HỆ PHƯƠNG TRÌNH NÂNG CAO

Trần Minh Hiền - GV trường THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước

Ngày 15 tháng 11 năm 2010

Mục lục

Chuyên đề này tôi trình bày một số phương pháp giải các bài toán hệ phương trình. Loại toán này ngày càng xuất hiện nhiều trong các kỳ thi học sinh giỏi, kỳ thi tuyển sinh lớp 10 và cả kỳ thi tuyển sinh đại học. Để giải tốt loại toán này yêu cầu học sinh phải thuần thục biến đổi đại số, phân tích dữ kiện bài toán để định hướng lời giải. Trong chuyên đề này chúng tôi không dành nhiều thời gian cho phân tích từng ví dụ, mà chỉ đưa ra các bài toán vận dụng cho từng phương pháp. Các em học sinh nên tập thói quen suy nghĩ và trả lời câu hỏi: Bài toán này có yếu tố nào để ta lựa chọn con đường giải? Các ví dụ tương đối đa dạng, bao gồm một lượng lớn các bài tập ở mức độ trung bình, và có cả những bài toán khó. Sau mỗi phương pháp hay đặc trưng của hệ đều có những bài tập luyện tập có hướng dẫn và đáp số. Các em hãy độ lập giải và đối chiếu với kết quả bài toán. Phần cuối chuyên đề là các bài tập tự luyện. Các em học sinh hãy thử vận dụng các kiến thức thu được để công phá các bài tập này. Vì đây là lần đầu tiên ra mắt chuyên đề, bản thân tác giả không thể tránh được các sai sót, mong nhận được sự góp ý của quý đồng nghiệp và các em học sinh. Chúng tôi rất mong nhận được những phê bình, cũng như những lời giải hay, và những vấn đề mới liên quan đến nội dung chuyên đề này.

1 Phương pháp cộng đại số

Phương pháp này với mục tiêu là làm "trơn" hóa các biểu thức trong hệ. Ban đầu các hệ số của từng phương trình trong hệ chưa thể hiện được mối quan hệ logic với nhau, sau khi thêm, bớt, cộng, trừ, nhân, chia ta làm cho chúng "xích lại gần nhau hơn". Đó chính là chìa khóa của rất nhiều bài toán. Dưới đây chúng ta đề cập đến một số bài toán như vậy.

Bài tập 1.1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + y^2 + x - 3y = 0 \\ x^2 + xy - 2y = 0 \end{cases}$.

Giải

Trừ hai vế của hệ ta được

$$(x - y)(x + y - 1) = 0.$$

Từ đây ta được $x = y$ hoặc $x + y - 1 = 0$. Thay vào ta tìm được nghiệm của hệ là

$$(x, y) = (0, 0), (2, 2), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Bài tập 1.2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ x^2 + 2xy = 7x + 5y - 9 \end{cases}$.

Giải

Cộng hai vế của phương trình ta được

$$2x^2 + y^2 + 3xy - 7x - 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow (y + 2x - 3)(y + x - 2) = 0.$$

Từ đây ta được $y + 2x - 3 = 0$ hoặc $y + x - 2 = 0$. Thay vào, và giải hệ ta có nghiệm

$$(x, y) = (1, 1), (2, -1).$$

Bài tập 1.3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x - y)\left(x^2 - y^2\right) = 7 \\ (x + y)\left(x^2 + y^2\right) = 175 \end{cases}$.

Giải

Rõ ràng bài toán này chỉ cần cộng đại số là có hướng giải. Thật vậy, cộng hai vế của phương trình ta được

$$x^3 + y^3 = 91 \qquad (1)$$

Thay kết quả (1) vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$xy(x + y) = 84. \qquad (2)$$

Từ hai phương trình (1) và (2) giải ra ta có nghiệm của hệ

$$(x, y) = (4, 3), (3, 4).$$

Bài tập 1.4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^3 - x^3 = 1 \\ x^5 - y^5 + xy = 0 \end{cases}$.

Giải

Hình thức bài toán này làm ta nghĩ đến biến đổi phương trình thứ hai của hệ về dạng đồng bậc. Ta có phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$x^5 - y^5 + xy(y^3 - x^3) = 0 \Leftrightarrow (x-y)\left(x^4 + y^4\right) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Thay dữ kiện này vào phương trình thứ nhất của hệ ta thấy hệ vô nghiệm.

Bài tập 1.5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(y+z)^2 = (3x^2+x+1)y^2z^2 \\ y^2(z+x)^2 = (4y^2+y+1)z^2x^2 \\ z^2(x+y)^2 = (5z^2+z+1)x^2y^2 \end{cases}$

Giải

Bài toán này giải bằng hình thức chia từng phương trình của hệ với biểu thức thích hợp. Nhận xét: các tập sau $(x,0,0),(0,y,0),(0,0,z)$ là nghiệm của hệ phương trình. Xét $xyz \neq 0$, ta biến đổi hệ về dạng

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right)^2 = 3 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} \\ \left(\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x}\right)^2 = 4 + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{y^2} \\ \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)^2 = 5 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2} \end{cases}.$$

Cộng ba phương trình trên ta được

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 12 = 0.$$

Từ đây ta tìm ra được nghiệm của hệ là

$$(x;y;z) = \left(\frac{9}{13};\frac{9}{12};\frac{9}{11}\right), \left(-\frac{5}{6};-\frac{5}{5};-\frac{5}{4}\right).$$

Bài toán dưới đây có hướng giải giống như bài toán trên

Bài tập 1.6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 6x(y^2+z^2) = 13yz \\ 3y(z^2+x^2) = 5zx \\ 6z(x^2+y^2) = 5xy \end{cases}$.

Hệ này có nghiệm

$$(x;y;z) = \left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right), \left(1;-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right), \left(-1;\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right), \left(-1;-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right).$$

Bài tập 1.7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ x^3 - 2y^3 = 3(x^2 - 4y^2) - 4(x - 8y) \end{cases}$.

Giải

Nhân phương trình thứ hai với -8 rồi cộng với phương trình thứ nhất, ta được

$$x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = y^4 - 16y^3 + 96y^2 - 256y + 256,$$

hay

$$(x-2)^4 = (y-4)^4.$$

Từ đây ta được $x - 2 = y - 4$ hoặc $x - 2 = 4 - y$. Từ đây ta tìm được nghiệm của hệ là

$$(x, y) = (-4, -2), (4, 2).$$

Bài tập 1.8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \end{cases}$.

Giải

Bài toán này cũng giống tương tự như bài toán trên. Nhân phương trình thứ hai của hệ với 3 rồi cộng với phương trình thứ nhất của hệ, ta được

$$(x+1)\left((x-1)^2 + 3(y-4)^2\right) = 0.$$

Từ đây giải ra ta tìm được $x = -1$. Từ đây tính được $y^2 = 16$. Vậy nghiệm của hệ là

$$(x, y) = (-1, -4), (-1, 4).$$

Bài tập 1.9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(1 - \dfrac{12}{x+3y}\right)\sqrt{x} = 2 \\ \left(1 + \dfrac{12}{x+3y}\right)\sqrt{y} = 6 \end{cases}$.

Giải

Điều kiện bài toán: $x \geq 0, y \geq 0, x + 3y > 0$. Hệ đã cho được viết lại như sau

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{12}{x+3y} = \dfrac{2}{\sqrt{x}} \\ 1 + \dfrac{12}{x+3y} = \dfrac{6}{\sqrt{y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 1 \\ \dfrac{3}{\sqrt{y}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{12}{y+3x} \end{cases}.$$

Nhân hai phương trình của hệ, vế theo vế, ta được

$$\frac{9}{y} - \frac{1}{x} = \frac{12}{y+3x} \Leftrightarrow (3x - y)(9x + y) = 0 \Leftrightarrow y = 3x.$$

Từ đây ta tìm được nghiệm của hệ là

$$(x, y) = \left(4 + 2\sqrt{3}, 12 + 6\sqrt{3}\right).$$

Bài tập 1.10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$.

Giải

Dễ thấy $y \neq 0$ nên hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x + \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y} = 7 \\ x^2 + \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y^2} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{y} + \dfrac{x}{y} = 7 \\ \left(x + \dfrac{1}{y}\right)^2 - \dfrac{x}{y} = 13 \end{cases}.$$

Cộng hai vế của hệ ta được

$$\left(x + \frac{1}{y}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{y}\right) - 20 = 0.$$

Từ đây giải ra $x + \dfrac{1}{y} = -5$ hoặc $x + \dfrac{1}{y} = 4$. Thay vào giải nghiệm của hệ là

$$(x, y) = \left(1; \frac{1}{3}\right), (3, 1).$$

Bài tập 1.11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x}\left(1 + \dfrac{1}{x+y}\right) = 2 \\ \sqrt{7y}\left(1 - \frac{1}{x+y}\right) = 4\sqrt{2} \end{cases}$.

Giải

Điều kiện $x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \neq 0$. Dễ thấy nếu (x, y) là nghiệm của hệ thì $x > 0, y > 0$. Do đó ta viết lại hệ phương trình dưới dạng

$$\begin{cases} 1 + \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{2}{\sqrt{3x}} \\ 1 - \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases}$$

Thực hiện phép trừ rồi phép cộng hai vế của phương trình ta được

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{\sqrt{3x}} - \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \\ 1 = \dfrac{1}{\sqrt{3x}} + \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases}.$$

Nhân hai phương trình của hệ ta được

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{3x} - \frac{8}{7y} \Leftrightarrow (y - 6x)(7y + 4x) = 0 \Rightarrow y = 6x (\text{vì } x > 0, y > 0).$$

Thay vào ta giải được nghiệm của hệ là

$$(x, y) = \left(\frac{11 + 4\sqrt{7}}{21}, \frac{22 + 8\sqrt{7}}{7}\right).$$

Bài tập 1.12. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(y-z)=\dfrac{5}{3} \\ y^2(z-x)=3 \\ z^2(x-y)=\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

Giải

Nhân cả ba vế của phương trình ta được

$$x^2y^2z^2(y-z)(x-y)(z-x)=-\frac{5}{3} \tag{3}$$

Cộng ba vế của phương trình ta được

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=\frac{5}{3},$$

hay

$$(x-y)(y-z)(z-x)=-\frac{5}{3}. \tag{4}$$

Từ (3) và (4) ta được $x^2y^2z^2=1$. Xảy ra hai trường hợp

1. Trường hợp $xyz=1$, nhân phương trình đầu với y, phương trình thứ hai với x, rồi cộng lại ta được
$$xyz(y-x)=-\frac{5}{3}y+3x \Rightarrow y-x=-\frac{5}{3}y+3x \Rightarrow y=\frac{3}{2}x.$$
Tương tự ta có $z=-x$. Thay vào ta có nghiệm
$$(x,y,z)=\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{3}},-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}},\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right).$$

2. Trường hợp $xyz=-1$, tương tự ta có $y=3x, z=\dfrac{x}{2}$. Thay vào hệ ta được nghiệm
$$(x,y,z)=\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{3}},-3\sqrt[3]{\frac{2}{3}},-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right).$$

Dưới đây là một số bài tập luyện tập.

a) $\begin{cases} x^2+y^2-3x+4y=1 \\ 3x^2-2y^2-9x-8y=3 \end{cases}$ (Hướng dẫn: nhân phương trình thứ nhất với 3, rồi trừ cho phương trình thứ hai) Nghiệm là

$$(x;y)=\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2};0\right)=\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2};-4\right)=\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2};0\right)=\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2};-4\right).$$

b) $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \end{cases}$ (Hướng dẫn: nhân căn hai vào phương trình thứ nhất, rồi trừ cho phương trình thứ hai để có $x=y$). Nghiệm của hệ là $(x,y)=(4,4)$.

c) $\begin{cases} x+y+xy(2x+y)=5xy \\ x+y+xy(3x-y)=4xy \end{cases}$ (Hướng dẫn: nhận xét $x=y=0$ là nghiệm, xét $xy \neq 0$. Chia mỗi phương trình cho xy rồi trừ hai phương trình đó ta được $x=2y-1$). Nghiệm của hệ là

$$(x,y)=(1,1),\left(\frac{-1\sqrt{51}}{10},\frac{9-\sqrt{51}}{20}\right),\left(\frac{-1+\sqrt{51}}{10},\frac{9+\sqrt{51}}{20}\right).$$

2 Phương pháp đánh giá bất đẳng thức

Trong phần này chúng ta vận dụng những bất đẳng thức cổ điển, điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai để so sánh hai vế của một phương trình của hệ, từ đó tìm được điều kiện cần để hệ có nghiệm.

