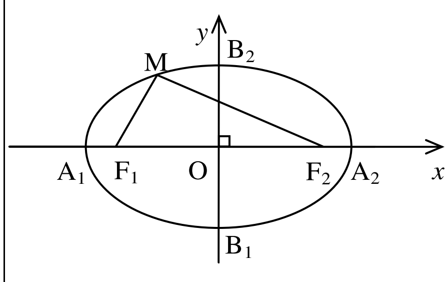
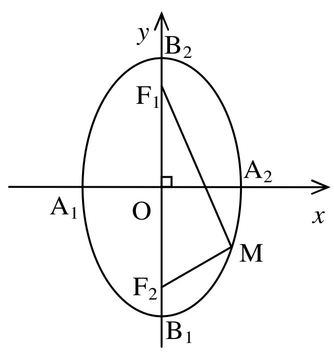
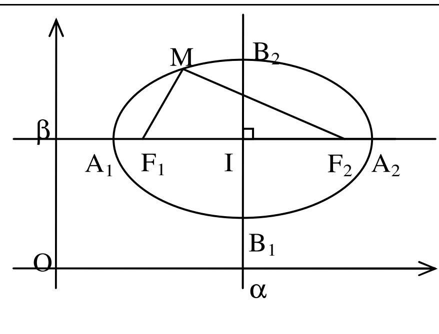
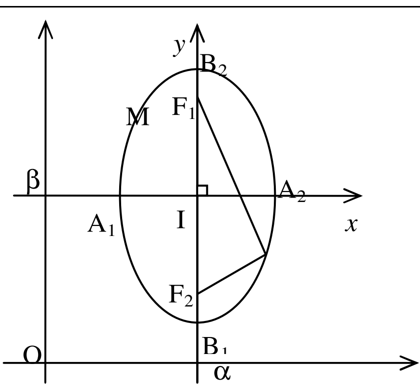
BÀI 4. ĐƯỜNG ELIP

I. CÁC DẠNG ELIP VÀ ĐẶC ĐIỂM

Trục lớn	Hình dạng Elip	Phương trình và các yếu tố trong Elip
Ox ($a > b$)		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; a^2=b^2+c^2;\ e=\frac{c}{a}$. $F_1(-c;0); F_2(c;0)$. Tiêu cự: $F_1F_2=2c$. $A_1(-a;0)$; $A_2(a;0)\in$ Trục lớn. $A_1A_2=2a$. $B_1(0;-b)$; $B_2(0;b)\in$ Trục nhỏ. $B_1B_2=2b$. $\begin{cases}MF_1=a+ex\\MF_2=a-ex\end{cases}$; Đường chuẩn $x=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{a}{e}$
Oy ($a < b$)		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; b^2=a^2+c^2;\ e=\frac{c}{b}$. $F_1(0;-c); F_2(0;c)$. Tiêu cự: $F_1F_2=2c$. $A_1(-a;0)$; $A_2(a;0)\in$ Trục nhỏ. $A_1A_2=2a$. $B_1(0;-b)$; $B_2(0;b)\in$ Trục lớn. $B_1B_2=2b$. $\begin{cases}MF_1=b+ey\\MF_2=b-ey\end{cases}$; Đg chuẩn $y=\pm\frac{b^2}{c}=\pm\frac{b}{e}$
$y=\beta$ ($a > b$)		$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1; a^2=b^2+c^2;\ e=\frac{c}{a}$ $F_1(\alpha-c;\beta); F_2(\alpha+c;\beta)$; $F_1F_2=2c$. $A_1(\alpha-a;\beta); A_2(\alpha+a;\beta)\in$ $A_1A_2=2a$. $B_1(\alpha;\beta-b); B_2(\alpha;\beta+b)\in$ $B_1B_2=2b$. $\begin{cases}MF_1=a+e(x-\alpha)\\MF_2=a-e(x-\alpha)\end{cases}$; Đg chuẩn $x=\pm\frac{a^2}{c}+\alpha$
$x=\alpha$ ($a < b$)		$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1; b^2=a^2+c^2;\ e=\frac{c}{b}$ $F_1(\alpha;\beta-c); F_2(\alpha;\beta+c)$; $F_1F_2=2c$. $A_1(\alpha-a;\beta); A_2(\alpha+a;\beta)\in$ $A_1A_2=2a$. $B_1(\alpha;\beta-b); B_2(\alpha;\beta+b)\in$ $B_1B_2=2b$. $\begin{cases}MF_1=b+e(y-\beta)\\MF_2=b-e(y-\beta)\end{cases}$; Đg chuẩn $y=\pm\frac{b^2}{c}+\beta$

II. XÁC ĐỊNH PHƯƠNG TRÌNH ELIP THEO CÁC YẾU TỐ

Bài 1. Viết phương trình elip (E) biết 2 tiêu điểm $F_1(-8; 0)$; $F_2(8; 0)$ và e = 4/5

Bài 2. Viết phương trình elip (E) biết 2 tiêu điểm $F_1(0; -4)$; $F_2(0; 4)$ và e = 4/5

Bài 3. Viết phương trình elip (E) biết 2 tiêu điểm $F_1(-6; 0)$; $F_2(6; 0)$ và $\frac{a}{b}=\frac{5}{4}$

Bài 4. Viết PT elip (E) biết 2 tiêu điểm $F_1(-3; 0)$; $F_2(3; 0)$ và đi qua $M\left(\frac{5}{4};\sqrt{15}\right)$

Bài 5. Viết PT elip (E) biết 2 tiêu điểm $F_1(-7; 0)$; $F_2(7; 0)$ và đi qua M(−2; 12)

Bài 6. Viết PT elip (E) biết 4 đỉnh là: $A_1(-6; 0)$, $A_2(6; 0)$, $B_1(0; -3)$, $B_2(0; 3)$

Bài 7. Viết phương trình của elip (E) biết 2 đỉnh của (E) là: (−4; 0), $\left(0;\sqrt{15}\right)$

Bài 8. Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết tiêu điểm nằm trên trục O*x*, đi qua điểm M(8, 12) và $MF_1=20$.

