Vietnam TST 2012 – Lời giải và bình luận

Trần Nam Dũng & K^0

Kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam tham dự IMO 2012 đã diễn ra trong 2 ngày 16 và 17/04/2012 tại Hà Nội. Mỗi ngày thí sinh phải giải quyết 3 bài toán trong vòng 4 giờ 30 phút. Theo đánh giá chung, đề thi năm nay thuộc loại khó. Về phân môn, 6 bài toán được phân bố như sau:

Bài 1. Hình học phẳng (Quỹ tích và điểm cố định)

Bài 2. Tổ hợp (Phủ)

Bài 3. Số học (Hệ thặng dư)

Bài 4. Số học (Dãy số)

Bài 5. Đại số (Bất đẳng thức)

Bài 6. Tổ hợp (Lý thuyết đồ thị)

Nếu đi sâu vào lời giải thì có thể thấy bài 4 là một bài toán thuần túy đại số. Bài 3 là bài số học nhưng mang đậm chất tổ hợp. Như thế, có thể thấy đề thi năm nay quá nặng về Đại số và Tổ hợp, phần Số học và Hình yếu, dù bài hình là một bài toán tốt.

Về độ khó, chỉ có bài 4 là dễ chịu hơn cả, còn lại 5 bài đều là những bài toán khó, đều là thách thức đáng kể đối với các thí sinh.

Một đặc điểm nữa trong đề thi năm nay là có nhiều bài toán sử dụng ý tưởng các định lý mạnh như định lý *Cauchy-Davenport* (bài 3), định lý *Dirac*, định lý *Tutte* (bài 6). Điều này một mặt là tích cực vì hướng học sinh đến việc làm quen với những vấn đề cơ sở của toán cao cấp, mặt khác cũng tạo những bất lợi cho các học sinh chưa có điều kiện làm quen với những kiến thức này. Đây là điều mà những người dẫn dắt phong trào HSG của Việt Nam phải thảo luận kỹ để có một định hướng đúng.

Dưới đây chúng tôi trình bày lời giải chi tiết các bài toán của Vietnam TST 2012 cùng các bình luận.

Bài viết này được hoàn thành với sự tham gia trực tiếp của các bạn: *Võ Quốc Bá Cẩn (ĐH Y Cần Thơ)* và *Lê Phúc Lữ (ĐH FPT), Lê Hồng Quý* cũng như sự tham gia gián tiếp của thầy *Nguyễn Chu Gia Vượng (Viện Toán học),* các thành viên mathscope.org như *chemthan, Mr_Stoke, kien10A1, novae, leviethai, lethanhtu, nghiepdu-socap, …*

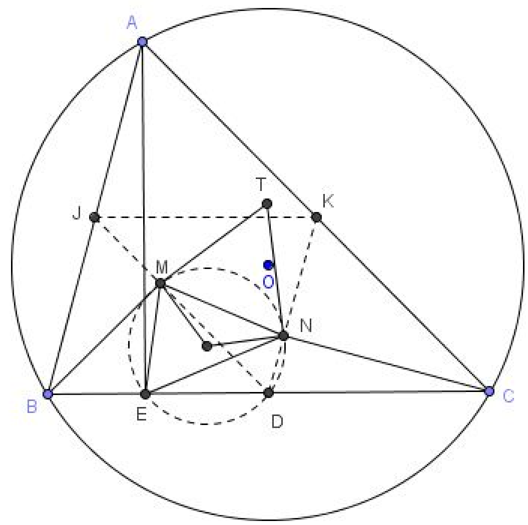
Bài 1.

Trên mặt phẳng, cho đường tròn (O) và hai điểm cố định B, C trên đường tròn này sao cho BC không là đường kính của (O). Gọi A là một điểm di động trên đường tròn (O) và A không trùng với hai điểm B, C. Gọi D, K, J lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và E, M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên BC, DJ, DK.

Chứng minh rằng các tiếp tuyến tại M, N của đường tròn ngoại tiếp tam giác EMN luôn cắt nhau tại điểm T cố định khi điểm A thay đổi trên (O).

Lời giải.

Đây là một bài toán khá thú vị với phát biểu nhẹ nhàng, cấu hình không quá phức tạp và gợi ra nhiều ý tưởng nhưng việc xử lí không dễ, quan trọng là phải đoán được điểm cố định được nêu ra. Dưới đây chúng ta sẽ xem xét một số hướng tiếp cận và xử lí mở rộng của bài toán này.