Bài tập 2.1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + \dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}} = x^2+y \\ y + \dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}} = y^2+x \end{cases}$.

Giải

Cộng hai vế của phương trình lại ta được

$$\frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}} + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}} = x^2+y^2. \tag{5}$$

Ta có

$$\sqrt[3]{x^2-2x+9} = \sqrt[3]{(x-1)^2+8} \geq 2,$$

nên

$$\frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}} \leq \frac{2|xy|}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}} \leq \frac{2|xy|}{2} = |xy|.$$

Tương tự

$$\frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}} e|xy|,$$

mà theo bất đẳng thức Cauchy thì $x^2+y^2 \geq 2|xy|$ nên vế trái của (5) $\leq$ vế phải của (5). Vậy dấu bằng xảy ra khi $x=y=1$ hoặc $x=y=0$. Thử lại thấy hai giá trị này là nghiệm của hệ.

Bài tập 2.2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y = -x^3+3x+4 \\ x = 2y^3-6y-2 \end{cases}$.

Giải

Ta viết lại hệ phương trình dưới dạng

$$\begin{cases} y-2 = -(x^3-3x-2) \\ x-2 = 2(y^3-3y-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-2 = -(x+1)^2(x-2) \\ x-2 = 2(y+1)^2(y-2) \end{cases}.$$

Nếu $x>2$ thì từ phương trình đầu tiên suy ra $y<2$, mâu thuẫn với phương trình thứ hai. Tương tự cho $x<2$. Vậy $x=2$, suy ra $y=2$. Thử lại thấy giá trị này là nghiệm.

Bài tập 2.3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4+y^2 = \dfrac{698}{81} \\ x^2+y^2+xy-3x-4y+4=0 \end{cases}$.

Giải

Giải sử hệ phương trình đã cho có nghiệm (x, y). Ta viết lại phương trình thứ 2 theo x

$$x^2 + (y-3)x + (y-2)^2 = 0.$$

Để phương trình này có nghiệm x thì

$$\Delta = (y-3)^2 - 4(y-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq \frac{7}{3}.$$

Tương tự ta viết lại phương trình thứ 2 theo y

$$y^2 + (x-4)y + x^2 - 3x + 4 = 0.$$

Để phương trình này có nghiệm với y thì

$$\Delta = (x-4)^2 - 4(x^2 - 3x + 4) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{4}{3}.$$

Từ hai kết quả này áp dụng vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$x^4 + y^2 \leq \frac{256}{81} + \frac{49}{9} = \frac{687}{81} < \frac{698}{81}.$$

Điều này chứng tỏ hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài tập 2.4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{xy} = \dfrac{x}{z} + 1 \\ \dfrac{1}{yz} = \dfrac{y}{x} + 1 \\ \dfrac{1}{zx} = \dfrac{z}{y} + 1 \end{cases}$.

Giải

Điều kiện $xyz \neq 0$. Nhận thấy nếu một trong ba số x, y, z có một số âm, chẳng hạn $x < 0$ thì phương trình thứ 3 vô nghiệm. Nếu hai trong số ba số x, y, z là số âm, chẳng hạn $x < 0, y < 0$ thì phương trình thứ 2 vô nghiệm. Vậy ba số x, y, z cùng dấu.

1. Xét trường hợp $x, y, z > 0$ thì ta viết lại hệ như sau

$$\begin{cases} z = x^2y + xy \\ x = y^2z + yz \\ y = z^2x + zx \end{cases}.$$

Cộng ba phương trình ta được

$$x + y + z = (x^2y + y^2z + z^2x) + (xy + yz + zx) \geq 6xyz. \tag{6}$$

Mặt khác, ta biến đổi hệ về dạng

$$\begin{cases} \dfrac{z}{xy} = x + z \\ \dfrac{x}{yz} = z + x \\ \dfrac{y}{zx} = z + y \end{cases} \Rightarrow \frac{z}{xy} + \frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} = 2(x + y + z),$$

Thì ta có

$$2(x+y+z) = \frac{x^2+y^2+z^2}{xyz} \geq \frac{(x+y+z)^2}{3xyz} \Rightarrow 6xyz \geq x+y+z. \qquad (7)$$

Từ (6) và (7) ta có $x = y = z$, từ đó ta có nghiệm của hệ trong trường hợp này là

$$(x,y,z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

2. Trường hợp $x, y, z < 0$ thì bằng cách chuyển về trường hợp số dương ta tìm thêm được một nghiệm nữa là

$$(x,y,z) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Cách 2. Xét trường hợp $x, y, z > 0$.
Nếu $x \geq y$, chia hai vế của phương trình thứ hai và thứ ba của hệ ta được

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{x+y}{y+z}.$$

Từ đây suy ra $x \geq z$. Lại chia phương trình thứ nhất cho phương trình thứ hai ta được

$$\frac{z^2}{x^2} = \frac{x+z}{y+x},$$

suy ra $y \geq z$. Từ đó thì $x \geq y \geq z$. Lại chia phương trình thứ nhất cho phương trình thứ ba ta được

$$\frac{z^2}{x^2} = \frac{x+z}{y+z},$$

suy ra $x \leq y$. Vậy ta phải có $x = y = z$. Từ đó lại tìm được nghiệm của hệ như cách 1.

Bài tập 2.5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 30\dfrac{y}{x^2} + 4y = 2007 \\ 30\dfrac{z}{y^2} + 4z = 2007 \\ 30\dfrac{x}{z^2} + 4x = 2007 \end{cases}$.

Giải

Từ đặc điểm của hệ suy ra $x, y, z > 0$. Giả sử $x = \max\{x, y, z\}$ thì lấy phương trình thứ ba trừ cho phương trình thứ nhất, ta được

$$30\left(\frac{x}{z^2} - \frac{y}{x^2}\right) + 4(x-y) = 0 \Leftrightarrow 30(x^3 - yz^2) + 4x^2z^2(x-y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^3 = yz^2 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z.$$

Từ đó ta có nghiệm của hệ là

$$x = y = z = \frac{1002 \pm 2\sqrt{250971}}{4}.$$

Bài tập 2.6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3(x^2+y^2+z^2) = 1 \\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 = xyz(x+y+z)^3 \end{cases}$.

Giải

Ta có
$$1 = 3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2.$$
Ngoài ra, từ phương trình thứ hai của hệ ta suy ra được $xyz(x+y+z) \geq 0$. Do đó ta có
$$xyz(x+y+z) \geq xyz(x+y+z)^3.$$
Kết hợp với phương trình thứ hai, ta được
$$xyz(x+y+z) \geq x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2.$$
Nhưng ta lại có
$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geq xyz(x+y+z).$$
Từ đó phải có $x = y = z$. Do đó hệ có nghiệm
$$(x,y,z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Bài tập 2.7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ 125y^5 - 125y^3 + 6\sqrt{15} = 0 \end{cases}$.

Giải

Ta biến đổi phương trình thứ 2 về dạng
$$y^3(1-y^2) = \frac{6\sqrt{15}}{125} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y^6x^4 = \dfrac{4.3^2}{5^5} \end{cases}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy thì
$$3 = 3(x^2+y^2) = y^2+y^2+y^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x^2 \geq 5\sqrt[5]{y^6\frac{9}{4}x^4} \Leftrightarrow y^6x^4 \leq \frac{4.3^2}{5^5}.$$

Từ đó ta $y^2 = \dfrac{3}{2}x^2$. Do đó ta tìm được nghiệm của hệ là:
$$(x;y) = \left(\frac{\sqrt{10}}{5}; \frac{\sqrt{10}}{5}\right), \left(-\frac{\sqrt{10}}{5}; -\frac{\sqrt{10}}{5}\right).$$

Cách 2. Từ $125y^3x^2 = 6\sqrt{15}$, suy ra $y > 0$. Đặt $t = y\frac{\sqrt{15}}{5}$ thì $t > 0$. Phương trình thứ 2 được viết lại
$$3t^5 - 5t^3 + 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2(3t^3+6t^2+4t+2=0) \Leftrightarrow t = 1.$$
Từ đó ta cũng tìm được nghiệm của hệ.

Bài tập 2.8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^5+y^5+z5=3 \\ x^6+y^6+z^6=3 \end{cases}$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwart ta có

$$(x^5+y^5+z^5)^2 \le (x^4+y^4+z^4)(x^6+y^6+z^6) \Rightarrow x^4+y^4+z^4 \ge 3. \tag{8}$$

Lại áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$(x^4+y^4+z^4)^2 \le (x^2+y^2+z^2)(x^6+y^6+z^6) = 3(x^2+y^2+z^2) \le 3\sqrt{3(x^4+y^4+z^4)},$$

hay

$$x^4+y^4+z^4 \le 3. \tag{9}$$

Kết hợp (8) và (9) ta được $x^4+y^4+z^4=3$ và nghiệm là

$$(x,y,z)=(1,1,1).$$

Bài tập 2.9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y=3x+4 \\ 2y^3+z=6y+6 \\ 3x^3+x=9z+8 \end{cases}$.

Giải

Ta biến đổi hệ phương trình về dạng

$$\begin{cases} (x-2)(x+1)^2=2-y \\ 2(y-2)(z+1)^2=2-z \\ 3(z-2)(z+1)^2=2-x \end{cases}.$$

Nếu $x>2$ thì từ phương trình thứ nhất suy ra $y<2$, lại theo phương trình thứ 2 suy ra $z>2$, lại theo phương trình thứ ba thì $x<2$(vô lý).
Tương tự cho trường hợp $x<2$. Vậy $x=2$, suy ra $y=z=2$. Vậy nghiệm của hệ là

$$(x,y,z)=(2,2,2).$$

Bài tập 2.10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+1)(x^2+1)(x^4+1)=y^7+1 \\ (y+1)(y^2+1)(y^4+1)=x^7+1 \end{cases}$.

Giải

Ta viết lại các phương trình trên dưới dạng

$$x^7+\underbrace{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x}_{g(x)}=y^7 \Rightarrow y^7=x^7+g(x) \text{ và } x^7=y^7+g(y).$$

Ta xét các trường hợp sau

1. Nếu $x > 0$ thì $g(x) > 0$, do đó $y^7 = x^7 + g(x) > x^7$. Vậy $y > x$. Lại từ $y > x > 0$ thì $x^7 = y^7 + g(y) > y^7 > x^7$, hệ vô nghiệm.
2. Nếu $x = 0$ thì $y = 0$. Vậy $(0, 0)$ là một nghiệm của hệ.
3. Nếu $x < -1$ thì $g(x) = x(x+1)(x^4+x^2+1) < 0$ nên $y^7 = x^7+g(x) < x^7$. Do đó $y < x < -1$. Lại từ $y < -1$ thì $g(y) < 0$, nên $x^7 = y^7 + g(y) < y^7$ hay $x < y$. Vậy hệ phương trình vô nghiệm trong trường hợp này.
4. Nếu $x = -1$ thì ta tìm được $y = -1$.
5. Nếu $-1 < x < 0$ thì $g(x) < 0$ và ta cũng dẫn đến vô lý như các trường hợp trên.

Tóm lại, hệ phương trình có hai nghiệm

$$(x, y) = (0, 0), (-1, -1).$$

Dưới đây là một số bài tập luyện tập. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} \dfrac{2x^2}{x^2+1} = y \\ \dfrac{3y^3}{y^4+y^2+1} = z \\ \dfrac{4z^4}{z^6+z^4+z^2+1} = x \end{cases}$ (Hướng dẫn: áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các biểu thức dưới mẫu, để suy ra $x = y = z$). Nghiệm của hệ $(x, y, z) = (0, 0, 0), (1, 1, 1)$.

