu.
- Trường hợp 1: chọn 7 câu dễ trong 9 câu có C_9^7 cách.
- Trường hợp 2: chọn 7 câu trung bình có 1 cách.
- Trường hợp 3: chọn 7 câu dễ **và** trung bình trong 16 câu có C_{16}^7 cách.
- Trường hợp 4: chọn 7 câu dễ **và** khó trong 13 câu có C_{13}^7 cách.
- Trường hợp 5: chọn 7 câu trung bình **và** khó trong 11 câu có C_{11}^7 cách.

Vậy có $C_{20}^7 - \left(1 + C_9^7 + C_{16}^7 + C_{13}^7 + C_{11}^7\right) = 63997$ đề kiểm tra!

Sai sót trong cách tính số đề loại 2. Chẳng hạn, khi tính số đề trong trường hợp 3 ta đã tính lặp lại trường hợp 1 và trường hợp 2.

Cách giải sai khác:

+ Loại 1: chọn 7 câu tùy ý trong 20 câu có C_{20}^7 cách.

+ Loại 2: chọn 7 câu không thỏa yêu cầu.

- Trường hợp 1: chọn 7 câu dễ **hoặc** trung bình trong 16 câu có C_{16}^7 cách.

- Trường hợp 2: chọn 7 câu dễ **hoặc** khó trong 13 câu có C_{13}^7 cách.

- Trường hợp 3: chọn 7 câu trung bình **hoặc** khó trong 11 câu có C_{11}^7 cách.

Vậy có $C_{20}^7 - \left(C_{16}^7 + C_{13}^7 + C_{11}^7\right) = 64034$ đề kiểm tra.

Sai sót do ta đã tính lặp lại số cách chọn đề chỉ có 7 câu dễ và đề chỉ có 7 câu trung bình trong trường hợp 1 và trường hợp 2.

Cách giải đúng:

+ Loại 1: chọn 7 câu tùy ý trong 20 câu có C_{20}^7 cách.

+ Loại 2: chọn 7 câu không thỏa yêu cầu.

- Trường hợp 1: chọn 7 câu dễ **hoặc** trung bình trong 16 câu có C_{16}^7 cách.

- Trường hợp 2: chọn 7 câu dễ **và** khó trong 13 câu có $C_{13}^7 - C_9^7$ cách.

- Trường hợp 3: chọn 7 câu trung bình **và** khó trong 11 câu có $C_{11}^7 - 1$ cách.

Vậy có $C_{20}^7 - \left(C_{16}^7 + C_{13}^7 - C_9^7 + C_{11}^7 - 1\right) = 64071$ đề kiểm tra.

Ví dụ 23. Hội đồng quản trị của một công ty gồm 12 người, trong đó có 5 nữ. Từ hội đồng quản trị đó người ta bầu ra 1 chủ tịch hội đồng quản trị, 1 phó chủ tịch hội đồng quản trị và 2 ủy viên. Hỏi có mấy cách bầu sao cho trong 4 người được bầu phải có nữ.

Giải

+ Loại 1: bầu 4 người tùy ý (không phân biệt nam, nữ).

- Bước 1: bầu chủ tịch và phó chủ tịch có A_{12}^2 cách.

- Bước 2: bầu 2 ủy viên có C_{10}^2 cách.

Suy ra có $A_{12}^2.C_{10}^2$ cách bầu loại 1.

+ Loại 2: bầu 4 người toàn nam.

- Bước 1: bầu chủ tịch và phó chủ tịch có A_7^2 cách.

- Bước 2: bầu 2 ủy viên có C_5^2 cách.

Suy ra có $A_7^2.C_5^2$ cách bầu loại 2.

Vậy có $A_{12}^2.C_{10}^2 - A_7^2.C_5^2 = 5520$ cách.

5. Hoán vị lặp (tham khảo)

Cho tập hợp X có n phần tử gồm n_1 phần tử giống nhau, n_2 phần tử khác lại giống nhau, …, n_k phần tử khác nữa lại giống nhau $(n_1 + n_2 + ... + n_k = n)$. Mỗi cách sắp n phần tử này vào n vị trí là một hoán vị lặp, số hoán vị lặp là $\dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$.

Ví dụ 24. Từ các chữ số 1, 2, 3 lập được bao nhiêu số tự nhiên có đúng 5 chữ số 1, 2 chữ số 2 và 3 chữ số 3.

Giải

Xem số cần lập có 10 chữ số gồm 5 chữ số 1 giống nhau, 2 chữ số 2 giống nhau và 3 chữ số 3 giống nhau.

Vậy có $\dfrac{10!}{5!2!3!} = 2520$ số.

Cách giải thường dùng:

+ Bước 1: chọn 5 trong 10 vị trí để sắp 5 chữ số 1 có C_{10}^5 cách.

+ Bước 2: chọn 2 trong 5 vị trí còn lại để sắp 2 chữ số 2 có C_5^2 cách.

+ Bước 3: sắp 3 chữ số 3 vào 3 vị trí còn lại có 1 cách.

Vậy có $C_{10}^5.C_5^2.1 = 2520$ số.

CHƯƠNG II
NHỊ THỨC NEWTON
PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

I. NHỊ THỨC NEWTON

Định nghĩa

Nhị thức Newton là khai triển tổng lũy thừa có dạng:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n b^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \ (n = 0,\ 1,\ 2,\ ...).$$

+ Số hạng thứ k+1 là $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ thường được gọi là số hạng tổng quát.

+ Các hệ số C_n^k được tính theo công thức tổ hợp chập hoặc dựa vào tam giác Pascal sau đây:

n = 0							1						
n = 1						1		1					
n = 2					1		2		1				
n = 3				1		3		3		1			
n = 4			1		4		6	+	4		1		
n = 5		1		5		10		10		5		1	
n = 6	1		6		15		20		15		6		1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Chẳng hạn:

$$C_6^0 = 1,\ C_6^1 = 6,\ C_6^2 = 15,\ C_6^3 = 20,\ C_6^4 = 15,\ C_6^5 = 6,\ C_6^6 = 1.$$

Tính chất

i) $C_n^k = C_n^{n-k}\ (0 \le k \le n)$.

ii) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k\ (1 \le k \le n)$.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1. Dùng định nghĩa và tính chất chứng minh hoặc rút gọn đẳng thức

Ví dụ 1. Chứng minh đẳng thức:

$$C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k \text{ với } 3 \le k \le n.$$

<u>Giải</u>

Áp dụng tính chất ta có:

$$C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) + 2\left(C_n^{k-1} + C_n^{k-2}\right) + \left(C_n^{k-2} + C_n^{k-3}\right)$$
$$= C_{n+1}^k + 2C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2} = \left(C_{n+1}^k + C_{n+1}^{k-1}\right) + \left(C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2}\right)$$
$$= C_{n+2}^k + C_{n+2}^{k-1} = C_{n+3}^k.$$

Ví dụ 2. Tính tổng $S = C_{30}^{14} - C_{30}^{15} + C_{30}^{16} - ... - C_{30}^{29} + C_{30}^{30}$.

