LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA

DỰ THI IMO 2011

****

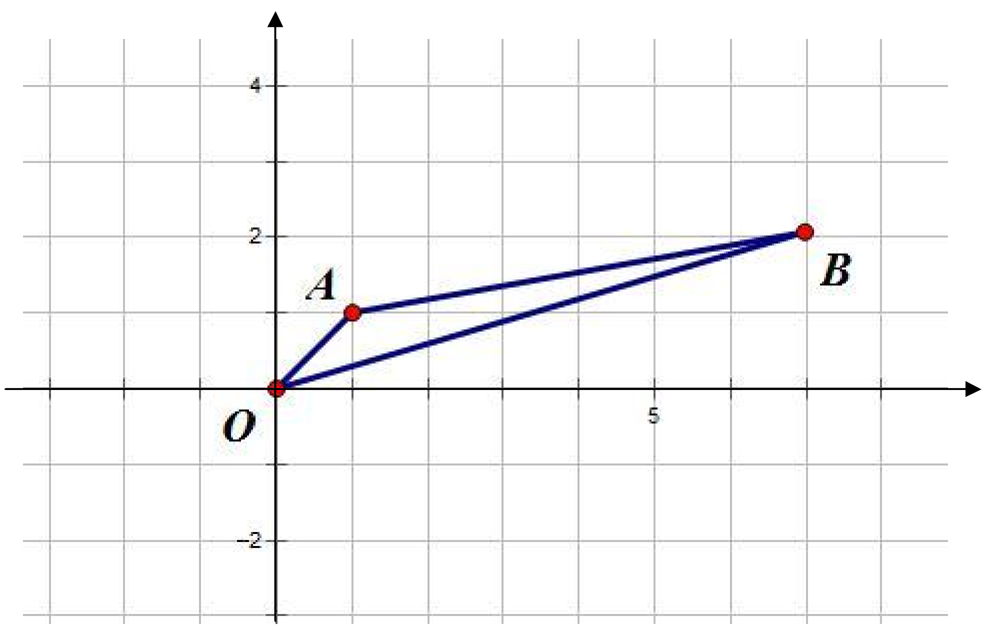
Bài 1.

Trên mặt phẳng tọa độ có một con cào cào ở điểm $(1;1)$. Nó có thể nhảy từ điểm A sang điểm B khi tam giác OAB có diện tích bằng $\frac{1}{2}$ và tọa độ của A, B nguyên dương.

1. Tìm các điểm (m,n) sao cho con cào cào có thể nhảy đến đó sau hữu hạn bước.

2. Chứng minh rằng con cào cào có thể nhảy đến (m,n) kể trên sau ít hơn $|m-n|$ bước.

Lời giải.



Trước hết, ta cần chứng minh nhận xét sau:

Với (m,n) là cặp số nguyên tố cùng nhau thì tồn tại a và b nguyên tố cùng nhau sao cho

$$|mb-na|=1 \text{ và } |a-b| \le |m-n|-1.$$

Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử $m>n$.

Xét các số có dạng $mb-1, 1 \le b \le n$. Dễ thấy ta có n số như vậy và nếu $b \ne b'$ thì $mb-1 \ne mb'-1 \pmod{n}$ nên các số này lập thành hệ thặng dư đầy đủ mod n, suy ra tồn tại số b sao cho $mb-1 \vdots n$. Ta cũng thấy rằng $b \le n-1$ vì $b=n$ không thỏa mãn.

Đặt $a=\dfrac{mb-1}{n}\Rightarrow a<\dfrac{mn}{n}=m$ và $mb-an=1$.

Ta có $|n(b-a)|=|(m-n)b-1|=|(m-n)n+(m-n)(b-n)-1|<|(m-n)n|\Rightarrow |b-a|<|m-n|$.

Do đó $|b-a|\le |m-n|-1$. Nhận xét được chứng minh.

Trở lại bài toán, ta thấy rằng, con cào cào đang ở đỉnh $A(a,b)$ và muốn nhảy sang đỉnh $B(c,d)$ thì phải có $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}|ad-bc|=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow |ad-bc|=1$.

Từ đó suy ra xuất phát từ điểm $(1;1)$, con cào cào chỉ có thể nhảy đến các điểm $(m;n)$ mà $(m,n)=1$. Hơn nữa, với $(m,n)=1$ thì theo nhận xét ở trên thì con cào cào có thể nhảy đến điểm có tọa độ tương ứng là $(m;n)$. Vậy các điểm cần tìm là $(m;n)$ với m,n nguyên tố cùng nhau.

2. Xét điểm nguyên dương $(m;n)$ mà $(m,n)=1, |m-n|=1$ thì con cào cào có thể nhảy đến điểm này chỉ sau một bước nhảy.

Ta lại xét điểm $(m;n)$ mà $(m,n)=1, |m-n|>1$ thì theo nhận xét trên, tồn tại các số m', n' sao cho $|mm'-nn'|=1$ và $|m'-n'|\le |m-n|-1$.