Bài 9. Viết PT chính tắc của elip (E) biết độ dài trục lớn bằng 8, khoảng cách hai đỉnh liên tiếp $A_1B_1 = 5$.

Bài 10. Viết PT chính tắc của elip (E) biết một cạnh của hình chữ nhật cơ sở là $x - 2 = 0$ với độ dài đường chéo bằng 6.

Bài 11. Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết tiêu điểm nằm trên O*y*, $e=1/\sqrt{2}$ và khoảng cách 2 đường chuẩn là $8\sqrt{2}$.

Bài 12. Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết tiêu điểm nằm trên O*x*, $M\left(-\sqrt{5};2\right)\in(E)$ và khoảng cách 2 đường chuẩn là 10.

Bài 13. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua $M_1(2; 1)$, $M_2\left(\sqrt{5};1/\sqrt{2}\right)$

Bài 14. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua $M_1\left(3\sqrt{3};2\right)$, $M_2\left(3;2\sqrt{3}\right)$

Bài 15. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua $M\left(\frac{5}{3};2\sqrt{2}\right)$ và $e=\frac{4}{5}$

Bài 16. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua $M\left(\frac{3\sqrt{5}}{5};\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$ và M nhìn $F_1F_2 \in Ox$ dưới góc $\frac{\pi}{2}$

Bài 17. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua $M\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{2}\right)$ và M nhìn $F_1F_2 \in Ox$ dưới góc $\frac{\pi}{3}$

Bài 18. Tìm $M\in(E)$: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ sao cho M nhìn 2 tiêu điểm dưới góc bằng $\frac{\pi}{2}$

Bài 19. Tìm $M\in(E)$: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$ sao cho M nhìn 2 tiêu điểm dưới góc bằng $\frac{2\pi}{3}$

III. MỘT SỐ BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. $(E): \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$. Tìm điểm M $\in$ (E) thoả mãn: **1.** Có tọa độ nguyên.

2. Có tổng 2 tọa độ đạt: **a.** Giá trị lớn nhất. **b.** Giá trị nhỏ nhất.

Giải

1. Điểm $(x, y) \in$ (E) $\Rightarrow (-x, y), (-x, -y), (x, -y)$ cùng $\in$ (E)

$\Rightarrow$ Ta chỉ cần xét $M(x_0, y_0) \in$ (E) với $x_0, y_0 \geq 0$

Ta có: $\frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{8} = 1 \Rightarrow x_0^2 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x_0 \leq \sqrt{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0, y_0 = 2\sqrt{2}\ (\text{loại}) \\ x_0 = 1, y_0 = 2 \end{array}\right. \Rightarrow M(1; 2)$

Vậy các điểm thuộc (E) có tọa độ nguyên là: (1; 2), (−1; 2), (−1; −2), (1; −2)

2. Điểm $M(x, y) \in$ (E) $\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$. Theo bất đẳng thức Bunhiacốpski ta có:

Suy ra $(x+y)^2 \leq (2+8)\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8}\right) = 10 \Rightarrow -\sqrt{10} \leq x + y \leq \sqrt{10}$. Dấu bằng xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{8} \\ (x+y)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x \\ x = \pm\frac{\sqrt{10}}{5} \end{cases} \Rightarrow M_1\left(-\frac{\sqrt{10}}{5}; -\frac{4\sqrt{10}}{5}\right); M_2\left(\frac{\sqrt{10}}{5}; \frac{4\sqrt{10}}{5}\right)$$

Bài 2. Cho (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$. Tìm điểm M $\in$ (E) thoả mãn:

a. Bán kính qua tiêu điểm này bằng 2 lần bán kính qua tiêu kia ứng với M$\in$ (E)

b. M nhìn đoạn nối 2 tiêu điểm dưới góc 60°

c. M nhìn đoạn nối 2 tiêu điểm dưới góc 90°

Giải

• $M(x, y) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$. Ta có: $\begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ c^2 = a^2 - b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ c = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow F_1(-2; 0), F_2(2; 0) \Rightarrow F_1M = a + \frac{c}{a}x = 3 + \frac{2}{3}x; F_2M = a - \frac{c}{a}x = 3 - \frac{2}{3}x$

a. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} F_1M = 2F_2M \\ 2F_1M = F_2M \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 + \frac{2}{3}x = 2\left(3 - \frac{2}{3}x\right) \\ 3 - \frac{2}{3}x = 2\left(3 + \frac{2}{3}x\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$

$$\Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{15}}{4}\right) \vee M\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{15}}{4}\right) \vee M\left(-\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{15}}{4}\right) \vee M\left(-\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$$

b. Xét Δ MF_1F_2 ta có: $F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1.MF_2\cos 60°$

