SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP. CẦN THƠ
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÝ TỰ TRỌNG

❑ Câu 1

Giải phương trình sau trên tập số thực:

$$x^3 - 15x^2 + 78x - 141 = 5\sqrt[3]{2x - 9}.$$

❑ Câu 2

Cho số nguyên dương n và $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ là 4 ước số nguyên dương nhỏ nhất của n. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$.

❑ Câu 3

Trong mặt phẳng cho góc xOy và hai điểm A nằm trên tia Ox, B nằm trên Oy sao cho tam giác OAB cân tại O. Δ là một đường thẳng di động không đi qua O, nhưng luôn đi qua trung điểm I của AB và cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại các điểm C, D. Gọi M là trung điểm của CD, N là giao điểm của OM và AB, H là hình chiếu vuông góc của N trên CD. Khi Δ di động, hãy tìm quỹ tích của điểm H.

❑ Câu 4

Cho a, b, c là ba số thực không âm thỏa mãn $a^2 + 4b^2 + 9c^2 = 14$.

Chứng minh: $3b + 8c + abc \le 12$.

❑ Câu 5

Chứng minh rằng từ 2011 số nguyên dương bất kì luôn có thể chọn ra được hai số mà tổng hoặc hiệu của chúng chia hết cho 4018.

❑ Câu 6

Cho elip (E): $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ và đường thẳng $(\Delta): \sqrt{2}x-2y+4=0$.

Gọi B, C là giao điểm của (Δ) và (E), $y_B > y_C$ và A là điểm trên (E) sao cho khoảng cách từ A tới (Δ) là lớn nhất. Tìm điểm M trên (E) để khoảng cách từ M tới đường thẳng AB là lớn nhất.

❑ Câu 1

Phương trình đã cho tương đương

$$(x-5)^3 = -3x + 5\left(5 + \sqrt[3]{2x-9}\right) - 9$$

Đặt $y = 5 + \sqrt[3]{2x-9}$, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}(x-5)^3 = -3x + 5y - 9 & (1)\\ (y-5)^3 = 2x - 9 & (2)\end{cases}$$

Trừ theo vế phương trình (1) và (2), ta được:

$$(x-5)^3 - (y-5)^3 = -5x + 5y$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[(x-5)^2 + (x-5)(y-5) + (y-5)^2 + 5\right] = 0 \qquad (3)$$

Do $\quad (x-5)^2 + (x-5)(y-5) + (y-5)^2 + 5 =$

$$= \left(x - 5 + \frac{1}{2}(y-5)\right)^2 + \frac{3}{4}(y-5)^2 + 5 > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Nên phương trình (3) tương đương $x = y$

Từ (2) suy ra $(x-5)^3 = 2x - 9 \Leftrightarrow x^3 - 15x^2 + 73x - 116 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x^2 - 11x + 29) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \dfrac{11 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{4;\ \dfrac{11-\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{11+\sqrt{5}}{2}\right\}$

❑ Câu 2

Lưu ý rằng $x^2 \equiv 0 \pmod 4$ khi x chẵn, $x^2 \equiv 1 \pmod 4$ khi x lẻ.

Nếu n là số lẻ thì tất cả các số d_i đều lẻ và

$$n \equiv d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 \equiv 1 + 1 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod 4$$

(điều này mâu thuẫn).

Vậy ta có $n = 2k$.

Nếu 4 là ước của n thì $d_1 = 1$ và $d_2 = 2$, $n \equiv 1 + 0 + d_3^2 + d_4^2$ không chia hết cho 4 (điều này mâu thuẫn). Vậy ta có n không chia hết cho 4.

Như vậy $\{d_1, d_2, d_3, d_4\} = \{1, 2, p, q\}$

hoặc $\{d_1, d_2, d_3, d_4\} = \{1, 2, p, 2p\}$ với p, q là các số nguyên tố.

Trong trường hợp $\{d_1, d_2, d_3, d_4\} = \{1, 2, p, q\}$ ta có $n \equiv 3 \pmod 4$ (mâu thuẫn)

Vậy $n = 5(1 + p^2)$ và n chia hết cho 5, nên $p = d_3 = 5$ và $n = 130$.