Lặp lại quá trình này, ta thấy rằng con cào cào có thể nhảy đến điểm $(m;n)$ sau không quá $|m-n|$ bước.

Vậy ta có đpcm.

Bài 2.

Cho đường (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến AB, AC tới (O) với A, B là các tiếp điểm. Gọi P là điểm thuộc tia đối của tia BA, Q là điểm thuộc tia đối của tia CA sao cho PQ tiếp xúc với (O). Qua P kẻ đường thẳng song song với AC và cắt đường thẳng BC tại E. Qua Q kẻ đường thẳng song song với AB và cắt BC tại F.

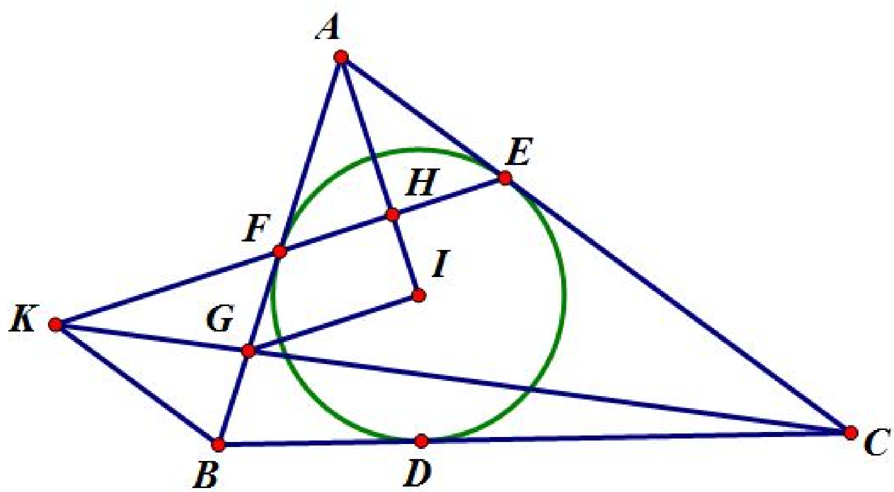
1. Chứng minh rằng các đường thẳng QE, PF luôn đi qua điểm cố định lần lượt là M, N.

2. Chứng minh rằng tích $PM \cdot QN$ không đổi.

Lời giải.

Trước hết, ta chứng minh nhận xét sau: *Cho tam giác ABC ngoại tiếp (I) có tiếp điểm của (I) lên AB, AC lần lượt là E, F. Đường thẳng qua B, song song với AC cắt EF tại K; CK cắt AB tại G. Khi đó, tam giác AGI vuông tại I.*

Thật vậy:



Đặt $AB = c, BC = a, CA = b$ và chu vi tam giác ABC là $2p$.

Do BK // AC nên tam giác BKF cân tại B, suy ra: $AE = AF = p - a$.

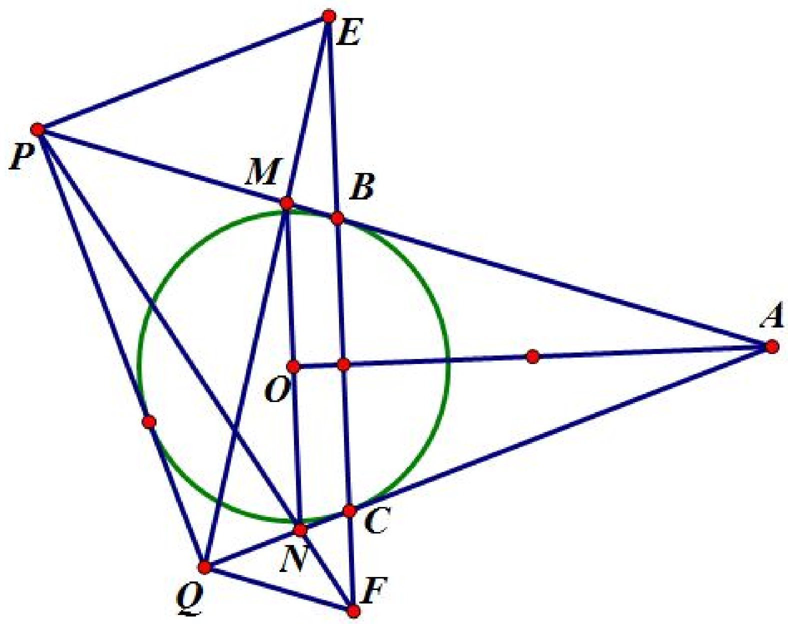
Theo định lí Thales thì: $\dfrac{BG}{AG} = \dfrac{BK}{AC} = \dfrac{p-b}{b} \Rightarrow \dfrac{AB}{AG} = \dfrac{p}{b} \Rightarrow AG = \dfrac{bc}{p}$.