Cách 1. ***(sử dụng hàng điểm điều hòa và tứ giác điều hòa)***

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Ta xét trường hợp H nằm trong tam giác, các trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

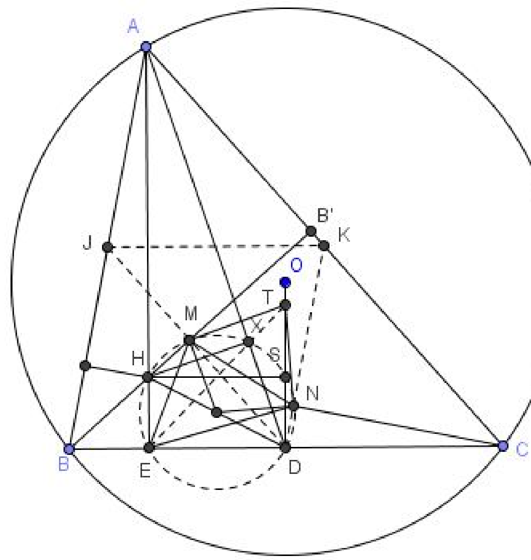
Trước hết, ta chứng minh rằng T nằm trên đường thẳng OD.

Dễ dàng thấy H cùng nằm trên các đường thẳng BM và CN nên các điểm D, M, N, H, E cùng thuộc đường tròn đường kính HD.

Đường thẳng qua H, song song với BC cắt đường thẳng OD tại điểm S. Do $\angle HSD = 90^0$ nên S cũng thuộc đường tròn đường kính HD. Gọi X là hình chiếu của E lên AD thì X cũng thuộc đường tròn này.

Ta sẽ chứng minh các tứ giác $DMSN, XMEN$ là các tứ giác điều hòa.

Thật vậy, do $HS \parallel BC$ và D là trung điểm của BC nên theo tính chất về chùm điều hòa, ta có $(HS, HD, HC, HB) = -1$ hay tứ giác $DMSN$ tương ứng là tứ giác điều hòa. Theo tính chất của tứ giác điều hòa, ta có T nằm trên đường thẳng DO.



Dễ thấy tứ giác $DEJK$ là hình thang cân nên nên $\Delta ENK \sim \Delta EMJ\,(g.g)$.

Suy ra $\dfrac{EM}{EN} = \dfrac{EJ}{EK} = \dfrac{AB}{AC}$. Hơn nữa,

$$\frac{XM}{XN} = \frac{\sin\angle XNM}{\sin\angle XMN} = \frac{\sin\angle XDM}{\sin\angle XDN} = \frac{\sin\angle DAC}{\sin\angle DAB} = \frac{AB}{AC}.$$

Do đó, $\dfrac{EM}{EN} = \dfrac{AB}{AC}$ hay tứ giác $XMEN$ điều hòa. Ta có được T nằm trên EX hay T chính là giao điểm của EX và AO.

Ta sẽ chứng minh rằng khoảng cách từ T đến D không đổi.

Gọi B' là hình chiếu của B trên AC. Do $\Delta AHX \sim \Delta ADE$ nên

$$AX \cdot AD = AH \cdot AE = AB' \cdot AC$$

hay tứ giác $CDXB'$ nội tiếp. Suy ra $\angle DXC = \angle DB'C = \angle DCA \Rightarrow DX \cdot DA = DC^2$.

Theo định lí Thales thì $DT = \dfrac{AE \cdot DX}{AX} = \dfrac{AD \cdot DX}{AH} = \dfrac{DC^2}{AH}$.

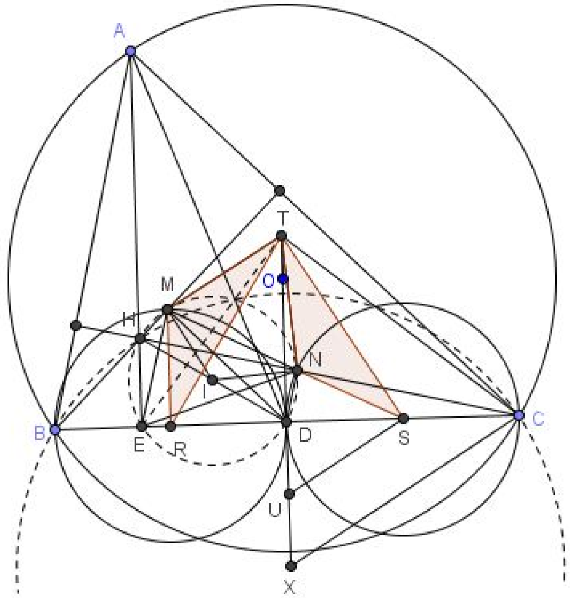
Dễ thấy DC, AH đều không đổi nên độ dài đoạn DT không đổi hay T là điểm cố định.

