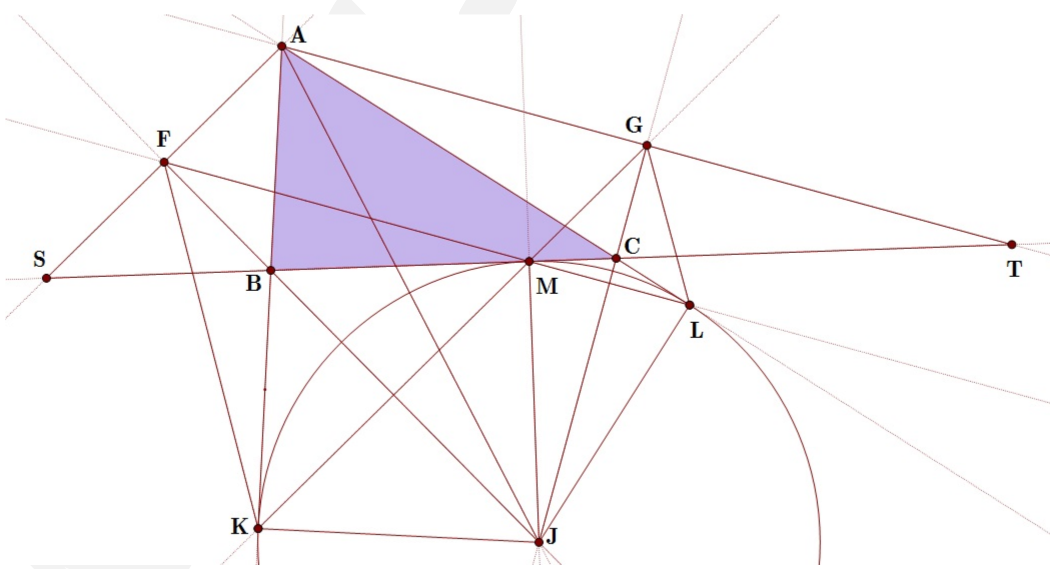
TỔNG HỢP LỜI GIẢI
IMO 2012

Diễn đàn math.vn thực hiện

Với mục đích cung cấp cho các bạn một tài liệu tham khảo trong công việc giảng dạy môn Toán cho các kì thi HSG và Olympic, chúng tôi tổng hợp một số lời giải của các bài toán trong đề thi IMO năm nay. Các lời giải dưới đây được chúng tôi chọn lọc từ các diễn đàn về toán như **artofproblemsolving.com, forum.mathscope.org , math.vn** cùng với đáp án chính thức của ban tổ chức tại **imomath.com**. Chúng tôi cảm ơn tất cả các thành viên đã tham gia thảo luận về đề thi của các diễn đàn nói trên. Do vốn tiếng Anh có hạn nên việc chuyển ngữ các lời giải sẽ gặp những thiếu sót, mong sự góp ý của các bạn để tạo nên lời giải hoàn chỉnh hơn.

1 Ngày thứ nhất

Bài 1. Cho tam giác ABC và điểm J là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A của tam giác. Đường tròn này tiếp xúc với AB, AC, BC tại K, L, M theo thứ tự. LM cắt BJ tại F, KM cắt CJ tại G. Gọi S, T lần lượt là giao điểm của AF, AG với BC. Chứng minh rằng M là trung điểm của ST.



LỜI GIẢI 1. Trước hết ta có $\triangle FKJ = \triangle FMJ$ (c.g.c), suy ra $\widehat{KFJ} = \widehat{JFM}$.
Để ý thêm

$$\widehat{JFM} = \widehat{JML} - \widehat{MJF} = 90^\circ - (\widehat{MJC} + \widehat{MJF}) = \frac{180^\circ - \widehat{BJC}}{2} = \widehat{KAJ}.$$

Do đó tứ giác $JKFA$ nội tiếp, suy ra $\widehat{AFJ} = \widehat{AKJ} = 90^\circ \Rightarrow FJ \perp AS$.
Điều này dẫn tới $FS = FA$ (1).
Lập luận tương tự như trên ta cũng chứng minh được $\widehat{AGC} = \widehat{ALJ} = 90^\circ \Rightarrow$ $AT \perp GJ$.
Điều này dẫn đến $AT \parallel FM$ (2).
Từ (1) và (2) ta suy ra M là trung điểm của ST.