$\Leftrightarrow F_1F_2^2 = (MF_1 + MF_2)^2 - 3MF_1.MF \;\; \Leftrightarrow (2c)^2 = (2a)^2 - 3MF_1.MF_2$

$\Leftrightarrow MF_1.MF_2 = \dfrac{4a^2 - 4c^2}{3} \Leftrightarrow \left(3 + \dfrac{2}{3}x\right)\left(3 - \dfrac{2}{3}x\right) = \dfrac{20}{3} \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{21}{4} \Leftrightarrow y^2 = \dfrac{25}{12}$

$\Leftrightarrow M\left(\dfrac{\sqrt{21}}{2};\dfrac{5\sqrt{3}}{6}\right) \vee M\left(-\dfrac{\sqrt{21}}{2};\dfrac{5\sqrt{3}}{6}\right) \vee M\left(-\dfrac{\sqrt{21}}{2};-\dfrac{5\sqrt{3}}{6}\right) \vee M\left(\dfrac{\sqrt{21}}{2};-\dfrac{5\sqrt{3}}{6}\right)$

c. Xét Δ MF_1F_2 ta có: $F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1.MF_2\cos 90°$

$\Leftrightarrow F_1F_2^2 = (MF_1 + MF_2)^2 - 2MF_1.MF \;\; \Leftrightarrow (2c)^2 = (2a)^2 - 2MF_1.MF_2$

$\Leftrightarrow MF_1.MF_2 = \dfrac{4a^2 - 4c^2}{2} \Leftrightarrow \left(3 + \dfrac{2}{3}x\right)\left(3 - \dfrac{2}{3}x\right) = 10 \Leftrightarrow x^2 = -\dfrac{9}{4}$ (vô nghiệm)

Bài 3. Cho (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \;\; (a > b > 0)$. Tiêu điểm $F_1(-c;0)$. Tìm M∈ (E):

a. Đoạn F_1M ngắn nhất. **b.** Đoạn F_1M dài nhất.

Giải

M(x, y) ∈ (E) ⇔ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Ta có: $F_1M = a + \dfrac{c}{a}x$ và $-a \le x \le a$

$\Rightarrow \; -c \le \dfrac{c}{a}x \le c \;\; \Leftrightarrow \;\; a - c \le F_1M \le a + c$

a. Xét $F_1M = a - c \Leftrightarrow x = -a \Leftrightarrow$ M($-a$; 0). Vậy F_1M ngắn nhất khi M($-a$; 0).

b. Xét $F_1M = a + c \Leftrightarrow x = a \Leftrightarrow$ M(a; 0). Vậy F_1M dài nhất khi M(a; 0).

Bài 4. Cho (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \;\; (a > b > 0)$. Tìm tọa độ M∈ (E) sao cho tiếp tuyến của (E) tại M tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

Giải

M(x_0, y_0) ∈ (E) ⇔ $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$. PTTT (Δ) của (E) tại M là: $\dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} = 1$

Gọi $A \equiv (\Delta) \cap Oy; B \equiv (\Delta) \cap Ox \Rightarrow A\left(0;\dfrac{b^2}{y_0}\right), B\left(\dfrac{a^2}{x_0};0\right)$

$\Rightarrow S = \frac{1}{2} OA.OB = \frac{1}{2}|y_A||x_B| = \frac{1}{2}\left|\frac{b^2}{y_0}\right|\left|\frac{a^2}{x_0}\right| = \frac{1}{2}ab\left|\frac{b}{y_0}\right|\left|\frac{a}{x_0}\right|$. Ta có:

$\left|\frac{y_0}{b}\right|\left|\frac{x_0}{a}\right| \le \frac{1}{2}\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{ab}{2}\cdot\frac{1}{\left|\frac{y_0}{b}\right|\left|\frac{x_0}{a}\right|} \ge ab$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$

$\frac{x_0^2}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow M_1\left(\frac{a}{\sqrt{a}};\frac{b}{\sqrt{2}}\right); M_2\left(-\frac{a}{\sqrt{a}};\frac{b}{\sqrt{2}}\right); M_3\left(-\frac{a}{\sqrt{a}};-\frac{b}{\sqrt{2}}\right); M_4\left(\frac{a}{\sqrt{a}};-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$

Bài 5. Cho (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (a>b>0)$. **a.** CMR: $b \le OM \le a \quad \forall M \in (E)$

b. Tìm 2 điểm A, B thuộc (E) thoả mãn OA ⊥ OB và $S_{\Delta AOB}$ nhỏ nhất.

Giải

$M(x, y) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Ta có: $\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2} \le \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2} \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{a^2} \le 1 \le \frac{x^2+y^2}{b^2}$

$\Leftrightarrow b^2 \le x^2+y^2 \le a^2$ mà $OM = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow b \le OM \le a$.

b. Nếu A, B là các đỉnh trên trục thì $S_{OAB} = \frac{1}{2}ab$. Xét A, B khác các đỉnh suy ra phương trình đường thẳng (OA) có dạng $y = kx$, khi đó ta có:

$\frac{x_A^2}{a^2}+\frac{k^2x_A^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow x_A^2 = \frac{a^2b^2}{b^2+a^2k^2} \Rightarrow OA^2 = x_A^2+y_A^2 = (1+k^2)x_A^2 = \frac{(1+k^2)a^2b^2}{b^2+a^2k^2}$.