❑ Câu 3

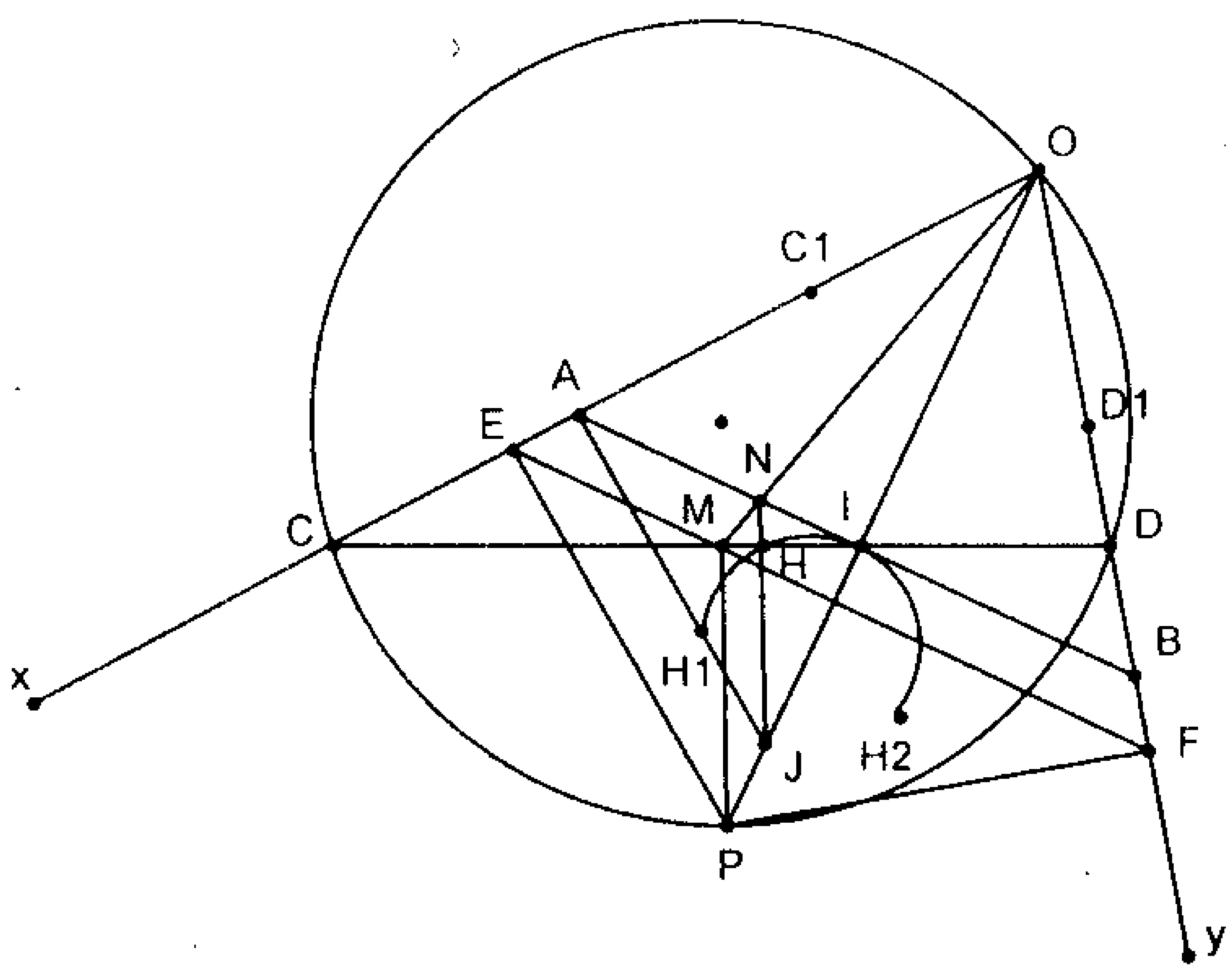
• Chứng minh phần thuận:

Gọi:

+ P là giao điểm của tia OI với đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác OCD.