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{z}} = 3\sqrt{3} \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ (Hướng dẫn: sử dụng bất đẳng thức $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \geq \dfrac{9}{a+b+c}$). Nghiệm của hệ là $(x, y, z) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

c) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 3 \\ (1 + x)(1 + y)(1 + z) = (1 + \sqrt[3]{xyz})^3 \end{cases}$ (Hướng dẫn: Thực chất là đi chứng minh bất đẳng thức $(1 + x)(1 + y)(1 + z) \geq \left(1 + \sqrt[3]{xyz}\right)^3$). Nghiệm của hệ là $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

d) $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0 \end{cases}$ (Hướng dẫn: rút y^2 từ phương trình thứ nhất, đánh giá để thu được $-1 \leq y \leq 1$. Rồi biến đổi phương trình thứ hai về $7(x - 1)^2 + 1 + y^3 = 0$). Nghiệm của hệ phương trình là $(x, y) = (1, -1)$.

e) $\begin{cases} xy^3 = 9 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$ (Hướng dẫn: nhận xét x, y đều dương, vận dụng bất đẳng thức Cauchy dưới dạng $x + 3y = x + y + y + y$). Hệ phương trình vô nghiệm.

f) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{2000} \\ \dfrac{1}{3x+2y}+\dfrac{1}{3y+2z}+\dfrac{1}{2z+3x}=\dfrac{1}{x+2y+2z}+\dfrac{1}{2x+y+2z}+\dfrac{1}{2x+2y+z} \end{cases}$ (Hướng dẫn, dùng bất đẳng thức $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geq\dfrac{4}{a+b}$, chứng minh vế trái phương trình thứ hai lớn hơn vế phải của phương trình thứ 2). Nghiệm của hệ là $(x,y,z)=\left(\dfrac{2006}{9},\dfrac{2006}{9},\dfrac{2006}{9}\right)$.

3 Phương pháp đặt ẩn phụ

Điểm quan trọng nhất trong hệ dạng này là phát hiện ẩn phụ $a = f(x,y), b = g(x,y)$ có ngay trong từng phương trình hoặc xuất hiện sau một phép biến đổi hằng đẳng thức cơ bản hoặc phép chia cho một biểu thức khác 0 với mục đích đưa hệ đã cho về dạng quen thuộc, giải được.

Bài tập 3.1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+1+y(x+y)=4y \\ (x^2+1)(y+x-2)=y \end{cases}$.

Giải

Dễ thấy $y=0$ không thỏa mãn hệ phương trình, ta viết lại hệ dưới dạng

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}+y+x=4 \\ \left(\dfrac{x^2+1}{y}\right)(y+x-2)=1 \end{cases}.$$

Đặt $a=\dfrac{x^2+1}{y}, b=x+y-2$ ta được hệ $\begin{cases} a+b=2 \\ ab=1 \end{cases}$. Giải hệ này ta được $a=b=1$. Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ là

$$(x,y)=(1,2),(-2,5).$$

Bài tập 3.2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4xy+4(x^2+y^2)+\dfrac{3}{(x+y)^2}=7 \\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=3 \end{cases}$.

Giải

Điều kiện $x+y\neq 0$. Ta viết lại hệ phương trình dưới dạng

$$\begin{cases} 3(x+y)^2+(x-y)^2+\dfrac{3}{(x+y)^2}=7 \\ x+y+\dfrac{1}{x+y}+x-y=3 \end{cases}.$$

Đặt $a=x+y+\dfrac{1}{x+y} \quad (|a|\geq 2), b=x-y$ ta được hệ

$$\begin{cases} 3a^2+b^2=12 \\ a+b=3 \end{cases}.$$

Giải hệ này ta được $a=2, b=1$. Từ đó tìm được nghiệm của hệ là

$$(x,y)=(1,0).$$

Bài tập 3.3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-2xy+x+y=0 \\ x^4-4x^2y+3x^2+y^2=0 \end{cases}$.

Giải

Ta biến đổi hệ phương trình về dạng

$$\begin{cases}(x^2+y)+x(1-2y)=0\\(x^2+y)^2+3x^2(1-2y)=0\end{cases}.$$

Đặt $a=x^2+y, b=x(1-2y)$ thì ta có hệ

$$\begin{cases}a+b=0\\a^2+3bx=0\end{cases}.$$

Từ phương trình thứ nhất ta có $a=-b$. Thay vào phương trình thứ hai ta được

$$a^2-3ax=0\Leftrightarrow a=0 \text{ hoặc } a=3x.$$

1. Trường hợp $a=0$ thì $x^2+y=0$ hay $y=-x^2$. Thay vào phương trình đầu tiên của hệ ta có

$$x(2x^2+1)=0\Leftrightarrow x=0(\text{suy ra } y=0).$$

2. Trường hợp $a=3x$ ta có $x^2+y=3x$ hay $y=3x-x^2$. Thay vào phương trình ban đầu của hệ ta được

$$x^3-3x^2+2x=0\Leftrightarrow x=0,\quad x=1,\quad x=2.$$

   Từ đó ta tìm được các nghiệm của hệ là

$$(x,y)=(0,0),(1,2),(2,2).$$

Cách 2. Rút y từ phương trình thứ nhất của hệ ta có

$$y=\frac{x^2+x}{2x-1}.$$

Thay vào phương trình thứ hai ta được

$$4x^6-12x^5+10x^4-6x^3+4x^2=0.$$

Phân tích phương trình này ta được

$$2x^2(x-1)(x-2)\left(2x^2+1\right)=0\Leftrightarrow x=0,\quad x=1,\quad x=2.$$

Từ đó ta cũng tìm được nghiệm của hệ.

Cách 3. Nhận thấy hệ có nghiệm $(x,y)=(0,0)$. Với $x\neq 0$, chia phương trình thứ nhất của hệ cho x, chia phương trình thứ hai của hệ cho x^2 ta được

$$\begin{cases}x+\dfrac{y}{x}=2y-1\\x^2+\dfrac{y^2}{x^2}=4y-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{x^2+y}{x}\right)^2=(2y-1)^2\\\left(\dfrac{x^2+y}{x}\right)^2=6y-3\end{cases}.$$

Từ đây ta có $(2y-1)^2=6y-3$, và tiếp tục ta tìm được nghiệm của hệ.

Bài tập 3.4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 9 \\ \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}\right) = 18 \end{cases}$.

Giải

Đặt $a = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, b = \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}$, hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 9 \\ (a+b)(1+a)(1+b) = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 9 \\ (a+b)(1+a+b+ab) = 18 \end{cases}.$$

Giải hệ này ta tìm được $(a, b) = (1, 2), (2, 1)$. Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ là

$$(x, y) = \left(\frac{1}{8}, 1\right), \left(1, \frac{1}{8}\right).$$

Bài tập 3.5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5 \\ x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 9 \end{cases}$.

Giải

Điều kiện $xy \neq 0$. Đặt $u = x + \dfrac{1}{x} \quad (|u| \geq 2), v = y + \dfrac{1}{y} \quad (|v| \geq 2)$, thì ta có

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ u^2 + v^2 = 13 \end{cases}.$$

Giải hệ này ta tìm được $(u, v) = (2, 3), (3, 2)$. Từ đó ta có nghiệm của hệ là

$$(x; y) = \left(1; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right), \left(1; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; 1\right), \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; 1\right).$$

Bài tập 3.6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 16x^3y^3 - 9y^3 = (2xy - y)(4xy^2 + 3) \\ 4x^2y^2 - 2xy^3 + y^2 = 3 \end{cases}$.

Giải

Đặt $a = 2xy, b = y$ thì ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a^3 - 9b^3 = (a - b)(2ab + 3) \\ a^2 - ab + b^2 = 3 \end{cases}$$

Thế phương trình thứ hai vào phương trình thứ nhất ta được $a = 2b$. Từ đó ta có nghiệm của hệ

$$(x, y) = (1, 1), (1, -1).$$

Bài tập 3.7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{7x+y}+\sqrt{2x+y}=5 \\ \sqrt{2x+y}+x-y=2 \end{cases}$.

Giải

Điều kiện $\min\{7x, 2x\} \geq -y$. Đặt $a=\sqrt{7x+y}, b=\sqrt{2x+y}$ thì hệ phương trình được viết lại dưới dạng

$$\begin{cases} a+b=5 & (1) \\ b+x-y=2 & (2) \end{cases}.$$

Nhận thấy $a^2-b^2=5x$, kết hợp với (1) suy ra $b=\dfrac{5-x}{2}$, thế vào (2) ta được

$$\frac{5-x}{2}+x-y=2 \Rightarrow x=2y-1.$$

Lại thế ngược giá trị này vào (2) ta được

$$\sqrt{5y-2}+y-1=2 \Rightarrow y=\frac{11-\sqrt{77}}{2}.$$

Từ đó, nghiệm của hệ là

$$(x,y)=\left(10-\sqrt{77}, \frac{11-\sqrt{77}}{2}\right).$$

Bài tập 3.8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt[4]{x}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}\right)=2 \\ \sqrt[4]{y}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}\right)=1 \end{cases}$.

Giải

Nếu $x=0$ hoặc $y=0$ hoặc $x=y=0$ thì hệ vô nghiệm. Do đó điều kiện của hệ là $x,y>0$. Đặt $\sqrt{x}=u, \sqrt{y}=v (u,v>0)$, hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} \sqrt{u}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{2u+v}{u^2+v^2}\right)=2 \\ \sqrt{v}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{2u+v}{u^2+v^2}\right)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{u}}+\dfrac{1}{\sqrt{v}}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2}{\sqrt{u}}-\dfrac{1}{\sqrt{v}}=\dfrac{4u+2v}{u^2+v^2} \end{cases}.$$

Nhân hai vế của phương trình ta được

$$2v(u^2+2v^2)-u(u^2+2v^2)=0 \Leftrightarrow (2v-u)(u^2+2v^2)=0 \Rightarrow u=2v.$$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ là

$$(x,y)=\left(64\left(17+12\sqrt{2}\right), 16\left(17+12\sqrt{2}\right)\right).$$

Bài tập 3.9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(y+z) = x^2+2 \\ y(z+x) = y^2+3 \\ z(x+y) = z^2+4 \end{cases}$.

Giải

Đặt

$$a = -x+y+z; b = x-y+z; c = x+y-z \Rightarrow z = \frac{a+b}{2}, y = \frac{a+c}{2}, x = \frac{b+c}{2}.$$

Thay vào ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a(b+c) = 4 \\ b(c+a) = 6 \\ c(a+b) = 8 \end{cases}.$$

Cộng ba phương trình lại ta được $ab+bc+ca = 9$. Từ đó ta nhận được

$$\begin{cases} ab = 1 \\ ac = 3 \\ bc = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{15}}{5} \\ b = \frac{\sqrt{15}}{3} \\ c = \sqrt{15} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = -\frac{\sqrt{15}}{5} \\ b = -\frac{\sqrt{15}}{3} \\ c = -\sqrt{15} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm

$$(x,y,z) = \left(\frac{2\sqrt{15}}{3}, \frac{3\sqrt{15}}{5}, \frac{4\sqrt{15}}{15}\right) = \left(-\frac{2\sqrt{15}}{3}, -\frac{3\sqrt{15}}{5}, -\frac{4\sqrt{15}}{15}\right).$$

Bài tập 3.10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+8y^3-4xy^2 = 1 \\ 2x^4+8y^4-2x-y = 0 \end{cases}$.

Giải

Xét $y = 0$ ta có $x = 1$. Xét $y \neq 0$, đặt $x = ty$ ta có

$$\begin{cases} y^3(t^3-4t+8) = 1 \\ y^3(2t^4+8) = 2t+1 \end{cases}.$$

Chia hai vế của phương trình ta được

$$t^3 - 8t^2 + 12t = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ hoặc } t = 6 \text{ hoặc } t = 2.$$

Thay vào ta tìm được nghiệm của hệ là

$$(x,y) = (1,0), \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(1, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{\sqrt[3]{25}}, \frac{1}{2\sqrt[3]{25}}\right).$$

Dưới đây là một số bài tập luyện tập. Giải các hệ phương trình sau

1. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5 \end{cases}$ (Hướng dẫn: đặt $u = \sqrt[6]{x}, v = \sqrt[6]{y}$, ta được một hệ đối xứng của u, v). Nghiệm của hệ là $(x, y) = (64, 1), (1, 64)$.

2. $\begin{cases} \sqrt{2x + y} - \sqrt{x + 4y} = -1 \\ \sqrt{2x + y} + x = 3 \end{cases}$ (Hướng dẫn: đặt $y = \sqrt{2x + y}, v = \sqrt{x + 4y}$). Nghiệm của hệ là $(x, y) = (1, 2)$.

