**ĐỀ THI CHÍNH THỨC**

# SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP. CẦN THƠ
# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÝ TỰ TRỌNG

**Câu 1**

Giải phương trình sau trên tập số thực:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right]=2+\sqrt{1-x^2}.$$

**Câu 2**

Cho p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn hệ thức: $x^p+y^p=p\left[(p-1)!\right]^p$.

**Câu 3**

Qua điểm S bất kì thuộc mặt cầu bán kính R ta dựng các đường thẳng đôi một hợp với nhau một góc $\alpha$, cắt mặt cầu tại các điểm A, B, C (khác S) sao cho SA = SB = SC. Xác định $\alpha$ để thể tích khối chóp S.ABC lớn nhất.

**Câu 4**

Cho tam giác ABC không tù nội tiếp đường tròn tâm O bán kính bằng 1. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và $A_0$, $B_0$, $C_0$ lần lượt là hình chiếu của G lên BC, CA, AB. Các đường thẳng qua A, B, C lần lượt vuông góc với GA, GB, GC và đôi một cắt nhau tại $A_1$, $B_1$, $C_1$ ($A\in B_1C_1$, $B\in A_1C_1$, $C\in A_1B_1$). Gọi $S_0$, $S_1$ lần lượt là diện tích các tam giác $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_1$.

Chứng minh $\dfrac{32}{27}\le S_0.S_1\le\dfrac{27}{16}$.

**Câu 5**

Cho dãy số $(x_n)$ xác định bởi $\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{4} \\ x_n=\dfrac{x_1+4x_2+9x_3+\ldots+(n-1)^2x_{n-1}}{n^2(n-1)} \end{cases}$

với mọi số nguyên dương n lớn hơn 1. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(30n^2-4n+2011\right)x_n$.

**Câu 6**

Tìm tất cả các hàm số $f:[1;+\infty)\to[1;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xf(y))=yf(x)\quad \forall x,y\in[1;+\infty)$$

# SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP. CẦN THƠ
# TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÝ TỰ TRỌNG

## ❑ Câu 1

Điều kiện: $-1 \le x \le 1$

Đặt $x = \cos t,\ 0 \le t \le \pi$.

Ta được phương trình:

$$\sqrt{1+\sin t}\left[\sqrt{(1+\cos t)^3} - \sqrt{(1-\cos t)^3}\right] = 2 + \sin t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}\right)^2}\left[\cos^3\frac{t}{2} - \sin^3\frac{t}{2}\right]2\sqrt{2} = 2 + \sin t$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}\right)\left(1 + \cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\right)2\sqrt{2} = 2 + \sin t$$

$$\Leftrightarrow \cos t(2 + \sin t)\sqrt{2} = 2 + \sin t$$

$$\Leftrightarrow (2 + \sin t)\left(\sqrt{2}\cos t - 1\right) = 0$$

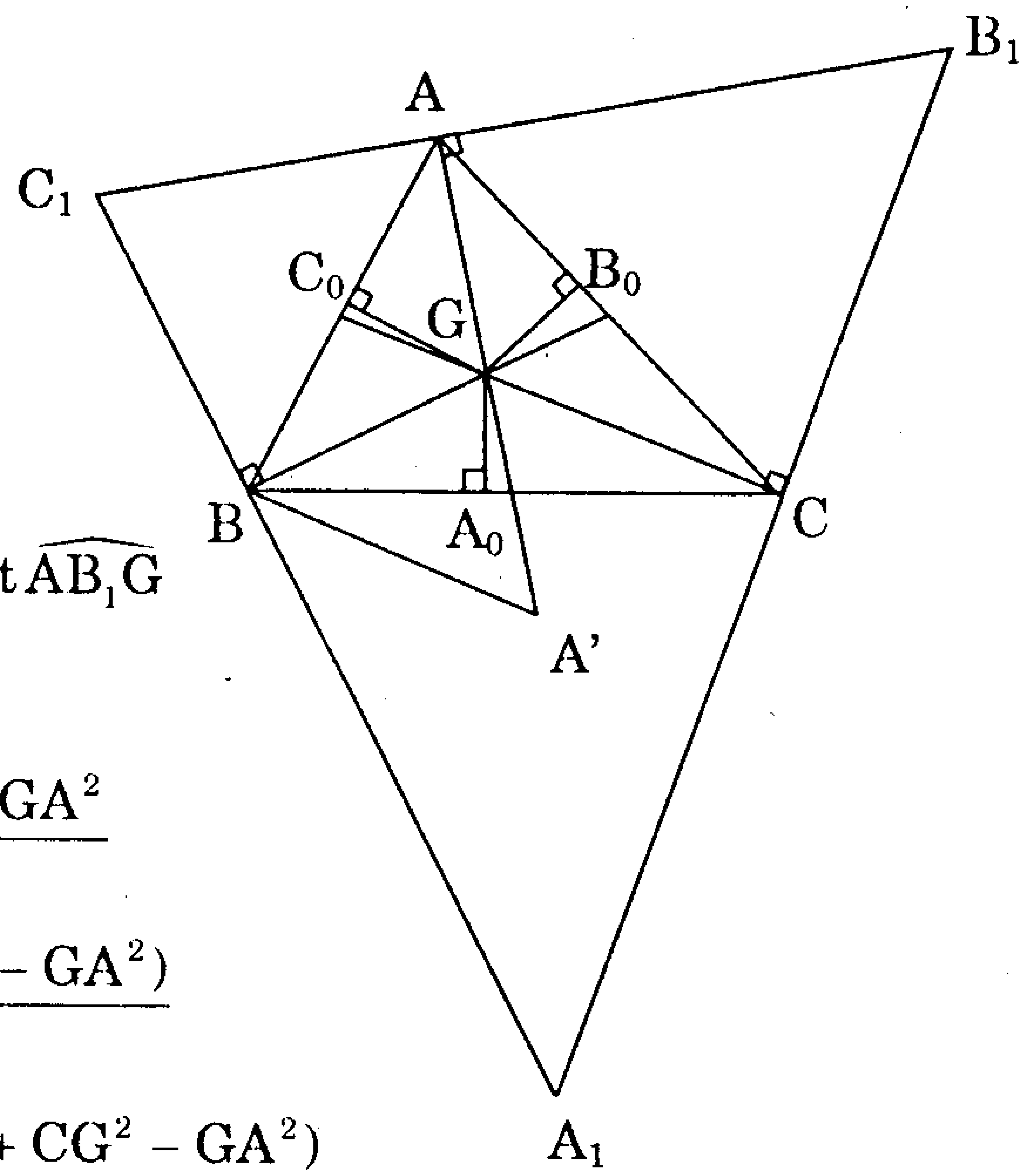
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos t - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos t = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