Mà $AF = p - a$ nên $\dfrac{AF}{AG} = \dfrac{p(p-a)}{bc}$.

Ta cũng có: $AI = \dfrac{AF}{\sin\dfrac{A}{2}}, AH = AF.\sin\dfrac{A}{2} \Rightarrow \dfrac{AH}{AI} = \sin^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{1-\cos A}{2} = \dfrac{p(p-a)}{bc}$ ..

Từ đó suy ra: $\dfrac{AF}{AG} = \dfrac{AH}{AI} = \dfrac{p(p-a)}{bc}$. Do đó: GI song song với EF, tức là ΔAGI vuông tại I.

Bổ đề được chứng minh. Trở lại bài toán đã cho.



1/ Gọi M, N lần lượt là giao điểm của QE với AB và PF với AC. Theo bổ đề trên, ta thấy rằng tam giác OMA và ONA lần lượt vuông tại O nên các điểm M, N cố định.

2/ Trước hết, ta đặt $AB = AC = a, BP = x, CQ = y$.

Chu vi của tam giác APQ là $p = 2(a+x+y)$.

Theo bổ đề trên, ta tính được:

$$PM = AP - \frac{2AP.PQ}{AP+AQ+PQ} = \frac{AP(AP+AQ-PQ)}{AP+AQ+PQ} = \frac{(a+x)x}{a+x+y}$$

Tương tự $QN = \frac{(a+y)y}{a+x+y}$.

Cần chứng minh rằng tích $PM \cdot QN = \frac{xy(a+x)(a+y)}{(a+x+y)^2}$ không đổi. Thật vậy:

Nếu gọi R là bán kính của (O) thì diện tích của tam giác APQ cùng bằng:

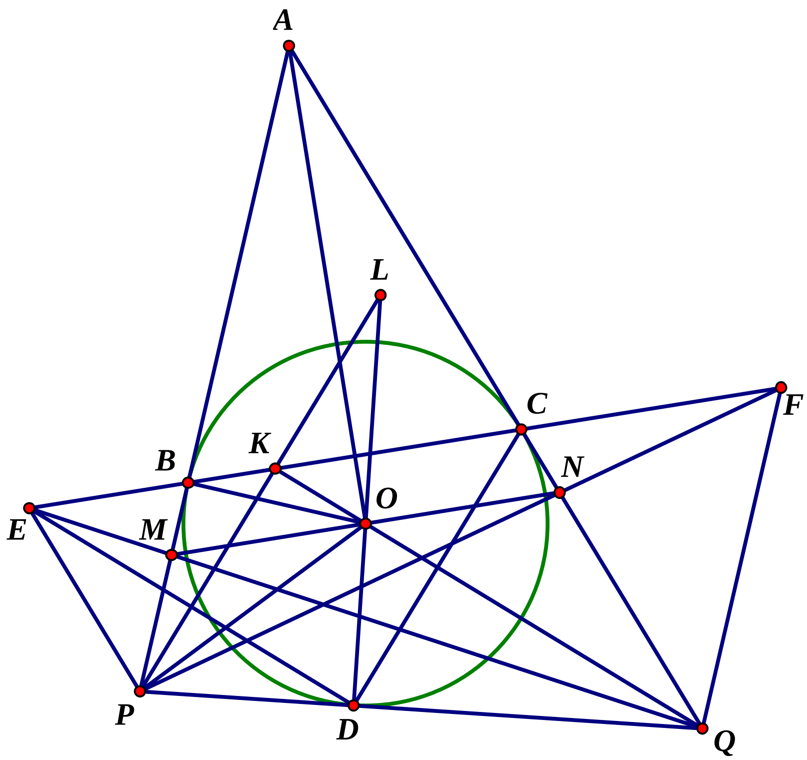
$$\frac{pR}{2} = \frac{\sin\widehat{BAC}.AP.AQ}{2} \Leftrightarrow \frac{(a+x)(a+y)}{a+x+y} = \frac{R}{\sin\widehat{BAC}}.$$

Suy ra tỉ số $\frac{(a+x)(a+y)}{a+x+y} = k$ không đổi, với $k = \frac{R}{\sin\widehat{BAC}}$. Từ đó, ta có

$(a+x)(a+y) = k(a+x+y) \Leftrightarrow a(a+x+y) + xy = k(a+x+y) \Leftrightarrow a + \frac{xy}{a+x+y} = k$, tức là tỉ số $\frac{xy}{a+x+y}$ cũng không đổi.

Vậy $PM \cdot QN = \frac{xy(a+x)(a+y)}{(a+x+y)^2}$ không đổi. Ta có đpcm.

* Cách khác:



1. Ta sẽ chứng minh giao điểm M của EQ và AB, giao điểm N của FP và AC là các điểm cố định.

Giả sử (O) tiếp xúc với BC tại D. Gọi K, L lần lượt là giao điểm của QO và BC, PK và OD theo thứ tự đó.

