

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI IMO CỦA VIỆT NAM NĂM 2012

Ngày 1 – 16/04/2012. Thời gian làm bài: 270 phút

Bài 1 (7 điểm). Cho đường tròn (O) và hai điểm cố định B, C trên đường tròn sao cho BC không là đường kính của (O) . A là một điểm di động trên đường tròn, A không trùng B, C . Gọi D, K, J lần lượt là trung điểm BC, CA, AB và E, M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên BC, DJ, DK . Các tiếp tuyến tại M, N của đường tròn ngoại tiếp tam giác EMN cắt nhau tại T . Chứng minh T là điểm cố định.

Bài 2 (7 điểm). Trên một cánh đồng hình chữ nhật kích thước $m \times n$ ô vuông gồm m hàng và n cột người ta đặt một số máy bơm nước vào các ô vuông. Biết rằng mỗi máy bơm nước có thể tưới nước cho các ô vuông có chung cạnh với nó và các ô vuông cùng cột với nó và cách nó đúng một ô vuông. Tìm số nhỏ nhất các máy bơm nước sao cho các máy bơm nước có thể tưới hết cả cánh đồng trong hai trường hợp

i) $m = 4$

ii) $m = 3$.

Bài 3 (7 điểm). Cho số nguyên tố $p \geq 17$. Chứng minh rằng $t = 3$ là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn điều kiện: với các số nguyên bất kỳ a, b, c, d sao cho $p \nmid abc$ và $p \mid a + b + c$ thì tồn tại các số nguyên x, y, z thuộc tập $\{0, 1, 2, \dots, \lfloor \frac{p}{t} \rfloor - 1\}$ sao cho $p \mid ax + by + cz + d$.

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI IMO CỦA VIỆT NAM NĂM 2012

Ngày 2 – 17/04/2012. Thời gian làm bài: 270 phút

Bài 4 (7 điểm). Cho dãy $\{x_n\}_{n \geq 1}$ xác định bởi

$$x_1 = 1, x_2 = 2011, x_{n+2} = 4022x_{n+1} - x_n.$$

Chứng minh rằng số $\frac{x_{2012}+1}{2012}$ là một số chính phương.

Bài 5 (7 điểm). Chứng minh rằng $c = 10\sqrt{24}$ là hằng số lớn nhất thỏa mãn điều kiện: nếu có các số dương a_1, a_2, \dots, a_{17} sao cho

$$\sum_{i=1}^{17} a_i^2 = 24; \quad \sum_{i=1}^{17} a_i^3 + \sum_{i=1}^{17} a_i < c$$

thì với mọi i, j, k thỏa mãn $1 \leq i < j < k \leq 17$ ta luôn có x_i, x_j, x_k là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Bài 6 (7 điểm). Có 42 học sinh tham dự kì thi chọn đội tuyển Olympic toán quốc tế. Biết rằng một học sinh bất kì quen đúng 20 học sinh khác. Chứng minh rằng ta có thể chia 42 học sinh thành 2 nhóm hoặc 21 nhóm sao cho số học sinh trong các nhóm bằng nhau và 2 học sinh bất kì trong cùng nhóm thì quen nhau.

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.