Ta có đpcm.

Cách 2. ***(dùng phương tích, trục đẳng phương)***

Gọi R, S lần lượt là trung điểm của DB, DC thì R, S lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác BMD, CND. Ta có $TM = TN$, $MR = \dfrac{1}{2}DB' = \dfrac{1}{4}BC = \dfrac{1}{2}DC' = NS$ và bằng biến đổi góc, ta thu được $\angle TMR = \angle TNS$ hay $\Delta TMR = \Delta TNS (c.g.c)$.

Suy ra $TR = TS$ hay T nằm trên đường trung trực của BC.



Gọi X là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC thì X cố định. Ta sẽ chứng minh T nằm trên trục đẳng phương của đường tròn *(S)* và *(X)*. Gọi U là trung điểm của OD. Ta thấy

$$\rho_{T/(X)} = \rho_{T/(S)} \Leftrightarrow TX^2 - XC^2 = TS^2 - SC^2$$

$$\Leftrightarrow TX^2 = TS^2 + XD^2 + CD^2 - SC^2 = TD^2 + SD^2 + XD^2 + CD^2 - SC^2 = TC^2 + XD^2$$

$$\Leftrightarrow (TD + XD)^2 = TC^2 + XD^2 \Leftrightarrow CD^2 = 2TD \cdot XD \Leftrightarrow DS^2 = DU \cdot DT$$

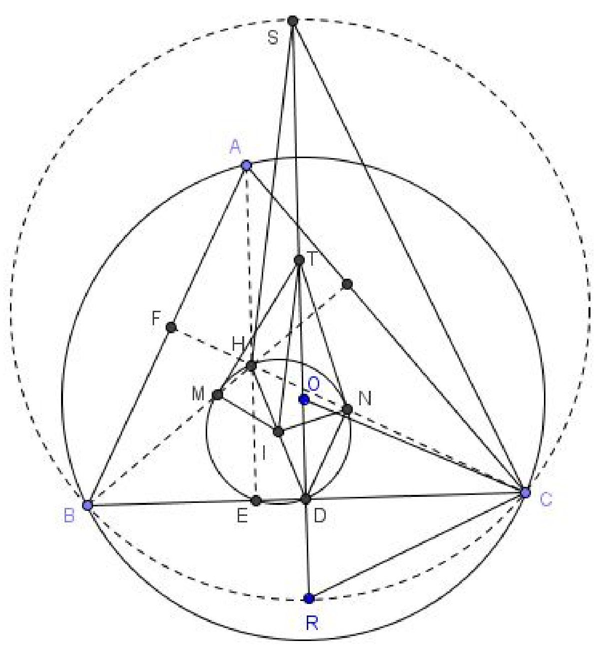
Điều này tương đương với tam giác TSU vuông tại S. Hơn nữa, ta thấy

$$\angle TSU = 90^0 \Leftrightarrow \angle STU + \angle SUT = 90^0 \Leftrightarrow \angle RTS + \angle BXC = 180^0$$
$$\Leftrightarrow \angle MTN + \angle MIN = 180^0$$

Đẳng thức cuối đúng nên suy ra *T* nằm trên trục đẳng phương của *(S)* và *(X)*. Do hai đường tròn này cố định nên trục đẳng phương của chúng cũng cố định. *T* là giao điểm của hai đường thẳng cố định nên *T* là điểm cố định. Ta có đpcm.

Bình luận.