4 Hệ phương trình với những phương trình đặc biệt

Trong một số loại hệ phương trình, thì chìa khóa để giải nằm trong đặc điểm của mỗi phương trình trong hệ. Cũng có khi cần phải khai thác một cách độc lập từng phương trình một. Dưới đây là một số loại hệ như vậy.

Bài tập 4.1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2xy + 3x + 4y = -6 \\ x^2 + 4y^2 + 4x + 12y = 3 \end{cases}$.

Giải

Phương trình thứ nhất của hệ viết được dưới dạng

$$(x+2)(2y+3) = 0.$$

Từ đó suy ra được $x = -2$ hoặc $2y + 3 = 0$. Thay vào ta tìm được nghiệm của hệ là

$$(x, y) = \left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(2, -\frac{3}{2}\right), \left(-2, -\frac{7}{2}\right), \left(-6; -\frac{3}{2}\right).$$

Bài tập 4.2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x+3} = \dfrac{y-3}{x} \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x} = x + 3 \end{cases}$.

Giải

Điều kiện $x > 0, y \geq 3$. Ta biến đổi phương trình thứ nhất của hệ

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+y} + \sqrt{x+3} = \frac{x+y-(x+3)}{x} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x+y-(x+3)}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x+3}} = \frac{x+y-(x+3)}{x} \\ \Leftrightarrow\ & (y-3)\left(\frac{1}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x+3}} - \frac{1}{x}\right) = 0 \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp

a) Trường hợp 1: $y = 3$ thay vào phương trình hai của hệ ta được

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = x + 3.$$

Bình phương hai vế, ta nhận thấy phương trình này vô nghiệm.

b) Trường hợp 2: $\dfrac{1}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x+3}} - \dfrac{1}{x} = 0$ hay $\sqrt{x+y} - \sqrt{x+3} = x$. Từ đây ta được hệ

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x+3} = x \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x} = x + 3 \end{cases}.$$

Trừ hai vế của hệ, rồi giải, ta tìm ra được nghiệm của hệ là

$$(x, y) = (1, 8).$$

Bài tập 4.3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2xy-zx-xy=3 \\ x^2+y^2+yz-zx-2xy=-1 \end{cases}$.

Giải

Một phương trình trong hệ được viết lại như sau

$$\begin{cases} (x+y)^2-z(x+y)+z^2-3=0 \\ (x-y)^2-z(x-y)+1=0 \end{cases}.$$

Xem phương trình thứ nhất như là phương trình bậc hai của $x+y$, thì để có nghiệm, phải có

$$\Delta = z^2-4 \geq 0 \Rightarrow z^2 \geq 4.$$

Tương tự cho phương trình thứ hai ta có $z^2 \leq 4$. Vậy phải có $z^2=4$. Từ đây ta tìm được nghiệm của hệ là

$$(x,y,z)=(1,0,2),(-1,0,2).$$

Bài tập 4.4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}=y-\dfrac{1}{y} \\ 2y=x^3+1 \end{cases}$.

Giải

Điều kiện $xy \neq 0$. Từ phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$x^2y-y=xy^2-x \Rightarrow (x-y)(xy+1)=0.$$

1. Trường hợp 1: $x=y$, thay vào phương trình thứ hai ta được

$$x^3-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0 \Leftrightarrow x=1.$$

2. Trường hợp 2: $xy+1=0 \Rightarrow y=-\dfrac{1}{x}$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$x^4+x+2=0.$$

Phương trình này vô nghiệm vì

$$x^4-2x^2+1+x^2+x+1+x^2=(x^2-1)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+x^2+\frac{3}{4}>0.$$

Vậy hệ có một nghiệm là

$$(x,y)=(1,1).$$

Bài tập 4.5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4-x^3y+x^2y^2=1 \\ x^3y-x^2+xy=-1 \end{cases}$.

Giải

Phương trình thứ hai được phân tích thành

$$(x^2+1)(xy-1)=0 \Rightarrow xy=1.$$

Thay vào phương trình thứ nhất ta được

$$x^4-x^2=0.$$

Từ đây tìm được nghiệm của hệ là

$$(x,y)=(1,1),(-1,-1).$$

Bài tập 4.6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}=y-\dfrac{1}{y} \\ (x-4y)(2x-y+4)=-36 \end{cases}$.

Giải

Điều kiện $xy\neq 0$. Phương trình thứ nhất của hệ được viết lại dưới dạng

$$x-y=\frac{(y-x)(y^2+xy+x^2)}{x^3y^3} \Leftrightarrow x=y \text{ hoặc } \frac{y^2+xy+x^2}{x^3y^3}=-1.$$

1. Trường hợp $x=y$, thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$x^2+4x-16=0.$$

Từ đó tìm được nghiệm trong trường hợp này là

$$(x,y)=(-6,-6),(2,2).$$

2. Trường hợp $\dfrac{y^2+xy+x^2}{x^3y^3}=-1$ thì do $y^2+xy+x^2>0$ với mọi $xy\neq 0$ nên nếu (x,y) là nghiệm của hệ thì $xy<0$. Mặt khác phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$2x^2+4y^2-9xy+4x-16y=-36 \Leftrightarrow 2(x+1)^2+4(y-2)^2-9xy=-18.$$

Do $xy<0$ nên phương trình này vô nghiệm. Vậy nghiệm của hệ là

$$(x,y)=(-6,-6),(2,2).$$

Bài tập 4.7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1 \\ x\sqrt{3x-2xy+1}=4xy+3x+1 \end{cases}$.

Giải

Ta có
$$\sqrt{1+y^2} > \sqrt{y^2} = |y| \geq \pm y \Rightarrow \sqrt{1+y^2} \pm y > 0.$$
Tương tự
$$\sqrt{1+x^2} \pm x > 0.$$
Khi đó phương trình thứ nhất của hệ được viết lại
$$\begin{aligned}
& x + \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+y^2} - y \\
& \Leftrightarrow x + y + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2} = 0 \\
& \Leftrightarrow x + y + \frac{x^2-y^2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}} = 0 \\
& \Leftrightarrow (x+y)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+x-y\right) = 0 \\
& \Leftrightarrow x+y=0.
\end{aligned}$$

Thay $y=-x$ vào phương trình thứ hai ta được
$$x\sqrt{3x+2x^2+1} = -4x^2+3x+1 \Leftrightarrow x|x|\sqrt{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+2} = x^2\left(-4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right).$$

1. Xét $x>0$, thì ta có
$$\sqrt{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+2} = -4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}.$$
   Giải phương trình này ta được $x = \dfrac{3+\sqrt{37}}{14}$.

2. Xét $x<0$m tương tự ta tìm được $x = \dfrac{3-\sqrt{37}}{14}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là
$$(x,y) = \left(\frac{3+\sqrt{37}}{14}, -\frac{3+\sqrt{37}}{14}\right), \left(\frac{3-\sqrt{37}}{14}, \frac{-3+\sqrt{37}}{14}\right).$$

Bài tập 4.8. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(2x^2-1)(2y^2-1) = \dfrac{7}{2}xy \\ x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0\end{cases}$.

Giải

Phương trình thứ hai của hệ được viết lại dưới dạng
$$x^2+(y-7)x+y^2-6y+14=0.$$
Để phương trình này có nghiệm thì
$$\Delta = (y-7)^2-4y^2+24y-56 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq \frac{7}{3}.$$

Ngoài ra, phương trình thứ hai của hệ còn được viết dưới dạng

$$y^2 + (x-6)y + x^2 - 7x + 14 = 0.$$

Để phương trình này có nghiệm thì

$$\Delta = (x-6)^2 - 4x^2 + 28x - 50 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq \frac{10}{3}.$$

Phương trình thứ nhất được viết lại

$$\left(2x - \frac{1}{x}\right)\left(2y - \frac{1}{y}\right) = \frac{7}{2}.$$

Xét hàm số $z = 2t - \dfrac{1}{t}$ với $t \geq 1$. Dễ dàng chứng minh được hàm này là hàm tăng. Do đó, với $x \geq 2$ thì $2x - \dfrac{1}{x} \geq \dfrac{7}{2}$, và $y \geq 1$ thì $2y - \dfrac{1}{y} \geq 1$. Từ đó suy ra

$$\left(2x - \frac{1}{x}\right)\left(2y - \frac{1}{y}\right) \geq \frac{7}{2}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm

$$(x, y) = (2, 1).$$

Bài tập 4.9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2y)} = \dfrac{2}{9} \end{cases}$.

Giải

Phương trình này giải được quyết định nhờ phương trình thứ nhất của hệ. Thực tế là ta cần chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+2xy}}.$$

Ta có bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \leq \frac{2}{1+ab} \quad \text{với } 0 \leq a, b \leq 1.$$

Do phương trình thứ hai ta suy ra $0 \leq x, y \leq \dfrac{1}{2}$. Từ đó suy ra

$$\frac{1}{1+2x^2} + \frac{1}{1+2y^2} \leq \frac{2}{1+2xy}. \tag{10}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy thì

$$2\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} \leq \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}\right)^2}{2} = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{1+2xy}}\right)^2}{2} = \frac{2}{1+2xy}. \tag{11}$$

Cộng (10) và (11) ta được

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}\right)^2 \le \frac{4}{1+2xy} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} \le \frac{2}{\sqrt{1+2xy}}.$$

Do đó dấu bằng xảy ra khi $x=y$. Từ đó thay vào ta tìm được nghiệm của hệ là

$$(x,y)=\left(\frac{9-\sqrt{73}}{36},\frac{9-\sqrt{73}}{36}\right),\left(\frac{9+\sqrt{73}}{36},\frac{9+\sqrt{73}}{36}\right).$$

Bài tập 4.10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+zx=12 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{2}{z}=3 \end{cases}$.

Giải

Điều kiện $xyz \neq 0$. Kết hợp phương trình thứ hai và phương trình thứ ba của hệ ta được

$$xyz=8.$$

Vậy bộ số (x,y,z) thỏa mãn $x+y+z=6, xy+yz+zx=12, xyz=8$ nên nó là nghiệm của phương trình bậc ba

$$t^3-6t^2+12t-8=0 \Rightarrow (t-2)^3=0 \Rightarrow t=2.$$

Vậy hệ phương trình có một nghiệm là

$$(x,y,z)=(2,2,2).$$

Dưới đây là một số bài tập dạng này. Giải các hệ phương trình sau

1. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2-2xy+2yz-2xz+1=0 \end{cases}$ (Hướng dẫn: nhận xét $|z| \le 1$ từ phương trình thứ nhất, từ phương trình thứ hai suy ra $|z| \ge 1$, để suy ra $|z|=1$). Hệ phương trình vô nghiệm.

2. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=2 \\ \dfrac{2}{xy}-\dfrac{1}{z^2}=4 \end{cases}$ (Hướng dẫn: Từ đặc điểm của hệ suy ra $\frac{1}{x},\frac{1}{y}$ là nghiệm của phương trình bậc hai $t^2-(2-\frac{1}{z})t+\frac{1}{2}\left(4+\frac{1}{z^2}\right)=0$, rồi suy ra $z=-\frac{1}{2}$). Hệ phương trình có nghiệm $(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

3. $\begin{cases} xy+x+y=x^2-2y^2 \\ x\sqrt{2y}-y\sqrt{x-1}=2x-2y \end{cases}$ (Hướng dẫn: phân tích phương trình thứ nhất dưới dạng $(x+y)(x-2y-1)=0$, suy ra $x=2y+1$). Nghiệm của hệ là $(x,y)=(5,2)$.

4. $\begin{cases} y^2 = (5x+4)(4-x) \\ y^2 - 5x^2 - 4xy + 16x - 8y + 16 = 0 \end{cases}$ (Hướng dẫn: phương trình thứ hai được phân tích thành $(y-5x-4)(y-4+x)=0$). Hệ có nghiệm $(x,y) = (0,4), (4,0), \left(-\frac{4}{5}, 0\right)$

5. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^3 = \frac{3}{2} \\ xy + yz + zx = -\frac{3}{4} xyz = \frac{1}{8} \end{cases}$ (Hướng dẫn: x, y, z là nghiệm của phương trình $4t^3 - 3t = \frac{1}{2}$, ta tìm nghiệm thuộc đoạn [-1,1], và thế $t = \cos\alpha$, chứng tỏ có đủ ba nghiệm). Hệ có nghiệm $(x,y,z) = \left(\cos\frac{\pi}{9}, \cos\frac{5\pi}{9}, \cos\frac{7\pi}{9}\right)$ và các hoán vị của nó.