## ❑ Câu 2

- Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng.
  Giả sử tồn tại x, y nguyên sao cho $x^p + y^p = p[(p-1)!]^p$
- Từ giả thiết phản chứng, suy ra: $x^p + y^p \equiv 0 \pmod p$
  Lại theo định lý Fermat, ta có: $x^p \equiv x \pmod p$; $y^p \equiv y \pmod p$
  $\Rightarrow\ x^p + y^p \equiv x + y \pmod p$
  Do đó: $x + y \equiv 0 \pmod p$ hay $x \equiv -y \pmod p$ (1)
- Ngoài ra: $x^p + y^p = (x + y)(x^{p-1} - x^{p-2}.y + x^{p-3}.y^2 - \ldots + y^{p-1})$ (2)
  Từ (1) suy ra: $\begin{cases} x^{p-2k} \equiv -y^{p-2k} \pmod p \\ x^{p-(2k+1)} \equiv y^{p-(2k+1)} \pmod p \end{cases}$ (k nguyên dương)

  Do đó: $x^{p-1} - x^{p-2}.y + x^{p-3}.y^2 - \ldots + y^{p-1}$
  $\equiv y^{p-1} + y^{p-2}.y + y^{p-3}.y^2 + \ldots + y^{p-1} \pmod p$
  $\equiv p.y^{p-1} \pmod p$
  $\equiv 0 \pmod p$ (3)

❑ **Câu 4**




Gọi A' là điểm đối xứng với A qua G.

Ta có $\Delta A_1B_1C_1$ đồng dạng $\Delta BA'G$,

suy ra tỉ số đồng dạng là

$$\frac{B_1C_1}{A'G}=\frac{B_1C_1}{AG}=\cot\widehat{AC_1G}+\cot\widehat{AB_1G}$$

Mà $\cot\widehat{AC_1G}=\cot\widehat{ABG}$

$$=\frac{AB^2+BG^2-GA^2}{4S_{ABG}}$$

$$=\frac{3(AB^2+BG^2-GA^2)}{4S_{ABC}}$$

Tương tự $\cot\widehat{AB_1G}=\dfrac{3(AC^2+CG^2-GA^2)}{4S_{ABC}}$

Suy ra $\cot\widehat{AC_1G}+\cot\widehat{AB_1G}=\dfrac{BC^2+CA^2+AB^2}{2S_{ABC}}$ là tỉ số đồng dạng.