So sánh với các bài toán hình ở vị trí bài 1 nhiều năm trở lại đây thì bài này khó hơn hẳn. Hướng giải theo con đường hình học thuần túy bắt buộc phải kẻ thêm khá nhiều đường phụ và điều này sẽ khiến nhiều bạn phải bỏ cuộc. Có một cách giải quyết trong trường hợp này là dùng phương pháp tọa độ do giả thiết cũng tương đối thuận lợi. Đôi khi cách tiếp cận bằng đại số cũng đem lại hiệu quả cao. Chúng ta sẽ cùng tìm hiểu một cách làm bằng biến đổi vector như sau:



Ta thấy các điểm *M, N* chính là trung điểm của các đường cao tương ứng của tam giác *ABC*. Các điểm M, N, E, H, D cùng thuộc đường tròn đường kính *HD*. Gọi *R* là điểm đối xứng với *O* qua đường thẳng *BC* và *S* là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác *BCR* với đường thẳng *OD*. Gọi *F* là chân đường cao kẻ từ *C* đến *AB* và *T* là trung điểm của *DS*. Dễ thấy *T* là điểm cố định. Ta tính được

$FH = AH \cdot \cos B = 2OD \cdot \cos B = 2R\cos A \cdot \cos B$ và

$\angle FCS = 90^0 - \angle FCR = 90^0 - \left(90^0 - \angle A + 90^0 - \angle B\right) = \angle A + \angle B - 90^0$ và

$\angle DCS = 90^0 - \angle RCD = 90^0 - \left(90^0 - \angle A\right) = \angle A$ nên $CS = \dfrac{BC}{2\cos A}$.

Do T, I, N lần lượt là trung điểm của các đoạn DS, HD, CF nên ta có:

$$2\overrightarrow{NT} = \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{FD}, 2\overrightarrow{NI} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FH}.$$

Suy ra: $4\overrightarrow{NT}\,\overrightarrow{NI} = \left(\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{FD}\right)\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FH}\right) = \overrightarrow{CS}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CS}\cdot\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{FH}$.

Ta tính được $\overrightarrow{CS}\cdot\overrightarrow{CD} = CD^2 = \dfrac{BC^2}{4} = R^2\cdot\sin^2 A$ và

$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{CD} = DF\cdot DC\cdot\cos\angle CDF = CD^2\cos 2B = R^2\sin^2 A\cos 2B$.

$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{FH} = FD\cdot FH\cdot\cos\angle DFH = \dfrac{BC}{2}\cdot 2R\cos A\cos B\sin B = R^2\cdot 2\sin A\cos B\sin B\cos A$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CS}\cdot\overrightarrow{FH} &= -CS\cdot FH\cdot\cos FCS = -\frac{BC}{2\cos A}\cdot 2R\cos A\cos B\sin(A+B)\\ &= -2R^2\sin A\cos B\sin(A+B)\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}4\overrightarrow{NT}\,\overrightarrow{NI} &= R^2\left(\sin^2 A + \sin^2 A\cos 2B + 2\sin A\cos B\sin B\cos A - 2\sin A\cos B\sin(A+B)\right)\\ &= 2R^2\left(\sin^2 A\cos^2 B + \sin A\cos B\left(\sin B\cos A - \sin(A+B)\right)\right) = 0\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $NT \perp NI$ hay TN là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MNE. Chứng minh tương tự, ta có TM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác này.

Do đó, hai tiếp tuyến kẻ từ M và N của đường tròn ngoại tiếp tam giác MNE cắt nhau tại T là điểm cố định, ta có đpcm.

Bài toán này có nội dung tương tự với mở rộng của bài 2, IMO 2009:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Trên các cạnh AC và AB lần lượt lấy các điểm P và Q. Gọi M, N, J lần lượt là trung điểm của BP, CQ và PQ. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MNJ cắt PQ tại R. Chứng minh rằng OR vuông góc với PQ.

Một kết quả quen thuộc khác cũng có được từ bài toán này là: tiếp tuyến tại *H* của đường tròn ngoại tiếp tam giác *EMN* cắt *AB*, *AC* tại hai điểm đối xứng nhau qua *H*.

Cách giải thứ 2 ở trên khá thuần túy và đẹp mắt, có thể thay việc chứng minh tam giác bằng nhau ở trên bằng phép quay. Trong trường hợp tam giác tù (tại *B* hoặc *C*), hình vẽ và vị trí các điểm cũng có nhiều thay đổi, chúng ta có thể sử dụng góc định hướng để có một lời giải tốt hơn!

Lời giải và bình luận của bài 1 được thực hiện bởi Lê Phúc Lữ, dựa trên cách giải của Hoàng Đỗ Kiên, Phan Đức Minh, Lê Thanh Tú và bản thân người bình luận.

Bài 2.