Dễ thấy rằng $\widehat{PKO} = 90^0$,suy ra: các cặp tam giác LKO, LDP và LOP, QOA đồng dạng với nhau. Suy ra,

$$\frac{OK}{PD} = \frac{LO}{LP} = \frac{OQ}{AQ} \Rightarrow \frac{OK}{OQ} = \frac{PB}{AQ}$$

Mặt khác dễ thấy là $PE = PB$ nên $\frac{OK}{OQ} = \frac{PE}{AQ} = \frac{EM}{MQ}$.

Áp dụng định lí thales đảo ta được: MO song song với BC là đoạn cố định mà M thuộc AB cố định nên M cũng cố định. Tương tự, N là điểm cố định. Ta có đpcm.

2.Từ câu 1), ta có M, O, N thẳng hàng. Từ đó dễ có $\Delta PMO \sim \Delta ONQ$ $(g.g)$.

Suy ra $PM \cdot QN = OM \cdot ON = OM^2$ là hằng số.

Ta cũng chứng minh được rằng M, N là tiếp điểm của đường tròn A-Mixitilinear trên các đoạn AP, AQ của tam giác APQ.

Bài 3.

Cho cho n nguyên dương thỏa $n \geq 3$***và n số thực*** $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ ***thỏa mãn đồng thời***
(i) $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = 0$.
(ii) $x_1^2 + x_2^2 + x_2^3 + ... + x_n^2 = n(n-1)$.
(iii) $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq ... \geq x_n$.
Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $f = x_1 + x_2$.

Lời giải.

**Tìm giá trị lớn nhất.*

Theo BĐT Bunhiacopski cho $n-2$ số thực $x_3, x_4, ..., x_n$, ta có:

$(1^2 + 1^2 + ... 1^2)(x_3^2 + ... + x_n^2) \geq (x_3 + x_4 + ... + x_n)^2 \Rightarrow x_3^2 + ... + x_n^2 \geq \dfrac{(x_3 + x_4 + ... + x_n)^2}{n-2}$. Suy ra

$$n(n-1) = x_1^2 + x_2^2 + x_2^3 + ... + x_n^2 \geq x_1^2 + x_2^2 + \frac{(x_3 + x_4 + ... + x_n)^2}{n-2} \geq \frac{(x_1 + x_2)^2}{2} + \frac{(x_1 + x_2)^2}{n-2}$$
$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 \leq \frac{2n(n-1)(n-2)}{(n-2+2)} = 2(n-1)(n-2) \Rightarrow x_1 + x_2 \leq \sqrt{2(n-1)(n-2)}$$

Do đó, giá trị lớn nhất của $f = x_1 + x_2$ là $\sqrt{2(n-1)(n-2)}$, đạt được khi

$x_1 = x_2, x_3 = x_4 = ... = x_n$ hay $x_1 = x_2 = \sqrt{\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}}, x_3 = x_4 = x_5 = ... = x_n = -\sqrt{\dfrac{2(n-1)}{n-2}}$.

**Tìm giá trị nhỏ nhất.*
Ta xét các trường hợp:

- Nếu $n = 3$ thì $x_1 + 2x_2 \geq x_1 + x_2 + x_3 = 0$ và $2x_1 + x_2 \geq x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Thay $x_3 = -(x_1 + x_2)$ vào đẳng thức (ii), ta được $x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2 = 6 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 = 3$.
Từ đánh giá $(2x_1 + x_2)(x_1 + 2x_2) \geq 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + (2x_1 + x_2)(x_1 + 2x_2) \geq 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 \geq 1$.

Dễ thấy nếu $x_1 + x_2 \leq -1 \Rightarrow x_3 \geq 1 > 0 > x_1 + x_2$, mâu thuẫn nên $x_1 + x_2 \geq 1$.

Đẳng thức xảy ra khi $x_1 = 2, x_2 = x_3 = -1$

-Nếu $n \geq 4$, ta chú ý đến đánh giá sau: "Nếu $a \geq b \geq c$ thì $b^2 + c^2 \leq a^2 + (b + c - a)^2$. (*) "

Đánh giá này đúng vì

$$b^2+c^2 \le a^2+(b+c-a)^2 \Leftrightarrow 2a^2-2a(b+c)+2bc \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)(a-c) \ge 0$$

Áp dụng đánh giá này với $x_2 \ge x_3 \ge x_4$, ta được: $x_3^2+x_4^2 \le x_2^2+(x_3+x_4-x_2)^2$.