Giải

Áp dụng tính chất ta có:
$$S = \left(C_{29}^{13} + C_{29}^{14}\right) - \left(C_{29}^{14} + C_{29}^{15}\right) + \left(C_{29}^{15} + C_{29}^{16}\right) - ... - \left(C_{29}^{28} + C_{29}^{29}\right) + C_{30}^{30} = C_{29}^{13} - C_{29}^{29} + C_{30}^{30} = C_{29}^{13}.$$

Vậy $S = 67863915$.

Cách khác:
$$(1-1)^{30} = \left(C_{30}^0 - ... + C_{30}^{12} - C_{30}^{13}\right) + \left(C_{30}^{14} - ... - C_{30}^{29} + C_{30}^{30}\right)$$
$$\Rightarrow \left(C_{30}^{30} - ... + C_{30}^{18} - C_{30}^{17}\right) + \left(C_{30}^{14} - ... - C_{30}^{29} + C_{30}^{30}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \left(S - C_{30}^{16} + C_{30}^{15} - C_{30}^{14}\right) + S = 0 \Rightarrow 2S = C_{30}^{16} - C_{30}^{15} + C_{30}^{14} = 2C_{30}^{14} - C_{30}^{15}.$$

Vậy $S = \dfrac{2C_{30}^{14} - C_{30}^{15}}{2} = 67863915$.

Ví dụ 3. Rút gọn tổng sau:
$$S = C_{2007}^0 C_{2007}^{2006} + C_{2007}^1 C_{2006}^{2005} + C_{2007}^2 C_{2005}^{2004} + ... + C_{2007}^k C_{2007\text{-}k}^{2006\text{-}k} + ... + C_{2007}^{2006} C_1^0.$$

Giải

Áp dụng công thức ta có:
$$C_{2007}^k C_{2007\text{-}k}^{2006\text{-}k} = \frac{2007!}{k!(2007-k)!}.\frac{(2007-k)!}{(2006-k)!1!} = \frac{2007!}{k!(2006-k)!} = 2007.\frac{2006!}{k!(2006-k)!}$$
$$= 2007C_{2006}^k \text{ với } \forall k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 2006.$$

Suy ra $S = 2007\left(C_{2006}^0 + C_{2006}^1 + ... + C_{2006}^k + ... + C_{2006}^{2006}\right) = 2007(1+1)^{2006}$.

Vậy $S = 2007.2^{2006}$.

2. Khai triển nhị thức Newton

2.1. Dạng khai triển

Dấu hiệu nhận biết:
Các hệ số đứng trước tổ hợp và lũy thừa là 1 hoặc 1 và – 1 xen kẽ nhau.
i) Khai triển $(a+b)^n$ hoặc $(a-b)^n$.
ii) Cộng hoặc trừ hai vế của 2 khai triển trên.

Ví dụ 4. Tính tổng sau:
$$S = C_{2007}^0 - 2C_{2007}^1 + 2^2C_{2007}^2 - 2^3C_{2007}^3 + ... + 2^{2006}C_{2007}^{2006} - 2^{2007}C_{2007}^{2007}.$$

Giải

Ta có khai triển:
$$(1-2)^{2007} = C_{2007}^0 - 2C_{2007}^1 + 2^2C_{2007}^2 - ... + 2^{2006}C_{2007}^{2006} - 2^{2007}C_{2007}^{2007}.$$

Vậy $S = -1$.

Ví dụ 5. Rút gọn tổng sau:
$$S = C_{2007}^0 + 3^2C_{2007}^2 + 3^4C_{2007}^4 + ... + 3^{2004}C_{2007}^{2004} + 3^{2006}C_{2007}^{2006}.$$

Giải

Ta có các khai triển:
$$(1+3)^{2007} = C_{2007}^0 + 3C_{2007}^1 + 3^2C_{2007}^2 + ... + 3^{2006}C_{2007}^{2006} + 3^{2007}C_{2007}^{2007} \ (1)$$

$$(1-3)^{2007} = C_{2007}^0 - 3C_{2007}^1 + 3^2C_{2007}^2 - ... + 3^{2006}C_{2007}^{2006} - 3^{2007}C_{2007}^{2007} \text{ (2).}$$

Cộng (1) và (2) ta được:

$$2\left(C_{2007}^0 + 3^2C_{2007}^2 + 3^4C_{2007}^4 + ... + 3^{2006}C_{2007}^{2006}\right) = 4^{2007} - 2^{2007}.$$

$$\text{Vậy } S = 2^{2006}\left(2^{2007} - 1\right).$$

Ví dụ 6. Rút gọn tổng sau:

$$S = 3^{2006}.2C_{2007}^1 + 3^{2004}.2^3C_{2007}^3 + 3^{2002}.2^5C_{2007}^5 + ... + 2^{2007}C_{2007}^{2007}.$$

<u>**Giải**</u>

Ta có các khai triển:

$$(3+2)^{2007} = 3^{2007}C_{2007}^0 + 3^{2006}.2C_{2007}^1 + 3^{2005}.2^2C_{2007}^2 + ... + 3.2^{2006}C_{2007}^{2006} + 2^{2007}C_{2007}^{2007} \text{ (1)}$$

$$(3-2)^{2007} = 3^{2007}C_{2007}^0 - 3^{2006}.2C_{2007}^1 + 3^{2005}.2^2C_{2007}^2 - ... + 3.2^{2006}C_{2007}^{2006} - 2^{2007}C_{2007}^{2007} \text{ (2).}$$

Trừ (1) và (2) ta được:

$$2\left(3^{2006}.2C_{2007}^1 + 3^{2004}.2^3C_{2007}^3 + 3^{2002}.2^5C_{2007}^5 + ... + 2^{2007}C_{2007}^{2007}\right) = 5^{2007} - 1.$$

$$\text{Vậy } S = \frac{5^{2007} - 1}{2}.$$

2.2. Dạng đạo hàm

2.2.1. Đạo hàm cấp 1

Dấu hiệu nhận biết:

Các hệ số đứng trước tổ hợp và lũy thừa tăng dần từ 1 đến n (hoặc giảm dần từ n đến 1) (không kể dấu).

