# §1. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

## 1. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

### 1.1 Một số lưu ý

Khi giải phương trình vô tỷ bằng phương pháp đặt ẩn phụ ta có thể gặp các dạng như:

1.1.1 Đặt ẩn phụ đưa phương trình đã cho về phương trình đại số không còn chứa căn thức với ẩn mới là ẩn phụ.

1.1.2 Đặt ẩn phụ mà vẫn còn ẩn chính, ta có thể tính ẩn này theo ẩn kia.

1.1.3 Đặt ẩn phụ để đưa phương trình về hệ hai phương trình với hai ẩn là hai ẩn phụ, cũng có thể hai ẩn gồm một ẩn chính và một ẩn phụ, thường khi đó ta được một hệ đối xứng.

1.1.4 Đặt ẩn phụ để được phương trình có hai ẩn phụ, ta biến đổi về phương trình tích với vế phải bằng 0.

Thường giải phương trình ta hay biến đổi tương đương, nếu biến đổi hệ quả thì nhớ phải thử lại nghiệm.

### 1.2 Một số ví dụ

**Ví dụ 1**. Giải các phương trình sau:

1) $18x^2 - 18x\sqrt{x} - 17x - 8\sqrt{x} - 2 = 0$.

2) $x^2 - 3x + 1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$.

3) $\sqrt{2 - x^2} + \sqrt{2 - \dfrac{1}{x^2}} = 4 - \left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

4) $2x^2 + \sqrt{1 - x} + 2x\sqrt{1 - x^2} = 1$.

Hướng dẫn (HD): 1) Đặt $\sqrt{x} = y$ với $y \geq 0$. Khi đó phương trình đã cho trở thành $(3y^2 - 4y - 2)(6y^2 + 2y + 1) = 0$, suy ra $(3y^2 - 4y - 2) = 0$, ta được $y = \dfrac{2 + \sqrt{10}}{3}$. Từ đó phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{14 + 4\sqrt{10}}{9}$.

2) Ta có $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > 0$, với mọi x.

Mặt khác $x^2 - 3x + 1 = 2(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1)$.

Đặt $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}}$ (có thể viết đk $y \geq 0$ hoặc chính xác hơn là $\dfrac{\sqrt{3}}{3} \leq y \leq \sqrt{3}$), ta được

$$2y^2 - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}y = 0 \Leftrightarrow 6y^2 + \sqrt{3}y - 3 = 0, \text{ ta được } y = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (loại } y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\text{)}.$$

Từ đó phương trình có nghiệm là $x = 1$.

3) Ta thấy $x<0$ không thỏa mãn.

Khi đó phương trình tương đương với hệ $\begin{cases} x>0 \\ 4-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)>0 \\ \left(\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}\right)^2=\left(4-\left(x+\dfrac{1}{1}\right)\right)^2 \end{cases}$.

Đặt $x+\dfrac{1}{x}=y$, ta được $\begin{cases} 2\le y<4(1) \\ 4-(y^2-2)+2\sqrt{5-2(y^2-2)}=(4-y)^2(2) \end{cases}$.

Xét $(2)\Leftrightarrow \sqrt{9-2y^2}=y^2-4y+5 \Leftrightarrow y^4-8y^3+28y^2-40y+16=0$ (do hai vế không âm).

$$\Leftrightarrow (y-2)(y^3-6y^2+16y-8)=0$$
$$\Leftrightarrow (y-2)((y-2)(y^2-4y+8)+8)=0$$

Dẫn đến $y=2$ (do $((y-2)(y^2-4y+8)+8)>0$ với mọi $y$ thỏa mãn (1)).

Từ đó phương trình có nghiệm là $x=1$.

Nhận xét: Bài toán này ta có thể giải bằng Phương pháp đánh giá trong phần sau.

4) Ta có phương trình tương đương với

$\sqrt{1-x}=1-2x^2-2x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow 1-x=1+4x^4+4x^2(1-x^2)-4x^2-4x\sqrt{1-x^2}+8x^3\sqrt{1-x^2}$

$$\Leftrightarrow x(1-4\sqrt{1-x^2}+8x^2\sqrt{1-x^2})=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 1-4\sqrt{1-x^2}+8x^2\sqrt{1-x^2}=0(1) \end{array}\right.$$

Xét (1), đặt $y=\sqrt{1-x^2}$, suy ra $y\ge 0$ và $x^2=1-y^2$.

Ta được $1-4y+8y(1-y^2)=0 \Leftrightarrow 8y^3-4y-1=0$

$$\Leftrightarrow (2y+1)(4y^2-2y-1)=0$$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. Từ đó suy ra $x=\pm\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Thử lại ta được nghiệm của phương trình là $x=0$ và $x=-\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Nhận xét: Bài toán này ta có thể giải bằng Phương pháp lượng giác trong phần sau.

**Ví dụ 2**. Giải phương trình $x^2+3x+1=(x+3)\sqrt{x^2+1}$.

HD: Đặt $\sqrt{x^2+1}=y$, với $y\ge 1$. Khi đó ta được $y^2+3x=(x+3)y$

$$\Leftrightarrow (y-3)(y-x)=0.$$

Dẫn đến $y=3$ và $y=x$. Từ đó phương trình có nghiệm là $x=\pm\sqrt{2}$

**Ví dụ 3**. Giải phương trình $\sqrt[4]{17-x^8}-\sqrt[3]{2x^8-1}=1$.

HD: Đặt $\sqrt[4]{17-x^8}=y$ với $y\geq 0$ và $\sqrt[3]{2x^8-1}=z$. Khi đó ta được hệ $\begin{cases} y-z=1 \\ 2y^4+z^3=33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=y-1 \\ 2y^4+(y-1)^3=33 \end{cases}$.

Xét $2y^4+(y-1)^3=33 \Leftrightarrow (y-2)(2y^3+5y^2+7y+17)=0$.

Suy ra được y - 2 = 0. Từ đó nghiệm của phương trình là x = 1 và x = -1.

**Ví dụ 4**. Giải các phương trình sau:

1) $x+\sqrt{4-x^2}=2+3x\sqrt{4-x^2}$.

2) $\sqrt[3]{81x-8}=x^3-2x^2+\frac{4}{3}x-2$.

HD: 1) Đặt $\sqrt{4-x^2}=y$, với $0\leq y\leq 2$.

Khi đó ta được hệ $\begin{cases} x+y=2+3xy \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$.

Thế hoặc lại đặt $x+y=S; xy=P$ rồi giải tiếp ta được nghiệm của phương trình là

$x=0$; $x=2$ và $x=\frac{-2-\sqrt{14}}{3}$.