6. $\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{8xy}{x+y} = 16 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$ (Hướng dẫn: phân tích phương trình thứ nhất về dạng: $(x+y-4)(x^2+y^2+4(x+y)) = 0$). Hệ có nghiệm $(x,y) = (-3,7), (2,2)$

5 Phương pháp thế

Phương pháp này dành cho các hệ phương trình mà có một phương trình cho phép ta có thể biểu diễn được biến này thông qua biến kia, hoặc một biểu thức thông qua các biểu thức khác. Rồi thế vào phương trình còn lại để tìm nghiệm.

Bài tập 5.1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 3x^2y + y^2 = 5 \\ 2x^2 + y = 3 \end{cases}$.

Giải

Thế $y = 3 - 2x^2$ từ phương trình thứ hai vào phương trình thứ nhất ta được

$$x^2 + 3x^2(3 - 2x^2) + (3 - 2x^2)^2 = 5 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2.$$

Từ đây ta tìm được nghiệm của hệ là

$$(x; y) = \left(\sqrt{2}; -1\right) = \left(-\sqrt{2}; -1\right).$$

Bài tập 5.2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1) = 3x^2 - 4x + 1 \\ xy + x + 1 = x^2 \end{cases}$.

Giải

Dễ thấy $x = 0$ không thỏa mãn phương trình thứ 2. Do đó $x \neq 0$, từ phương trình thứ hai ta có $y + 1 = \dfrac{x^2 - 1}{x}$. Thay vào phương trình thứ nhất ta được

$$\begin{aligned} & x^2 \frac{x^2 - 1}{x}\left(x + \frac{x^2 - 1}{x}\right) = 3x^2 - 4x - 1 \\ \Leftrightarrow\ & (x^2 - 1)(2x^2 - 1) = (x - 1)(3x - 1) \\ \Leftrightarrow\ & (x - 1)(2x^3 + 2x^2 - 4x) = 0 \end{aligned}$$

Giải ra ta được $x = 1, x = 0(\text{loại}), x = -2$. Từ đó tìm được nghiệm của hệ là

$$(x, y) = (1, -1), \left(-2, -\frac{5}{2}\right).$$

Bài tập 5.3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + x - 3y = 4 \\ yz + z - 5y = 9 \\ zx - 5x - 3z = -6 \end{cases}$.

Giải

Nhận xét $y \neq -1$. Từ phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$x = \frac{4 + 3y}{y + 1}.$$

Từ phương trình thứ hai của hệ ta được

$$z = \frac{9+5y}{y+1}.$$

Thay hai kết quả này vào phương trình thứ ba ta được

$$\frac{(4+3y)(9+5y)}{(y+1)^2} - \frac{5(4+3y)}{y+1} - \frac{3(9+5y)}{y+1} = -6.$$

Giải phương trình này ta được $y = -\frac{1}{3}, y = -\frac{5}{3}$. Từ đây ta tìm được nghiệm của hệ là

$$(x, y, z) = \left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{3}, 11\right), \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{3}, -1\right).$$

Cách 2. Ta có thể phân tích hệ về dạng

$$\begin{cases} (xy - x^2)^2 + x^3y = 1 \\ (xy - x^2) + x^3y = 1 \end{cases}.$$

Đến đây đặt $u = -x^2 + xy, v = x^3y$ rồi giải tiếp ta cũng tìm ra nghiệm.

Bài tập 5.4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$.

Giải

Rút $xy = \frac{6x + 6 - x^2}{2}$ từ phương trình thứ hai, thế vào phương trình thứ nhất ta được

$$\begin{aligned} & x^4 + 2x^2.\frac{6x+6-x^2}{2} + \left(\frac{6x+6-x^2}{2}\right)^2 = 2x + 9 \\ & \Leftrightarrow x(x+4)^3 = 0. \end{aligned}$$

Giải phương trình trên ta tìm ra nghiệm $x = 0$ hoặc $x = -4$. Từ đây ta có nghiệm của hệ là

$$(x, y) = \left(-4, \frac{17}{4}\right).$$

Bài tập 5.5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2(x^2 + y^2)} + 2\sqrt{xy} = 16 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$.

Giải

Bài toán này chúng ta đã giới thiệu một lời giải trong phần phương pháp cộng đại số. Dưới đây ta trình bày thêm một lời giải dựa vào phép thế. Trước tiên bình phương cả hai phương trình ta được

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy + 2\sqrt{(x^2+y^2).2xy} = 128 \\ x + y + 2\sqrt{xy} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 + 2\sqrt{\left[(x+y)^2 - 2xy\right].2xy} = 128 \\ x + y = 16 - 2\sqrt{xy} \end{cases}.$$

Thế $x+y$ từ phương trình thứ hai vào phương trình thứ nhất ta được

$$\begin{aligned}
&(16-2\sqrt{xy})^2+2\sqrt{\left[(16-2\sqrt{xy})^2-2xy\right].2xy}=128\\
&\Leftrightarrow 128-32\sqrt{xy}+2xy+\sqrt{\left[256-64\sqrt{xy}+2xy\right].2xy}=64\\
&\Leftrightarrow 64-16t+t^2+\sqrt{(128-32t+t^2).t^2}=32(t=\sqrt{xy}\geq 0)\\
&\Leftrightarrow \sqrt{t^4-32t^3+128t^2}=-(t^2-16t+32)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} t^2-16t+32\leq 0\\ t^2-32t^3+128t^2=(t^2-16t+32)^2\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} t^2-16t+32\leq 0\\ \left[\begin{array}{l} t=4\\ t=\dfrac{4}{3}\end{array}\right.\end{cases}\\
&\Leftrightarrow t=4.
\end{aligned}$$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ là

$$(x,y)=(4,4).$$

Bài tập 5.6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-8x=y^3+2y\\ x^2-3=3(y^2+1)\end{cases}$.

Giải

Hệ đã cho được viết lại dưới dạng

$$\begin{cases} x^3-y^3=2(4x+y)\\ x^2-3y^2=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x^3-y^3)=6(4x+y)\\ x^2-3y^2=6\end{cases}.$$

Thế $6=x^2-3y^2$ từ phương trình thứ hai vào phương trình thứ nhất ta được

$$3(x^3-y^3)=(x^2-3y^2)(4x+y)\Leftrightarrow x^3+x^2y-12xy^2=0\Leftrightarrow x(x-3y)(x+4y)=0.$$

Từ đó ta tìm được các nghiệm của hệ là

$$(x,y)=(3,1),(-3,-1),\left(-4\sqrt{\frac{6}{13}},\sqrt{\frac{6}{13}}\right),\left(4\sqrt{\frac{6}{13}},-\sqrt{\frac{6}{13}}\right).$$

Bài tập 5.7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+z=0\\ x^2+y^2+z^2=50\\ x^7+y^7+z^7=350\end{cases}$.

Giải

Bình phương phương trình thứ nhất, kết hợp với phương trình thứ hai ta được

$$xy + yz + zx = -25. \tag{12}$$

Từ phương trình thứ nhất có $z = -(x + y)$ thay vào phương trình thứ ba ta được

$$x^7 + y^7 - (x + y)^7 = 350 \Rightarrow -xy(x + y)(x^2 + xy + y^2) = 50. \tag{13}$$

Lại thay $z = -(x + y)$ vào phương trình (12) ta được

$$x^2 + xy + y^2 = 25. \tag{14}$$

Kết hợp hai phương trình (13) và (14) ta được

$$xyz = 2.$$

Vậy chứng tỏ x, y, z thỏa mãn

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ xy + yz + zx = -5 \\ xyz = 2 \end{cases}.$$

Vậy x, y, z là ba nghiệm của phương trình

$$t^3 - 5t - 2 = 0.$$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ là

$$(x; y; z) = \left(-2; 1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\right) \text{ và các hoán vị của nó.}$$

Bài tập 5.8. Tìm tất cả các cặp số thực dương thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy + x = 1 \\ y^2 + xy + x + y = 1 \end{cases}$.

Giải

Từ phương trình đầu tiên suy ra $0 < x < 1$, thế $y = \dfrac{1 - x - x^2}{x}$ từ phương trình thứ nhất vào phương trình thứ hai ta có

$$\left(\frac{1}{x} - x\right)\left(\frac{1}{x} - 1\right) = 1 \Rightarrow x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0.$$

Đặt $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$ liên tục trên đoạn $[0,\ 1]$ và $f'(x) = 3(x^2 - x) - x - 1 < 0, \forall x \in (0, 1)$, $\quad f\left(\dfrac{1}{2}\right) f(1) < 0$. Chứng tỏ trên khoảng $(0, 1)$ phương trình $x^3 - 2x^2 - x + 1$ có một nghiệm duy nhất $x_0 \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$. Đặt $x = 2\cos\alpha \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{3}\right)$ thì phương trình được viết lại

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 8\cos^3\alpha - 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow 2(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) - 2(2\cos^2\alpha - 1) + 2\cos\alpha - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow 2\cos 3\alpha - 2\cos 2\alpha + 2\cos\alpha - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow 2\sin\alpha.\cos 3\alpha - 2\sin\alpha.\cos 2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin 4\alpha = \sin 3\alpha \\
&\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{7}.
\end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{7}}; \frac{2\cos\frac{\pi}{7} - 1}{4\cos^2\frac{\pi}{7}}\right).$$

6 Phương pháp lượng giác

Một số loại hệ phương trình "nảy sinh" từ một số hệ thức lượng giác, cho nên đối với lớp hệ này thì thuật toán ngược lại là "lượng giác hóa" được xem là con đường duy nhất để công phá. Dưới đây là một số ví dụ.

Bài tập 6.1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x \end{cases}$.

Giải

Nhận xét $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ là nghiệm của hệ. Xét $xyz \neq 0$, viết lại hệ phương trình dưới dạng

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{1 - x^2} = y \\ \dfrac{2y}{1 - y^2} = z \\ \dfrac{2z}{1 - z^2} = x \end{cases}.$$

Đặt $x = \tan\alpha$, thay vào ta được hệ

$$\begin{cases} y = \tan 2\alpha \\ z = \tan 4\alpha \\ x = \tan 9\alpha \end{cases}.$$

Từ đó ta có được $\tan\alpha = \tan 8\alpha$. Giải ra ta được $\alpha = k\dfrac{\pi}{7} (k \in \mathbb{Z})$. Cho $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ta được các nghiệm của hệ là

$$(x; y; z) = (0; 0; 0), \left(\tan\frac{\pi}{7}; \tan\frac{2\pi}{7}; \tan\frac{3\pi}{7}\right), \left(\tan\frac{2\pi}{7}; \tan\frac{6\pi}{7}; \tan\frac{\pi}{7}\right),$$
$$\left(\tan\frac{3\pi}{7}; \tan\frac{6\pi}{7}; \tan\frac{5\pi}{7}\right), \left(\tan\frac{4\pi}{7}; \tan\frac{\pi}{7}; \tan\frac{2\pi}{7}\right),$$
$$\left(\tan\frac{5\pi}{7}; \tan\frac{3\pi}{7}; \tan\frac{6\pi}{7}\right), \left(\tan\frac{6\pi}{7}; \tan\frac{5\pi}{7}; \tan\frac{3\pi}{7}\right)$$

Bài tập 6.2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 3x = y(3x^2 - 1) \\ y^3 - 3y = z(3y^2 - 1) \\ z^3 - 3z = x(3z^2 - 1) \end{cases}$.

Giải

Nhận xét $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ không thỏa mãn hệ. Đặt $x = \tan\alpha$ với $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), \alpha \neq \pm\dfrac{\pi}{6}$. Thay vào ta có hệ

$$\begin{cases} y = \tan 3\alpha \\ z = \tan 9\alpha \\ x = \tan 27\alpha \end{cases}.$$

Từ đây suy ra $\tan\alpha = \tan 27\alpha$, giải được $\alpha = k\dfrac{\pi}{26}$. Vậy nghiệm của hệ phương trình là

$$(x,y,z) = (0,0,0),$$

$$(x,y,z) = \left(\frac{\pi}{26}, \frac{3\pi}{26}, \frac{9\pi}{26}\right) \text{ và các hoán vị của nó,}$$

$$(x,y,z) = \left(-\frac{\pi}{26}, -\frac{3\pi}{26}, -\frac{9\pi}{26}\right) \text{ và các hoán vị của nó.}$$

Bài tập 6.3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = 4\left(y+\dfrac{1}{y}\right) = 5\left(z+\dfrac{1}{z}\right) \\ xy+yz+zx=1 \end{cases}$.

