BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

BẢN CHÍNH

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA

LỚP 12 THPT NĂM 2010

Môn: TOÁN

Thời gian: **180** phút (*không kể thời gian giao đề*)

Ngày thi: **11/3/2010**

Câu 1. (*4 điểm*)

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ x^3 - 2y^3 = 3(x^2 - 4y^2) - 4(x - 8y). \end{cases}$$

Câu 2. (*5 điểm*)

Cho dãy số thực (a_n) xác định bởi

$$a_1 = 5 \text{ và } a_n = \sqrt[n]{a_{n-1}^{n-1} + 2^{n-1} + 2.3^{n-1}} \quad \text{với mọi } n \geq 2.$$

1/ Tìm số hạng tổng quát của dãy số (a_n).

2/ Chứng minh rằng (a_n) là dãy số giảm.

Câu 3. (*5 điểm*)

Trong mặt phẳng, cho đường tròn (O) và hai điểm cố định B, C nằm trên đường tròn đó sao cho dây BC không là đường kính. Xét một điểm A di động trên (O) sao cho $AB \neq AC$ và A không trùng với B, C. Gọi D và E lần lượt là giao điểm của đường thẳng BC với đường phân giác trong và đường phân giác ngoài của góc $\widehat{BAC}$. Gọi I là trung điểm của DE. Đường thẳng đi qua trực tâm của tam giác ABC và vuông góc với AI cắt các đường thẳng AD và AE tương ứng tại M và N.

1/ Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

2/ Xác định vị trí của điểm A sao cho tam giác AMN có diện tích lớn nhất.

Câu 4. (*3 điểm*)

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, phương trình

$$x^2 + 15y^2 = 4^n$$

có ít nhất n nghiệm tự nhiên (x, y).

Câu 5. (*3 điểm*)

Cho số nguyên dương n. Cho bảng ô vuông kích thước 3×3. Người ta dùng n màu để tô tất cả các ô vuông con của bảng sao cho trong mỗi cách tô, mỗi ô vuông con được tô bởi một màu.

Hai cách tô màu được coi là như nhau nếu cách tô màu này có thể nhận được từ cách tô màu kia nhờ một phép quay quanh tâm của bảng ô vuông.

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách tô màu đôi một không như nhau ?

(*Lưu ý*: Trong một cách tô không nhất thiết phải dùng đủ n màu).

---------------------------HẾT---------------------------

- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- *Giám thị không giải thích gì thêm.*