Cách làm khác như sau: Sau khi chứng minh được $FJ \perp AS$ và $CG \perp AT$ ta suy ra $AB = BS$ và $AC = CT$.
Bởi thế $MS = AB + BM = AB + BK = AK$ và $MT = AC + CM = AC + CL = AL$ kết hợp với $AK = AL$ là xong. ■

LỜI GIẢI 2 **(Đáp án chính thức).** Do $KM \perp BJ$ nên KM song song với đường phân giác của góc $\widehat{ABC}$, suy ra $\widehat{BMK} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$.
Tương tự ta có $\widehat{FMB} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$ để dẫn đến $\widehat{FMK} = \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB})$ và kết hợp với $\widehat{MFJ} + \widehat{FMK} = 90^\circ$ ta suy ra $\widehat{MFJ} = \frac{1}{2}\widehat{CAB} = \widehat{JAK}$.
Lại có FJ là đường trung trực của đoạn MK nên $\widehat{MFJ} = \widehat{JFK}$, do đó tứ giác $AFKJ$ nội tiếp dẫn đến $AS \parallel KM$.
Tứ giác ASKM là hình thang có $\widehat{SMK} = \widehat{AKM}$ nên $SM = AK$.
Lập luận tương tự ta cũng có $AL = MT$ và kết hợp với $AK = AL$ để có kết luận $MS = MT$. ■

Bài 2. Cho số nguyên $n \geq 3$ và các số thực dương $a_2, a_3, \ldots, a_n$ thỏa mãn $a_2 \cdots a_n = 1$. Chứng minh rằng

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n > n^n.$$

LỜI GIẢI 1. Xét với mỗi $k \geq 2$ ta viết $a_k + 1 = a_k + \dfrac{1}{k-1} + \cdots + \dfrac{1}{k-1}$ ($k-1$ phân số $\dfrac{1}{k-1}$).

Áp dụng BĐT Cauchy cho k số ta được $a_k + 1 \geq k\sqrt[k]{\dfrac{a_k}{(k-1)^{k-1}}}$ hay $(a_k+1)^k \geq \dfrac{k^k}{(k-1)^{k-1}} a_k$. Do đó $VT \geq \dfrac{2^2}{1} \cdot \dfrac{3^3}{2^2} \cdots \dfrac{n^n}{(n-1)^{n-1}} = n^n$.

Vì dấu bằng không đồng thời xảy ra nên $VT > n^n$.

LỜI GIẢI 2. Với mỗi $k \geq 2$ ta xét hàm số $f_k(x) = \dfrac{(x+1)^k}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Hàm số liên tục và có đạo hàm $f_k'(x) = \dfrac{(1+x)^{k-1}((k-1)x-1)}{x^2}$.

Do đó hàm này đạt cực tiểu tại $x_k = \dfrac{1}{k-1}$ hay $f_k(x) \geq f_k(x_k) = \dfrac{k^k}{(k-1)^{k-1}}$.

Vậy nên $(a_2+1)^2(a_3+1)^3 \ldots (a_n+1)^n \geq n^n a_2 a_3 \ldots a_n = n^n$.

Vì dấu bằng không đồng thời xảy ra nên ta có BĐT đúng

$$(a_2+1)^2(a_3+1)^3 \ldots (a_n+1)^n > n^n.$$

LỜI GIẢI 3. Với mỗi $k \geq 2$ ta sẽ tìm số thực a lớn nhất để $(x+1)^k \geq ax$ với mọi $x \in (0; +\infty)$.

Ta xét hàm số $f_k(x) = (x+1)^k - ax$, hàm số liên tục và có đạo hàm $f_k'(x) = k(1+x)^{k-1} - a$.

Suy ra phương trình $f_k'(x) = 0$ có nghiệm $x_0 = \left(\dfrac{a}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}} - 1$.

Do đó hàm này đạt cực tiểu tại $x_0 = \left(\dfrac{a}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}} - 1$.

Bây giờ ta cần tìm a để $f_k(x_0) = 0$, bởi thế cho nên $a = \dfrac{k^k}{(k-1)^{k-1}}$.

Vậy ta đã chứng minh được $(1+x)^k \geq \dfrac{k^k}{(k-1)^{k-1}}x$ với mọi $x \in (0; +\infty)$.

Áp dụng BĐT này cho các số dương $a_2, a_3, \ldots, a_n$ ta được

$$(a_2+1)^2(a_3+1)^3 \ldots (a_n+1)^n \geq n^n a_2 a_3 \ldots a_n = n^n.$$

Vì dấu bằng không đồng thời xảy ra nên ta có BĐT đúng

$$(a_2+1)^2(a_3+1)^3 \ldots (a_n+1)^n > n^n.$$

Bài 3. Trò chơi *đoán kẻ nói dối* là một trò chơi giữa hai người chơi A và B. Quy tắc của trò chơi phụ thuộc vào hai số nguyên dương k và n mà cả hai người chơi đều đã biết trước.