2) Đặt $\sqrt[3]{81x-8}+2=3y \Rightarrow 3x=y^3-2y^2+\frac{4}{3}y$.

Khi đó ta được hệ $\begin{cases} 3x=y^3-2y^2+\frac{4}{3}y \\ 3y=x^3-2x^2+\frac{4}{3}x \end{cases}$.

Xét hiệu hai phương trình dẫn đến $x=y$ (do $\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{1}{2}(y-2)^2+\frac{1}{3}>0$).

Thay vào hệ và giải phương trình ta được $x=0; x=\frac{3\pm 2\sqrt{6}}{3}$.

**Ví dụ 5**. Giải phương trình $\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$.

HD: Đk $x\geq 5$. Với điều kiện đó ta biến đổi phương trình đã cho như sau:

$$\sqrt{5x^2+14x+9}=\sqrt{x^2-x-20}+5\sqrt{x+1}$$
$$\Leftrightarrow 5x^2+14x+9=x^2-x-20+25(x+1)+10\sqrt{(x+1)(x+4)(x-5)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=5\sqrt{(x+1)(x-5)}\sqrt{x+4}$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)(x-5)+3(x+4)=5\sqrt{(x+1)(x-5)}\sqrt{x+4}$$

Đặt $\sqrt{(x+1)(x-5)}=y;\sqrt{x+4}=z$, với $y\geq 0;z\geq 3$.

Ta được $2y^2+3z^2=5yz\Leftrightarrow (y-z)(2y-3z)=0$, từ đó ta được $\left[\begin{array}{l} y=z \\ y=\dfrac{3}{2}z \end{array}\right.$.

Nếu $y=z$ thì ta được $x=\dfrac{5+\sqrt{61}}{2}$ (do $x\geq 5$).

Nếu $y=\dfrac{3}{2}z$ thì ta được $x=8;x=-\dfrac{7}{4}$. Vậy phương trình có ba nghiệm trên.

**Ví dụ 6**. Giải phương trình $7x^2+7x=\sqrt{\dfrac{4x+9}{28}}$, với $x>0$.

Nhận xét: Dạng phương trình này ta thường đặt $\sqrt{\dfrac{4x+9}{28}}=ay+b$, sau đó bình phương lên rồi ta “cố ý” biến đổi về hệ đối xứng với hai ẩn $x,y$. Từ đó ta sẽ biết được giá trị của a, b. Với bài toán này ta tìm được $a=1;b=\dfrac{1}{2}$. (Nếu a = 1 và b = 0 mà giải được thì đó là phương trình quá đơn giản, ta không xét ở đây).

HD: Đặt $\sqrt{\dfrac{4x+9}{28}}=y+\dfrac{1}{2}$, do $x>0$ nên $\sqrt{\dfrac{4x+9}{28}}>\sqrt{\dfrac{9}{28}}>\dfrac{1}{2}$, từ đó $y>0$.

Ta được hệ $\begin{cases} 7x^2+7x=y+\dfrac{1}{2} \\ 7y^2+7y=x+\dfrac{1}{2} \\ x,y>0 \end{cases}$. Giải hệ bình thường theo dạng ta được $x=\dfrac{-6+\sqrt{50}}{14}$.

**Ví dụ 7**. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2-2}=\sqrt{2-x^3}$.

Nhận xét: Khi giải một phương trình không phải lúc nào cũng có nghiệm thực, có những phương trình vô nghiệm nhưng khi cho học sinh làm bài ta cũng kiểm tra được năng lực của học sinh khi trình bầy lời giải bài toán đó. Chẳng hạn như bài toán trong ví dụ này.

HD: Đặt $\sqrt[3]{x^2-2}=\sqrt{2-x^3}=$ y với $y\geq 0$. Khi đó ta được hệ $\begin{cases} x^2=y^3+2 \\ x^3=2-y^2 \end{cases}$ và từ phương trình ban đầu ta có $x\leq -\sqrt{2}$. Xét hiệu hai phương trình của hệ ta được phương trình $(x+y)(x^2-xy+y^2-x+y)=0$.

Với $x=-y$ thì $x=-\sqrt[3]{x^2-2}$, dẫn đến vô nghiệm.

Còn $x^2 - xy + y^2 - x + y = (y-x)(1-x) + y^2 > 0$ với mọi $y \ge 0$ và $x \le -\sqrt{2}$. Do đó hệ vô nghiệm hay phương trình đã cho vô nghiệm.

**1.3 Một số bài tập tương tự**

**Bài 1.** Giải các phương trình sau:

1) $x^2 + \sqrt{2-x} = 2x^2\sqrt{2-x}$.

(HD: Đặt $y = \sqrt{2-x}; y \ge 0$, ta được $(y-1)(y^2+y-1)(2y^2-y-4) = 0$.

Từ đó $y = 1; y = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}; y = \dfrac{\sqrt{33}+1}{8}$ và được nghiệm của phương trình là

$x = 1; x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}; x = -\dfrac{\sqrt{33}+1}{8}$).

2) $2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3-1}$.

(HD: Từ phương trình suy ra $x \ne 1$. Đặt $\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x-1}} = y$, bình phương dẫn đến $y \ge \sqrt{3+2\sqrt{3}}$. Phương trình trở thành $2y^2 - 7y + 3 = 0$, ta được $y = 3$. Từ đó $x = 4 \pm \sqrt{6}$ ).

**Bài 2.** Giải phương trình $(4x-1)\sqrt{x^2+1} = 2x^2 + 2x + 1$.

(HD: Đặt $\sqrt{x^2+1} = y$, với $y \ge 1$. Từ đó ta được $y = \dfrac{1}{2} \vee y = 2x - 1$. Phương trình có nghiệm $x = \dfrac{4}{3}$).

**Bài 3.** Giải các phương trình sau:

1) $3(2 + \sqrt{x-2}) = 2x + \sqrt{x+6}$.

(HD: Đặt $3\sqrt{x-2} = y, \sqrt{x+6} = z$, với $y \ge 0; z \ge 0$.

Ta được $x = 3 \vee y + z = 4$. Từ đó phương trình có 2 nghiệm $x = 3; x = \dfrac{11-3\sqrt{5}}{2}$).

2) $\sqrt{2-\sqrt{2}(1+x)} + \sqrt[4]{2x} = 1$.