Mà $S_{A'BG}=\dfrac{S_{ABC}}{3}$, ta được $\dfrac{3S_1}{S_{ABC}}=\left(\dfrac{BC^2+CA^2+AB^2}{2S_{ABC}}\right)^2$

Ta có: $BC^2+CA^2+AB^2=9(R^2-OG^2)$ (R là bán kính đường tròn (O))

Suy ra

$$S_{ABC}.S_1=\frac{\left(BC^2+CA^2+AB^2\right)^2}{12}=\frac{81(R^2-OG^2)^2}{12}=\frac{27}{4}(R^2-OG^2)^2 \quad (1)$$

Mặt khác, theo định lí Euler cho tam giác Pedal $A_0B_0C_0$, ta có

$$\frac{S_{A_0B_0C_0}}{S_{ABC}}=\left|\frac{R^2-OG^2}{4R^2}\right|$$

Do điểm G luôn nằm trong tam giác ABC nên $R\ge OG$

$$\Rightarrow \frac{S_{A_0B_0C_0}}{S_{ABC}}=\frac{R^2-OG^2}{4R^2} \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có $S_0S_1=\dfrac{27}{4}(R^2-OG^2)^2\dfrac{R^2-OG^2}{4R^2}=\dfrac{27(R^2-OG^2)^3}{16R^2}$ (3)

Ta có $S_1.S_0 = \dfrac{27(R^2 - OG^2)^3}{16R^2} \le \dfrac{27R^4}{16} = \dfrac{27}{16}$ $(R = 1)$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $O \equiv G$, hay $\Delta ABC$ đều. (4)

Trong mọi tam giác ta luôn có $9OG^2 = R^2(1 - 8\cos A.\cos B.\cos C)$

Vì tam giác ABC không tù nên $8\cos A.\cos B.\cos C \ge 0 \Rightarrow OG^2 \le \dfrac{R^2}{9}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC vuông (5)

Từ (3), (5) $\Rightarrow S_1S_0 \ge \dfrac{27\left(R^2 - \dfrac{R^2}{9}\right)^3}{16R^2} = \dfrac{32}{27}$ (do R = 1). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\Delta ABC$ vuông. (6)

Từ (4), (6) ta có điều phải chứng minh.

❑ **Câu 5**

Từ (1), với n > 1, ta có $x_1 + 4x_2 + 9x_3 + ... + (n-1)^2 x_{n-1} = n^2(n-1)x_n$

Tức $x_1 + 4x_2 + 9x_3 + ... + (n-1)^2 x_{n-1} + n^2x_n = n^3x_n$ (2)

Lại có $x_1 + 4x_2 + 9x_3 + ... + (n-1)^2 x_{n-1} = (n-1)^3 x_{n-1}$ (3)

Từ (2) và (3) ta có $n^2x_n = n^3x_n - (n-1)^3x_{n-1}$

Hay $(n-1)^3x_{n-1} = (n^3 - n^2)x_n$

$$\Leftrightarrow x_n = \frac{(n-1)^2}{n^2}x_{n-1} \Leftrightarrow x_n = \frac{(n-1)^2}{n^2}\frac{(n-2)^2}{(n-1)^2}...\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 x_1$$

$$\Leftrightarrow x_n = \frac{1}{n^2}x_1$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(30n^2 - 4n + 2011\right)x_n =$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(30n^2 - 4n + 2011\right)\frac{x_1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(30n^2 - 4n + 2011\right)}{n^2}.\frac{1}{4} = \frac{30}{4}$$

❑ **Câu 6**

Giả sử có $y_1, y_2 \in [1;+\infty) : f(y_1) = f(y_2)$

$$\Rightarrow xf(y_1) = xf(y_2) \quad \forall x \in [1;+\infty)$$

$$\Rightarrow f(xf(y_1)) = f(xf(y_2))$$

$$\Rightarrow y_1f(x) = y_2f(x) \Rightarrow y_1 = y_2$$

Vậy f đơn ánh

Từ điều kiện bài toán cho $x = y = 1$, ta được $f(f(1)) = f(1) \Rightarrow f(1) = 1$

Cũng từ điều kiện bài toán cho $x = 1$được $f(f(y)) = y \ \forall y \in [1;+\infty)$

Hay $f(f(x)) = x \ \forall x \in [1;+\infty)$

Từ điều kiện bài toán, thay y bởi f(y) ta được

$$f(xf(f(y))) = f(y)f(x) \ \forall x,y \in [1;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow f(xy) = f(y)f(x) \ \forall x,y \in [1;+\infty)$$

Mặt khác f tăng trên $[1;+\infty)$, thật vậy

$$\forall x,y \in [1;+\infty) : x > y$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} > 1 \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) > 1 \Rightarrow f(x) = f(\frac{x}{y}.y) = f(\frac{x}{y})f(y) > f(y)$$

Cuối cùng chứng minh $f(x) = x \ \forall x \in [1;+\infty)$

Nếu $f(x) > x$ thì $f(f(x)) > f(x) \Rightarrow x > f(x)$. Vô lí

Nếu $f(x) < x$ thì $f(f(x)) < f(x) \Rightarrow x < f(x)$. Vô lí

Thử lại $f(x) = x \ \forall x \in [1;+\infty)$ thỏa yêu cầu bài toán.