53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Thứ ba, 10/07/2012

Bài 1. Cho tam giác ABC, điểm J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A. Đường tròn bàng tiếp này tiếp xúc với cạnh BC tại M, với đường thẳng AB và AC tại K và L một cách tương ứng. Đường thẳng LM và BJ cắt nhau tại F, và đường thẳng KM và CJ cắt nhau tại G. S là giao điểm của đường thẳng AF và BC, và T là giao điểm của đường thẳng AG và BC.

Chứng minh rằng M là trung điểm của ST.

(Đường tròn *bàng tiếp* góc A của tam giác ABC là đường tròn tiếp xúc với cạnh BC, với tia AB ở phần kéo dài qua B, và với tia AC ở phần kéo dài qua C.)

Bài 2. Cho trước $n \geq 3$ là một số nguyên, và $a_2, a_3, \ldots, a_n$ là các số thực dương thỏa mãn $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Chứng minh rằng

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n \;>\; n^n.$$

Bài 3. Trò chơi *nói dối và đoán* là một trò chơi giữa hai người chơi A và B. Luật chơi dựa trên hai số nguyên dương k và n mà cả hai người chơi đều được biết trước.

Khi bắt đầu trò chơi, A chọn các số nguyên x và N với $1 \leq x \leq N$. Người chơi A giữ bí mật số x, và thông báo số N một cách trung thực cho người chơi B. Bây giờ B tìm cách nhận thông tin về số x bằng cách hỏi người chơi A các câu hỏi như sau: B xác định một tập hợp S các số nguyên dương tùy ý và hỏi A rằng liệu x có thuộc S. Người chơi B có thể hỏi bao nhiêu câu hỏi cũng được, và cũng có thể hỏi lại một câu hỏi nhiều lần, vào bất cứ lúc nào mà anh ta muốn. Người chơi A phải trả lời mỗi câu hỏi của B ngay lập tức bằng "*đúng*" hoặc "*sai*", nhưng anh ta được phép nói dối nhiều lần một cách tùy ý. Sự hạn chế duy nhất ở đây là trong bất kỳ $k+1$ câu trả lời liên tiếp nào cũng phải có ít nhất một câu trả lời thật.

Sau khi B đã đặt nhiều câu hỏi như anh ta muốn, anh ta phải xác định một tập hợp X có không quá n số nguyên dương. Nếu x thuộc X thì B thắng cuộc; còn nếu ngược lại, anh ta thua cuộc. Chứng minh rằng:

1. Nếu $n \geq 2^k$, thì B có thể bảo đảm thắng cuộc.

2. Với tất cả số k đủ lớn, tồn tại $n \geq 1,99^k$ sao cho B không thể thắng cuộc.

Thời gian làm bài: 4 giờ 30 phút
Mỗi bài được tối đa 7 điểm

53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: **Vietnamese**

Day: 2

Thứ tư, 11/07/2012

Bài 4. Tìm tất cả các hàm số $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sao cho với tất cả số nguyên a, b, c thỏa mãn $a+b+c=0$ đẳng thức sau đây đúng:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \;=\; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

(Ở đây, $\mathbb{Z}$ ký hiệu tập hợp các số nguyên.)

Bài 5. Cho tam giác ABC với $\angle BCA = 90^\circ$, và D là chân đường cao hạ từ C. Cho X là một điểm nằm ở miền trong đoạn thẳng CD. Cho K là điểm trên đoạn thẳng AX sao cho $BK = BC$. Tương tự, L là điểm nằm trên đoạn thẳng BX sao cho $AL = AC$. Cho M là giao điểm của AL và BK.

Chứng minh rằng $MK = ML$.

Bài 6. Tìm tất cả số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thỏa mãn

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \;=\; \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} \;=\; 1.$$