(HD: Đk $0 \le x \le \sqrt{2} - 1$. Đặt $\sqrt{2-\sqrt{2}(1+x)} = \sqrt[4]{2}y \Leftrightarrow y = \sqrt{\sqrt{2}-1-x}$

và $\sqrt[4]{2x} = \sqrt[4]{2}z \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{x}$ với $y \ge 0; z \ge 0$.

Suy ra $\begin{cases} \sqrt[4]{2}(y+z) = 1 (1) \\ y^2 + z^4 = \sqrt{2} - 1 (2) \end{cases}$. Từ (1) thay $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} - z$ vào (2) ta được $(z^2+1)^2 - (z + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}})^2 = 0$

. Xét hiệu hai bình phương suy ra $z = \dfrac{1 \pm \sqrt{\dfrac{4-3\sqrt[4]{2}}{4\sqrt{2}}}}{2}$.

Từ đó ta được nghiệm của phương trình là $x=\left(\dfrac{1\pm\sqrt{\dfrac{4-3\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}}}}{2}\right)^4$ ).

**Bài 4.** Giải phương trình $x^2-x-1000\sqrt{1+8000x}=1000$.

(HD: Đặt $1+\sqrt{1+8000x}=2y$, ta được $\begin{cases}x^2-x=2000y\\ y^2-y=2000x\end{cases}(*)$.

Từ $(*)$ suy ra $(x-y)(x+y+1999)=0$ và , do đó $x+y+1999>0$.

Suy ra $x=y$, ta được nghiệm $x=2001$, loại $x=0$ ).

**Bài 5.** Giải các phương trình sau:

1) $\dfrac{\sqrt{x^3+1}}{x^2+2}=\dfrac{2}{5}$.

(HD: Đặt $y=\sqrt{x+1}\geq 0; z=\sqrt{x^2-x+1}$, ta được

$$5yz=2(y^2+z^2)\Leftrightarrow \frac{5y}{z}=2\left(\frac{y}{z}\right)^2+2\Leftrightarrow 2\left(\frac{y}{z}\right)^2-\frac{5y}{z}+2=0\Leftrightarrow \frac{y}{z}=2\vee\frac{y}{z}=\frac{1}{2}.$$

Nếu $\dfrac{y}{z}=2$ ta được $\sqrt{x+1}=2\sqrt{x^2-x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\ 4x^2-5x+3=0\end{cases}$ (vô nghiệm).

Nếu $\dfrac{y}{z}=\dfrac{1}{2}$ ta được $2\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\ x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$ (thỏa mãn)).

2) $2x^2-5x+2=4\sqrt{2(x^3-21x-20}$.

(HD: Đk $\left[\begin{array}{l}-4\leq x\leq -1\\ x\geq 5\end{array}\right.$. Đặt $\sqrt{2x^2-8x-10}=y$ và $\sqrt{x+4}=z$, với $y\geq 0; z\geq 0$.

Khi đó ta được $(y-z)(y-3z)=0$. Từ đó phương trình có bốn nghiệm là $x=\dfrac{9\pm\sqrt{193}}{4}$ và $x=\dfrac{17\pm 3\sqrt{73}}{4}$).

**Bài 6.** Giải các phương trình sau:

1) $x^2-4x-3=\sqrt{x+5}$.

(HD: Đặt $\sqrt{x+5}=y-2$, ta được $x=-1; x=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$).

2) $2x^2+4x=\sqrt{\dfrac{x+3}{2}}$, với $x\geq 1$.

(HD: Đặt $\sqrt{\frac{x+3}{2}} = y+1$,được $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{4} < 1$(loại), nếu $x \geq -1$ thì $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$).

3) $27x^2 + 18x = \sqrt{x + \frac{4}{3}}$, với $x > 0$.

(HD: Tương tự, ta được $x = \frac{-5+\sqrt{37}}{18}$).

## 2. PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

### 2.1 Một số lưu ý

Khi giải phương trình vô tỷ (chẳng hạn $f(x) = g(x)$) bằng phương pháp đánh giá, thường là để ta chỉ ra phương trình chỉ có một nghiệm (nghiệm duy nhất).Ta thường sử dụng các bất đẳng thức cổ điển Cô si, Bunhiacopxki, đưa vế trái về tổng bình phương các biểu thức, đồng thời vế phải bằng 0. Ta cũng có thể sử dụng tính đơn điệu của hàm số (có thể thấy ngay hoặc sử dụng đạo hàm xét sự biến thiên của hàm số) để đánh giá một cách hợp lý.

Thường ta đánh giá như sau: $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq C(\leq C) \\ g(x) \leq C(\geq C) \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = g(x) = C$, hoặc đánh giá $f(x) \geq g(x)$ cũng như là $f(x) \leq g(x) \ldots$

Ngoài ra đối với bài cụ thể nào đó ta sẽ có cách đánh giá khác.

Cũng có một số phương trình vô tỷ có nhiều hơn một ẩn mà ta giải bằng phương pháp đánh giá.

### 2.2 Một số ví dụ

**Ví dụ 1**. Giải phương trình $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1$.

HD: Bài toán này có trong đề thi vào Đại học Bách Khoa và ĐHQG năm 2001. Bài này có nhiều cách giải, đáp án sử dụng đạo hàm.

Ta có thể làm đơn giản như sau: Ta thấy $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình.

Nếu $x > \frac{1}{2}$ thì Vt > 1 = Vp.

Nếu $x < \frac{1}{2}$ thì Vt < 1 = Vp.

Do đó phương trình không có nghiệm trong hai trường hợp này.

Vậy phương trình có một nghiệm là $x = \frac{1}{2}$.

**Ví dụ 2**. Giải phương trình $\sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5x^2+10x+14} = 4 - 2x - x^2$.

HD: Bài này quá đơn giản, đánh giá Vt $\geq 5$ còn Vp $\leq 5$, do đó hai vế cùng bằng 5. Ta được phương trình có nghiệm duy nhất là $x = -1$.

**Ví dụ 3**. Giải phương trình $\sqrt{x^2-x+19}+\sqrt{7x^2+8x+13}+\sqrt{13x^2+17x+7}=3\sqrt{3}(x+2)$.

HD: Bài này cách giải có vẻ hơi mất tự nhiên bởi cách "cố ý" cho như vậy. Giáo viên và học sinh có thể sáng tác những bài kiểu đó.

Đk $x\geq -2$.