Hai khai triển thường dùng:

$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^kx^k + ... + C_n^nx^n$ (1).

$(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1x + C_n^2x^2 - ... + (-1)^kC_n^kx^k + ... + (-1)^nC_n^nx^n$ (2).

i) Đạo hàm 2 vế của (1) hoặc (2).

ii) Cộng hoặc trừ (1) và (2) sau khi đã đạo hàm rồi thay số thích hợp.

Ví dụ 7. Tính tổng sau:

$$S = C_{30}^1 - 2.2C_{30}^2 + 3.2^2C_{30}^3 - ... + 29.2^{28}C_{30}^{29} - 30.2^{29}C_{30}^{30}.$$

<u>**Giải**</u>

Ta có khai triển:

$$(1+x)^{30} = C_{30}^0 + C_{30}^1x + C_{30}^2x^2 + ... + C_{30}^{29}x^{29} + C_{30}^{30}x^{30} \text{ (1).}$$

Đạo hàm 2 vế của (1) ta được:

$$C_{30}^1 + 2C_{30}^2x + ... + 29C_{30}^{29}x^{28} + 30C_{30}^{30}x^{29} = 30(1+x)^{29} \text{ (2).}$$

Thay x = – 2 vào (2) ta được:

$$C_{30}^1 - 2.2C_{30}^2 + 3.2^2C_{30}^3 - ... + 29.2^{28}C_{30}^{29} - 30.2^{29}C_{30}^{30} = 30(1-2)^{29}.$$

$$\text{Vậy } S = -30.$$

Ví dụ 8. Rút gọn tổng sau:

$$S = C_{30}^1 + 3.2^2C_{30}^3 + 5.2^4C_{30}^5 + ... + 27.2^{26}C_{30}^{27} + 29.2^{28}C_{30}^{29}.$$

<u>**Giải**</u>

Ta có khai triển:

$$(1+x)^{30} = C_{30}^0 + C_{30}^1x + C_{30}^2x^2 + ... + C_{30}^{29}x^{29} + C_{30}^{30}x^{30} \text{ (1).}$$

Đạo hàm 2 vế của (1) ta được:

$$C_{30}^1 + 2C_{30}^2x + ... + 29C_{30}^{29}x^{28} + 30C_{30}^{30}x^{29} = 30(1+x)^{29} \text{ (2).}$$

Thay x = 2 và x = – 2 lần lượt vào (2) ta được:

$$C_{30}^1 + 2.2C_{30}^2 + 3.2^2C_{30}^3 + ... + 29.2^{28}C_{30}^{29} + 30.2^{29}C_{30}^{30} = 30(1+2)^{29} \text{ (3)}$$

$$C_{30}^1 - 2.2C_{30}^2 + 3.2^2C_{30}^3 - ... + 29.2^{28}C_{30}^{29} - 30.2^{29}C_{30}^{30} = 30(1-2)^{29} \text{ (4).}$$

Cộng hai đẳng thức (3) và (4) ta được:

$$2\left(C_{30}^{1}+3.2^{2}C_{30}^{3}+5.2^{4}C_{30}^{5}+...+27.2^{26}C_{30}^{27}+29.2^{28}C_{30}^{29}\right)=30\left(3^{29}-1\right)$$

$$\text{Vậy } S=15\left(3^{29}-1\right).$$

Ví dụ 9. Rút gọn tổng sau:

$$S=2008C_{2007}^{0}+2007C_{2007}^{1}+2006C_{2007}^{2}+...+2C_{2007}^{2006}+C_{2007}^{2007}.$$

<u>Giải</u>

Ta có khai triển:

$(x+1)^{2007}=C_{2007}^{0}x^{2007}+C_{2007}^{1}x^{2006}+C_{2007}^{2}x^{2005}+...+C_{2007}^{2006}x+C_{2007}^{2007}$ (1).

Nhân 2 vế (1) với x ta được:

$x(x+1)^{2007}=C_{2007}^{0}x^{2008}+C_{2007}^{1}x^{2007}+C_{2007}^{2}x^{2006}+...+C_{2007}^{2006}x^{2}+C_{2007}^{2007}x$ (2).

Đạo hàm 2 vế của (2) ta được:

$2008C_{2007}^{0}x^{2007}+2007C_{2007}^{1}x^{2006}+2006C_{2007}^{2}x^{2005}+...+2C_{2007}^{2006}x+C_{2007}^{2007}=(1+2008x)(x+1)^{2006}$ (3).

Thay x = 1 vào (3) ta được:

$$2008C_{2007}^{0}+2007C_{2007}^{1}+2006C_{2007}^{2}+...+2C_{2007}^{2006}+C_{2007}^{2007}=2009.2^{2006}.$$

$$\text{Vậy } S=2009.2^{2006}.$$

Cách khác:

Ta có khai triển:

$(x+1)^{2007}=C_{2007}^{0}x^{2007}+C_{2007}^{1}x^{2006}+C_{2007}^{2}x^{2005}+...+C_{2007}^{2006}x+C_{2007}^{2007}$ (1).

Đạo hàm 2 vế của (1) ta được:

$2007C_{2007}^{0}x^{2006}+2006C_{2007}^{1}x^{2005}+2005C_{2007}^{2}x^{2004}+...+2C_{2007}^{2005}x+C_{2007}^{2006}=2007(x+1)^{2006}$ (2).