Trên một cánh đồng hình chữ nhật kích thước $m\times n$ ô vuông gồm m hàng và n cột, người ta đặt một số máy bơm nước vào các ô vuông. Biết rằng mỗi máy bơm nước có thể tưới nước không những cho ô vuông chứa nó và các ô vuông có chung cạnh với ô đó mà còn có thể tưới cho các ô vuông cùng cột với nó và cách nó đúng một ô vuông. Tìm số nhỏ nhất các máy bơm nước cần đặt để các máy bơm đó có thể tưới hết cả cánh đồng trong hai trường hợp:

1) $m=4$.

2) $m=3$.

Lời giải.

1) Với $m=4$, ta sẽ chứng minh rằng số máy bơm nước nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài là *n*.

Điều kiện đủ là hiển nhiên với cách đặt ở mỗi cột 1 máy bơm ở hàng thứ hai như sau:

			…			
X	X	X	…	X	X	X
			…			
			…			

Chú ý là một máy bơm chỉ tưới được tối đa 6 ô nên điều kiện cần rõ ràng đúng với $n=1$ và $n=2$.

Ta chứng minh điều kiện cần bằng phản chứng. Giả sử tồn tại *n* sao cho cánh đồng kích thước $4\times n$ có thể tưới được bằng ít hơn *n* máy bơm nước. Gọi n_0 là số nguyên dương *n* nhỏ nhất như vậy. Theo chú ý ở trên ta phải có $n_0\geq 3$.

Xét cánh đồng kích thước $4\times n_0$. Theo định nghĩa của n_0, tồn tại một cách xếp $k<n_0$ máy bơm để tưới hết cánh đồng. Vì số máy bơm nhỏ hơn số cột nên phải tồn tại ít nhất một cột không chứa máy bơm (ta gọi là cột trống).

Bước 1. Ta thấy cột trống không thể là cột ở biên vì nếu cột trống là cột biên, chẳng hạn là cột thứ nhất thì để tưới được các ô ở cột trống, cột thứ hai phải chứa 4 máy bơm. Khi đó, bằng cách thêm một máy bơm vào cột 3 hàng 2 (nếu ô này chưa có máy bơm), ta thấy n_0-2 cột còn lại (bỏ đi cột 1 và 2) sẽ được tưới bởi $k-4+1=k-3<n_0-2$ máy bơm, mâu thuẫn với cách chọn n_0.

Bước 2. Vì cột trống không nằm ở biên, ta xét cột trống đầu tiên từ bên trái sang. Ta giả sử cột này là cột *j*. Để tưới được các ô ở cột trống này, tổng cộng ở hai cột hai bên cột trống này phải có ít nhất 4 máy bơm (*).

Xét các trường hợp sau:

i) Cột $j-1$ chứa ít nhất 2 máy bơm. Khi đó do các cột từ 1 đến $j-2$ đều không trống nên *j* cột đầu chứa ít nhất *j* máy bơm. Suy ra n_0-j cột sau chứa nhiều nhất $k-j$ máy bơm. Vì được ngăn cách bởi 1 cột trống nên rõ ràng các máy bơm này bơm được cho tất cả các ô của cách đồng kích thước $4\times\left(n_0-j\right)$. Vì $k-j<n_0-j$ nên điều này mâu thuẫn với cách chọn n_0.

ii) Cột $j-1$ chỉ chứa 1 máy bơm, khi đó, do (*), cột $j+1$ phải chứa ít nhất 3 máy bơm. Khi đó, do $j+1$ cột đầu chứa ít nhất $j-1+0+3=j+2$ máy bơm nên $n_0>k\geq j+2$, tức là bên cạnh cột $j+1$ còn ít nhất 2 cột nữa. Bây giờ, bằng cách thêm vào cột 2 hàng $j+2$ một máy bơm nếu cần, ta thấy cánh đồng gồm $n_0-\left(j+1\right)$ cột còn lại sau khi bỏ đi $j+1$ cột đầu có thể được tưới bởi $k-\left(j+2\right)+1=k-j-1$ máy bơm. Vì $k-j-1<n_0-\left(j+1\right)$ nên ta nhận được mâu thuẫn với cách chọn n_0.

Như vậy điều kiện cần được chứng minh. Ta có kết luận: Với cánh đồng $4\times n,$ cần ít nhất *n* máy bơm để tưới nước thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2) Ta sẽ chứng minh rằng số máy bơm ít nhất để tưới được cánh đồng $3\times n$ là $n-\left[\dfrac{n-1}{4}\right]$. Trước hết ta chứng minh điều kiện đủ. Với $n<5$ điều kiện đủ là hiển nhiên, ta xếp mỗi cột 1 máy bơm là được.