Với đk đó Vt = $\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{75}{4}}+\sqrt{(2x-1)^2+3(x+2)^2}+\sqrt{\frac{1}{4}(2x-1)^2+\frac{3}{4}(4x+3)^2}$

$$\geq \sqrt{\frac{75}{4}}+\sqrt{3}\left|x+2\right|+\frac{\sqrt{3}}{2}\left|4x+3\right|$$

$$\geq \left|\frac{5}{2}\sqrt{3}+\sqrt{3}(x+2)+\frac{\sqrt{3}}{2}(4x+3)\right|$$

$$\geq 3\sqrt{3}.(x+2) = \text{Vp.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=\frac{1}{2}$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=\frac{1}{2}$.

**Ví dụ 4**. Giải phương trình $2\sqrt[4]{27x^2+24x+\frac{28}{3}}=1+\sqrt{\frac{27}{2}x+6}$.

HD: Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$2\sqrt[4]{\frac{(9x+4)^2}{3}+4}=1+\sqrt{\frac{3(9x+4)}{2}}$, đk $x\geq -\frac{4}{9}$. Đặt $(9x+4)=y$, suy ra $y\geq 0$.

Khi đó ta được $2\sqrt[4]{\frac{y^2}{3}+4}=1+\sqrt{\frac{3y}{2}} \Leftrightarrow 4\sqrt{\frac{y^2}{3}+4}=1+\frac{3y}{2}+\sqrt{6y}$ (bình phương hai vế).

Theo BĐT Cô-si ta được $\sqrt{6y}\leq \frac{y+6}{2}$, do đó $4\sqrt{\frac{y^2}{3}+4}\leq 2y+4 \Leftrightarrow 4\left(\frac{y^2}{3}+4\right)\leq (y+2)^2$

$$\Leftrightarrow 4y^2+48\leq 3y^2+12y+12$$
$$\Leftrightarrow y^2-12y+36\leq 0$$
$$\Leftrightarrow (y-6)^2\leq 0.$$

Từ đó ta được $y=6$, suy ra $x=\frac{2}{9}$ thỏa mãn đk.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=\frac{2}{9}$.

**Ví dụ 5**. Giải phương trình $\frac{x-3x^2}{2}+\sqrt{2x^4-x^3+7x^2-3x+3}=2$.

HD: Phương trình đã cho tương đương với

$\sqrt{(2x^2-x\ +1)(x^2+3)}=\dfrac{3x^2-x+4}{2}=\dfrac{(2x^2-x+1)+(x^2+3)}{2}(1)$. Phương trình xác định với mọi x là số thực. Theo BĐT Cô-si cho hai số dương ta được Vt(1) ≤ Vp(1).

Do đó (1) $\Leftrightarrow 2x^2-x+1=x^2+3 \Leftrightarrow x^2-x-2=0$. Từ đó phương trình có nghiệm là $x=-1$ và $x=2$.

**Ví dụ 6**. Giải phương trình $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}=4-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$.

HD: Đk $\left[\begin{array}{l}-\sqrt{2}\le x\le-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\le x\le\sqrt{2}\end{array}\right.$. Với đk đó, phương trình đã cho tương đương với

phương trình $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}+x+\dfrac{1}{x}=4(1)$.

Theo BĐT Bunhiacopxki, ta được $\begin{cases}(\sqrt{2-x^2}+x)^2=(\sqrt{2-x^2}.1+x.1)^2\le 4\\ \left(\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{1}{x}\right)^2=\left(\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}.1+\dfrac{1}{x}.1\right)^2\le 4\end{cases}$.

Suy ra $\text{Vt}(1)\le 4\ =\text{Vp}(1)$. Do đó $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2-x^2}+x=2\\ \sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{1}{x}=2\end{cases}$, nghĩa là dấu bằng trong hệ xảy ra.

Từ đó phương trình có nghiệm duy nhất là $x=1$.

**Ví dụ 7**. Giải phương trình $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x}=\sqrt{x+9}$.

HD: Đk $x\ge 0$.

Theo BĐT Bunhiacopxki, ta được

$$Vt^2=\left(2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+1}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)^2\le(x+9)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+1}\right)=Vp^2.$$

Phương trình có nghiệm khi dấu đẳng thức xảy ra hay $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}}{\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{7}$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=\dfrac{1}{7}$.

**Ví dụ 8**. Giải phương trình $13\sqrt{x^2-x^4}+9\sqrt{x^2+x^4}=16$.

HD: Đk $-1\le x\le 1$.

Với đk đó phương trình tương đương với

$$\left|x\right|(13\sqrt{1-x^2}+9\sqrt{1+x^2})=16 \Leftrightarrow x^2(13\sqrt{1-x^2}+9\sqrt{1+x^2})^2=256(1)$$

Theo BĐT Bunhiacopxki, ta được

$$(13\sqrt{1-x^2}+9\sqrt{1+x^2})^2=(\sqrt{13}.\sqrt{13}\sqrt{1-x^2}+3.\sqrt{3}.\sqrt{3}\sqrt{1+x^2})^2$$

$$\begin{aligned}&\le(13+27)(13(1-x^2)+3(1+x^2))\\&=40(16-10x^2).\end{aligned}$$

Theo BĐT Cô-si cho hai số dương ta được $10x^2(16-10x^2)\le\left(\dfrac{10x^2+(16-10x^2)}{2}\right)^2=64$.

Do đó Vt(1) $\le$ $4.64=256$, ta được

(1) $\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{1-x^2}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{3}\\10x^2=16-10x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9-9x^2=1+x^2\\20x^2=16\end{cases}$. Từ đó dẫn đến $x=\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

**Ví dụ 9**. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2-2}=\sqrt{2-x^3}$ .

Nhận xét: Trong phần giải phương trình vô tỷ bằng Phương pháp đặt ẩn phụ ta đã giải bài toán này, ta cũng có thể giải nó bằng phương pháp đánh giá như sau.

HD: Đk $2-x^3\ge0\Leftrightarrow x\le\sqrt[3]{2}$ .

Giả sử x là nghiệm của phương trình. Khi đó $x^2-2\ge0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge\sqrt{2}\\x\le-\sqrt{2}\end{array}\right.$, ta được $x\le-\sqrt{2}$ .

Mũ 6 hai vế suy ra $x^9-6x^6+x^4+12x^3-4x^2-4=0$ (*).

Cách thứ nhất ta biến đổi Vt thành $x^9-5x^6-x^2(x^4-x^2+1)+12x^3-3x^2-4$ là một biểu thức âm khi $x\le-\sqrt{2}$ .