Thay x = 1 vào (1) và (2) ta được:

$$C_{2007}^{0}+C_{2007}^{1}+C_{2007}^{2}+...+C_{2007}^{2006}+C_{2007}^{2007}=2^{2007} \text{ (3).}$$

$$2007C_{2007}^{0}+2006C_{2007}^{1}+2005C_{2007}^{2}+...+C_{2007}^{2006}=2007.2^{2006} \text{ (4).}$$

Cộng (3) và (4) ta được:

$$2008C_{2007}^{0}+2007C_{2007}^{1}+2006C_{2007}^{2}+...+2C_{2007}^{2006}+C_{2007}^{2007}=2009.2^{2006}.$$

$$\text{Vậy } S=2009.2^{2006}.$$

Ví dụ 10. Cho tổng sau:

$$S=2C_{n}^{0}+3C_{n}^{1}+4C_{n}^{2}+...+(n+1)C_{n}^{n-1}+(n+2)C_{n}^{n}, \text{ với } n\in\mathbb{Z}^{+}.$$

Tính n, biết $S=320$.

<u>Giải</u>

Ta có khai triển:

$$(1+x)^{n}=C_{n}^{0}+C_{n}^{1}x+C_{n}^{2}x^{2}+...+C_{n}^{n-1}x^{n-1}+C_{n}^{n}x^{n} \text{ (1).}$$

Nhân 2 vế (1) với x^2 ta được:

$$C_{n}^{0}x^{2}+C_{n}^{1}x^{3}+C_{n}^{2}x^{4}+...+C_{n}^{n-1}x^{n+1}+C_{n}^{n}x^{n+2}=x^{2}(1+x)^{n} \text{ (2).}$$

Đạo hàm 2 vế của (2) ta được:

$2C_{n}^{0}x+3C_{n}^{1}x^{2}+4C_{n}^{2}x^{3}+...+(n+1)C_{n}^{n-1}x^{n}+(n+2)C_{n}^{n}x^{n+1}=2x(1+x)^{n}+nx^{2}(1+x)^{n-1}$ (3).

Thay x = 1 vào (3) ta được:

$$2C_{n}^{0}+3C_{n}^{1}+4C_{n}^{2}+...+(n+1)C_{n}^{n-1}+(n+2)C_{n}^{n}=(4+n).2^{n-1}.$$

$$S=320\Leftrightarrow(4+n).2^{n-1}=320.$$

$$\text{Vậy } n=6.$$

Cách khác:

Ta có khai triển:

$$(1+x)^{n}=C_{n}^{0}+C_{n}^{1}x+C_{n}^{2}x^{2}+...+C_{n}^{n-1}x^{n-1}+C_{n}^{n}x^{n} \text{ (1).}$$

Đạo hàm 2 vế của (1) ta được:

$$C_{n}^{1}+2C_{n}^{2}x+3C_{n}^{3}x^{2}+...+nC_{n}^{n}x^{n-1}=n(1+x)^{n-1} \text{ (2).}$$

Thay x = 1 vào (1) và (2) ta được:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n \ (3).$$
$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n = n.2^{n-1} \ (4).$$

Nhân (3) với 2 rồi cộng với (4) ta được:

$$2C_n^0 + 3C_n^1 + 4C_n^2 + ... + (n+1)C_n^{n-1} + (n+2)C_n^n = (4+n).2^{n-1}.$$
$$S = 320 \Leftrightarrow (4+n).2^{n-1} = 320.$$
$$\text{Vậy } n = 6.$$

2.2.2. Đạo hàm cấp 2

Dấu hiệu nhận biết:

Các hệ số đứng trước tổ hợp và lũy thừa tăng (giảm) dần từ 1.2 đến (n–1).n hoặc tăng (giảm) dần từ 1^2 đến n^2 (không kể dấu).

Xét khai triển:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + ... + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^nx^n \quad (1).$$

Đạo hàm 2 vế của (1) ta được:

$$C_n^1 + 2C_n^2x + 3C_n^3x^2 + 4C_n^4x^3 + ... + nC_n^nx^{n-1} = n(1+x)^{n-1} \quad (2).$$

i) Tiếp tục đạo hàm 2 vế của (2) ta được:

$$1.2C_n^2 + 2.3C_n^3x + 3.4C_n^4x^2 + ... + (n-1)nC_n^nx^{n-2} = n(n-1)(1+x)^{n-2} \ (3).$$

ii) Nhân x vào 2 vế của (2) ta được:

$$C_n^1x + 2C_n^2x^2 + 3C_n^3x^3 + 4C_n^4x^4 + ... + nC_n^nx^n = nx(1+x)^{n-1} \ (4).$$

Đạo hàm 2 vế của (4) ta được:

$$1^2C_n^1 + 2^2C_n^2x + 3^2C_n^3x^2 + ... + n^2C_n^nx^{n-1} = n(1+nx)(1+x)^{n-2} \ (5).$$

Ví dụ 11. Tính tổng sau:

$$S = 1.2C_{16}^2 - 2.3C_{16}^3 + 3.4C_{16}^4 - ... - 14.15C_{16}^{15} + 15.16C_{16}^{16}.$$

<u>Giải</u>

Ta có khai triển:

$$(1+x)^{16} = C_{16}^0 + C_{16}^1x + C_{16}^2x^2 + C_{16}^3x^3 + ... + C_{16}^{15}x^{15} + C_{16}^{16}x^{16} \quad (1).$$

Đạo hàm 2 vế của (1) ta được

$$C_{16}^1 + 2C_{16}^2x + 3C_{16}^3x^2 + ... + 15C_{16}^{15}x^{14} + 16C_{16}^{16}x^{15} = 16(1+x)^{15} \quad (2).$$

Đạo hàm 2 vế của (2) ta được:

$$1.2C_{16}^2 + 2.3C_{16}^3x + 3.4C_{16}^4x^2 + ... + 15.16C_{16}^{16}x^{14} = 240(1+x)^{14} \ (3).$$

Thay x = – 1 vào đẳng thức (3) ta được:

$$1.2C_{16}^2 - 2.3C_{16}^3 + 3.4C_{16}^4 - ... - 14.15C_{16}^{15} + 15.16C_{16}^{16} = 0.$$

Vậy S = 0.