Giải

Từ phương trình thứ nhất suy ra x,y,z cùng dấu. Nhận xét là nếu (x,y,z) là nghiệm thì $(-x,-y,-z)$ cũng là nghiệm của hệ, nên ta có thể giả sử x,y,z đều dương. Đặt

$$x = \tan\frac{A}{2}, y = \tan\frac{B}{2}, z = \tan\frac{C}{2}, \quad A,B,C \in (0,\pi).$$

Thì từ phương trình thứ hai suy ra $A+B+C=\pi \Rightarrow A,B,C$ là 3 góc của một tam giác. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Phương trình thứ nhất được viết lại

$$\frac{6}{\sin A} = \frac{8}{\sin B} = \frac{10}{\sin C} \Leftrightarrow a = 12R, b = 16R, c = 20R.$$

Vậy tam giác ABC vuông tại C nên $z=1$, từ đó tìm được $x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{2}$. Vậy nghiệm của hệ là

$$(x,y,z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1\right).$$

Bài tập 6.4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2}(x-y)(1+4xy) = \sqrt{3} \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$.

Giải

Do $x^2+y^2=1$ nên $x,y \in [-1,1]$. Đặt $x = \sin\alpha, y = \cos\alpha$ với $\alpha \in [0,2\pi]$. Khi đó phương trình đầu tiên được biến đổi thành

$$\sqrt{2}\left(\sin\alpha - \cos\alpha\right)\left(1+2\sin 2\alpha\right) = \sqrt{3}.$$

Giải phương trình này ta tìm được 6 nghiệm thuộc miền $[0,2\pi]$. Từ đó nghiệm của hệ là

$$(x,y) = \left(\sin\frac{13\pi}{36}, \cos\frac{13\pi}{36}\right), \left(\sin\frac{37\pi}{36}, \cos\frac{37\pi}{36}\right), \left(\sin\frac{61\pi}{36}, \cos\frac{61\pi}{36}\right)$$
$$\left(\sin\frac{17\pi}{36}, \cos\frac{17\pi}{36}\right), \left(\sin\frac{41\pi}{36}, \cos\frac{41\pi}{36}\right), \left(\sin\frac{65\pi}{36}, \cos\frac{65\pi}{36}\right).$$

Bài tập 6.5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1 \\ (1-x)(1+y) = 2 \end{cases}$.

Giải

Điều kiện $|x| \leq 1, |y| \leq 1$. Đặt $x = \cos\alpha, y = \cos\beta$ với $\alpha, \beta \in [0, \pi]$. Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} \cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha = 1 \\ (1-\cos\alpha)(1+\cos\beta) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \\ \sin\alpha - \cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha - 1 = 0 \end{cases}.$$

Giải hệ này ta được $\alpha = \dfrac{\pi}{2}, \beta = 0$. Do đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$(x, y) = (0, 1).$$

7 Hệ hoán vị vòng quanh

Đây là những hệ có dạng $\begin{cases} f(x) = g(y) \\ f(y) = g(z) \\ f(z) = g(x) \end{cases}$. Đối với những hệ này ta luôn tập trung vào chứng minh hệ chỉ có nghiệm khi các biến bằng nhau. Dưới đây là một số hệ phương trình cùng với cách chứng minh đó.

Bài tập 7.1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x - 5 = y \\ y^3 + 3y^2 + 2y - 5 = z \\ z^3 + 3z^2 + 2z - 5 = x \end{cases}$.

Giải

Đặt $x = \max\{x, y, z\}$. Xét hai trường hợp sau

1. $x \geq y \geq z$, thì từ hệ trên ta có

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x - 5 \leq x \\ z^3 + 3z^2 + 2z - 5 \geq z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\left((x+2)^2 + 1\right) \leq 0 \\ (z-1)\left((z+2)^2 + 1\right) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 1 \leq z \end{cases}.$$

2. $x \geq z \geq y$, thì từ hệ trên ta có

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x - 5 \leq x \\ y^3 + 3y^2 + 2y - 5 \geq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\left((x+2)^2 + 1\right) \leq 0 \\ (y-1)\left((y+2)^2 + 1\right) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 1 \leq y \end{cases}.$$

Cả hai trường hợp đều cho $x = y = z = 1$. Thử lại thấy $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ là nghiệm của hệ phương trình.

Bài tập 7.2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 = y + 1 \\ y^2 = z + 1 \\ z^2 = x + 1 \end{cases}$.

Giải

Ta có $x + 1 = z^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$. Tương tự cho $y \geq -1, z \geq -1$. Do vai trò hoán vị vòng quanh nên không mất tính tổng quát ta giả sử $x = \max\{x, y, z\}$.

1. Nếu $x > 0$ thì từ phương trình thứ ba suy ra $z^2 > 1$, nhưng do $z \geq -1$ nên suy ra $z > 1$, từ đó $z > 0$. Tương tự ta cũng có $y > 0$. Vì $x \geq z > 0$ nên từ phương trình thứ nhất và phương trình thứ ba ta có
$$y \geq x.$$
Do đó phải có $x = y$, từ đó suy ra được $x = y = z$.

2. Xét $x \leq 0$ thì ta có $y, z \leq 0$, ta có

$$\left.\begin{array}{l} 0 \geq x \geq y \Rightarrow x^2 \leq y^2 \Rightarrow y + 1 \leq z + 1 \Rightarrow y \leq z \\ 0 \geq z \geq y \Rightarrow z^2 \leq y^2 \Rightarrow x + 1 \leq z + 1 \Rightarrow x \leq z \end{array}\right\} \Rightarrow x = y = z.$$

Tóm lại ta luôn có $x = y = z$. Vậy hệ có nghiệm là

$$(x, y, z) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Bài tập 7.3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0 \end{cases}$.

Giải

Cộng từng vế ba phương trình ta được

$$(x-2)^3 + (y-2)^3 + (z-2)^3 = 0.$$

1. Nếu $x > 2$ thì từ phương trình thứ nhất,

$$y^3 = 6x(x-2) + 8 > 8 \Rightarrow y > 2.$$

   Lại từ phương trình thứ hai ta được

$$z^3 = 6y(y-2) + 8 > 2 \Rightarrow z > 2.$$

   Vậy

$$(x-2)^3 + (y-2)^3 + (z-2)^3 > 0 (\text{vô lý}).$$

2. Nếu $x < 2$ thì từ phương trình thứ ba ta có

$$6z(z-2) = x^3 - 8 < 0 \Rightarrow 0 < z < 2.$$

   Với $0 < z < 2$, kết hợp với phương trình thứ hai ta có

$$9y(y-2) = z^3 - 8 < 0 \Rightarrow 0 < y < 2.$$

   Vậy

$$(x-2)^3 + (y-2)^3 + (z-2)^3 < 0 (\text{vô lý}).$$

Vậy $x = 2$, thay vào phương trình thứ nhất có $y = 2$, thay vào phương trình thứ hai có $z = 2$. Vậy nghiệm của hệ là

$$(x, y, z) = (2, 2, 2).$$

Bài tập 7.4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x(y^2+1) = y(y^2+9) \\ 2y(z^2+1) = z(z^2+9) \\ 2z(x^2+1) = x(x^2+9) \end{cases}$.

Giải

Hệ phương trình được viết lại dưới dạng

$$\begin{cases} x = \dfrac{y(y^2+9)}{2(y^2+1)} \\ y = \dfrac{z(z^2+9)}{2(z^2+1)} \\ z = \dfrac{x(x^2+9)}{2(x^2+1)} \end{cases}.$$

Đặt $f(t) = \dfrac{t(t^2+9)}{2(t^2+1)}, \quad t \in \mathbb{R}$. Giả sử $x = \max\{x, y, z\}$ thì $x \geq y$ nên

$$\begin{aligned} & f(y) \geq f(z) \\ & \Leftrightarrow \frac{y(y^2+9)}{2(y^2+1)} \geq \frac{z(z^2+9)}{2(z^2+1)} \\ & \Leftrightarrow y(y^2+9)(z^2+1) - z(z^2+9)(y^2+1) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow (y^3z^2 + y^3 + 9z^2y + 9y) - (z^3y^2 + z^3 + 9y^2z + 9z) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow (y-z)\left[(yz-3)^2 + (y-z)^2\right] \geq 0 \\ & \Leftrightarrow y \geq z \end{aligned}$$

Lập luận tương tự ta cũng có được $z \geq x$. Vậy $x \geq y \geq z \geq x$. Suy ra phải có $x = y = z$. Từ đây ta giải được nghiệm của hệ là

$$(x, y, z) = (0, 0, 0), \left(\sqrt{7}, \sqrt{7}, \sqrt{7}\right), \left(-\sqrt{7}, -\sqrt{7}, -\sqrt{7}\right).$$

Bài tập 7.5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 36x^2y - 60x^2 + 25y = 0 \\ 36y^2z - 60y^2 + 25z = 0 \\ 36z^2x - 60z^2 + 25x = 0 \end{cases}$.

Giải

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} y = \dfrac{60x^2}{36x^2+25} \\ z = \dfrac{60y^2}{36y^2+25} \\ x = \dfrac{60z^2}{36z^2+25} \end{cases}.$$

Hiển nhiên hệ này có nghiệm $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Dưới đây ta xét $x, y, z \neq 0$. Từ đặc điểm của hệ suy ra $x, y, z > 0$. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$y = \frac{60x^2}{36x^2+25} \leq \frac{60x^2}{2\sqrt{36x^2.25}} = \frac{60x^2}{60x} = x.$$

Tương tự ta thu được $y \leq x \leq z \leq y$. Suy ra $x = y = z$. Từ đó suy ra hệ có một nghiệm nữa là $x = y = z = \dfrac{5}{6}$.

Bài tập 7.6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \tan^2 x + 2\cot^2 2y = 1 \\ \tan^2 y + 2\cot^2 2z = 1 \\ \tan^2 z + 2\cot^2 2x = 1 \end{cases}$.

Giải

Sử dụng công thức
$$\cot^2 2x = \left(\frac{1-\tan^2 x}{2\tan x}\right)^2 = \frac{(1-\tan^2 x)^2}{4\tan^2 x}.$$
Đặt $a = \tan^2 x, b = \tan^2 y, c = \tan^2 z$ thì ta được hệ sau
$$\begin{cases} 2a + b + \dfrac{1}{b} = 4 \\ 2b + c + \dfrac{1}{c} = 4 \\ 2c + a + \dfrac{1}{a} = 4 \end{cases}.$$
Do a, b, c là các số dương, ta có
$$2a = 4 - b - \frac{1}{b} \leq 4 - 2 = 2 \Rightarrow a \leq 1.$$
Tương tự cho các biến còn lại $b \leq 1, c \leq 1$.
Nếu ba số a, b, c khác nhau đôi một, giả sử $b = \min\{a, b, c\}$ thì lấy phương trình thứ nhất trừ phương trình thứ hai ta được
$$2(a-b) + (c-b)\left(\frac{1}{bc} - 1\right) = 0.$$
Do $b \neq c$ và $b = \min\{a, b, c\}$, cùng với $b, c \leq 1$ nên vế trái của phương trình nhận giá trị dương. Do đó không thể xảy ra trường hợp này.
Giả sử hai trong ba số bằng nhau, không mất tính tổng quát ta giả sử $a = b$ thì:
$$2c = 4 - a - \frac{1}{a} = 4 - b - \frac{1}{b} = 2a \Rightarrow a = b = c.$$
Tóm lại, ba số a, b, c phải xảy ra $a = b = c$, thay vào giải ta được
$$(a, b, c) = (1, 1, 1), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$
Do đó ta tìm được
$$x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{R}).$$
Vậy, nghiệm của hệ phương trình là
$$(x, y, z) = \left(\pm\frac{\pi}{4} + k\pi, \pm\frac{\pi}{4} + l\pi, \pm\frac{\pi}{4} + m\pi\right),$$
$$\left(\pm\frac{\pi}{6} + k\pi, \pm\frac{\pi}{6} + l\pi, \pm\frac{\pi}{6} + m\pi\right), \quad k, m, l \text{ là các số nguyên.}$$

Bài tập 7.7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^5 - x^4 + 2x^2y = 2 \\ y^5 - y^4 + 2y^2z = 2 \\ z^5 - z^4 + 2z^2x = 2 \end{cases}$.