Cách thứ hai ta biến đổi Vt thành $x^9-x^4(6x^2-1)+12x^3-4x^2-4$ cũng là một biểu thức âm khi $x\le-\sqrt{2}$ …

Ta có thể biến đổi tiếp phương trình (*) sau khi chia hai vế cho $x-1\ne0$, ta được

$$x^8+x^7+x^6-5x^5-5x^4-4x^3+8x^2+4x+4=0$$

$\Leftrightarrow x^6(x^2+x+1)-5x^4(x+1)-4x(x^2-1)+4(2x^2+1)=0$ vô nghiệm vì Vt luôn dương khi $x\le-\sqrt{2}$ . Vậy phương trình vô nghiệm.

**Ví dụ 10**. Giải phương trình $\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}$ .

HD: Biến đổi phương trình thành $(\sqrt{x+6}+\sqrt{x+2})(\sqrt{2x-1}-3)=4$, suy ra $x\ge5$ .

Vt là hàm số đồng biến trên đoạn $\left[5;+\infty\right)$. Từ đó dẫn đến $x=7$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

**Ví dụ 11**. Giải phương trình $2x^2-11x+21-3\sqrt[3]{4x-4}=0$.

HD: Phương trình tương đương với

$$(x-3)(2x-5)=\frac{12(x-3)}{\sqrt[3]{(4x-4)^2}+2\sqrt[3]{4x-4}+4}.$$

Ta thấy $x=3$ là nghiệm của phương trình.

Nếu $x\neq 3$ thì phương trình tương đương với $(2x-5)=\dfrac{12}{\sqrt[3]{(4x-4)^2}+2\sqrt[3]{4x-4}+4}$(1)

Nếu $x>3$ thì Vt(1) > 1 > Vp(1).

Nếu $x<3$ thì Vt(1) < 1 < Vp(1).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=3$.

**Ví dụ 12**. Giải phương trình $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x+2}=\sqrt{2x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-x+6}$.

Nhận xét: Với bài toán này ta sử dụng một đánh giá ít gặp sau đây:

$\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{f(x)+ah(x)}+\sqrt{g(x)+bh(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geq 0; g(x)\geq 0\\ h(x)=0\end{cases}$, với a, b là hai số thực dương.

HD: Biến đổi phương trình

$$\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{x^2-3x+2}=\sqrt{2x^2-1+2(x+2)}+\sqrt{x^2-3x+2+2(x+2)}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-1\geq 0; x^2-3x+2\geq 0\\ x+2=0\end{cases}$$

Từ đó ta được phương trình có nghiệm là $x=-2$.

**Ví dụ 13**. Giải phương trình $\dfrac{16}{\sqrt{x-1996}}+\dfrac{1}{\sqrt{y-2008}}=10-(\sqrt{x-1996}+\sqrt{y-2008})$.

Nhận xét: Với bài toán này, ta thấy đây là một phương trình gồm hai ẩn. Do đó ta nghĩ đến biến đổi phương trình thành phương trình mới có Vt là tổng các bình phương, còn Vp bằng 0.

HD: Biến đổi phương trình thành

$$\left(\sqrt[4]{x-1996}-\frac{4}{\sqrt[4]{x-1996}}\right)^2+\left(\sqrt[4]{y-2008}-\frac{1}{\sqrt[4]{y-2008}}\right)^2=0.$$

Từ đó ta được phương trình có nghiệm là $(x;y)=(2012;2009)$.

**Ví dụ 14**. Giải phương trình $x\sqrt{y-1}+2y\sqrt{x-1}=\dfrac{3}{2}xy$.

HD: Đk $x\geq 1; y\geq 1$.

Ta có $x\sqrt{y-1}+2y\sqrt{x-1}=-y(x-2\sqrt{x-1})-\frac{1}{2}x(y-2\sqrt{y-1})+\frac{3}{2}xy$

$$=-y(\sqrt{x-1}-1)^2-\frac{1}{2}x(\sqrt{y-1}-1)^2+\frac{3}{2}xy.$$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} x\ge 1; y\ge 1 \\ y(\sqrt{x-1}-1)^2+\frac{1}{2}x(\sqrt{y-1}-1)^2=0 \end{cases}$.

Từ đó ta được phương trình có nghiệm là $(x;y)=(2;2)$.

## 3. PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC

### 3.1 Một số lưu ý

Khi giải phương trình vô tỷ bằng phương pháp lượng giác ta có thể đặt

$f(x)=\sin\alpha$ nếu $f(x)\in[-1;1]$ với điều kiện $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ hoặc $f(x)=\cos\alpha$ với điều kiện $\alpha\in[0;\pi]$. Cũng có khi đặt $f(x)=\tan\alpha; f(x)=\cot\alpha$ … để đưa phương trình đã cho về phương trình lượng giác. Giải phương trình lượng giác rồi từ đó tìm nghiệm của phương trình đã cho.

### 3.2 Một số ví dụ

**Ví dụ 1**. Giải phương trình $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}=1$.

Nhận xét: Bài toán này (đã xét ở trên) cũng có thể giải bằng phương pháp lượng giác, tuy nhiên với bài này cách giải bằng lượng giác chỉ mang tính chất tham khảo.

HD: Đặt $\begin{cases} \sqrt[4]{4x-1}=\cos y \\ \sqrt[4]{4x^2-1}=\sin y \end{cases}; y\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Khi đó ta được phương trình

$$\begin{aligned} &\cos^8 y-2\cos^4 y+8\cos^2 y-7=0 \\ &\Leftrightarrow (cosy-1)(...)=0 \\ &\Leftrightarrow (\cos^2 y-1)(\cos^6 y+\cos^4 y-\cos^2 y+7)=0 \\ &\Leftrightarrow \cos y=1 \end{aligned}$$

Do vậy phương trình có một nghiệm là $x=\frac{1}{2}$.

**Ví dụ 2**. Giải phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=2\sqrt{2}$.

HD: Đặt $x=\cos y, y\in(0;\pi), y\ne\frac{\pi}{2}$. Phương trình đã cho trở thành

$\frac{1}{\cos y}+\frac{1}{\sin y}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow \sin y+\cos y=\sqrt{2}.\sin 2y$. Đặt $\sin y+\cos y=z, -\sqrt{2}\le z\le\sqrt{2}$.

suy ra $\sin 2y = 2\sin y\cos y = z^2 - 1$, ta được $z = \sqrt{2}$ và $z = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Với $z = \sqrt{2}$ thì $y = \dfrac{\pi}{4}$, do đó $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Với $z = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ thì $y = \dfrac{11\pi}{12}$, do đó $x = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và $x = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

**Ví dụ 3**. Giải phương trình $x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2(1-x^2)}$.

HD: Đk $-1 \le x \le 1$.

Đặt $x = \sin y, y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ suy ra $\cos y \ge 0$.