Với $n=5,$ ta có cách xếp sau:

X				X
		X		
		X		

Từ đây dễ dàng chỉ ra cách đặt máy bơm cho *n* bất kỳ. Chẳng hạn với $n = 20$, ta đặt 16 máy bơm như sau.

X				X				X				X				X			X
		X				X				X				X				X	
		X				X				X				X				X	

Bây giờ ta chứng minh điều kiện cần. Chú ý là một máy bơm nước chỉ có thể tưới được tối đa 5 ô nên với $n = 1, 2$, ta thấy rằng cần phải có ít nhất *n* máy bơm nước mới có thể tưới được tất cả các ô của cánh đồng $3 \times n$.

Tương tự phần 1), ta sẽ chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

Đặt $f(n) = n - \left[\dfrac{n-1}{4}\right], n = 1, 2, 3, \ldots$.

Giả sử tồn tại số nguyên dương *n* sao cho cánh đồng kích thước $3 \times n$ có thể được tưới bởi $k < f(n)$ máy bơm nước. Gọi n_0 là số nhỏ nhất như vậy. Theo chú ý ở trên $n_0 \geq 3$.

Do $f(n_0) \leq n_0$ nên từ đây ta suy ra $k < n_0$. Như vậy phải có ít nhất 1 cột trống.

Lý luận tương tự như ở phần 1, ta thấy cột trống không thể ở biên. Xét cột trống đầu tiên từ bên trái sang. Giả sử đó là cột *j*. Khi đó, để tưới các ô của cột *j*, hai cột kề bên cột *j* phải chứa ít nhất 3 máy bơm nước.

Xét các trường hợp sau:

i) Cột $j-1$ chứa ít nhất 2 máy bơm nước. Khi đó j cột đầu chứa ít nhất *j* máy bơm nước (do các cột từ 1 đến $j-2$ chứa ít nhất 1, cột $j-1$ chứa ít nhất 2). Suy ra $n_0 - j$ cột còn lại chứa không quá $k - j$ máy bơm nước và các máy bơm này tưới hết các ô của cánh đồng kích thước $3 \times (n_0 - j)$.

Ta có $k - j < f(n_0) - j = n_0 - j - \left[\dfrac{n_0 - 1}{4}\right] \leq n_0 - j - \left[\dfrac{n_0 - j - 1}{4}\right] = f(n_0 - j)$ nên từ đây ta suy ra điều mâu thuẫn với cách chọn n_0.

ii) Cột $j-1$ chỉ chứa 1 máy bơm nước. Khi đó cột $j+1$ phải chứa ít nhất 2 máy bơm nước. Như thế $j+1$ cột đầu chứa ít nhất $j+1$ máy bơm nước. Suy ra $n_0-(j+1)$ cột tiếp theo chứa nhiều nhất $k-(j+1)$ máy bơm nước. Tiếp tục xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. Cột $j+2$ là cột trống. Khi đó $n_0-(j+2)$ cột còn lại sau khi bỏ $j+2$ cột đầu được tưới đủ bởi nhiều nhất $k-(j+1)$ máy bơm nước. Ta có

$$k-(j+1)< f(n_0)-(j+1)=n_0-(j+1)-\left[\frac{n_0-1}{4}\right]=n_0-(j+2)-\left[\frac{n_0-4-1}{4}\right]$$
$$\leq n_0-(j+2)-\left[\frac{n_0-(j+2)-1}{4}\right]= f(n_0-(j+2))$$

(do $j\geq 2$ nên $j+2\geq 4$).

Điều này mâu thuẫn với cách chọn n_0.

Trường hợp 2. Cột $j+2$ có ít nhất 1 máy bơm. Khi đó các máy bơm từ cột $j+2$ đến cột n_0 tưới đủ các ô ở các cột này ($n_0-(j+1)$ cột). Theo tính toán ở trên, số máy bơm ở các cột này không quá $k-(j+1)$. Ta lại có đánh giá

$$k-(j+1)< f(n_0)-(j+1)=n_0-(j+1)-\left[\frac{n_0-1}{4}\right]\leq n_0-(j+1)-\left[\frac{n_0-(j+1)-1}{4}\right]$$
$$= f\left(n_0-(j+1)\right)$$

mâu thuẫn với cách chọn n_0.