Do OA ⊥ OB ⇒ Hệ số góc của (OB) là $\frac{-1}{k}$. Tương tự ta suy ra:

$$OB^2 = \frac{\left(1+\frac{1}{k^2}\right)a^2b^2}{b^2+a^2\cdot\frac{1}{k^2}} = \frac{(1+k^2)a^2b^2}{a^2+b^2k^2} \Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+k^2)a^2b^2}{\sqrt{(a^2+b^2k^2)(b^2+a^2k^2)}}$$

Ta có: $\sqrt{(a^2+b^2k^2)(b^2+a^2k^2)} \le \frac{(a^2+b^2k^2)+(b^2+a^2k^2)}{2} = \frac{(1+k^2)(a^2+b^2)}{2}$

$\Rightarrow S_{OAB} \ge \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a^2+b^2k^2 = b^2+a^2k^2 \Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow k = \pm 1$.

Do $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \le \frac{a^2b^2}{2ab} = \frac{1}{2}ab \Rightarrow \text{Min}\, S_{AOB} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

Vậy $A\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}};\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right); B\left(-\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}};\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

hoặc $A\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}};-\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right);B\left(-\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}};-\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

• $\sqrt{\left(a^2+b^2k^2\right)\left(b^2+a^2k^2\right)}\ge ab+abk^2=ab\left(1+k^2\right)\Rightarrow S_{OAB}\le\frac{\left(1+k^2\right)a^2b^2}{2ab\left(1+k^2\right)}=\frac{ab}{2}$

Bài 6. Cho A(3; 0). Tìm B, C $\in$ (E): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$ sao cho B, C đối xứng qua Ox đồng thời thoả mãn ΔABC đều.

Giải

Không mất tính tổng quát giả sử B(x_0, y_0) và C(x_0, $-y_0$) với $y_0 > 0$.

Ta có: $\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{3}=1\Leftrightarrow x_0^2+3y_0^2=9$

Ta có: $BC=2y_0$ và phương trình (BC): $x = x_0 \Rightarrow d\left(A,(BC)\right)=\left|3-x_0\right|$

Do A$\in$ Ox và B, C đối xứng qua Ox $\Rightarrow$ ΔABC cân tại A

suy ra ΔABC đều $\Leftrightarrow d\left(A,(BC)\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}BC \Leftrightarrow \left|3-x_0\right|=\sqrt{3}\,y_0\Leftrightarrow 3y_0^2=\left(x_0-3\right)^2$

$\Rightarrow x_0^2+\left(x_0-3\right)^2=9\Leftrightarrow 2x_0^2-6x_0=0\Leftrightarrow x_0=0\vee x_0=3$

Với $x_0=3\Rightarrow y_0=0$ (loại). Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0=\sqrt{3} \Rightarrow B\left(0;\sqrt{3}\right),C\left(0;-\sqrt{3}\right)$

Bài 7. Cho (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a > b > 0$). Chứng minh rằng:

Tích các khoảng cách từ F_1, F_2 đến 1 tiếp tuyến bất kì không đổi.

Giải

Gọi $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$. Tiếp tuyến tại điểm M(x_0, y_0) là

(d): $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1 \Leftrightarrow b^2x_0x+a^2y_0y-a^2b^2=0$

$\Rightarrow$ Tích các khoảng cách F_1, F_2 đến (d) là:

$$T=\frac{\left|-b^2x_0c-a^2b^2\right|}{\sqrt{b^4x_0^2+a^4y_0^2}}\cdot\frac{\left|b^2x_0c-a^2b^2\right|}{\sqrt{b^4x_0^2+a^4y_0^2}}=\frac{b^4\left|x_0^2c^2-a^4\right|}{b^4x_0^2+a^2\left(a^2y_0^2\right)}$$

M$\in$ (E) $\Rightarrow b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$, suy ra:

$$T=\frac{b^4\left|x_0^2\left(a^2-b^2\right)-a^4\right|}{b^4x_0^2+a^2\left(a^2b^2-b^2x_0^2\right)}=\frac{b^4\left|a^2x_0^2-b^2x_0^2-a^4\right|}{b^2\left(b^2x_0^2+a^4-a^2x_0^2\right)}=b^2=\text{const}$$

Bài 8. Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a > b > 0)$.

Tiếp tuyến (t) cắt 2 đường thẳng $x=\pm a$ tại M, N

a. CMR: $A_1M.A_2N$ = const. **b.** Xác định (t) để S_{F_2MN} nhỏ nhất

c. Gọi $I \equiv A_1N \cap A_nM$. Tìm quĩ tích I. **d.** CMR: $F_1M \perp F_1N \,; F_2M \perp F_2N$

Giải

a. Tiếp tuyến (t) tiếp xúc (E) tại $T(x_0, y_0)$ có PT:

(t): $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1 \Leftrightarrow y=\frac{b^2}{y_0}\left(1-\frac{x_0x}{a^2}\right)$ với $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$

$$(t)\cap(x=-a)=M\left(-a;\frac{b^2}{y_0}\left(1+\frac{x_0}{a}\right)\right);(t)\cap(x=a)=N\left(a;\frac{b^2}{y_0}\left(1-\frac{x_0}{a}\right)\right)$$