Khi đó phương trình trở thành $\sin^3 y + \cos^3 y = \sqrt{2}\sin y\cos y$.

Đặt $\sin y + \cos y = z, z \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$ (chính xác là $z \in \left[-1; \sqrt{2}\right]$), biến đổi phương trình ta được $z^3 + \sqrt{2}.z^2 - 3z - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (z-\sqrt{2})(z+\sqrt{2}-1)(z+\sqrt{2}+1) = 0$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt{2} \vee z = 1 - \sqrt{2}.$$

Nếu $z = \sqrt{2}$ thì thì $y = \dfrac{\pi}{4}$, do đó $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Nếu $z = 1 - \sqrt{2}$ thì $\sin y + \cos y = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow x + \sqrt{1-x^2} = 1 - \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 1 - \sqrt{2} - x \ge 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm trên.

**3.3 Một số bài tập tương tự**

**Bài 1.** Giải phương trình $4x^3 - 3x = \sqrt{1-x^2}$.

(HD: Đặt $x = \cos y$, phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{\cos\dfrac{\pi}{8}; \cos\dfrac{5\pi}{8}; \cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$).

**Bài 2.** Giải phương trình $5 + 3\sqrt{1-x^2} = 8\left(x^6 + (1-x^2)^3\right)$.

**Bài 3.** Giải phương trình $x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 2\sqrt{2}$.

**Bài 4.** Giải phương trình $(\sqrt{3} - 2x)\sqrt{1-x^2} = \sqrt{3}x - 2x^2$.

**Bài 5.** Giải phương trình $\dfrac{x(1+x^2)}{1-x^2} = 3\sqrt{1-x^2}$ .

**Bài 6.** Giải phương trình $\dfrac{(1+x^2)^3}{6x^5-20x^3+6x} = \sqrt{1+x^2}$ .

**Bài 7.** Giải phương trình $2x^2+\sqrt{1-x}+2x\sqrt{1-x^2}=1$.

## 4. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP KHÁC

### 4.1 Một số lưu ý

Ngoài những phương pháp thường gặp ở trên, đôi khi ta cũng có những lời giải khác lạ đối với một số phương trình vô tỷ. Cũng có thể ta sử dụng kết hợp các phương pháp ở trên để giải một phương trình.

### 4.2 Một số ví dụ

**Ví dụ 1**. Giải phương trình $\sqrt{x^2-3\sqrt{2}.x+9}+\sqrt{x^2-4\sqrt{2}.x+16}=5$.

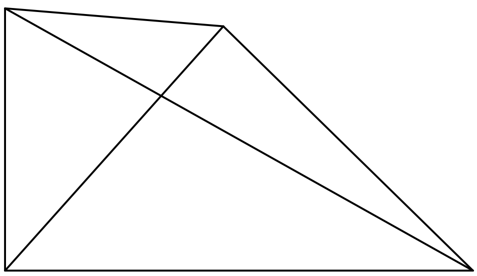
HD: Nếu $x \le 0$ thì Vt $\ge 3+4=7>5$ = Vp (phương trình không có nghiệm).

Nếu $x>0$ thì ta xét tam giác vuông ABC với $A=90^0$, AB = 4; AC = 3.

Gọi AD là phân giác của góc A, lấy M thuộc tia AD.

Đặt AM = x, xét $\Delta ACM \Rightarrow CM^2 = x^2+9-3\sqrt{2}.x$ và xét $\Delta ABM \Rightarrow BM^2 = x^2+16-4\sqrt{2}.x$.

Từ đó suy ra Vt = $CM+BM \ge BC = 5$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $M \equiv D$,hay



$$\frac{CM}{BM}=\frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow 16CM^2 = 9BM^2$$
$$\Leftrightarrow 16x^2+16.9-48\sqrt{2}.x = 9x^2+16.9-36\sqrt{2}.x$$
$$\Leftrightarrow 7x-12\sqrt{2}.x=0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{12\sqrt{2}}{7}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{12\sqrt{2}}{7}$.

**Ví dụ 2**. Giải phương trình $\sqrt{4-x^2}+\sqrt{4x+1}+\sqrt{x^2+y^2-2y-3}=5-y+\sqrt[4]{x^4-16}$ .

Nhận xét: Bài toán này không khó, chỉ kiểm tra tính cẩn thận của học sinh mà thôi vì sau khi đặt điều kiện đã tìm được giá trị của x. Tuy nhiên nếu học sinh học hời hợt sẽ ngồi nhìn mà không làm được bài.

HD: Đặt đk cho phương trình xác định ta sẽ được $x=2$. Khi đó phương trình trở thành $|y-1|=2-y$, suy ra $y=\dfrac{3}{2}$. Vậy phương trình có một nghiệm là $(x;y)=\left(2;\dfrac{3}{2}\right)$.

**Ví dụ 3**. Giải phương trình $\sqrt[3]{7x+1}-\sqrt[3]{x^2-x-8}+\sqrt[3]{x^2-8x-1}=2$ .

HD: Đặt $y=\sqrt[3]{7x+1};-z=\sqrt[3]{x^2-x-8};t=\sqrt[3]{x^2-8x-1}$,

suy ra $y+z+t=2$ và $y^3+z^3+t^3=8$ (1).

Mặt khác $\left(y+z+t\right)^3=8$ (2).

Từ (1) và (2) ta được $(y+z+t)^3-(y^3+z^3+t^3)=3(y+z)(z+t)(t+y)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y+z=0 \\ z+t=0 \\ t+y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-z(3) \\ z=-t(4) \\ t=-y(5) \end{array}\right. .$$

Xét (3) ta được $x=-1\vee x=9$, xét (4) được $x=1$ và (5) được $x=0\vee x=1$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-1;0;1;9\right\}$.

**Ví dụ 4**. Giải phương trình $\sqrt{x^2-4x+20}+\sqrt{x^2+4x+29}=\sqrt{97}$.

HD: Trong mặt phẳng tọa độ xét hai véc tơ $\vec{a}=(x-2;4)$ và $\vec{b}=(-x-2;5)$.

Khi đó ta được $\vec{a}+\vec{b}=(-4;5)$, suy ra $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{97}$ và ta cũng có $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2-4x+20}$,

$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{x^2+4x+29}$. Phương trình trở thành $\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$, đẳng thức đó xảy ra khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng chiều $\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{-x-2}{5}$. Từ đó ta được phương trình có một nghiệm là $x=\dfrac{2}{9}$.