Bắt đầu trò chơi, A sẽ chọn các số nguyên x và N với $1 \leq x \leq N$. A giữ bí mật số x và nói số N cho B. B sẽ cố thu nhận thông tin về số x bằng cách hỏi A các câu hỏi như sau : mỗi câu hỏi bao gồm việc B xác định một tập S tùy ý các số nguyên dương (có thể là một tập đã được nhắc đến trong câu hỏi trước đó) và hỏi A xem x có thuộc S hay không. Sau mỗi câu hỏi, A phải trả lời *có* hoặc *không*, nhưng có thể nói dối bao nhiêu lần tùy thích, chỉ có điều là phải trả lời đúng ít nhất một trong số $k+1$ câu hỏi liên tiếp.

Sau khi B đã hỏi xong, B phải chỉ ra một tập X có tối đa n số nguyên dương. Nếu $x \in X$, B thắng; nếu ngược lại, B thua. Chứng minh rằng:

1. Nếu $n \geq 2^k$, B có thể đảm bảo một chiến thắng.

2. Với mọi k đủ lớn, tồn tại một số nguyên $n \geq 1.99^k$ sao cho B không thể đảm bảo có một chiến thắng.

LỜI GIẢI 1 (**Đáp án chính thức).** Ta có thể phát biểu lại bài toán một cách tương đương như sau: Người A chọn một phần tử x từ tập con S của tập các số nguyên dương (với $|S| = N$) và người B hỏi một dãy các câu hỏi.

Câu hỏi thứ j bao gồm B chọn một tập $D_j \subseteq S$ và người A chọn một tập $P_j \in \left\{D_j, D_j^C\right\}$. Khi đó với mỗi $j \geq 1$ ta luôn có

$$x \in P_j \cup P_{j+1} \cup \cdots \cup P_{j+k}.$$

Người B chiến thắng nếu sau một số hữu hạn các bước anh ta có thể đưa ra được một tập X với $|X| \leq n$ sao cho $x \in X$.

(a) Nếu $N \geq 2^k + 1$ thì người B có thể xác định một tập $S' \subseteq S$ với $|S'| \leq N - 1$ sao cho $x \in S'$.

Giả sử $N \geq 2^n + 1$. Bước đầu tiên người B chọn một tập bất kỳ $D_1 \subseteq S$ sao cho $|D_1| \geq 2^{k-1}$ và $|D_1^C| \geq 2^{k-1}$. Sau đó nhận được tập P_1 từ người A và B chuyển sang bước thứ 2. Người B chọn một tập $D_2 \subseteq S$ sao cho $|D_2 \cap P_1^C| \geq 2^{k-2}$ và $|D_2^C \cap P_1^C| \geq 2^{k-2}$. Người B cứ tiếp tục theo cách này và đến bước thứ j anh ta chọn được một tập D_j sao cho $|D_j \cap P_j^C| \geq 2^{k-j}$ và $|D_j^C \cap P_j^C| \geq 2^{k-j}$.

Theo cách này B nhận được các tập $P_1, P_2, \ldots, P_k$ mà $\left|(P_1 \cup \cdots \cup P_k)^C\right| \geq 1$. Khi đó B chọn được tập D_{k+1} chứa đúng một phần từ không thuộc tập $P_1 \cup \cdots \cup P_k$. Do đó ta có hai trường hợp sau:

- Nếu A chọn $P_{k+1} = D_{k+1}^C$ thì B lấy $S' = S \setminus D_{k+1}$ và khẳng định được chứng minh.
- Nếu A chọn $P_{k+1} = D_{k+1}$ thì B lặp lại quá trình ở trên bằng cách đặt $S_1 = S \setminus D_{k+1}$ để nhận được một dãy các tập $P_{k+2}, P_{k+3}, \ldots, P_{2k+1}$. Khi đó bất đẳng thức sau luôn đúng:

  $$|S_1 \setminus (P_{k+2} \cdots P_{2k+1})| \geq 1,$$

  vì $|S_1| \geq 2^k$. Mặt khác ta có

  $$\left|(P_{k+1} \cup P_{k+2} \cup \cdots \cup P_{2k+1})^C\right| \geq 1,$$

  và ta lấy $S' = P_{k+1} \cup \cdots \cup P_{2k+1}$.