Do M, N luôn cùng phía so với Ox nên $A_1M.A_2N=$ $y_M.y_N=\frac{b^4}{y_0^2}\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)=b^2$

b. $S\left(F_2MN\right)=S\left(A_1MNA_2\right)-S\left(A_1MF_2\right)-S\left(A_2NF_2\right)$

$$=\left(A_1M+A_2N\right)a-\frac{1}{2}A_1M.A_1F_2-\frac{1}{2}A_2N.A_2F_2 \;=\left(A_1M+A_2N\right)a-\frac{a+c}{2}A_1M-\frac{a-c}{2}A_2N$$

$$=\frac{a-c}{2}A_1M+\frac{a+c}{2}A_2N \ge \sqrt{(a-c)\,A_1M\,(a+c)\,A_2N}=b^2$$

xảy ra $\Leftrightarrow$ $(a-c)\,A_1M=(a+c)\,A_2N=b^2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A_1M=a+c\\A_2N=a-c\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}M\left(-a;a+c\right),N\left(a;a-c\right)\\M\left(-a;-a-c\right),N\left(a;-a+c\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(t):cx+ay-a^2=0\\(t):cx-ay-a^2=0\end{array}\right.$$

c. $\left(A_1N\right):y=\frac{b^2\left(a-x_0\right)}{2a^2y_0}(x+a);\left(A_2M\right):y=\frac{-b^2\left(a+x_0\right)}{2a^2y_0}(x-a)$

$$\Rightarrow A_1N\cap A_nM\equiv I\left(x_0;\frac{b^2\left(a^2-x_0^2\right)}{2a^2y_0}\right)=\left(x_0;\frac{y_0}{2}\right).$$ Ta có: $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$

$\Rightarrow$ $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{\left(y_0/2\right)^2}{(b/2)^2}=1$ $\Rightarrow$ Quĩ tích điểm I là elip $\left(E_1\right):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(b/2)^2}=1$

d. $A_1M.A_2N=b^2=(a-c)(a+c)=A_2F_2.A_1F_2 \Rightarrow \frac{A_1M}{A_2F_2}=\frac{A_1F_2}{A_2N}$

$\Rightarrow \Delta A_1MF_2 \sim \Delta A_2F_2N \Rightarrow \widehat{A_1MF_2} = \widehat{A_2F_2N}$.

Mà ΔA_1MF_2 vuông tại A_1 $\Rightarrow \widehat{A_1F_2M} + \widehat{A_2F_2N} = 90° \Rightarrow \widehat{MF_2N} = 90° \Rightarrow F_2M \perp F_2N$

Bài 9. Cho 2 điểm M, N thuộc tiếp tuyến (t) của (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ sao cho các tiêu điểm F_1, F_2 nhìn MN dưới 1 góc 90°. Tìm hoành độ M, N

Giải

Hai điểm $M(x_1; y_1), N(x_2, y_2) \in (t)$: $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$

$\Leftrightarrow y = \frac{b^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0 x}{a^2}\right)$ với $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$; $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$

$$\left.\begin{array}{l} F_1M \perp F_1N \Leftrightarrow \overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_1N} = 0 \Leftrightarrow (x_1 + c)(x_2 + c) + y_1 y_2 = 0 \ (1) \\ F_2M \perp F_2N \Leftrightarrow \overrightarrow{F_2M} \cdot \overrightarrow{F_2N} = 0 \Leftrightarrow (x_1 - c)(x_2 - c) + y_1 y_2 = 0 \ (2) \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) - (2): x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 + c^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ y_1 y_2 = x_1^2 - c^2 \end{cases}$$

Do M, N $\in (t)$ nên $y_1 = \frac{b^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0 x_1}{a^2}\right); y_2 = \frac{b^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0 x_2}{a^2}\right)$

$$\Rightarrow y_1 y_2 = \frac{b^4\left(a^4 - x_1^2 x_0^2\right)}{a^2\left(a^2 y_0^2\right)} = \frac{b^4\left(a^4 - x_1^2 x_0^2\right)}{a^2\left(a^2 b^2 - b^2 x_0^2\right)} = \frac{b^2\left(a^4 - x_1^2 x_0^2\right)}{a^4 - a^2 x_0^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2 - c^2}{b^2} = \frac{y_1 y_2}{b^2} = \frac{a^4 - x_1^2 x_0^2}{a^4 - a^2 x_0^2} \Leftrightarrow \frac{x_1^2 - c^2 - b^2}{b^2} = \frac{a^2 x_0^2 - x_1^2 x_0^2}{a^4 - a^2 x_0^2} \Leftrightarrow \frac{x_1^2 - a^2}{b^2} = \frac{x_0^2\left(a^2 - x_1^2\right)}{a^2\left(a^2 - x_0^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow \left(x_1^2 - a^2\right)\left[\frac{1}{b^2} + \frac{x_0^2}{a^2\left(a^2 - x_0^2\right)}\right] = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \pm a$$

Bài 10. Cho (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$. Trong tất cả các hình chữ nhật Q ngoại tiếp (E), hãy xác định hình chữ nhật có diện tích Max, Min.