Dễ thấy $x_2 \ge x_3+x_4-x_2, x_2 \ge x_5$ nên áp dụng tiếp đánh giá (*), ta có:

$$x_3^2+x_4^2+x_5^2 \le x_2^2+(x_3+x_4-x_2)^2+x_5^2 \le 2x_2^2+(x_3+x_4-2x_2)^2.$$

Tiếp tục áp dụng đánh giá (*) với các số $a_6, a_7, ..., a_n$, ta được:

$$x_1^2+x_2^2+x_2^3+...+x_n^2 \le (n-3)x_2^2+\left[x_3+x_4+...+x_n-(n-3)x_2\right]^2=(n-3)x_2^2+\left[x_1+(n-2)x_2\right]^2$$

Suy ra $x_1^2+(n-2)x_2^2+\left[x_1+(n-2)x_2\right]^2 \ge n(n-1)$.

Ta sẽ chứng minh rằng

$$x_1^2+(n-2)x_2^2+\left[x_1+(n-2)x_2\right]^2=2x_1^2+(n^2-3n+2)x_2^2+2(n-2)x_1x_2 \le \frac{n(n-1)(x_1+x_2)^2}{4}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với: $(x_1-x_2)\left[(n^2-n-8)x_1+(n-1)(3n-8)x_2\right] \ge 0$, mà bất đẳng thức này đúng do $x_1 \ge x_2$ và

$$(n^2-n-8)x_1+(n-1)(3n-8)x_2 \ge (n^2-n-8)x_1-(3n-8)x_1=n(n-4)x_1 \ge 0.$$

Từ các điều này, ta có: $n(n-1) \le \frac{n(n-1)(x_1+x_2)^2}{4} \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 \ge 4$, dễ thấy $x_1+x_2 \ge 2$.

Trong trường hợp này, giá trị nhỏ nhất của biểu thức đã cho là 2, đạt được khi $x_1=x_2=x_3=...=x_{n-1}=1, x_n=1-n$.

Vậy giá trị lớn nhất của $f=x_1+x_2$ là $\sqrt{2(n-1)(n-2)}$, đạt được khi

$x_1=x_2, x_3=x_4=...=x_n$ hay $x_1=x_2=\sqrt{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}, x_3=x_4=x_5=...=x_n=-\sqrt{\frac{2(n-1)}{n-2}}$.

Giá trị nhỏ nhất của $f=x_1+x_2$ là 1 với $n=3$, đạt được khi $x_1=2, x_2=x_3=-1$ và là 2 với $n \ge 4$, đạt được khi $x_1=x_2=\sqrt{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}, x_3=x_4=x_5=...=x_n=-\sqrt{\frac{2(n-1)}{n-2}}$.

Bài 4.

Cho dãy số (a_n) ***thỏa mãn*** $a_0=1, a_1=3$ ***và*** $a_{n+2}=1+\left[\dfrac{a_{n+1}^2}{a_n}\right]$**.**

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $a_na_{n+2}-a_{n+1}^2=2^n$ **.**

Lời giải.

Dễ thấy mọi số hạng của dãy đều là số nguyên dương.

Trước hết, bằng quy nạp, ta sẽ chứng minh rằng đã cho cũng thỏa mãn hệ thức truy hồi $a_{n+2}=4a_{n+1}-2a_n, \forall n\in\mathbb{N}$.

Thật vậy, bằng tính toán trực tiếp, ta có $a_2=10, a_3=34, a_4=116$ thỏa mãn cả hai hệ thức truy hồi, tức là khẳng định đúng với $n=0,1,2$.

Giả sử khẳng định đúng đến $n=k, k\ge 2$, tức là $a_{k+2}=4a_{k+1}-2a_k$.

Ta sẽ chứng minh rằng nó cũng đúng với $n=k+1$.

Ta có $a_{k+3}=1+\left[\dfrac{a_{k+2}^2}{a_{k+1}}\right]=1+\left[\dfrac{(4a_{k+1}-2a_k)^2}{a_{k+1}}\right]=1+16a_{k+1}-16a_k+\left[\dfrac{4a_k^2}{a_{k+1}}\right]$.

Ta lại cần chứng minh $\left[\dfrac{4a_k^2}{a_{k+1}}\right]=4a_{k-1}-1, k\ge 2 \quad (*)$.

Thật vậy,

$$(*)\Leftrightarrow \frac{4a_k^2}{a_{k+1}}-1<4a_{k-1}-1\le\frac{4a_k^2}{a_{k+1}}\Leftrightarrow a_k^2<a_{k-1}a_{k+1}\le a_k^2+\frac{1}{4}a_{k+1}$$

Hơn nữa, theo giả thiết thì $a_{k+1}=1+\left[\dfrac{a_k^2}{a_{k-1}}\right]\Leftrightarrow\dfrac{a_k^2}{a_{k-1}}<a_{k+1}\le 1+\dfrac{a_k^2}{a_{k-1}}\Leftrightarrow a_k^2<a_{k-1}a_{k+1}\le a_{k-1}+a_k^2$.