(b) Giả sử p và q là hai số nguyên dương thỏa mãn $1.99 \lneq p \lneq q \lneq 2$. Ta chọn k_0 sao cho

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{k_0} \leq 2 \cdot \left(1 - \frac{q}{2}\right) \qquad \text{and} \qquad p^k - 1.99^k \gneq 1.$$

Ta sẽ chứng minh với mỗi $k \geq k_0$ nếu $|S| \in \left(1.99^k, p^k\right)$ thì có chiến thuật để A chọn được các tập $P_1, P_2, \ldots$ (dựa trên các tập $D_1, D_2, \ldots$ mà B cho biết) thỏa mãn với mỗi j đẳng thức sau luôn đúng:

$$P_j \cup P_{j+1} \cup \cdots \cup P_{j+k} = S.$$

Giả sử rằng $S = \{1, 2, \ldots, N\}$, A sẽ xác định một dãy các N-bộ sau: $(\mathbf{x})_{j=0}^{\infty} = \left(x_1^j, x_2^j, \ldots, x_N^j\right)$. Đầu tiên ta đặt $x_1^0 = x_2^0 = \cdots = x_N^0 = 1$. Sau đó chọn tập P_j và ta xác định $\mathbf{x}^{j+1}$ dựa trên $\mathbf{x}^j$ như sau:

$$x_i^{j+1} = \begin{cases} 1, & \text{nếu } i \in S \\ q \cdot x_i^j, & \text{nếu } i \notin S. \end{cases}$$

Bây giờ A có thể để B chiến thắng nếu if $x_i^j \leq q^k$ với mỗi cặp (i, j). Với một dãy $\mathbf{x}$, ta định nghĩa $T(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i$. Điều đó đủ để A chắc chắn rằng $T\left(\mathbf{x}^j\right) \leq q^k$ với mỗi j.

Chú ý rằng $T\left(\mathbf{x}^0\right) = N \leq p^k \lneq q^k$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh với $\mathbf{x}^j$ cho trước thỏa mãn $T\left(\mathbf{x}^j\right) \leq q^k$, và một tập D_{j+1} thì A có thể chọn $P_{j+1} \in \left\{D_{j+1}, D_{j+1}^C\right\}$ sao cho $T\left(\mathbf{x}^{j+1}\right) \leq q^k$.

Gọi $\mathbf{y}$ là dãy được định nghĩa như dãy $\mathbf{x}$ trong trường hợp $P_{j+1} = D_{j+1}$, và tương tự $\mathbf{z}$ là dãy được xác định trong trường hợp $P_{j+1} = D_{j+1}^C$. Khi đó ta có

$$T(\mathbf{y}) = \sum_{i \in D_{j+1}^C} q x_i^j + \left|D_{j+1}\right|$$

$$T(\mathbf{z}) = \sum_{i \in D_{j+1}} q x_i^j + \left| D_{j+1}^C \right|.$$

Kết hợp hai đẳng thức ở trên ta có:

$$T(\mathbf{y}) + T(\mathbf{z}) = q \cdot T\left(\mathbf{x}^j\right) + N \leq q^{k+1} + p^k,$$

chú ý đến cách chọn số k_0 ta được

$$\min\{T(\mathbf{y}), T(\mathbf{z})\} \leq \frac{q}{2} \cdot q^k + \frac{p^k}{2} \leq q^k. \qquad \blacksquare$$

2 Ngày thứ hai

Bài 4. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ sao cho với tất cả các số nguyên a,b,c thỏa mãn a+b+c=0 đẳng thức sau đây đúng

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

LỜI GIẢI 1 **(Đáp án chính thức).** Thay $a = b = c = 0$ vào đẳng thức để có $3f(0)^2 = 6f(0)^2 \Rightarrow f(0) = 0$. Tiếp theo thay $b = -a$, $c = 0$ ta được $f(a)^2 + f(-a)^2 = 2f(a)f(-a)$ hay $(f(a) - f(-a))^2 = 0 \Rightarrow f(a) = f(-a)$.
Nếu $f(a) = 0$ với $a \in \mathbb{Z}$ nào đó thì với bất kỳ b ta có $a + b + (-a - b) = 0$ nên $f(a)^2 + f(b)^2 + f(a+b)^2 = 2f(b)f(a+b)$, suy ra $(f(b) - f(a+b))^2 = 0$, hoặc $f(a+b) = f(b)$. Vậy nếu $f(a) = 0$ với $a \neq 0$ nào đó thì f là một hàm tuần hoàn chu kỳ a.
Thay $b = a$ và $c = 2a$ vào đẳng thức đã cho ta được $f(2a) \cdot (f(2a) - 4f(a)) = 0$. Chọn $a = 1$ để có $f(2) = 0$ hoặc $f(2) = 4f(1)$.
Trường hợp 1 . Nếu $f(2) = 0$ thì f là một hàm tuần hoàn chu kỳ 2 và ta có $f(n) = f(1)$ với mọi n lẻ. Dễ dàng kiểm tra rằng với mỗi $c \in \mathbb{Z}$ thì hàm