Giải

Gọi một cạnh hình chữ nhật Q là (d_1): $Ax + By + C = 0 \Rightarrow a^2A^2 + b^2B^2 = C^2$

$\Rightarrow\ a^2A^2+b^2B^2=(-C)^2\ \Rightarrow$ (d_1'): $Ax+By-C=0$ // (d_1) và cũng tiếp xúc (E)

$\Rightarrow$ (d_1') là cạnh của Q đối diện với (d_1). Phương trình cạnh (d_2) $\perp$ (d_1) là:
$Bx+Ay+D=0$ với $a^2B^2+b^2A^2=D^2$ và (d_2'): $Bx+Ay-D=0$

Khoảng cách giữa (d_1) và (d_1') là: $\dfrac{2|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$; giữa ($d_2$) và ($d_2$') là: $\dfrac{2|D|}{\sqrt{B^2+A^2}}$

Không mất tính tổng quát giả sử $A^2+B^2=1$

$\Rightarrow$ S = $4|CD|=4\sqrt{\left[a^2A^2+b^2\left(1-A^2\right)\right]\left[a^2\left(1-A^2\right)+b^2A^2\right]}$

$=4\sqrt{\left[b^2+\left(a^2-b^2\right)A^2\right]\left[a^2-\left(a^2-b^2\right)A^2\right]}=4\sqrt{a^2b^2+\left(a^2-b^2\right)^2A^2\left(1-A^2\right)}$

$$0\le A^2\left(1-A^2\right)\le\left[\frac{A^2+\left(1-A^2\right)}{2}\right]^2=\frac{1}{4}\Rightarrow 4\sqrt{a^2b^2}\le S\le 4\sqrt{a^2b^2+\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{4}}=2\left(a^2+b^2\right)$$

$\Rightarrow$ Min S = $4ab$; Max S = $2\left(a^2+b^2\right)$

Bài 11. Cho $\left(C_1\right):x^2+y^2=4;\ \left(C_2\right):x^2+y^2=1$. Các điểm A, B di động trên (C_1), (C_2) sao cho Ox là phân giác của góc AOB. Gọi M là trung điểm AB. Tìm quĩ tích điểm M.

Giải

Lấy B_1 đối xứng B qua Ox $\Rightarrow\ B_1\left(x_B;-y_B\right)\in$ OA và $\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OB_1}\Rightarrow A\left(2x_B;-2y_B\right)$

$\Rightarrow\ M\left(\dfrac{3x_B}{2};-\dfrac{y_B}{2}\right)$. Mà $x_B^2+y_B^2=1$ nên nếu M(x; y) thì $\dfrac{x^2}{9/4}+\dfrac{y^2}{1/4}=1$

Tổng quát: Cho $\left(C_1\right):x^2+y^2=(a+b)^2;\ \left(C_2\right):x^2+y^2=(a-b)^2$ ($0<b<a$). Các điểm A, B di động trên (C_1), (C_2) sao cho Ox là phân giác của góc AOB. Gọi M là trung điểm AB, khi đó M $\in$ (E): $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Bài 12. Cho A(2; 0) và (C): $(x+2)^2+y^2=36$. Viết phương trình quĩ tích tâm các đường tròn đi qua A và tiếp xúc (C).

Giải

(C): $(x+2)^2+y^2=36$ là đường tròn tâm B(−2; 0), bán kính R = 6.
Gọi M là tâm đường tròn đi qua A và tiếp xúc (C) tại N
$\Rightarrow$ MA + MB = MN + MB = BN = 6.

Vậy quĩ tích M là elip (E) nhận A, B làm tiêu điểm và có độ dài trục lớn bằng 6.

Vì A, B $\in$ Ox và đối xứng nhau qua O nên (E) có dạng $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b < a)$

Với $2a = 6$; $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - \frac{1}{4}AB^2 = 5 \Rightarrow (E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

Bài 13. Cho $(C_1): (x+5)^2 + y^2 = 441$; $(C_2): (x-5)^2 + y^2 = 25$. Gọi M là tâm đường tròn (C) di động tiếp xúc với (C_1), (C_2). Tìm quĩ tích M biết:

a. (C) tiếp xúc trong với (C_1) và tiếp xúc ngoài với (C_2).

b. (C) tiếp xúc trong với (C_1) và (C_2).

Giải

$(C_1): O_1(-5;0), R_1 = 21$; $(C_2): O_2(5;0), R_2 = 5$

a. M(x; y) là tâm: $R_1 - R = MO_1; R_2 + R = MO_2 \Rightarrow MO_1 + MO_2 = R_1 + R_2 = 26$

Từ đó suy ra tập hợp các điểm $M \in (E): \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$

b. M(x; y) là tâm: $R_1 - R = MO_1; R - R_2 = MO_2 \Rightarrow MO_1 + MO_2 = R_1 - R_2 = 16$

Từ đó suy ra tập hợp các điểm $M \in (E): \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$

Bài 14. Cho elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ với các tiêu điểm F_1, F_2.

Chứng minh: Với mọi điểm M$\in$(E) ta luôn có: $OM^2 + MF_1.MF_2 = a^2 + b^2$

Giải

Đặt $M(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, (1)

Ta có: $OM^2 = x_0^2 + y_0^2$, $MF_1 = a + \frac{c}{a}x_0$, $MF_2 = a - \frac{c}{a}x_0$

Do đó: $OM^2 + MF_1.MF_2 = x_0^2 + y_0^2 + a^2 - \frac{c^2}{a^2}x_0^2 = a^2 + \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)x_0^2 + y_0^2$

$$= a^2 + \frac{b^2}{a^2}x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) = a^2 + b^2 \quad \text{(đpcm)}$$

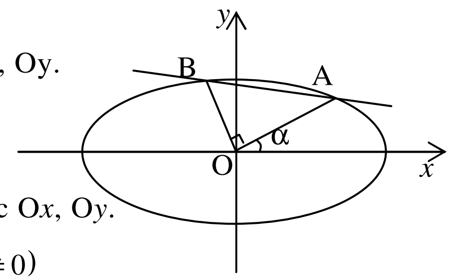
Bài 15. Cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$

Gọi A và B là hai điểm thuộc elip (E) sao cho OA vuông góc với OB.