Ví dụ 12. Rút gọn tổng sau:

$$S = 1^2C_{2007}^1 + 2^2C_{2007}^2 + 3^2C_{2007}^3 + ... + 2006^2C_{2007}^{2006} + 2007^2C_{2007}^{2007}.$$

<u>Giải</u>

Ta có khai triển:

$$(1+x)^{2007} = C_{2007}^0 + C_{2007}^1x + C_{2007}^2x^2 + ... + C_{2007}^{2006}x^{2006} + C_{2007}^{2007}x^{2007} \quad (1).$$

Đạo hàm 2 vế của (1) ta được:

$$C_{2007}^1 + 2C_{2007}^2x + 3C_{2007}^3x^2 + ... + 2007C_{2007}^{2007}x^{2006} = 2007(1+x)^{2006} \quad (2).$$

Nhân x vào 2 vế của (2) ta được:

$$C_{2007}^1x + 2C_{2007}^2x^2 + 3C_{2007}^3x^3 + ... + 2006C_{2007}^{2006}x^{2006} + 2007C_{2007}^{2007}x^{2007} = 2007x(1+x)^{2006} \ (3).$$

Đạo hàm 2 vế của (3) ta được:

$$1^2C_{2007}^1 + 2^2C_{2007}^2x + 3^2C_{2007}^3x^2 + ... + 2006^2C_{2007}^{2006}x^{2005} + 2007^2C_{2007}^{2007}x^{2006}$$
$$= 2007(1+2007x)(1+x)^{2005} \ (4).$$

Thay x = 1 vào đẳng thức (4) ta được

$$1^2C_{2007}^1+2^2C_{2007}^2+3^2C_{2007}^3+...+2007^2C_{2007}^{2007}=2007.2008.2^{2005}.$$

Vậy $S=2007.2008.2^{2005}$.

2.3. Dạng tích phân

Dấu hiệu nhận biết:

Các hệ số đứng trước tổ hợp (và lũy thừa) giảm dần từ 1 đến $\frac{1}{n+1}$ hoặc tăng dần từ $\frac{1}{n+1}$ đến 1.

Xét khai triển:

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n \quad (1).$$

Lấy tích phân 2 vế của (1) từ a đến b ta được:

$$\int_a^b(1+x)^n\,dx=C_n^0\int_a^b dx+C_n^1\int_a^b xdx+...+C_n^{n-1}\int_a^b x^{n-1}dx+C_n^n\int_a^b x^ndx$$

$$\Rightarrow \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_a^b=C_n^0\left.\frac{x}{1}\right|_a^b+C_n^1\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b+...+C_n^{n-1}\left.\frac{x^n}{n}\right|_a^b+C_n^n\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{1}C_n^0+\frac{b^2-a^2}{2}C_n^1+...+\frac{b^n-a^n}{n}C_n^{n-1}+\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}C_n^n=\frac{(1+b)^{n+1}-(1+a)^{n+1}}{n+1}.$$

Trong thực hành, ta dễ dàng nhận biết giá trị của n. Để nhận biết 2 cận a và b ta nhìn vào số hạng $\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}C_n^n$.

Ví dụ 13. Rút gọn tổng sau:

$$S=C_9^0+\frac{3^2-2^2}{2}C_9^1+\frac{3^3-2^3}{3}C_9^2+...+\frac{3^9-2^9}{9}C_9^8+\frac{3^{10}-2^{10}}{10}C_9^9.$$

<u>**Giải**</u>

Ta có khai triển:

$$(1+x)^9=C_9^0+C_9^1x+C_9^2x^2+...+C_9^8x^8+C_9^9x^9$$

$$\Rightarrow \int_2^3(1+x)^9\,dx=C_9^0\int_2^3 dx+C_9^1\int_2^3 xdx+...+C_9^8\int_2^3 x^8dx+C_9^9\int_2^3 x^9dx$$

$$\Rightarrow \left.\frac{(1+x)^{10}}{10}\right|_2^3=C_9^0\left.\frac{x}{1}\right|_2^3+C_9^1\left.\frac{x^2}{2}\right|_2^3+C_9^2\left.\frac{x^3}{3}\right|_2^3+...+C_9^8\left.\frac{x^9}{9}\right|_2^3+C_9^9\left.\frac{x^{10}}{10}\right|_2^3$$

$$\Rightarrow \frac{4^{10}-3^{10}}{10}=C_9^0+\frac{3^2-2^2}{2}C_9^1+...+\frac{3^9-2^9}{9}C_9^8+\frac{3^{10}-2^{10}}{10}C_9^9.$$

Vậy $S=\frac{4^{10}-3^{10}}{10}$.

Ví dụ 14. Rút gọn tổng sau:

$$S=2C_n^0+\frac{2^2}{2}C_n^1+\frac{2^3}{3}C_n^2+\frac{2^4}{4}C_n^3+...+\frac{2^n}{n}C_n^{n-1}+\frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n.$$

<u>**Giải**</u>

Ta có khai triển:

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+...+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n$$

$$\Rightarrow \int_0^2(1+x)^n\,dx=C_n^0\int_0^2 dx+C_n^1\int_0^2 xdx+C_n^2\int_0^2 x^2dx+...+C_n^n\int_0^2 x^ndx$$

$$\Rightarrow \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^2=C_n^0\left.\frac{x}{1}\right|_0^2+C_n^1\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2+...+C_n^{n-1}\left.\frac{x^n}{n}\right|_0^2+C_n^n\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^2$$

$$\Rightarrow 2C_n^0+\frac{2^2}{2}C_n^1+\frac{2^3}{3}C_n^2+...+\frac{2^n}{n}C_n^{n-1}+\frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}.$$

$$\text{Vậy } S=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}.$$

Ví dụ 15. Rút gọn tổng sau:

$$S=3C_{100}^0+\frac{2^2-1}{2}C_{100}^1+\frac{2^3+1}{3}C_{100}^2+...+\frac{2^{100}-1}{100}C_{100}^{99}+\frac{2^{101}+1}{101}C_{100}^{100}.$$

<u>Giải</u>

Ta có khai triển:

$$(1+x)^{100}=C_{100}^0+C_{100}^1x+C_{100}^2x^2+...+C_{100}^{99}x^{99}+C_{100}^{100}x^{100}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{2}(1+x)^{100}dx=C_{100}^0\int_{-1}^{2}dx+C_{100}^1\int_{-1}^{2}xdx+...+C_{100}^{99}\int_{-1}^{2}x^{99}dx+C_{100}^{100}\int_{-1}^{2}x^{100}dx.$$

$$\Rightarrow \left.\frac{(1+x)^{101}}{101}\right|_{-1}^{2}=C_{100}^0\left.\frac{x}{1}\right|_{-1}^{2}+C_{100}^1\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{2}+...+C_{100}^{99}\left.\frac{x^{100}}{100}\right|_{-1}^{2}+C_{100}^{100}\left.\frac{x^{101}}{101}\right|_{-1}^{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3^{101}}{101}=3C_{100}^0+\frac{2^2-1}{2}C_{100}^1+...+\frac{2^{100}-1}{100}C_{100}^{99}+\frac{2^{101}+1}{101}C_{100}^{100}.$$

$$\text{Vậy } S=\frac{3^{101}}{101}.$$

3. Tìm số hạng trong khai triển nhị thức Newton

3.1. Dạng tìm số hạng thứ k

Số hạng thứ k trong khai triển $(a+b)^n$ là $C_n^{k-1}a^{n-(k-1)}b^{k-1}$.