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 2 \mid n, \\ c, & 2 \not| n \end{cases}$$

thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

Trường hợp 2 . Nếu $f(2) = 4f(1)$ và $f(1) \neq 0$. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp khẳng định $f(n) = n^2 \cdot f(1)$.

Thấy rằng khẳng định đúng với $n \in \{0, 1, 2\}$. Giả sử rằng khẳng định đúng với mọi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ và ta sẽ chứng minh nó đúng với $n+1$. Bây giờ ta thay $a = 1$, $b = n$, $c = -n-1$ vào đẳng thức đã cho để có:

$$f(1)^2 + n^4 f(1)^2 + f(n+1)^2 = 2n^2 f(1)^2 + 2(n^2+1) f(n+1) f(1)$$
$$\Leftrightarrow \qquad \big(f(n+1) - (n+1)^2 f(1)\big) \cdot \big(f(n+1) - (n-1)^2 f(1)\big) = 0.$$

Nếu $f(n+1) = (n-1)^2 f(1)$ thì đặt $a = n+1$, $b = 1-n$, và $c = -2$ vào đẳng thức đã cho thì

$$2(n-1)^4 f(1)^2 + 16 f(1)^2 = 2 \cdot 4 \cdot 2(n-1)^2 f(1)^2 + 2 \cdot (n-1)^4 f(1)$$

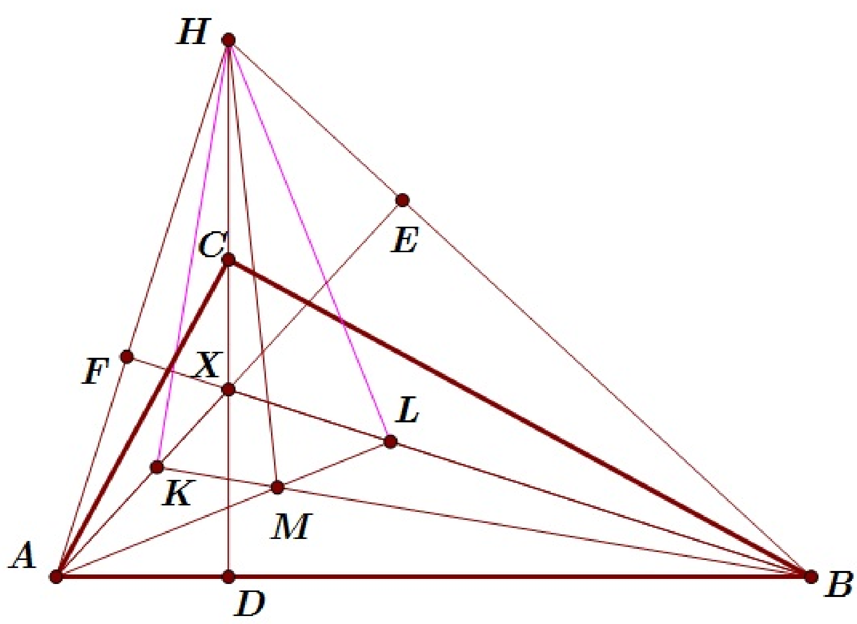
suy ra $(n-1)^2 = 1 \Rightarrow n = 2$. Do đó $f(3) = f(1)$. Thay tiếp $a = 1$, $b = 3$, và $c = 4$ và đẳng thức đã cho thì có ngay $f(4) = 0$ hoặc $f(4) = 4f(1) = f(2)$. Nếu $f(4) \neq 0$ thì ta được

$$f(2)^2 + f(2)^2 + f(4)^2 = 2f(2)^2 + 4f(2)f(4)$$

nên $f(4) = 4f(2)$.