1. Chứng minh rằng $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

2. CMR: Đường thẳng AB luôn luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Giải



1. ***Trường hợp 1.*** A, B nằm trên các trục Ox, Oy.

Ta có: $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

Trường hợp 2: A, B không nằm trên các trục Ox, Oy.

Phương trình đường thẳng OA là: $y=kx\ (k\neq 0)$

Tọa độ của A thỏa hệ

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=kx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_A^2=\frac{a^2b^2}{a^2k^2+b^2}\\ y_A^2=\frac{a^2b^2k^2}{a^2k^2+b^2}\end{cases}\Rightarrow OA^2=x_A^2+y_A^2=\frac{(k^2+1)a^2b^2}{a^2k^2+b^2}\ (*)$$

$OB\perp OA$ nên phương trình của OB có dạng: $y=-\frac{1}{k}x$

Thay x bằng $-\frac{1}{k}$ vào (*) ta có: $OB^2=\frac{(k^2+1)a^2b^2}{a^2+b^2k^2}$

Ta có: $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{(k^2+1)(a^2+b^2)}{(k^2+1)a^2b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

Vậy cả hai trường hợp trên ta đều có: $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ (đpcm)

2. Trong tam giác OAB kẻ đường cao OH, ta có: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

$\Rightarrow OH^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\Rightarrow OH=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Vậy đường thẳng AB luôn luôn tiếp xúc với đường tròn cố định, tâm O(0; 0) và bán kính $R=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Bài 16. Cho (E): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ và $(d_1): mx-ny=0, (d_2): nx+my=0$, với $m^2+n^2\neq 0$.

1. Xác định giao điểm M, N của d_1 với (E) và giao điểm P, Q của d_2 với (E)

2. Tính theo *m*, *n* diện tích tứ giác MPNQ.

3. Tìm điều kiện đối với *m*, *n* để diện tích tứ giác MNPQ nhỏ nhất.

Giải

1. Phương trình tham số của d_1 và d_2 là: $(d_1):\begin{cases}x=nt\\y=mt\end{cases}$; $(d_2):\begin{cases}x=-mt'\\y=nt'\end{cases}$

Tọa độ của M, N là nghiệm của phương trình tương giao giữa (d_1) và (E):

$$\frac{n^2t^2}{9}+\frac{m^2t^2}{4}=1 \Leftrightarrow t=\pm\frac{6}{\sqrt{9m^2+4n^2}}$$

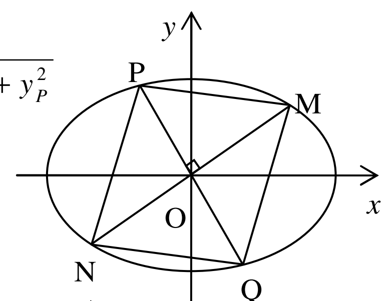
$$\Rightarrow M\left(\frac{6n}{\sqrt{9m^2+4n^2}};\frac{6m}{\sqrt{9m^2+4n^2}}\right), N\left(\frac{-6n}{\sqrt{9m^2+4n^2}};\frac{-6m}{\sqrt{9m^2+4n^2}}\right)$$

Tọa độ của P, Q là nghiệm của phương trình tương giao giữa (d_2) và (E):

$$\frac{m^2t'^2}{9}+\frac{n^2t'^2}{4}=4 \Rightarrow t'=\pm\frac{6}{\sqrt{4m^2+9n^2}}$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{-6m}{\sqrt{4m^2+9n^2}};\frac{6n}{\sqrt{4m^2+9n^2}}\right), Q\left(\frac{6m}{\sqrt{4m^2+9n^2}};\frac{-6n}{\sqrt{4m^2+9n^2}}\right)$$

2. Ta có: MN $\perp$ PQ tại trung điểm O của mỗi đường nên tứ giác MPNQ là hình hình thoi. Diện tích hình thoi MPNQ là:



$$S=\frac{1}{2}\text{MN.PQ}=2\text{OM.OP}=2\sqrt{x_M^2+y_M^2}.\sqrt{x_P^2+y_P^2}$$

$$=\frac{72(m^2+n^2)}{\sqrt{(9m^2+4n^2)(4m^2+9n^2)}}$$

3. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\sqrt{(9m^2+4n^2)(4m^2+9n^2)}\leq\frac{(9m^2+4n^2)+(4m^2+9n^2)}{2}=\frac{13}{2}(m^2+n^2)$$

$$\Rightarrow S\geq\frac{72(m^2+n^2)}{\frac{13}{2}(m^2+n^2)}=\frac{144}{13}\Rightarrow \min S=\frac{144}{13}$$ đạt được khi

$$9m^2+4n^2=4m^2+9n^2 \Leftrightarrow m^2=n^2 \Leftrightarrow m=\pm n$$

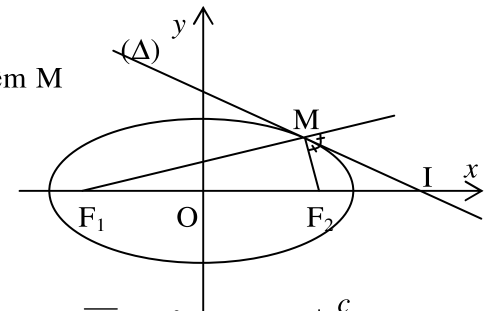
Bài 17. Cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$, với các tiêu điểm F_1, F_2. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại một điểm M bất kỳ trên (E) là phân giác của góc $\widehat{F_1MF_2}$.