**Ví dụ 5**. Giải phương trình $\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}=2(x-1)^4(2x^2-4x+1)$.

HD: Đặt $y=\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-(x-1)^2}$, suy ra $\begin{cases} 0\le y\le 1 \\ (x-1)^2=1-y^2 \end{cases}$.

Ta được $\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}=2(1-y^2)^2(1-2y^2)(1)$.

Mặt khác $\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}\ge 1+\sqrt{1-y^2}\ge 2-y^2(2)$.

Từ (1) và (2), suy ra $2(1-y^2)^2(1-2y^2)\ge 2-y^2$

Đặt $y^2=z$, ta được $0\le z\le 1$ và $2(1-z)^2(1-2z)\ge 2-z \Leftrightarrow z(4z^2-10z+7)\le 0$

$$\Leftrightarrow z\le 0 \text{ (do } 4z^2-10z+7>0\text{)}.$$

Do đó $z=0$, suy ra $y=0$ hay $2x-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x=0$ và $x=2$.

## §2. MỘT SỐ BÀI TOÁN THI HỌC SINH GIỎI CỦA MỘT SỐ QUỐC GIA

Thực tế bài toán giải phương trình vô tỷ trong kỳ thi học sinh giỏi quốc gia là không khó. Tuy nhiên để làm được việc lớn thì trước hết phải làm tốt việc nhỏ, do đó học sinh muốn đoạt giải từ khuyến khích trở lên phải làm tốt bài toán này. Dù biết vậy nhưng không phải học sinh xuất sắc nào cũng vượt qua được.

**Bài 1** (1995 - Bảng A. VMO)

Giải phương trình $x^3-3x^2-8x+40-8\sqrt[4]{4x+4}=0$.

HD: Đk $x\ge -1$.

Khi đó xét $f(x)=x^3-3x^2-8x+40$ và $g(x)=8\sqrt[4]{4x+4}$ trên đoạn $\left[-1;+\infty\right)$.

Ta được $f(x)=g(x)$. Áp dụng BĐT Cô-si cho bốn số không âm, ta được

$g(x)=\sqrt[4]{2^4.2^4.2^4(4x+4)}\le\dfrac{1}{4}(2^4+2^4+2^4+(4x+4))=x+13(1)$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $4x+4=2^4\Leftrightarrow x=3$.

Mặt khác $x^3-3x^2-8x+40\ge x+13\Leftrightarrow (x-3)(x^2-9)\ge 0$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2(x+3)\ge 0(2).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=3$.

Từ (1) và (2), ta được $g(x)\le x+13\le f(x)$. Cả hai đẳng thức đều xảy ra khi $x=3$, thỏa mãn điều kiện.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=3$.

Nhận xét: Ta có thể sử dụng đạo hàm để xét sự biến thiên của các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ trên đoạn $\left[-1;+\infty\right)$, ta được $\min\limits_{\left[-1;+\infty\right)} f(x)=f(3)=13$ và $\max\limits_{\left[-1;+\infty\right)} g(x)=g(3)=13$.

Hoặc ta có thể đặt $\sqrt[4]{4x+4}=y$, với $y\ge 0$ sau đó dùng đạo hàm để khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(y)=y^{12}-24y^8+16y^4-512y+2816$ ( $f'(y)=2(y-2).h(y)$ với $h(y)>0$).

**Bài 2** (1995 - Bảng B. VMO)

Giải phương trình $2x^2-11x+21-3\sqrt[3]{4x-4}=0$.

HD: Đặt $\sqrt[3]{4x-4}=y$.

Khi đó $x=\dfrac{y^3+4}{4}$ và suy ra $x^2=\dfrac{y^6+8y^3+16}{6}$. Từ đó ta có phương trình

$$\frac{1}{8}(y^6+8y^3+16)-\frac{11}{4}(y^3+4)-3y+21=0\Leftrightarrow y^6-14y^3-24y+96=0(1)$$

$$\Leftrightarrow (y-2)^2(y^4+4y^3+12y^2+18y+14)=0(2).$$

Do $y \le 0$ thì Vt(1) dương, do đó ta xét $y > 0$, khi đó $y^4 + 4y^3 + 12y^2 + 18y + 14 > 0$.

Nên từ (2) ta thấy $y = 2$ hay $\sqrt[3]{4x-4} = 2$, ta được $x = 3$.Thử lại đúng.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 3$.

**Bài 3** (2002 - Bảng A. VMO)

Giải phương trình $\sqrt{4 - 3\sqrt{10-3x}} = x - 2$.

HD: Cách 1 (Đáp án)

Đk $\frac{74}{27} \le x \le \frac{10}{3}$. Với điều kiện đó phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$4 - 3\sqrt{10-3x} = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow 9(10-3x) = x^2(4-x)^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 27x - 29 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)(x+2)(x^2 - 7x + 15) = 0$$

$\Leftrightarrow x = 3$ (do đk và $x^2 - 7x + 15 > 0$ với mọi $x$ thỏa mãn đk)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 3$.

Cách 2: Đặt $\sqrt{10-3x} = y$, suy ra $0 \le y \le \frac{4}{3}$ (1) và $x = \frac{10-y^2}{3} \Rightarrow x - 2 = \frac{4-y^2}{3} > 0$ với mọi y thỏa mãn (1).

Khi đó ta được $\sqrt{4-3y} = \frac{4-y^2}{3} \Leftrightarrow 4 - 3y = \frac{y^4 - 8y^2 + 16}{9}$

$$\Leftrightarrow y^4 - 8y^3 + 27y - 20 = 0$$
$$\Leftrightarrow (y-1)(y+4)(y^2 - 3x + 5) = 0$$
$$\Leftrightarrow y = 1.$$

Hay ta được $\sqrt{10-3x} = 1 \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 3$.

**Bài 4** (1998-CMO)

Giải phương trình $x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$.

Nhận xét: Đây là bài toán thi học sinh giỏi của Canada, có thể nói là đơn giản, nhẹ nhàng với học sinh tinh ý nhưng cũng đầy cạm bẫy với mọi học sinh.

Thật vậy, từ đk xác định của phương trình ta phải dẫn đến được $x > 1$.