Ví dụ 16. Tìm số hạng thứ 21 trong khai triển $(2-3x)^{25}$.

<u>Giải</u>

Số hạng thứ 21 là $C_{25}^{20}2^5(-3x)^{20}=2^5.3^{20}C_{25}^{20}x^{20}$.

3.2. Dạng tìm số hạng chứa x^m

+ Số hạng tổng quát trong khai triển $(a+b)^n$ là $C_n^ka^{n-k}b^k=M(k).x^{f(k)}$ (a, b chứa x).

+ Giải phương trình $f(k)=m\Rightarrow k_0$, số hạng cần tìm là:

$C_n^{k_0}a^{n-k_0}b^{k_0}$ và hệ số của số hạng chứa x^m là $M(k_0)$.

Ví dụ 17. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\frac{x}{2}+\frac{4}{x}\right)^{18}$.

<u>Giải</u>

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(\frac{x}{2}+\frac{4}{x}\right)^{18}=\left(2^{-1}x+4x^{-1}\right)^{18}$ là:

$$C_{18}^k\left(2^{-1}x\right)^{18-k}\left(4x^{-1}\right)^k=C_{18}^k2^{3k-18}x^{18-2k}.$$

Số hạng không chứa x ứng với $18-2k=0\Leftrightarrow k=9$.

Vậy số hạng cần tìm là $C_{18}^92^9$.

Ví dụ 18. Tìm số hạng chứa x^{37} trong khai triển $\left(x^2-xy\right)^{20}$.

<u>Giải</u>

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x^2-xy\right)^{20}$ là $C_{20}^k(x^2)^{20-k}(-xy)^k=(-1)^kC_{20}^kx^{40-k}y^k$.

Số hạng chứa x^{37} ứng với $40 - k = 37 \Leftrightarrow k = 3$.

Vậy số hạng cần tìm là $-C_{20}^{3}x^{37}y^{3} = -1140x^{37}y^{3}$.

Cách khác:

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x^2 - xy\right)^{20} = x^{20}\left(x - y\right)^{20}$ là:

$$x^{20}C_{20}^{k}x^{20-k}(-y)^{k} = (-1)^{k}x^{20}C_{20}^{k}x^{20-k}y^{k}.$$

Số hạng chứa x^{37} ứng với $20 - k = 17 \Leftrightarrow k = 3$.

Vậy số hạng cần tìm là $-x^{20}C_{20}^{3}x^{17}y^{3} = -1140x^{37}y^{3}$.

Ví dụ 19. Tìm số hạng chứa x^3 trong khai triển $\left(1 + x + x^2\right)^{10}$.

<u>Giải</u>

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(1 + x + x^2\right)^{10} = [1 + x(1 + x)]^{10}$ là $C_{10}^{k}x^{k}(1+x)^{k}$.

Suy ra số hạng chứa x^3 ứng với $2 \le k \le 3$.

+ Với k = 2: $C_{10}^{2}x^{2}(1+x)^{2} = C_{10}^{2}(x^{2} + 2x^{3} + x^{4})$ nên số hạng chứa x^3 là $2C_{10}^{2}x^{3}$.

+ Với k = 3: $C_{10}^{3}x^{3}(1+x)^{3}$ có số hạng chứa x^3 là $C_{10}^{3}x^{3}$.

Vậy số hạng cần tìm là $\left(C_{10}^{3} + 2C_{10}^{2}\right)x^{3} = 210x^{3}$.

Cách khác:

Ta có khai triển của $\left(1 + x + x^2\right)^{10} = [1 + x(1 + x)]^{10}$ là:

$$C_{10}^{0} + C_{10}^{1}x(1+x) + C_{10}^{2}x^{2}(1+x)^{2} + C_{10}^{3}x^{3}(1+x)^{3} + ... + C_{10}^{10}x^{10}(1+x)^{10}.$$

Số hạng chứa x^3 chỉ có trong $C_{10}^{2}x^{2}(1+x)^{2}$ và $C_{10}^{3}x^{3}(1+x)^{3}$.

+ $C_{10}^{2}x^{2}(1+x)^{2} = C_{10}^{2}(x^{2} + 2x^{3} + x^{4}) \Rightarrow 2C_{10}^{2}x^{3}$.

+ $C_{10}^{3}x^{3}(1+x)^{3} = C_{10}^{3}(x^{3} + 3x^{4} + 3x^{5} + x^{6}) \Rightarrow C_{10}^{3}x^{3}$.

Vậy số hạng cần tìm là $2C_{10}^{2}x^{3} + C_{10}^{3}x^{3} = 210x^{3}$.

3.3. Dạng tìm số hạng hữu tỉ

+ Số hạng tổng quát trong khai triển $(a + b)^{n}$ là:

$$C_{n}^{k}a^{n-k}b^{k} = C_{n}^{k}.a^{\frac{m}{p}}b^{\frac{r}{q}} \text{ (a, b là vô tỉ).}$$

+ Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{m}{p} \in \mathbb{N} \\ \dfrac{r}{q} \in \mathbb{N} \end{cases} (k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n) \Rightarrow k_0$.

Số hạng cần tìm là $C_{n}^{k_0}a^{n-k_0}b^{k_0}$.

Ví dụ 20. Tìm số hạng hữu tỉ trong khai triển $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt[3]{5}\right)^{10}$.

<u>Giải</u>

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt[3]{5}\right)^{10} = \left(\dfrac{1 + 2^{\frac{1}{2}}.5^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{2}}\right)^{10}$ là $\dfrac{1}{32}C_{10}^{k}2^{\frac{k}{2}}.5^{\frac{k}{3}}$.