Ta đã chứng minh $f(4) = f(2)$ để dẫn đến $f(2) = 0$ kết hợp với $f(1) \neq 0$ thì $f(4) = 0$ nên hàm f có chu kỳ 4. Khi đó $f(4k) = 0$, $f(4k+1) = f(4k+3) = c$, và $f(4k+2) = 4c$. Dễ dàng thử lại hàm này thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

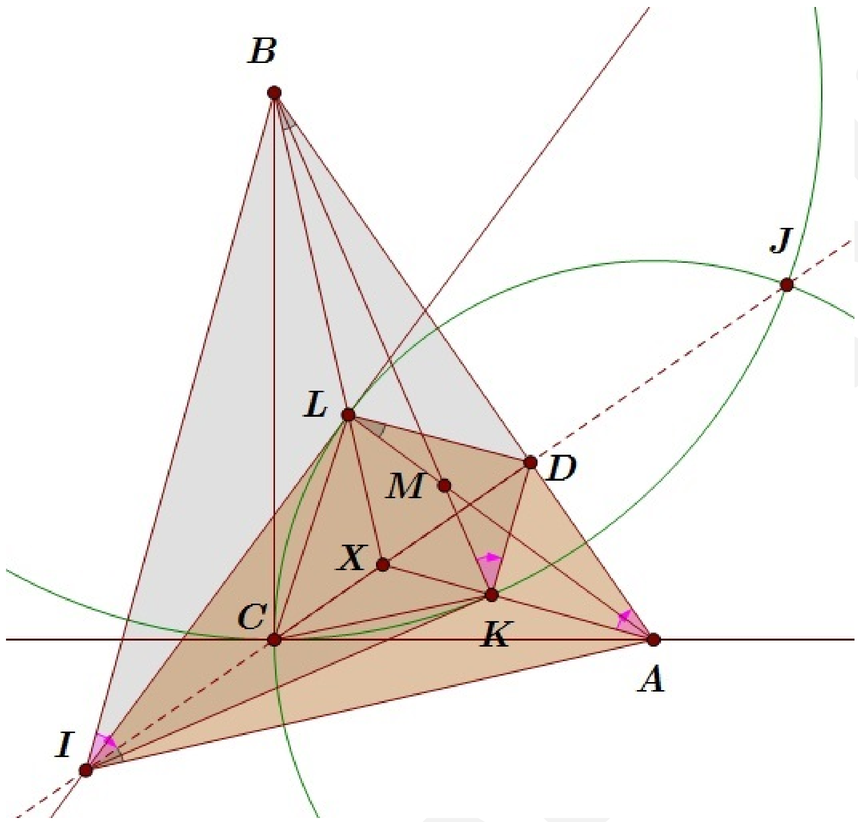
Vậy các hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $f(x) = cx^2$ với $c \in \mathbb{Z}$; $f(x) = \begin{cases} 0, & 2 \mid n, \\ c, & 2 \not| n \end{cases}$ với $c \in \mathbb{Z}$; và $f(x) = \begin{cases} 0, & 4 \mid n, \\ c, & 2 \nmid n, \\ 4c, & n \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$ với $c \in \mathbb{Z}$ nào đó. ■



Bài 5. Cho tam giác ABC với $\angle BCA = 90^\circ$ và D là chân đường cao hạ từ C. Cho X là một điểm nằm ở miền trong đoạn thẳng CD. Cho K là điểm trên đoạn thẳng AX sao cho $BK = BC$. Tương tự, L là điểm nằm trên đoạn thẳng BX sao cho $AL = AC$. Cho M là giao điểm của AL và BK. Chứng minh rằng $MK = ML$.

LỜI GIẢI 1. Ta kẻ các đường thẳng lần lượt đi qua A, B vuông góc với BX, AX và chúng cắt nhau tại H. Khi đó X là trực tâm của tam giác ABH, suy ra $HX \perp AB$ hay H nằm trên đường thẳng CD.
Gọi E là giao điểm của AX và HB, F là giao điểm của BX và HA, ta có $HE.HB = HF.HA$. (1)
Mặt khác $AC^2 = AL^2 = AD.AB = AF.AH$ dẫn đến tam giác ALH vuông tại L và cũng có $HL^2 = HF.HA$ (2)
Lập luận tương tự ta có $HK^2 = HE.HB$ (3).
Kết hợp (1), (2), (3) ta suy ra $HL = HK$ dẫn đến hai tam giác vuông HLM và HKM bằng nhau và có ngay $MK = ML$. ■