Theo giả thiết quy nạp, ta có

$$a_{k+1}=4a_k-2a_{k-1}=4(4a_{k-1}-2a_{k-2})-2a_{k-1}=6a_{k-1}+8(a_{k-1}-a_{k-2})>4a_{k-1}\Leftrightarrow a_{k-1}<\frac{1}{4}a_{k+1}.$$

Do đó, ta có được $a_k^2<a_{k-1}a_{k+1}\le a_k^2+\dfrac{1}{4}a_{k+1}$ hay (*) đúng. Từ $\left[\dfrac{4a_k^2}{a_{k+1}}\right]=4a_{k-1}-1, k\ge 2$, ta có

$$a_{k+3} = 1 + 16a_{k+1} - 16a_k + 4a_{k-1} - 1 = 4(4a_{k+1} - 2a_k) + 2(4a_k - 2a_{k-1}) = 4a_{k+2} - 2a_{k+1}.$$

Suy ra khẳng định đúng với $n = k + 1$ và theo giả thiết quy nạp thì khẳng định được chứng minh.

Ta sẽ chứng minh dãy số thỏa mãn $a_0 = 1, a_1 = 3, a_n = 4a_{n-1} - 2a_{n-2}, n \geq 2$ cũng thỏa mãn đẳng thức $a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = 2^n$ với mọi n (**)

Thật vậy, ta có $a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = (4a_{n+1} - 2a_n)a_n - a_{n+1}(4a_n - 2a_{n-1}) = 2(a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2)$.

Lặp lại biến đổi này n lần với chú ý $a_0a_2 - a_1^2 = 1 \cdot 10 - 3^2 = 1 = 2^0$ ta thấy (**) đúng.

Vậy ta có đpcm.

Bài 5.

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho biểu thức sau

$$A = 2^{n+2}(2^n - 1) - 8.3^n + 1$$

là một số chính phương.

Lời giải.

Giả sử tồn tại số n nguyên dương thỏa mãn đề bài.

Khi đó, tồn tại m sao cho:

$$m^2 = 2^{n+2}(2^n - 1) - 8\cdot 3^n + 1 = 2^{2n+2} - 2\cdot 2^{n+1} + 1 - 8\cdot 3^n = (2^{n+1} - 1)^2 - 8.3^n$$

hay $\dfrac{(2^{n+1} - 1 - m)(2^{n+1} - 1 + m)}{4} = 2\cdot 3^n$.

Đặt $a = \dfrac{(2^{n+1} - 1) - t}{2}, b = \dfrac{(2^{n+1} - 1) + t}{2}$ thì $a + b = 2^{n+1} - 1, ab = 2\cdot 3^n$.

Dễ thấy t là số lẻ nên a, b là các số nguyên dương. Do đó, $a = 3^u, b = 2\cdot 3^v$ hoặc ngược lại.

Trong cả hai trường hợp, ta đều có $3^u + 2\cdot 3^v = 2^{n+1} - 1$ và $u + v = n$.

Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $n = 1$ thì $3^u + 2\cdot 3^v = 3, u + v = 1$, hệ này không có nghiệm nguyên dương.

- Nếu $n = 2$ thì $3^u + 2\cdot 3^v = 7, u + v = 2$, hệ này cũng không có nghiệm nguyên dương.

- Nếu $n = 3$ thì $3^u + 2\cdot 3^v = 15, u + v = 3$, hệ này có nghiệm là $u = 2, v = 1$.

- Nếu $n = 4$ thì $3^u + 2\cdot 3^v = 31, u + v = 4$, hệ này không có nghiệm nguyên dương dương.

- Nếu $n = 5$ thì $3^u + 2\cdot 3^v = 63, u + v = 5$, hệ này có nghiệm là $u = 2, v = 3$.

- Nếu $n > 5$, ta sẽ chứng minh rằng hệ tương ứng trong trường hợp này sẽ vô nghiệm.

Ta có $3^u < 2^{n+1} \Rightarrow 9^u < 8^{\frac{2(n+1)}{3}} \Rightarrow u < \dfrac{2(n+1)}{3} \Rightarrow n - v < \dfrac{2(n+1)}{3} \Rightarrow v > \dfrac{n-2}{3} \geq 1$.

Tương tự, ta cũng có $u > \dfrac{n-2}{3} \geq 1$. Đặt $w = \min\{u, v\} > \dfrac{n-2}{3} \geq 1 \Rightarrow w \geq 2$. Suy ra $2^{n+1} - 1 \equiv 0 \pmod 9$. Bằng cách thử trực tiếp, ta có được $n + 1 \equiv 0 \pmod 6$ hay $n + 1 = 6k, k \in \mathbb{N}^*$.

Từ đó, ta được $3^u+2\cdot 3^v=(2^k-1)(2^k+1)(4^{2k}+4^k+1)$.