Bài toán được giải quyết hoàn toàn. Vậy số máy bơm nhỏ nhất để có thể tưới tất cả các ô của cánh đồng $3\times n$ là $n-\left[\frac{n-1}{4}\right]$.

<u>Bình luận.</u>

- Đây là một bài toán hay và thú vị theo nghĩa để giải nó không cần những kiến thức cao siêu nhưng đòi hỏi những suy luận rất tinh tế. Những bài toán như vậy mang đậm chất IMO.

- Câu 1) tương đối dễ chịu ngay ở kết quả (điều kiện cần và đủ) lẫn cách chứng minh. Với câu 2), việc dự đoán đúng kết quả đóng một vai trò hết sức quan trọng.

Nhiều thí sinh TST và cả một số bạn ở ngoài đã có dự đoán sai rằng số máy bơm cần thiết vẫn là *n*, từ đó đưa ra những lời giải sai.

- Phương pháp chứng minh được trình bày trong cả hai lời giải được gọi là *phương pháp phản ví dụ nhỏ nhất*, nằm trong chủ đề Phương pháp chứng minh phản chứng hoặc chủ đề Nguyên lý cực hạn.
- Một cách khác để trình bày lời giải bài toán là dùng phép quy nạp toán học.
- Bài này có nét giống với bài 3 trong VietnamTST 2010 nhưng có phần dễ hơn.

Bài 3.

Cho số nguyên tố $p \geq 17$. Chứng minh rằng $t=3$ là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn điều kiện: Với các số nguyên bất kì a,b,c,d sao cho sao cho abc không chia hết cho p và $a+b+c$ chia hết cho p thì tồn tại các số nguyên x,y,z thuộc tập $\left\{0,1,...,\left[\frac{p}{t}\right]-1\right\}$ sao cho $ax+by+cz$ chia hết cho p.

Lời giải.

Ta sẽ xử lí bài toán này theo các bước sau:

1. Trước hết ta chứng minh với $t=3$ thì luôn tồn tại x,y,z thỏa mãn bài toán.

Đặt: $L=\left[\frac{p}{3}\right]-1, S=\{ax+by+cz \mid 0 \leq x,y,z \leq L\}$. Yêu cầu bài toán tương đương với việc chứng minh S chứa một hệ thặng dư đầy đủ mod *p*.

Kí hiệu $a \equiv b$ là $a-b$ chia hết cho *p*, $a \neq b$ nếu a không đồng dư với *b* mod *p*, $a-1$ là số nghịch đảo của a theo mod *p*, $|S|$ là số phần tử khác nhau của *S* theo mod *p*.

2. Bởi vì $a+b+c \equiv 0$ nên $S=\{ax+by-(a+b)z \mid 0 \leq x,y,z \leq L\}$. Việc nhân a,b với cùng $b^{-1} \neq 0$ không làm thay đổi số phần tử của tập *S* theo mod *p*. Do đó ta có thể xem $b=1$ nên ta có $S=\{ax+y-(a+1)z \mid 0 \leq x,y,z \leq L\}$.

3. Do $a \neq 0,-1$ mod *p* nên ta chỉ xét ở đây $1 \leq a \leq p-2$. Chú ý là

$S=\{ax+y-(a+1)z \mid 0\le x,y,z\le L\}=S=\{(p-a-1)z+y-(p-a)x \mid 0\le x,y,z\le L\}$
Do x,y,z có thể đổi chỗ cho nhau nên ta có vai trò của a và $p-a-1$ là như nhau nhau nên ta có thể giả sử là $a\le \frac{p-1}{2}$. Với $a\le \frac{p-1}{2}$ thì $k=\min\{L,2L-a\}>0$.

4. Với mỗi $0\le l\le L$, đặt $X_l=\{a(z+l)+y-(a+1)z \mid 0\le y\le L, 0\le z\le L-l\}$ và $Y_l=\{ax+y-(a+1)(x+l) \mid 0\le x\le L-l, 0\le y\le L\}$ thì $S=\left(\bigcup_{l=0}^{L}X_l\right)\cup\left(\bigcup_{l=0}^{L}Y_l\right)$. Ta có

$$\begin{aligned}X_l&=\{a(z+l)+y-(a+1)z \mid 0\le y\le L, 0\le z\le L-l\}\\&=\{y-z+al \mid 0\le y\le L, 0\le z\le L-l\}\\&=\{l-L+al, l-L+1+al,\dots, L+al\}\end{aligned}$$