+ J là giao điểm của tia OI với đường thẳng vuông góc tia Ox tại A.

+ E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên tia Ox, Oy.



Từ giả thiết ta có:

– Nếu $C \equiv A$, kéo theo $D \equiv B$ (hoặc ngược lại) thì $M \equiv N \equiv H \equiv I$.

– Nếu $C \neq A$ và $D \neq B$, khi đó:

+ Tia OI là phân giác của góc $\widehat{AOB} \Rightarrow$ P là trung điểm cung $\overset{\frown}{CD}$ của (C) $\Rightarrow PM \perp CD$. Từ đó E, M, F thuộc đường thẳng Simson của điểm P đối với tam giác OCD

+ Cũng do tia OI là phân giác của $\widehat{AOB}$ nên $EF \perp OI \Rightarrow EF \,//\, AB$

+ AJ, EP cùng vuông góc với Ox nên $AJ \,//\, EP$.

Từ đó theo định lý Thales ta có:

$$\frac{OJ}{OP} = \frac{OA}{OE} = \frac{ON}{OM} \Rightarrow NJ \,//\, PM \Rightarrow NJ \perp CD \Rightarrow \text{ N, H, J thẳng hàng.}$$

Vậy H nằm trên đường tròn (T) đường kính IJ. Do các tia Ox, OI và các điểm A, B cố định nên I, J cố định $\Rightarrow$ (T) cố định.

- Giới hạn quỹ tích:

  Gọi: C_1, D_1 lần lượt là các điểm thuộc Ox. Oy sao cho IC_1 // Oy và ID_1 // Ox; H_1, H_2 lần lượt là giao điểm của (T) với IC_1 và ID_1. Khi đó C chỉ có thể nằm ngoài đoạn OC_1 và D chỉ có thể nằm ngoài đoạn OD_1. Suy ra H thuộc cung $\overset{\frown}{H_1H_2}$ chứa I của đường tròn (T) (trừ 2 điểm H_1, H_2).

- Chứng minh phần đảo:

  Trên cung $\overset{\frown}{H_1H_2}$ chứa I của đường tròn (T) ta lấy điểm H'. Gọi C', D' là giao điểm của IH' lần lượt với Ox, Oy; P' là giao điểm của tia OI với đường tròn ngoại tiếp $\Delta OC'D'$; E', F' lần lượt là hình chiếu vuông góc của P' trên Ox, Oy; N' là giao điểm của JH' với AB; M' là trung điểm của C'D'. Ta cần chứng minh O, N', M' thẳng hàng.

  Thật vậy gọi N" là giao điểm của OM' với AB. Khi đó theo chứng minh phần thuận ta có:

  $$\frac{OJ'}{OP'}=\frac{OA}{OE'}=\frac{ON''}{OM'} \Rightarrow N''J // P'M'$$

  $$\Rightarrow N''J \perp C'D' \Rightarrow N'', H', J \text{ thẳng hàng } \Rightarrow N'' \equiv N'$$

  Vậy O, N', M' thẳng hàng (đpcm).

- Kết luận: Quỹ tích H là cung $\overset{\frown}{H_1H_2}$ chứa I của đường tròn (T) (trừ 2 điểm H_1, H_2).

❑ Câu 4

Bất đẳng thức đã cho tương đương: $6b + 16c + 2abc \le 24$ (1)

+ Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$6b + 16c \le 3(b^2+1) + 8(c^2+1) = 11 + 3b^2 + 8c^2$$
$$= 11 + (a^2 + 4b^2 + 9c^2) - a^2 - b^2 - c^2 = 25 - a^2 - b^2 - c^2$$