Dễ dàng thấy rằng $4^{2k}+4^k+1\equiv 1+1+1\equiv 0 \pmod 3$ nhưng $4^{2k}+4^k+1\equiv 2^k+4^k+1\neq 0 \pmod 9$ nên 3^{w-1} là ước của $(2^k-1)(2^k+1)$. Suy ra $3^{w-1}\leq 2^k+1\leq 3^k \Rightarrow \dfrac{n-2}{3}-1<w-1\leq \dfrac{n+1}{6}\Rightarrow n<11$

Dễ thấy không tồn tại số nguyên dương n nào mà $n+1\equiv 0 \pmod 6$ và $5<n<11$ nên trong trường hợp này, hệ không có nghiệm.

Vậy có tất cả hai số nguyên dương n thỏa mãn đề bài là $n=3, n=5$.

Bài 6.

Có n học sinh ngồi quanh một bàn tròn, trong tay mỗi học sinh có một số kẹo sao cho tổng số kẹo của tất cả các học sinh này là một bội số của n. Ta thực hiện một quy tắc chuyển kẹo như sau: nếu có một học sinh có số kẹo lớn hơn số kẹo của người bạn bên tay phải mình thì ta sẽ lấy đi của người đó chuyển sang cho người bạn bên tay phải.
Chứng minh rằng với quy tắc trên, sau một số hữu hạn các bước với cách chuyển thích hợp, số kẹo của mỗi học sinh đều bằng nhau.

Lời giải.

Xuất phát từ một học sinh nào đó, lần lượt theo chiều ngược chiều kim đồng hồ, ta đánh số các em bởi $1,2,3,...,n$. Khi đó, với mỗi $i=\overline{1,n}$, ngồi ngay bên phải em i là em $i+1$.

(với quy ước em $n+1$ là em 1).

Với $t\in\mathbb{N}^*$, ta định nghĩa thời điểm t là thời điểm nằm giữa lần chuyển kẹo thứ t và thứ $t+1$.

Với mỗi $i=\overline{1,n}$, kí hiệu x là số kẹo của em i tại mỗi thời điểm và gọi $x_i(t)$ là số kẹo của

em i tại thời điểm t. Ta gọi mỗi bộ $(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$ là một trạng thái.

Xét đại lượng $F=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ và xét một thời điểm t tùy ý. Giả sử, ở lần chuyển kẹo thứ $t+1$, người thực hiện việc chuyển kẹo là em i. Khi đó:

$$x_i(t)>x_{i+1}(t), x_j(t+1)=x_j(t), \forall j\notin\{i;i+1\}$$
$$x_i(t+1)=x_i(t)-1, x_{i+1}(t+1)=x_{i+1}(t)+1$$

Do đó $F(t+1)-F(t)=\left(x_i(t)-1\right)^2+\left(x_{i+1}(t)+1\right)^2-\left(x_i(t)\right)^2-\left(x_{i+1}(t)\right)^2=2\left[x_{i+1}(t)+1-x_i(t)\right]\le 0$

Và $F(t+1)-F(t)=0\Leftrightarrow x_i(t)=x_{i+1}(t)+1$ (*). ($F(t)$ kí hiệu giá trị của F tại thời điểm t).

Như vậy, giá trị của F không tăng trong quá trình chuyển kẹo và F chỉ nhận cùng một giá trị ở 2 thời điểm liên tiếp là $t,t+1$ khi và chỉ khi ở lần chuyển kẹo thứ t + 1, em chuyển kẹo có nhiều hơn em nhận kẹo đúng 1 chiếc kẹo. Hơn nữa, do mỗi trạng thái cho ta một nghiệm tự nhiên của phương trình

$$x_1+x_2+x_3+...+x_n=n$$

nên số trạng thái đôi một khác nhau là hữu hạn. Suy ra, trong quá trình chuyển kẹo, F chỉ nhận một số hữu hạn các giá trị đôi một khác nhau.

Xảy ra một trong hai trường hợp sau:

*** Trường hợp 1:** F nhận mỗi giá trị chỉ tại một số hữu hạn thời điểm liên tiếp .

Trong trường hợp này, sau một số hữu hạn lần chuyển kẹo, F sẽ nhận giá trị nhỏ nhất có thể và kể từ thời điểm (đầu tiên) F nhận giá trị nhỏ nhất đó, việc chuyển kẹo chỉ có thể thực hiện thêm một số hữu hạn lần. Khi việc chuyển kẹo không thể thực hiện được, ta phải có

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le ... \le x_n \le x_1 \text{ hay } x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n.$$

Khẳng định của bài toán được chứng minh.

*** Trường hợp 2 :** Tồn tại một giá trị mà F nhận giá trị đó tại vô hạn thời điểm liên tiếp .

Giả sử $F(t) = F(t+1), \forall t \ge t_0$. Khi đó, theo (*), kể từ thời điểm t_0, mỗi lần chuyển kẹo chỉđược thực hiện bởi em i mà tại thời điểm đó $x_i - x_{i+1} = 1$ (**)

Do kể từ thời điểm t_0 ta sẽ nhận được vô số trạng thái mà chỉ có hữu hạn trạng thái đôi một khác nhau (chứng minh trên) nên phải tồn tại ít nhất một trạng thái xuất hiện tối thiểu 2 lần.