LỜI GIẢI 2. Ta dựng các đường tròn $(A; AC)$ và $(B; BC)$ chúng cắt nhau tại C và J.
Do AB là đường nối tâm của 2 đường tròn nói trên nên $AB \perp CJ$, suy ra CD



là trục đẳng phương của hai đường tròn.
Kẻ tiếp tuyến tại L với đường tròn $(A; AC)$ cắt đường thẳng CD tại I, suy ra tứ giác $ILDA$ nội tiếp để có $\widehat{DLA} = \widehat{DIA}$. (1)
Ta lại thấy $AD.AB = AC^2 = AL^2$ nên AL là tiếp tuyến của đường tròn (BLD) để có $\widehat{DLA} = \widehat{ABX}$. (2)
Từ (1) và (2) dẫn đến $BX \perp AI$ nên $AX \perp BI \Rightarrow \widehat{BAX} = \widehat{BID}$ (3).
Chứng minh tương tự ta cũng có BK là tiếp tuyến của đường tròn (ADK) để có $\widehat{BKD} = \widehat{BAX}$. (4)
Từ (3) và (4) ta được tứ giác $BDKI$ nội tiếp đê có $BK \perp IK \Rightarrow IK$ là tiếp tuyến của đường tròn $(B; BC)$.
Mặt khác $IL^2 = IC.IJ = IK^2$ nên hai tam giác vuông ILM và IKM bằng nhau để đạt được $ML = MK$. ■

LỜI GIẢI 3 (**Đáp án chính thức**). Vì $AL^2 = AC^2 = AD \cdot AB$ nên các tam giác ALD and ABL đồng dạng và do đó$\angle ALD = \angle XBA$.
Gọi I là điểm nằm trên tia DC (I không thuộc đoạn DC) sao cho $DX \cdot DI =$

$BD \cdot AD$. Vì $\angle BDX = \angle IDA = 90^\circ$ nên ta có $\triangle IAD \sim \triangle BXD$ hay $\angle XBD = \angle AID$, do đó $\angle ALD = \angle AID$ và các điểm I, A, D, L nằm trên một đường tròn. Điều này suy ra $\angle ILA = 90^\circ$ nên $IL^2 = AI^2 - AL^2 = AI^2 - AC^2$. Chứng minh tương tự $IK^2 = BI^2 - BC^2$ và $\angle IKB = 90^\circ$. Do $IC \perp AB$ nên ta có $AI^2 - AC^2 = BI^2 - BC^2$, do đó $IL^2 = IK^2$ dẫn đến $IL = IK$. Cùng với $\angle ILM = \angle IKM = 90^\circ$ ta kết luận $\triangle ILM \cong \triangle LKM$ hay $MK = ML$. ■

Bài 6. Tìm tất cả số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thỏa mãn

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

LỜI GIẢI 1 (**Đáp án chính thức).** Đặt $M = \max\{a_1, \ldots, a_n\}$. Khi đó ta có $3^M = 1 \cdot 3^{M-a_1} + 2 \cdot 3^{M-a_2} + \cdots + n \cdot 3^{M-a_n} \equiv 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \pmod n$. Suy ra $\frac{n(n+1)}{2}$ là số lẻ nên $n \equiv 1 \pmod 4$ hoặc $n \equiv 2 \pmod 4$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh với mỗi $n \in \mathbb{N}$ có dạng $4k+1$ hoặc $4k+2$ (với $k \in \mathbb{N}$ nào đó) luôn tồn tại các số nguyên a_1, …, a_n thỏa mãn phương trình đã cho.

Với một dãy $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ta đặt

$$L(\mathbf{a}) = \frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \qquad \text{và} \qquad R(\mathbf{a}) = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}}.$$

Giả sử với $n = 2m+1$ tồn tại một dãy $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ các số nguyên không âm thỏa mãn $L(\mathbf{a}) = R(\mathbf{a}) = 1$. Xét dãy số $\mathbf{a}' = (a'_1, \ldots, a'_{n+1})$ được xác định như sau:

$$a'_j = \begin{cases} a_j, & \text{if } j \notin \{m+1, 2m+2\} \\ a_{m+1} + 1, & \text{if } j \in \{m+1, 2m+2\}. \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$L(\mathbf{a}') = L(\mathbf{a}) - \frac{1}{2^{a_{m+1}}} + 2 \cdot \frac{1}{2^{a_{m+1}+1}} = 1$$

and

$$R(\mathbf{a}') = R(\mathbf{a}) - \frac{m+1}{3^{a_{m+1}}} + \frac{m+1}{3^{a_{m+1}+1}} + \frac{2m+2}{3^{a_{m+1}+1}} = 1.$$

Điều này suy ra nếu khẳng định đúng với $2m+1$ thì nó cũng đúng với $2m+2$.