Nên để chứng minh (1) ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức:

$$a^2 + b^2 + c^2 - 1 \ge 2abc \text{ (2), với a, b, c không âm.}$$

+ Do giả thiết $a^2 + 4b^2 + 9c^2 = 14$, bất đẳng thức (2) có thể viết lại như sau:

$$14(a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 + 4b^2 + 9c^2) \ge 28abc$$
$$\Leftrightarrow 13a^2 + 10b^2 + 5c^2 \ge 28abc$$
$$\Leftrightarrow (13a^2 + 10b^2 + 5c^2)\sqrt{a^2 + 4b^2 + 9c^2} \ge 28\sqrt{14}abc.$$

+ Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 28 số ta có:

$$13a^2+10b^2+5c^2 \geq 28\sqrt[28]{(a^2)^{13}(b^2)^{10}(c^2)^5} = 28\sqrt[14]{a^{13}b^{10}c^5}$$

và: $$a^2+4b^2+9c^2 \geq 14\sqrt[14]{a^2(b^2)^4(c^2)^9} = 14\left(\sqrt[14]{ab^4c^9}\right)^2$$

+ Do đó:

$$(13a^2+10b^2+5c^2)\sqrt{a^2+4b^2+9c^2}$$
$$\geq 28\sqrt[14]{a^{13}b^{10}c^5}\sqrt{14\left(\sqrt[14]{ab^4c^9}\right)^2} = 28\sqrt{14}abc.$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $(a,b,c)=(1,1,1)$.

Bài toán được chứng minh xong.

❑ Câu 5

Khi chia một số nguyên dương bất kì cho 4018 thì các số dư phải thuộc tập $\{0,1,...,4017\}$.

Trong các số dư trên ta chia thành từng nhóm sau:

+ Nhóm thứ nhất gồm những số khi chia 4018 có số dư bằng 0
+ Nhóm thứ hai gồm những số khi chia 4018 có số dư bằng 1 hoặc bằng 4017.
+ Nhóm thứ ba gồm những số khi chia 4018 có số dư bằng 2 hoặc bằng 4016.

.....

+ Nhóm thứ 2009 gồm những số khi chia 4018 có số dư bằng 2008 hoặc bằng 2010.
+ Nhóm thứ 2010 gồm những số khi chia 4018 có số dư bằng 2009.

Như vậy có tất cả 2010 nhóm, mà lại có 2011 số nên theo nguyên lí Dirichlet giữa chúng phải có hai số mà số dư trong phép chia cho 4018 rơi vào cùng một nhóm.

Đây là hai số cần tìm vì nếu hai số này có số dư bằng nhau thì hiệu của chúng chia hết cho 4018, nếu chúng có số dư khác nhau thì tổng của chúng chia hết cho 4018.

❑ Câu 6

Gọi $A(2\sqrt{2}\sin t;\ 2\cos t) \in (E),\ t \in [0;\ 2\pi]$,

Ta có $d(A,(\Delta)) = \dfrac{|4\sin t - 4\cos t + 4|}{\sqrt{6}} = \dfrac{\left|4\sqrt{2}\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)+4\right|}{\sqrt{6}}$

Như vậy d(A; (Δ)) lớn nhất khi

$$\sin(t-\frac{\pi}{4})=1\Rightarrow t=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow A(2;-\sqrt{2});$$

$$d(A;(\Delta))=0\ \Rightarrow \sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\left[\begin{array}{l} t=0\Rightarrow B(0;\ 2) \\ t=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow C(-2\sqrt{2};\ 0)\end{array}\right.$$

Phương trình (AB): $\left(2+\sqrt{2}\right)x+2y-4=0$

$$d(M,(AB))=\frac{\left|\left(2+\sqrt{2}\right)2\sqrt{2}\sin t+4\cos t-4\right|}{\sqrt{10+4\sqrt{2}}}=\frac{\left|8\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{8}\right)\cos\frac{\pi}{8}-4\right|}{\sqrt{10+4\sqrt{2}}}$$

như vậy d(M,(AB) lớn nhất khi

$$\sin(t+\frac{\pi}{8})=-1\Rightarrow t=\frac{11\pi}{8}\Rightarrow M(-2\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{8};-2\cos\frac{3\pi}{8})$$