Giải

Lấy bất kỳ điểm $M(x_0;y_0)\in(E)$.

Phương trình tiếp tuyến Δ của (E) tại điểm M có dạng $\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1$

Gọi $I=\Delta\cap Ox\Rightarrow I\left(\frac{a^2}{x_0};0\right)\ (x_0\neq 0)$



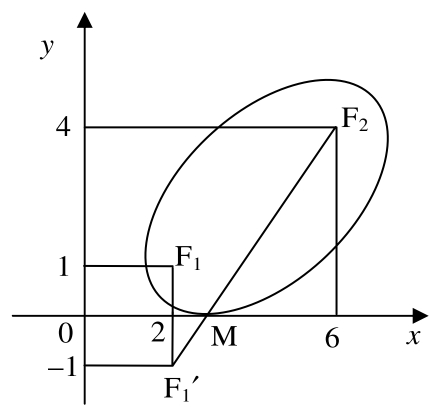
Ta có: $MF_1=a+\frac{c}{e}x_0, MF_2=a-\frac{c}{a}x_0$ nên $\frac{\text{IF}_1}{\text{IF}_2}=\frac{\overline{\text{IF}_1}}{\overline{\text{IF}_2}}=\frac{a^2+cx_0}{a^2-cx_0}=\frac{a+\frac{c}{a}x_0}{a-\frac{c}{a}x_0}=\frac{MF_1}{MF_2}$

Từ đó suy ra Δ là phân giác ngoài của góc $\widehat{F_1MF_2}$ (đpcm)

Bài 18. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $F_1(2,1)$, $F_2(6, 4)$. Một elip (E) nhận F_1, F_2 làm 2 tiêu điểm và tiếp xúc với Ox tại M. Tìm tọa độ M.

Giải

Nhận xét: Nếu tiếp cận bài toán bằng cách lập phương trình tổng quát của elip (E) nhận F_1, F_2 làm 2 tiêu điểm và tiếp xúc với Ox sau đó tìm tọa độ thì chúng ta rất vô vọng khi lập phương trình của elip (E). Chúng ta sẽ giải bài toán này bằng cách sử dụng bài 17 với tính chất tiếp tuyến Ox là phân giác ngoài của góc $\widehat{F_1MF_2}$.



Lấy $F_1'(2,-1)$ đối xứng với $F_1(2,1)$. Do Ox là phân giác ngoài của góc $\widehat{F_1MF_2}$ nên F_1', M, F_2 thẳng hàng. Gọi M(x, 0) thì

$$\overrightarrow{F_1'M}=k\overrightarrow{F_1'F_2}\Leftrightarrow(x-2,1)=k(4,5)\Leftrightarrow 5(x-2)=4\Leftrightarrow x=\frac{14}{5}\Leftrightarrow M\left(\frac{14}{5};0\right)$$

IV. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Cho (E): $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ và (d): $3x+4y-12=0$.

1. Chứng minh rằng:Đường thẳng (d) cắt elip (E) tại 2 điểm A, B. Tính AB.

2. Tìm C$\in$(E) sao cho: **a.** ΔABC có S = 6. **b.** ΔABC có S Max.

c. ΔABC cân ở A hoặc B **d.** ΔABC vuông.

Bài 2. Cho hai điểm $A_1(-a;0), A_2(a;0)$ với $a > 0$ và hằng số $k \neq 0$, $k \neq 1$.

Lập phương trình quĩ tích các điểm M thoả mãn: $\text{tg}\,\widehat{MA_1A_2}.\text{tg}\,\widehat{MA_2A_1}=k^2$.

Bài 3. Cho điểm A(−4; 0) và đường tròn (C): $(x-4)^2+y^2=100$.

Lập phương trình quĩ tích tâm các đường tròn đi qua A và tiếp xúc với (C)

Bài 4. Cho điểm A(0; 6) và đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2=100$.

Lập phương trình quĩ tích tâm các đường tròn đi qua A và tiếp xúc với (C).

Bài 5. Cho điểm A(3; 3) và đường tròn (C): $(x-1)^2+(y-1)^2=16$.

Lập phương trình quĩ tích tâm các đường tròn đi qua A và tiếp xúc với (C).

Bài 6. Cho A(3; 3) và 2 đường tròn $(C_1):(x+1)^2+y^2=16; (C_2):(x-1)^2+y^2=1$.

Gọi M là tâm đường tròn (C) di động tiếp xúc với (C_1), (C_2).
TÌm quĩ tích điểm M, biết:

a. (C) tiếp xúc trong với (C_1) và tiếp xúc ngoài với (C_2).

b. (C) tiếp xúc trong với (C_1) và (C_2).

Bài 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

1. Tìm điều kiện *k* và *m* để đường thẳng (d): $y=kx+m$ tiếp xúc với elip (E).

2. Khi (d) là tiếp tuyến của (E), gọi giao điểm của (d) và các đường thẳng $x=5$ và $x=-5$ là M và N. Tính diện tích tam giác FMN theo *k*, trong đó F là tiêu điểm của (E) có hoành độ dương.

3. Xác định k để tam giác FMN có diện tích bé nhất.

Bài 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ và điểm M(8;6) trên mặt phẳng tọa độ. Qua M vẽ các tiếp tuyến với (E) và giả sử T_1, T_2 là các tiếp điểm. Viết phương trình đường thẳng nối T_1, T_2.