Số hạng hữu tỉ trong khai triển thỏa điều kiện:

$$\begin{cases} \dfrac{k}{2} \in \mathbb{N} \\ \dfrac{k}{3} \in \mathbb{N} \end{cases} (k \in \mathbb{N},\ 0 \le k \le 10) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = 6 \end{array}\right..$$

+ Với k = 0: số hạng hữu tỉ là $\frac{1}{32}C_{10}^{0} = \frac{1}{32}$.

+ Với k = 6: số hạng hữu tỉ là $\frac{1}{32}C_{10}^{6}2^3.5^2 = \frac{2625}{2}$.

Vậy số hạng cần tìm là $\frac{1}{32}$ và $\frac{2625}{2}$.

3.4. Dạng tìm hệ số chứa x^k trong tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân

Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân với công bội q khác 1 là:

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Xét tổng $S(x) = (1+bx)^{m+1} + (1+bx)^{m+2} + ... + (1+bx)^{m+n}$ như là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân với $u_1 = (1+bx)^{m+1}$ và công bội $q = (1+bx)$.

Áp dụng công thức ta được:

$$S(x) = (1+bx)^{m+1}\frac{1-(1+bx)^n}{1-(1+bx)} = \frac{(1+bx)^{m+n+1} - (1+bx)^{m+1}}{bx}.$$

Suy ra hệ số của số hạng chứa x^k trong S(x) là $\frac{1}{b}$ nhân với hệ số của số hạng chứa x^{k+1} trong khai triển: $(1+bx)^{m+n+1} - (1+bx)^{m+1}$.

Ví dụ 21. Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển và rút gọn tổng sau:

$$S(x) = (1+x)^4 + (1+x)^5 + (1+x)^6 + ... + (1+x)^{15}.$$

<u>Giải</u>

Tổng S(x) có 15 – 4 + 1 = 12 số hạng nên ta có:

$$S(x) = (1+x)^4\frac{1-(1+x)^{12}}{1-(1+x)} = \frac{(1+x)^{16} - (1+x)^4}{x}.$$

Suy ra hệ số của số hạng chứa x^4 là hệ số của số hạng chứa x^5 trong $(1+x)^{16}$.

Vậy hệ số cần tìm là $C_{16}^{5} = 4368$.

<u>Nhận xét:</u>

Bằng cách tính trực tiếp hệ số của từng số hạng trong tổng ta suy ra đẳng thức:

$$C_4^4 + C_5^4 + C_6^4 + ... + C_{15}^4 = C_{16}^5.$$

Ví dụ 22*. Tìm hệ số của số hạng chứa x^2 trong khai triển và rút gọn tổng sau:

$$S(x) = (1+x) + 2(1+x)^2 + ... + 99(1+x)^{99} + 100(1+x)^{100}.$$

<u>Giải</u>

Ta có:

$$S(x) = (1+x)\left[1 + 2(1+x) + ... + 99(1+x)^{98} + 100(1+x)^{99}\right].$$

Đặt:

$$f(x) = 1 + 2(1+x) + 3(1+x)^2 + ... + 99(1+x)^{98} + 100(1+x)^{99}$$
$$F(x) = (1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + ... + (1+x)^{99} + (1+x)^{100}$$
$$\Rightarrow S(x) = f(x) + xf(x) \text{ và } F'(x) = f(x).$$

Suy ra hệ số của số hạng chứa x^2 của S(x) bằng tổng hệ số số hạng chứa x và x^2 của f(x), bằng tổng 2 lần hệ số số hạng chứa x^2 và 3 lần hệ số số hạng chứa x^3 của F(x).
Tổng F(x) có 100 số hạng nên ta có:

$$F(x) = (1+x)\frac{1-(1+x)^{100}}{1-(1+x)} = \frac{(1+x)^{101}-(1+x)}{x}.$$

+ Hệ số số hạng chứa x^2 của F(x) là C_{101}^3.
+ Hệ số số hạng chứa x^3 của F(x) là C_{101}^4.

Vậy hệ số cần tìm là $2C_{101}^3 + 3C_{101}^4 = 12582075$.

Nhận xét:
Bằng cách tính trực tiếp hệ số của từng số hạng trong tổng ta suy ra đẳng thức:

$$2C_2^2 + 3C_3^2 + 4C_4^2 + ... + 99C_{99}^2 + 100C_{100}^2 = 2C_{101}^3 + 3C_{101}^4.$$

Ví dụ 23*. Tìm hệ số của số hạng chứa x trong khai triển và rút gọn tổng sau:

$$S(x) = (1+x) + 2(1+x)^2 + ... + (n-1)(1+x)^{n-1} + n(1+x)^n.$$

Giải

Ta có:

$$S(x) = (1+x)\left[1 + 2(1+x) + ... + (n-1)(1+x)^{n-2} + n(1+x)^{n-1}\right].$$

Đặt:

$$f(x) = 1 + 2(1+x) + 3(1+x)^2 + ... + (n-1)(1+x)^{n-2} + n(1+x)^{n-1}$$
$$F(x) = (1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + ... + (1+x)^{n-1} + (1+x)^n$$
$$\Rightarrow S(x) = f(x) + xf(x) \text{ và } F^{/}(x) = f(x).$$

Suy ra hệ số của số hạng chứa x của S(x) bằng tổng hệ số số hạng không chứa x và chứa x của f(x), bằng tổng hệ số số hạng chứa x và 2 lần hệ số số hạng chứa x^2 của F(x).
Tổng F(x) có n số hạng nên ta có:

$$F(x) = (1+x)\frac{1-(1+x)^n}{1-(1+x)} = \frac{(1+x)^{n+1}-(1+x)}{x}.$$

+ Hệ số số hạng chứa x của F(x) là C_{n+1}^2.
+ Hệ số số hạng chứa x^2 của F(x) là C_{n+1}^3.

Vậy hệ số cần tìm là $C_{n+1}^2 + 2C_{n+1}^3 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Nhận xét:
Bằng cách tính trực tiếp hệ số của từng số hạng trong tổng ta suy ra đẳng thức:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3.5. Dạng tìm hệ số lớn nhất trong khai triển Newton
Xét khai triển $(a+bx)^n$ có số hạng tổng quát là $C_n^k a^{n-k} b^k x^k$.
Đặt $u_k = C_n^k a^{n-k} b^k,\ 0 \le k \le n$ ta có dãy hệ số là $\{u_k\}$. Để tìm số hạng lớn nhất của dãy ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: giải bất phương trình $\dfrac{u_k}{u_{k+1}} \ge 1$ ta tìm được k_0 và suy ra $u_{k_0} \ge u_{k_0+1} \ge ... \ge u_n$.

