

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7 điểm)

Câu I (2 điểm) Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x-2}$ (H)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (H) của hàm số đã cho.
2. Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng $y = 2x + m$ luôn cắt đồ thị (H) tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi d_1, d_2 là các tiếp tuyến với (H) tại A và B. Tìm m để I(2;1) cách đều d_1, d_2 .

Câu II (2 điểm)

1. Giải phương trình: $\frac{(\cos x + \sin x)(2 \sin 2x + 1) + 4 \cos 2x}{(\cos x - \sin x)(2 \sin 2x + 1) + 2} = \sqrt{3}$.
2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x-y} + \sqrt{x-2} = 2 \\ \sqrt{x^2 + y^2 - xy(x-y)} + \sqrt{xy - y^2} = 2\sqrt{2}(x-y-1) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu III (1 điểm) Tính tích phân: $I = \int_1^e \frac{x^2(2 \ln^2 x - \ln x - 4)}{\sqrt{\ln x + 1}} dx$.

Câu IV (1 điểm) Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DC, AD. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABCD) trùng với giao điểm của AM và BN. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD'A') và (ABCD) bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách giữa hai đường thẳng BN, B'C theo a.

Câu V (1 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$ab + bc + ca + 3 \geq a^2b + b^2c + c^2a + 3abc.$$

II. PHẦN RIÊNG (3 điểm) Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần

1. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C): $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$ và hai điểm $B(4;1), C(8;3)$. Tìm tọa độ điểm A nằm trên đường tròn (C) sao cho tam giác ABC vuông tại A.

2. Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A\left(-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$, vuông góc với mặt phẳng (P): $2x + 2y - z + 1 = 0$ và tiếp xúc với mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 1$.

Câu VII.a (1 điểm) Tìm số phức z sao cho $|z - (3 + 4i)| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ đạt giá trị lớn nhất.

2. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm $A(5;4), B(1;6)$ và tiếp xúc với đường thẳng d: $x - 3y - 3 = 0$.

2. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng (Δ) đi $B(2;1;2)$, đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng $d_1: \frac{x+2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+4}{4}$. Đường thẳng d_2 cắt (Δ) tại M, đi qua $N(2;2;0)$ và tiếp xúc với mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Tìm tọa độ điểm M.

Câu VII.b (1 điểm) Giải phương trình: $(\sqrt{3})^{\sqrt{2x-1}} + \log_{\frac{1}{3}} 2 = \log_3(x + \sqrt{2x-1}) + 1$.

----- Hết -----