Với đk đó, phương trình tương đương với $x - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \sqrt{x - \frac{1}{x}}$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)^2 = \left(\sqrt{x-\frac{1}{x}}\right)^2$$ (do hai vế không âm với mọi $x > 1$)

$$\Leftrightarrow (x^2-1) - 2\sqrt{x(x^2-1)} + x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x})^2 = 0$$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x} = 0$. Từ đó suy ra $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Cũng có thể từ $(x^2-1) - 2\sqrt{x(x^2-1)} + x = 0$, chuyển $2\sqrt{x(x^2-1)}$ sang vế phải rồi bình phương hai vế, sau đó đặt $x - \frac{1}{2} = y$ ta được phương trình trùng phương ẩn $y > \frac{1}{2}$, giải phương trình này tìm được $y = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Từ đó suy ra $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ nhưng cách này hơi dài.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

## §3. MỘT SỐ BÀI TẬP TỰ LÀM

**Bài 1.** Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x-x^2+1} = x^2 - x + 2$.

2) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = x(1+2\sqrt{1-x^2})$.

3) $\sqrt{\frac{1-x}{x}} = \frac{2x+x^2}{1+x^2}$.

4) $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2x^2 - 5x - 1$.

5) $\sqrt[3]{3x^2-x+2001} - \sqrt[3]{3x^2-7x+2002} - \sqrt[3]{6x-2003} = \sqrt[3]{2002}$.

**Bài 2.** Giải các phương trình sau:

1) $x^2 - 2x + 3 = \sqrt{2x^2-x} + \sqrt{1+3x-3x^2}$.

2) $\sqrt{\frac{42}{5-x}} + \sqrt{\frac{60}{7-x}} = 6$.

3) $(x-2)\sqrt{x-1} - \sqrt{2}x + 2 = 0$.

4) $\sqrt[3]{3x+1} + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{2x-9} - \sqrt[3]{4x-3} = 0$.

5) $4x^2 - 4x - 10 = \sqrt{8x^2-6x-10}$.

**Bài 3.** Giải các phương trình sau:

1) $x=(2004+\sqrt{x})(1-\sqrt{1-\sqrt{x}})^2$.

2) $\sqrt{\sqrt{3}-x}=x\sqrt{\sqrt{3}+x}$.

3) $\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x-5}}}}=5$.

4) $16x^4+5=6\sqrt[3]{4x^3+x}$.

5) $x^3-3x^2+2\sqrt{(x+2)^3}-6x=0$.

**Bài 4.** Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{5x-1}+\sqrt[3]{9-x}=2x^2+3x-1$.

2) $2.\sqrt[4]{27x^2+24x+\frac{28}{3}}=1+\sqrt{\frac{27}{2}x+6}$.

3) $13\sqrt{x-1}+9\sqrt{x+1}=16x$.

4) $\sqrt[3]{x+86}-\sqrt[3]{x-5}=1$.

5) $\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}-(x-4)\sqrt{x-7}-3x+28=0$.

**Bài 5.** Giải các phương trình sau:

1) $\dfrac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{x}}}+\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{x}}}=\sqrt{2}$.

2) $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}$.

3) $2x^2-5x+2=4\sqrt{2(x^3-21x-20)}$.

4) $x^3-3x=\sqrt{x+2}$.

5) $x^4+2x^3+2x^2-2x+1=(x^3+x)\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x}}$.

**Bài 6.** Giải các phương trình sau:

1) $x^3-\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{x+6}}=6$.

2) $\dfrac{4}{x}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\dfrac{5}{x}}$.

3) $\sqrt{2x^2+4x+7}=x^4+4x^3+3x^2-2x-7$.

4) $\sqrt{1-x^2}+\sqrt[4]{x^2+x-1}+\sqrt[6]{1-x}=1$.

5) $\sqrt{1-x^2}=\left(\dfrac{2}{3}-\sqrt{x}\right)^2$.

**Bài 7.** Giải các phương trình sau:

1) $3\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)=x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)$.

2) $2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}$.

3) $64x^6-112x^4+56x^2-7=2\sqrt{1-x^2}$ .

4) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right)=2+\sqrt{1-x^2}$ .

5) $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{\dfrac{1-x^2}{3}}$ .

**Bài 8.** Giải các phương trình sau:

1) $x^3-6\sqrt[3]{6x+4}-4=0$.

2) $2(x^2-3x+2)=3\sqrt{x^3+8}$ .

3) $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2-1}$.

4) $\sqrt{x^2+15}=3\sqrt[3]{x}+\sqrt{x^2+8}-2$.

5) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x(1-x)^2}+\sqrt[4]{(1-x)^3}=\sqrt{1-x}+\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2(1-x)}$.

**Bài 9.** Giải các phương trình sau:

1) $x^3+1=3\sqrt[3]{3x-1}$.

2) $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12}$.

3) $2x^2-11x+21-3\sqrt[3]{4x-4}=0$.

4) $x^4+4x^3+6x^2+4x+\sqrt{x^2+2x+10}=2$.

5) $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}-4x^2+4=\dfrac{32}{x^2(2x^2+3)^2}$ .

**Bài 10.** Giải các phương trình sau:

1) $x+\dfrac{3x}{\sqrt{1+x^2}}=1$.

2) $(x-1)\sqrt{x-1}+5\sqrt{x-1}+4x-4=0$.

3) $10x^4-14x^2+19=(5x^2-38)\sqrt{x^2-2}$.

4) $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3}=x^2+1$.

5) $\sqrt{\frac{1}{2}-x\sqrt{1-x^2}}=1-2x^2$.

**Bài 11.** Giải các phương trình sau:

1) $\frac{1+3\sqrt{x}}{4x+\sqrt{2+x}}-1=0$.

2) $x^3-3x-\sqrt{x+2}=0$.

3) $8x^3-4x-\sqrt[3]{6x+1}-1=0$.

4) $x^2+\left(3-\sqrt{x^2+2}\right)x-2\sqrt{x^2+2}-1=0$.

5) $3x+\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+12}-5=0$.

**Bài 12.** Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{2}(x^2+8)=5\sqrt{x^3+8}$.

2) $4x-x^2=3\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}}$.

3) $(x+3)\sqrt{(4-x)(12+x)}=28-x$.

4) $2\sqrt{x+1}+6\sqrt{9-x^2}+6\sqrt{(x+1)(9-x^2)}=38+10x-2x^2-x^3$.

5) $\sqrt{7x^2-22x+28}+\sqrt{7x^2+8x+13}+\sqrt{31x^2+14x+4}=3\sqrt{3}(x+2)$.

**Bài 13.** Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{-4x^4y^2+16x^2y+9}-\sqrt{x^2y^2-2y^2}=2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$.

2) $2\sqrt{x^2-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{1}{4}+\sqrt{...+\sqrt{x^2-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}}}}}}=2x^3+3x^2+3x+1$.

Trong đó biểu thức vế trái có tất cả 2008 dấu căn thức bậc hai.