Bước 2: giải bất phương trình $\dfrac{u_k}{u_{k+1}} \le 1$ ta tìm được k_1 và suy ra $u_{k_1} \ge u_{k_1-1} \ge ... \ge u_0$.

Bước 3: số hạng lớn nhất của dãy là $\max\{u_{k_0},\ u_{k_1}\}$.

Chú ý:
Để đơn giản trong tính toán ta có thể làm gọn như sau:

Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} u_k \geq u_{k+1} \\ u_k \geq u_{k-1} \end{cases} \Rightarrow k_0$. Suy ra hệ số lớn nhất là $C_n^{k_0} a^{n-k_0} b^{k_0}$.

Ví dụ 24. Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển $(1 + 0,2x)^{17}$.

Giải

Khai triển $(1 + 0,2x)^{17}$ có số hạng tổng quát là $C_{17}^k (0,2)^k x^k$.
Ta có:

$$\begin{cases} C_{17}^k (0,2)^k \geq C_{17}^{k+1} (0,2)^{k+1} \\ C_{17}^k (0,2)^k \geq C_{17}^{k-1} (0,2)^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\dfrac{17!}{k!(17-k)!} \geq \dfrac{17!}{(k+1)!(16-k)!} \\ \dfrac{17!}{k!(17-k)!} \geq 5\dfrac{17!}{(k-1)!(18-k)!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(k+1) \geq 17 - k \\ 18 - k \geq 5k \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq k \leq 3.$$

+ Với k = 2: hệ số là $C_{17}^2 (0,2)^2 = 5,44$.
+ Với k = 3: hệ số là $C_{17}^3 (0,2)^3 = 5,44$.

Vậy hệ số lớn nhất là 5,44.

Ví dụ 25. Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển $\left(1 + \dfrac{2x}{3}\right)^{10}$.

Giải

Khai triển $\left(1 + \dfrac{2x}{3}\right)^{10} = \dfrac{1}{3^{10}}(3 + 2x)^{10}$ có số hạng tổng quát là $\dfrac{1}{3^{10}} C_{10}^k 3^{10-k} 2^k x^k$.
Ta có:

$$\begin{cases} C_{10}^k 3^{10-k} 2^k \geq C_{10}^{k+1} 3^{9-k} 2^{k+1} \\ C_{10}^k 3^{10-k} 2^k \geq C_{10}^{k-1} 3^{11-k} 2^{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\dfrac{10!}{k!(10-k)!} \geq 2\dfrac{10!}{(k+1)!(9-k)!} \\ 2\dfrac{10!}{k!(10-k)!} \geq 3\dfrac{10!}{(k-1)!(11-k)!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(k+1) \geq 2(10-k) \\ 2(11-k) \geq 3k \end{cases} \Leftrightarrow \frac{17}{5} \leq k \leq \frac{22}{5} \Rightarrow k = 4.$$

Vậy hệ số lớn nhất là $\dfrac{1}{3^{10}} C_{10}^4 3^6 2^4 = \dfrac{1120}{27}$.

II. PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp giải toán

Bước 1: đặt điều kiện cho bài toán.
+ P_x có điều kiện là $x \in \mathbb{N}$.
+ A_x^y, C_x^y có điều kiện là $x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{N}$ và $0 \leq y \leq x$.
Bước 2: áp dụng công thức tính để đưa bài toán về phương trình, hệ phương trình quen thuộc.
Bước 3: giải phương trình, hệ phương trình rồi dựa vào điều kiện để chọn nghiệm.

Chú ý:
Do tính chất đặc biệt nghiệm là số tự nhiên nên đôi khi ta phải thử và đoán nghiệm.
Chẳng hạn:

$$x! = 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1.$$
$$(x-5)(x-4)(x-3)(x-2)x = 120 \ (= 6!) \Leftrightarrow x = 6.$$

Ví dụ 26. Giải phương trình $A_{x+1}^{x-1} + 2P_{x-1} = \frac{30}{7}P_x$.

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ x - 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ x \ge 1 \end{cases}$.

Ta có:

$$A_{x+1}^{x-1} + 2P_{x-1} = \frac{30}{7}P_x \Leftrightarrow \frac{(x+1)!}{2!} + 2(x-1)! = \frac{30}{7}x!$$

$$\Leftrightarrow 7(x-1)!x(x+1) + 28(x-1)! - 60(x-1)!x = 0 \Leftrightarrow 7x^2 - 53x + 28 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{4}{7} \\ x = 7 \end{array}\right..$$

So với điều kiện ta được nghiệm là x = 7.

Ví dụ 27. Giải phương trình:

$$C_x^{x-10} + C_x^{x-9} + C_x^{x-8} + \ldots + C_x^{x-2} + C_x^{x-1} = 1023.$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ x - 10 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ x \ge 10 \end{cases}$.

Ta có:

$$C_x^{x-10} + C_x^{x-9} + C_x^{x-8} + \ldots + C_x^{x-2} + C_x^{x-1} = 1023$$
$$\Leftrightarrow C_x^{x-10} + C_x^{x-9} + C_x^{x-8} + \ldots + C_x^{x-2} + C_x^{x-1} + C_x^x = (1+1)^{10} + C_x^x - 1.$$

Vậy x = 10.

Ví dụ 28. Giải hệ phương trình $\begin{cases} A_x^y : P_{y-1} + C_x^{x-y} = 126 \\ P_{y+1} = 720 \end{cases}$.

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x,\ y \in \mathbb{N} \\ 0 \le y \le x \\ y - 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x,\ y \in \mathbb{N} \\ 1 \le y \le x \end{cases}$.

Ta có:

$$\begin{cases} A_x^y : P_{y-1} + C_x^{x-y} = 126 \\ P_{y+1} = 720 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x!}{(x-y)!(y-1)!} + \dfrac{x!}{(x-y)!y!} = 126 \\ (y+1)! = 6! \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x!}{(x-5)!4!} + \dfrac{x!}{(x-5)!5!} = 126 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6.x!}{(x-5)!5!} = 126 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases}.$$