Xét một trạng thái trong số các trạng thái như vậy, gọi là A.

Giả sử A xuất hiện tại thời điểm $t_1 \ge t_0$; gọi k là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho tại thời điểm $t_1 + k$, A lại xuất hiện một lần nữa.

Gọi (C) là quá trình chuyển kẹo kể từ thời điểm t_1 đến thời điểm $t_1 + k$.

Do (C) khởi đầu và kết thúc bởi cùng một trạng thái nên trong quá trình đó nếu em i đã nhận kẹo ở một lần chuyển kẹo nào đó thì sau đó i phải thực hiện việc chuyển kẹo cho bạn ngồi ngay bên phải mình. Từ đó, do các em ngồi quanh bàn tròn, suy ra trong (C), mỗi em đều phải thực hiện việc chuyển kẹo ít nhất một lần.

Hơn nữa, do tổng số kẹo của các em là một bội của n nên với $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là một trạng thái tùy ý, ta phải có hoặc $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n$, hoặc tồn tại $i \ne j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ sao cho $|x_i - x_j| \ge 2$.
Suy ra, mỗi trạng thái trong (C) đều có tính chất: tồn tại $i \ne j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ sao cho $|x_i - x_j| \ge 2$.

Gọi *m* là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho trong (C) có ít nhất một trạng thái mà ở trạng thái đó tồn tại $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ sao cho $|x_i - x_{i+m}| \ge 2$. Gọi B là trạng thái có tính chất như vậy và ở gần A nhất (có thể $B = A$). Giả sử B xuất hiện (trong (C)) tại thời điểm $t_2 \ge t_1$.

Xét hai khả năng sau:

- Khả năng 1: $m=1$, ta lại xét tiếp các trường hợp:

+ Trường hợp 1.1: $B=A$. Khi đó, ở lần đầu tiên (trong (C)) chuyển kẹo cho em $i+1$, em i sẽ có nhiều hơn i + 1 ít nhất 2 chiếc kẹo; mâu thuẫn với (2).

+ Trường hợp 1.2 : $B\neq A$. Khi đó, ở trạng thái A, ta có $\left|x_i-x_{i+1}\right|\leq 1$. Do đó, để trở lại được trạng thái A, sau thời điểm t_2, i phải chuyển kẹo cho em $i+1$ ít nhất 1 lần và ở lần đầu tiên trong các lần như vậy i sẽ có nhiều hơn $i+1$ ít nhất 2 chiếc kẹo; mâu thuẫn với (2).

- Khả năng 2: $m>1$. Khi đó, từ định nghĩa của m suy ra số kẹo của các em $i,i+1,...,i+m-1,i+m$ (trong trạng thái B) phải thỏa mãn

$$x_i=x_{i+1}+1,x_{i+1}=x_{i+1}=...=x_{i+m-1}=x_{i+m}+1.$$

+ Trường hợp 2.1: $B=A$. Trong trường hợp này, tại lần đầu tiên có một trong các em $i-1,i,i+1,...,i+m$ thực hiện việc chuyển kẹo; em chuyển kẹo chỉ có thể hoặc là $i-1$ hoặc i hoặc $i+m-1$ hoặc $i+m$.

- Nếu $i-1$ thực hiện việc chuyển kẹo thì sau bước chuyển đó, ta sẽ có trạng thái mà trong đó $x_i-x_{i+1}=2$.
- Nếu i thực hiện việc chuyển kẹo thì sau bước chuyển đó, ta sẽ có trạng thái mà trong $x_{i+1}-x_{i+m}=2$.
- Nếu $i+m-1$ thực hiện việc chuyển kẹo thì sau bước chuyển đó, ta sẽ có trạng thái mà $x_i-x_{i+m-1}=2$.
- Nếu $i+m$ thực hiện việc chuyển kẹo thì sau bước chuyển đó, ta sẽ có trạng thái mà $x_{i+m-1}-x_{i+m}=2$.

Trong cả 4 tình huống trên, ta đều nhận được điều mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của m.

+ Trường hợp 2.2 : $B\neq A$. Khi đó, ở trạng thái A, các số $x_i,x_{i+1},...,x_{i+m-1},x_{i+m}$ sẽ không thỏa mãn quan hệ (∗). Vì thế, để trở lại trạng thái A, sau thời điểm t_2 phải có thời điểm mà ít nhất một trong các sốđó thay đổi. Điều này chỉ có được khi có ít nhất một trong các em $i-1,i,i+1,...,i+m$ thực hiện việc chuyển kẹo. Lập luận hoàn toàn tương tự như trường hợp 2.1, ta sẽ nhận được những điều mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của *m*.

Tóm lại, các mâu thuẫn nhận được ở trên cho thấy trường hợp 2 không thể xảy ra.

Bài toán được chứng minh.