Giải

Dễ dàng đoán được nghiệm của hệ là $x = y = z = 1$.
Nếu $x > 1$ thì

$$2 = z^5 - z^4 + 2z^2x > z^5 - z^4 + 2z^2,$$

hay

$$(z-1)(z^4 + 2z + 2) < 0.$$

Vì $z^4 + 2z + 2 = \left(z^2 - \dfrac{1}{2}\right)^2 + (z+1)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ nên $z < 1$. Lập luận tương tự thì với $z < 1$ thì $y > 1$. Lại tiếp tục ta có nếu $y > 1$ thì $x < 1$(vô lý).
Nếu $x < 1$ thì lập luận tương tự ta cũng dẫn đến điều vô lý.
Vậy $x = 1$ nên dễ dàng tìm ra nghiệm của hệ là

$$(x, y, z) = (1, 1, 1).$$

Bài tập 7.8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x - 5 = y \\ y^3 + 3y^2 + 2y - 5 = z \\ z^3 + 3z^2 + 2z - 5 = x \end{cases}$.

Giải

Cộng ba phương trình của hệ ta được

$$(x^3 + 3x^2 + x - 5) + (y^3 + 3y^2 + y - 5) + (z^3 + 3z^2 + z - 5) = 0,$$

hay

$$(x-1)(x^2 + 4x + 5) + (y-1)(y^2 + 4y + 5) + (z-1)(z^2 + 4z + 5) = 0. \tag{15}$$

1. Nếu $x > 1$ thì $z^3 + 3z^2 + 2z - 5 > 1$ hay $(z-1)(z^2 + 4z + 6) > 0$. Suy ra $z > 1$. Lại từ $z > 1$, lập luận tương tự ta được $y > 1$. Vậy $x, y, z > 1$, điều này mâu thuẫn với 15.

2. Tương tự nếu $x < 1$ thì $y < 1, z < 1$ cũng mâu thuẫn với (15).

Vậy $x = y = z = 1$ chính là nghiệm duy nhất của hệ.

Bài tập 7.9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(x+1) = 2(y^3 - x) + 1 \\ y^2(y+1) = 2(z^3 - y) + 1 \\ z^2(z+1) = 2(x^3 - z) + 1 \end{cases}$.

Giải

Ta chuyển hệ phương trình trên về dạng như sau

$$\begin{cases} 2y^3 = 2x^3 + x^2 + 2x - 1 \\ 2z^3 = 2y^3 + y^2 + 2y - 1 \\ 2x^3 = 2z^3 + z^2 + 2z - 1 \end{cases}.$$

Đây là hệ hoán vị vòng quanh. Nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x = \max\{x, y, z\}$. Ta có

$$\begin{aligned} & x \geq y \\ & \Rightarrow 2z^3 + z^2 + 2z - 1 \geq 2x^3 + x^2 + 2x - 1 \\ & \Rightarrow 2z^3 + z^2 + 2z \geq 2x^3 + x^2 + 2x \\ & \Rightarrow (z - x)(2z^2 + 2zx + 2x^2 + z + x + 2) \geq 0 \\ & \Rightarrow (z - x)\left((z + x)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right) \geq 0 \\ & \Rightarrow z \geq x. \end{aligned}$$

Vậy $z = x$, suy ra $x = y = z$. Từ đó hệ có nghiệm là

$$(x, y, z) = \left(\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{-1 - \sqrt{2}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{2}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{2}}{2}\right).$$

Bài tập 7.10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x = (y - 1)^2 \\ y = (z - 1)^2 \\ z = (t - 1)^2 \\ t = (x - 1)^2 \end{cases}$.

Giải

Do hệ phương trình hoán vị nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x = \min\{x, y, z, t\}$. Từ điều kiện của hệ suy ra $x, y, z, t \geq 0$. Ta xét hai trường hợp

1. Nếu $x > 1$ thì $x, y, z, t > 1$, khi đó

$$\begin{aligned} & y \geq x \\ & \Rightarrow (z - 1)^2 \geq (y - 1)^2 \\ & \Rightarrow z \geq y \\ & \Rightarrow (t - 1)^2 \geq (z - 1)^2 \\ & \Rightarrow t \geq z \\ & \Rightarrow (x - 1)^2 \geq (t - 1)^2 \\ & \Rightarrow x \geq t. \end{aligned}$$

   Do đó $x = y = z = 1$, ta tìm được nghiệm là

$$(x, y, z, t) = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

2. Nếu $1 \geq x \geq 0$ thì

$$\begin{aligned}
&0 \geq x-1 \geq -1\\
&\Rightarrow 1 \geq (x-1)^2\\
&\Rightarrow 1 \geq t \geq 0\\
&\Rightarrow 0 \geq t-1 \geq -1\\
&\Rightarrow 1 \geq (t-1)^2\\
&\Rightarrow 1 \geq z \geq 0\\
&\Rightarrow 0 \geq z-1 \geq -1\\
&\Rightarrow 1 \geq (z-1)^2\\
&\Rightarrow 1 \geq y \geq 0.
\end{aligned}$$

Tức là lúc đó ta có $1 \geq x, y, z, t \geq 0$. Khi đó, từ $z \geq x$, suy ra

$$\begin{aligned}
&(t-1)^2 \geq (y-1)^2\\
&\Rightarrow y \geq t\\
&\Rightarrow (z-1)^2 \geq (x-1)^2\\
&\Rightarrow x \geq z\\
&\Rightarrow (y-1)^2 \geq (t-1)^2\\
&\Rightarrow t \geq y.
\end{aligned} \tag{16}$$

Tức là $x = z$ và $y = t$, suy ra

$$\begin{cases} x = (y-1)^2 \\ y = (x-1)^2 \end{cases}.$$

Giải ra ta nhận các nghiệm sau

$$(x, y) = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right), (0,1), (1,0).$$

Tóm lại, hệ đã cho có bốn nghiệm

$$(x, y, z, t) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$
$$, (0,1,0,1), (1,0,1,0).$$

Dưới đây là một số bài tập luyện tập. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} x^3 - 9(y^2 - 3y + 3) = 0 \\ y^3 - 9(z^2 - 3z + 3) = 0 \\ z^3 - 9(x^2 - 3x + 3) = 0 \end{cases}$ (Hướng dẫn: cộng ba phương trình lại được $(x-3)^3 + (y-3)^3 + (z-3)^3 = 0$, lập luận để suy ra $x = y = z$). Nghiệm của hệ là $(x, y, z) = (3, 3, 3)$.

b) $\begin{cases} 4x = y^2 + 1 \\ 4y = z^2 + 1 \\ 4z = x^2 + 1 \end{cases}$ (Hướng dẫn: nhận xét $x, y, z > 0$, giả sử $x = \max\{x, y, z\}$. Từ $x \geq z > 0$, suy ra $y \geq x$. Do đó $x = y = z$). Nghiệm của hệ là

$$(x, y, z) = \left(2 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\right), \left(2 - \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\right).$$

c) $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_2 + \dfrac{1}{x_2}\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{2}\left(x_3 + \dfrac{1}{x_3}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \dfrac{1}{2}\left(x_1 + \dfrac{1}{x_1}\right) \end{cases}$ (Hướng dẫn: Nhận xét các nghiệm $x_1, \dots, x_n$ cùng dấu, nếu $(x_1, \dots, x_n)$ là nghiệm thì $(-x_1, \dots, -x_n)$ cũng là nghiệm. Xét các nghiệm dương, dùng bất đẳng thức Cauchy để suy ra $x_i \geq 1, \quad \forall i = \overline{1, n}$ cùng với cộng tất cả các phương trình lại ta suy ra nghiệm). Nghiệm của hệ là

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (1, 1, \dots, 1), (-1, -1, \dots, -1).$$

8 Phương pháp dùng đạo hàm

Trong nhiều loại hệ phương trình có chứa các phương trình, mà để tìm ra nghiệm hoặc các mối quan hệ nội tại cần phải sử dụng tính đơn điệu của hàm số. Và công cụ đạo hàm là một công cụ mạnh cho việc khẳng định tính đơn điệu của hàm số. Những bài tập thuộc dạng này nhìn chung là các bài tập khó. Khó không phải ở chỗ công thức tính đạo hàm mà là vận dụng công cụ đạo hàm ra sao trong phương trình. Cũng nên nhắc lại, trong kỳ thi đại học khối A, 2010 vừa qua, câu khó nhất là hệ phương trình, mà để giải phải dùng đạo hàm, cả nước chỉ có một thí sinh được 30/30.

Bài tập 8.1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-1}-\sqrt{y}=8-x^2 \\ (x-1)^4=y \end{cases}$.

Giải

Điều kiện $x\geq 1, y\geq 0$. Thế y từ phương trình thứ hai vào phương trình thứ nhất ta được

$$\sqrt{x-1}-(x-1)^2=8-x^2,$$

hay

$$\sqrt{x-1}=-x^3+x^2-2x+9. \qquad (17)$$

Xét hàm số $f(x)=-x^3+x^2-2x+9 \quad (x\geq 1)$ có $f'(x)=-3x^2+2x-2<0, \forall x\geq 1$. Suy ra hàm $f(x)$ luôn nghịch biến khi $x\geq 1$. Mặt khác hàm số $g(x)=\sqrt{x-1}$ luôn đồng biến khi $x\geq 1$. Do đó phương trình (17) nếu có nghiệm thì nghiệm là duy nhất. Nhận thấy $x=2$ là nghiệm của phương trình (17). Vậy hệ phương trình có một nghiệm duy nhất

$$(x,y)=(2,1).$$

Bài tập 8.2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3+2y^2+3y+3=0 \\ 2y^3+2z^2+3z+3=0 \\ 2z^3+2x^2+3x+3=0 \end{cases}$.

Giải

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta suy ra

$$x^3=-\left(y-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{15}{16}\leq\frac{-15}{16}\Rightarrow x\leq-\sqrt[3]{\frac{15}{16}}<-\frac{3}{4}.$$

Tương tự cho y, z. Vậy ta giới hạn được miền $x, y, z<-\dfrac{3}{4}$.

Hệ đã cho có thể viết lại dưới dạng

$$\begin{cases} x=f(y) \\ y=f(z) \\ z=f(x) \end{cases}, \quad \text{với } f(t)=-\frac{1}{2}\sqrt[3]{2t^2+3t+3}.$$

Ta có $2t^2+3t+3>0, \forall t\in\mathbb{R}$. Tính

$$f'(t)=-\frac{1}{6}(4t+3)(2t^2+3t+3)^{\frac{2}{3}}.$$

Giải phương trình $f'(t) = 0 \Rightarrow t = -\frac{3}{4}$. Lập bảng biến thiên của hàm $f(t)$ ta có:

$$f(t) \text{ tăng với } t \leq -\frac{3}{4} \text{ và } f(t) \text{ giảm với } t \geq -\frac{3}{4}.$$

Giả sử (x, y, z) là một nghiệm của phương trình, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x = \max\{x, y, z\}$. Vì $x, y, z < -\frac{3}{4}$ và $f(t)$ là hàm tăng trên miền $t < -\frac{3}{4}$ nên khi

$$\begin{aligned} & x \geq y \\ & \Rightarrow f(y) \geq f(z) \\ & \Rightarrow y \geq z \\ & \Rightarrow f(z) \geq f(x) \\ & \Rightarrow z \geq x. \end{aligned}$$

Vậy phải có $x = y = z$. Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ là

$$(x, y, z) = (-1, -1, -1).$$

Bài tập 8.3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 3x - 3 + \ln(x^2 - x + 1) = y \\ y^3 + 3y - 3 + \ln(y^2 - y + 1) = z \\ z^3 + 3z - 3 + \ln(z^2 - z + 1) = x \end{cases}$.