Bây giờ giả sử khẳng định đúng với $n = 4m+2$ với $m \geq 2$ nào đó, và giả sử $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{4m+2})$ là dãy n các số nguyên không âm tương ứng. Ta sẽ xây dựng một dãy sau $\mathbf{a}' = \left(a_1', a_2', \ldots, a_{4m+13}'\right)$ thỏa mãn $L\left(\mathbf{a}'\right) = R\left(\mathbf{a}'\right) = 1$, điều đó chứng minh khẳng định đúng với $4m+13$.
Định nghĩa:

$$a_j' = \begin{cases} a_{m+2}+2, & \text{if } j = m+2 \\ a_j + 1, & \text{if } j \in \{2m+2, 2m+3, 2m+4, 2m+5, 2m+6\} \\ a_{\frac{j}{2}} + 1, & \text{if } j \in \{4m+4, 4m+6, 4m+8, 4m+10, 4m+12\} \\ a_{m+2}+3, & \text{if } j \in \{4m+3, 4m+5, 4m+7, 4m+9, 4m+11, 4m+13\} \\ a_j, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Bây giờ ta có

$$L\left(\mathbf{a}'\right) = L(\mathbf{a}) - \frac{1}{2^{a_{m+2}}} - \sum_{j=2}^{6} \frac{1}{2^{a_{2m+j}}} + \frac{1}{2^{a_{m+2}+2}} + \sum_{j=2}^{6} \frac{1}{2^{a_{2m+j}+1}} + \sum_{j=2}^{6} \frac{1}{2^{a_{2m+j}+1}} + \frac{6}{2^{a_{m+2}+3}} = 1.$$

Để kiểm tra $R\left(\mathbf{a}'\right) = R(\mathbf{a}) = 1$. Ta viết

$$R\left(\mathbf{a}'\right) - R(\mathbf{a}) = R\begin{pmatrix} a_{m+2}', & a_{4m+3}', & a_{4m+5}', & a_{4m+7}', & a_{4m+9}', & a_{4m+11}', & a_{4m+13}' \\ m+2, & 4m+3, & 4m+5, & 4m+7, & 4m+9, & 4m+11, & 4m+13 \end{pmatrix}$$

$$-R\begin{pmatrix} a_{m+2} \\ m+2 \end{pmatrix} + \sum_{j=2}^{6}\left(R\begin{pmatrix} a_{2m+j}', & a_{4m+2j}' \\ 2m+j, & 4m+j \end{pmatrix} - R\begin{pmatrix} a_{2m+j} \\ 2m+j \end{pmatrix}\right),$$

trong đó

$$R\begin{pmatrix} c_1, & \ldots, & c_k \\ d_1, & \ldots, & d_k \end{pmatrix} = \frac{d_1}{3^{c_1}} + \cdots + \frac{d_k}{3^{c_k}}.$$

Với mỗi $j \in \{2,3,4,5,6\}$ ta có

$$R\begin{pmatrix} a_{2m+j}', & a_{4m+2j}' \\ 2m+j, & 4m+j \end{pmatrix} - R\begin{pmatrix} a_{2m+j} \\ 2m+j \end{pmatrix} = \frac{2m+j}{3^{a_{2m+j}+1}} + \frac{4m+2j}{3^{a_{2m+j}+1}} - \frac{2m+j}{3^{a_{2m+j}}} = 0.$$

Số hạng thứ nhất của biểu thức $R\left(\mathbf{a}'\right) - R(\mathbf{a})$ bằng 0 vì

$$R\begin{pmatrix} a_{m+2}', & a_{4m+3}', & a_{4m+5}', & a_{4m+7}', & a_{4m+9}', & a_{4m+11}', & a_{4m+13}' \\ m+2, & 4m+3, & 4m+5, & 4m+7, & 4m+9, & 4m+11, & 4m+13 \end{pmatrix} - R\begin{pmatrix} a_{m+2} \\ m+2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{m+2}{3^{a_{m+2}+2}} + \sum_{j=1}^{6} \frac{4m+2j+1}{3^{a_{m+2}+3}} - \frac{m+2}{3^{a_{m+2}}} = 0.$$

Do đó $R(\mathbf{a}') = 0$ và khẳng định đúng với $4m + 13$. Để kiểm tra có các dãy số có độ dài 1, 5, 9, 13, và 17. Ta chọn các dãy là :

$$(1), \quad (2,1,3,4,4), \quad (2,3,3,3,3,4,4,4,4), \quad (2,3,3,4,4,4,5,4,4,5,4,5,5),$$

$$(3,2,2,4,4,5,5,6,5,6,6,6,6,6,6,6,5).$$

■