Giải

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x = \max\{x, y, z\}$.
Xét hàm số $f(x) = x^3 + 3x - 3 + \ln(x^2 - x + 1)$ có miền xác định trên toàn bộ $\mathbb{R}$, thì hệ được viết lại dưới dạng

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = f(y) \\ x = f(z) \end{cases}.$$

Tính

$$f'(x) = 3x^2 + 3 + \frac{2x - 2}{x^2 - x + 1} = 3x^2 + \frac{3x^2 - x + 2}{x^2 - x + 1} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đó suy ra hàm $f(x)$ đồng biến trên toàn bộ $\mathbb{R}$. Nếu (x, y, z) là một nghiệm của hệ thì

$$\begin{aligned} & x \geq y \\ & \Rightarrow f(x) \geq f(y) \\ & \Rightarrow y \geq z \\ & \Rightarrow f(y) \geq f(z) \\ & \Rightarrow z \geq x. \end{aligned}$$

Vậy ta phải có $x = y = z$. Thay vào ta được

$$x^3 + 2x - 3 - \ln(x^2 - x + 1) = 0.$$

Vì hàm số $h(x) = x^3 + 2x - 3 - \ln(x^2 - x + 1) = 0$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên có nghiệm duy nhất $x = 1$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất

$$(x, y, z) = (1, 1, 1).$$

Bài tập 8.4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0 \\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7 \end{cases}$.

Giải

Điều kiện $x \leq \dfrac{3}{4}, y \leq \dfrac{5}{2}$. Phương trình thứ nhất của hệ có thể viết lại dưới dạng

$$(4x^2+1)2x=(5-2y+1)\sqrt{5-2y}.$$

Đặt $u=2x, v=\sqrt{5-2y}$ thì ta có

$$(u^2+1)u=(v^2+1)v \tag{18}$$

Hàm $f(t)=t(t^2+1)$ có $f'(t)=3t^2+1>0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra phương trình (18) có nghiệm $u=v$ hay

$$2x=\sqrt{5-2y} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y=\dfrac{5-4x^2}{2} \end{cases}.$$

Thế y vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$4x^2+\left(\frac{5}{2}-2x^2\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7=0. \tag{19}$$

Nhận thấy $x=0$ hay $x=\dfrac{3}{4}$ không là nghiệm của phương trình. Xét hàm số

$$g(x)=4x^2+\left(\frac{5}{2}-2x^2\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7,$$

có

$$\begin{aligned} g'(x)&=8x-8x\left(\frac{5}{2}-2x^2\right)-\frac{4}{\sqrt{3-4x}} \\ &=4x(4x^2-3)-\frac{4}{\sqrt{3-4x}}<0 \text{ trên } \left(0,\frac{3}{4}\right). \end{aligned}$$

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $\left(0,\dfrac{3}{4}\right)$. Ta có $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$, nên phương trình (19) có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{2}$. Từ đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$(x,y)=\left(\frac{1}{2},2\right).$$

Bài tập 8.5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2-2x+6}\log_3(6-y)=x \\ \sqrt{y^2-2y+6}\log_3(6-z)=y \\ \sqrt{z^2-2z+6}\log_3(6-x)=z \end{cases}$.

Giải

Điều kiện $x, y, z < 6$. Ta viết lại phương trình dưới dạng

$$\begin{cases} \log_3(6-y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x+6}} \\ \log_3(6-z) = \dfrac{y}{\sqrt{y^2-2y+6}} \\ \log_3(6-x) = \dfrac{z}{\sqrt{z^2-2z+6}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = g(x) \\ f(z) = g(y) \\ f(x) = g(z) \end{cases},$$

trong đó

$$f(t) = \log_3(6-t), \quad g(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2-2t+6}} \text{ với } t \in (-\infty, 6).$$

Dễ thấy hàm $f(t)$ là hàm nghịch biến, còn hàm số $g(t)$ là hàm đồng biến trên $(-\infty, 6)$. Nếu (x, y, z) là nghiệm của hệ, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $x = \max\{x, y, z\}$. Khi đó

$$\begin{aligned} & x \geq y \\ & \Rightarrow f(x) \geq f(y) \\ & \Rightarrow g(z) \geq g(x) \\ & \Rightarrow z \leq x \\ & \Rightarrow f(z) \leq f(x) \\ & \Rightarrow g(y) \leq g(z) \\ & \Rightarrow y \geq z \\ & \Rightarrow f(y) \geq f(x) \\ & \Rightarrow g(x) \geq g(y) \\ & x \leq y. \end{aligned}$$

Vậy phải có $x = y$, từ đó suy ra $x = y = z$. Hệ có nghiệm là

$$(x, y, z) = (3, 3, 3).$$

Bài tập 8.6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + \sqrt{x^2-2x+2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2-2y+2} = 3^{x-1} + 1 \end{cases}$.

Giải

Trừ hai phương trình ta được

$$x + 3^{x-1} + \sqrt{x^2-2x+2} = y + 3^{y-1} + \sqrt{y^2-2y+2}. \tag{20}$$

Đặt $f(x) = x + 3^{x-1} + \sqrt{x^2-2x+2}$, thì

$$f'(x) = 1 + 3^{x-1}.\ln 3 + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} > 0,$$

vì

$$1 + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} \geq 1 + \frac{x-1}{|x-1|} \geq 0.$$

Chứng tỏ $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó phương trình (20) suy ra $x = y$. Thay vào phương trình thứ nhất của hệ được

$$x - 1 + \sqrt{(x-1)^2 + 1} = 3^{x-1} \Leftrightarrow t + \sqrt{t^2 + 1} = 3^t \quad \text{với } t = x - 1.$$

Lấy logarit hai vế ta có

$$\ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) = t.\ln 3 \Leftrightarrow \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) - t.\ln 3 = 0.$$

Đặt $g(t) = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) - t.\ln 3$ thì

$$g'(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} - \ln 3.$$

Do $\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leq 1$ và $\ln 3 > 1$ nên $g'(t) < 0$, hay $g(t)$ là hàm nghịch biến. Vậy phương trình $\ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) - t.\ln 3 = 0$ có nghiệm duy nhất $t = 0$. Từ đây suy ra hệ phương trình có duy nhất nghiệm

$$(x, y) = (1, 1).$$

Bài tập 8.7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3(2 + 3y) = 1 \\ x(y^3 - 2) = 3 \end{cases}$.

Giải

Rõ ràng nếu $y = \sqrt[3]{2}$ không thỏa mãn hệ, vậy $y \neq \sqrt[3]{2}$. Từ phương trình thứ hai ta có

$$x = \frac{3}{y^3 - 2},$$

thay vào phương trình thứ nhất ta được

$$\frac{27\,(2 + 3y)}{(y^3 - 2)^3} = 1.$$

Đặt hàm số

$$f(y) = \frac{27\,(2 + 3y)}{(y^3 - 2)^3} - 1$$

thì

$$f'(y) = -\frac{81\,(8y^3 + 6y^2 + 2)}{(y^3 - 2)^3}.$$

Khảo sát sự biến thiên của hàm $f(t)$ ta thấy trong miền $(-\infty, \sqrt[3]{2})$ phương trình chỉ có một nghiệm duy nhất là -1, còn trong miền $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$ thì phương trình cũng có một nghiệm duy nhất, nhận thấy nghiệm duy nhất này là 2. Vậy hệ đã cho có hai nghiệm

$$(x, y) = (-1, -1), \left(\frac{1}{2}, 2\right).$$

Bài tập 8.8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} - 2^y = -xy - \dfrac{3}{2} \\ (x^2y + 2x)^2 - 2x^2y + 1 - 4x = 0 \end{cases}$.

Giải

Điều kiện $x \neq 0$. Ta viết lại phương trình thứ hai

$$[x(xy+2)]^2 - 2[x(xy+2)] + 1 = 0 \Leftrightarrow x(xy+2) = 1 \Rightarrow y = \frac{1-2x}{x^2}.$$

Thay vào phương trình thứ nhất ta được

$$2^{\frac{1-x^2}{x^2}} - 2^{\frac{1-2x}{x^2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x}.$$

Nhận xét

$$\frac{1-x^2}{x^2} - \frac{1-2x}{x^2} = \frac{2}{x} - 1 \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{x} = \frac{1-2x}{2x^2} - \frac{1-x^2}{x^2}.$$

Do đó ta được

$$2^{\frac{1-x^2}{x^2}} + \frac{1-x^2}{x^2} = 2^{\frac{1-2x}{x^2}} + \frac{1-2x}{x^2}. \tag{21}$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + \dfrac{t}{2}$ có $f'(t) = 2^t \ln 2 + \dfrac{1}{2} > 0, \forall t$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến nên phương trình (21) suy ra

$$\frac{1-x^2}{x^2} = \frac{1-2x}{x^2}.$$

Từ đây dễ dàng tìm ra nghiệm của hệ là

$$(x,y) = \left(2, -\frac{3}{4}\right).$$

Bài tập 8.9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 \end{cases}$.

Giải

Hiển nhiên $y \neq 0$. Chia cả hai vế của phương trình thứ nhất cho $y^5 \neq 0$ ta được

$$\left(\frac{x}{y}\right)^5 + \left(\frac{x}{y}\right) = y^5 + y. \tag{22}$$

Hàm số $f(t) = t^5 + t$ có $f'(t) = 5t^4 + 1 > 0, \forall t$ nên hàm $f(t)$ luôn đồng biến. Do đó phương trình (**??**) phải xảy ra $\dfrac{x}{y} = y \Rightarrow x = y^2$. Thế $x = y^2$ vào phương trình thứ hai ta được

$$\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6.$$

Giải phương trình này ta tìm được $x = 1$. Hệ phương trình có nghiệm

$$(x,y) = (1,1), (1,-1).$$

Bài tập 8.10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(1 + 4^{2x-y}\right) 5^{1-2x+y} = 1 + 2^{2x-y+1} \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 \end{cases}$.

Giải

Điều kiện $y^2+2x>0$. Đặt $t=2x-y$ thì phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$\left(1+4^t\right).5^{1-t}=1+2^{t+1}\Leftrightarrow \frac{1+4^t}{5^t}=\frac{1+2^{t+1}}{5}.$$

Dùng công cụ hàm số dễ dàng chứng minh vế trái của phương trình là hàm nghịch biến, vế phải là hàm đồng biến nên phương trình trên có nghiệm duy nhất $t=1$. Từ đó ta có $2x-y=1\Rightarrow x=\frac{y+1}{2}$, thay vào phương trình thứ hai ta được

$$y^3+2y+3+\ln(y^2+y+1)=0.$$

Vế trái của phương trình là hàm đồng biến nên phương trình có nghiệm duy nhất $y=-1$. Vậy nghiệm của hệ là

$$(x,y)=(0,-1).$$

Dưới đây là một số bài tập luyện tập. Giải các hệ phương trình

1. $\begin{cases}x^3+x^2+2x=2y^3+1\\ y^3+y^2+2y=2z^3+1\\ z^3+z^2+2z=2x^3+1\end{cases}$ (Hướng dẫn: Viết phương trình về dưới dạng $\begin{cases}f(x)=g(y)\\ f(y)=g(z)\\ f(z)=g(x)\end{cases}$ với $f(t)=t^3+t^2+2t, g(t)=2t^3+1$. Hai hàm số trên đều là hàm đồng biến, lập luận để suy ra $x=y=z$. Cần giải phương trình $t^3-t^2-2t+1=0$, chứng tỏ phương trình có ba nghiệm thuộc khoảng $(-2,2)$, rồi thế biến $t=2\cos u,\quad u\in(0,\pi)$). Hệ phương trình có nghiệm

$$(x,y,z)=\left(2\frac{\pi}{7},2\frac{\pi}{7},2\frac{\pi}{7}\right),\left(2\frac{3\pi}{7},2\frac{3\pi}{7},2\frac{3\pi}{7}\right),\left(2\frac{5\pi}{7},2\frac{5\pi}{7},2\frac{5\pi}{7}\right).$$

2. $\begin{cases}x^3-5x=y^3-5y\\ x^8+y^4=1\end{cases}$ (Hướng dẫn: nhận xét $|x|\le 1,|y|\le 1$. Ta có hàm số $f(t)=t^3-5t$ nghịch biến trên $|t|\le 1$, nên phương trình thứ nhất phải có $x=y$.) Hệ phương trình có nghiệm

$$(x,y)=\left(\sqrt[4]{\frac{-1+\sqrt5}{2}},\sqrt[4]{\frac{-1+\sqrt5}{2}}\right),\left(-\sqrt[4]{\frac{-1+\sqrt5}{2}},-\sqrt[4]{\frac{-1+\sqrt5}{2}}\right).$$