là tập gồm *2L – l* số nguyên liên tiếp. Và tương tự,

$$\begin{aligned}Y_l&=\{ax+y-(a+1)(x+l) \mid 0\le x\le L-l, 0\le y\le L\}\\&=\{y-x-(a+1)l \mid 0\le x\le L-l, 0\le y\le L\}\\&=\{l-L-(a+1)l, l-L-(a+1)l+1,\dots, L-(a+1)l\}\end{aligned}$$

là tập gồm *2L –l* số nguyên liên tiếp. Dễ thấy với $l\le k=\min\{L,2L-a\}$ thì

$$L+al+1\ge -L+(l+1)+a(l+1) \text{ và } L-(a+1)(l+1)+1\ge -L+1-(a+1)l$$

nên $\bigcup_{l=0}^{L}X_l$ chứa tất cả các số nguyên từ $-L$ đến $L+ak$ và $\bigcup_{l=0}^{L}Y_l$ chứa tất cả các số từ $-L+k-(a+1)k$ đến L.

Do đó S chứa tất cả các số từ $-L+k-(a+1)k$ đến $L+ak$. Dễ thấy vì $a,k\ge 1$ nên

$L+ak-(-L+k-(a+1)k)+1=2L+2ak+1\ge 2L+2a+2k-2+1=2L+2a+2k-1$
Mặt khác do $k=\min\{L,2L-a\}$ nên:

Nếu $k=L$ thì $2L+2a+2k-1\ge 2L+2a+2L-1\ge 4L+1\ge p$. (Đây là chỗ sử dụng điều kiện $p\ge 17$).

Nếu $k=2L-a$ thì $2L+2a+2k-1\ge 2L+4L-1=6L-1>p$.

Vậy S chứa không ít hơn p số nguyên liên tiếp nên ta có S chứa một hệ thặng dư đầy đủ theo mod p.

5. Với $t=4$ thì có thể lấy $a=b=1, c=-2$ và $d=\frac{p-1}{2}$ thì do

$$-2\left(\left[\frac{p}{4}\right]-1\right)+\frac{p-1}{2}\le x+y-2z+\frac{p-1}{2}\le 2\left(\left[\frac{p}{4}\right]-1\right)+\frac{p-1}{2}$$

Nên $\frac{3}{2}\le x+y-2z+\frac{p-1}{2}\le p-\frac{5}{2}$ không thể đồng dư 0 mod p, tức là không tồn tại x,y,z thỏa mãn.

6. Kết hợp các lý luận trên ta có đpcm.

Bình luận.

- Bài toán này xứng đáng là bài toán số 3 của kì thi. Việc chứng minh cho trường hợp $t=4$ khá dễ dàng; tuy nhiên, với trường hợp $t=3$ thì vấn đề phức tạp hơn nhiều. Với cách giải trên thì ta có thể mở rộng bài toán ra như sau:

Bài toán 3.1.

Cho số nguyên tố p. Tìm số nguyên dương L nhỏ nhất sao cho với mọi bộ ba số nguyên không đồng dư với nhau đôi một theo mod p và $a+b+c$ chia hết cho p thì với mọi d đều tồn tại $0\le x,y,z\le L$ sao cho $ax+by+cz$ chia hết cho p.

- Quay trở lại với lời giải bài toán ban đầu.

Mấu chốt của vấn đề là tận dụng tính chất: khi nhân cả ba số a,b,c với cùng một số $m\ne 0$ theo mod p thì vai trò của a,b,c và ma,mb,mc là tương đương nhau ở trong bài toán là tương đương nhau ở trong bài toán. Lại có $a+b+c\equiv 0(\bmod p)$ nên ta có thể thay c bởi $-a-b$ và do đó giảm độ phức tạp đi. Một suy nghĩ tự nhiên là sẽ tìm m sao cho ma hoặc mb bằng 1. Điều này đơn giản.

Sau các bước trên thì ta sẽ thu được $S=\{ax+y-(a+1)z \mid 0\le x,y,z\le L\}$ với $L=\left[\frac{p}{3}\right]-1$. Khi đến đây thì khi ta thử với $a=1$ thì

$$S=\{x+y-2z \mid 0\le x,y,z\le L\}=\{-2L,-2L+1,...,2L-1,2L\}$$

gồm các số nguyên liên tiếp.

Lại thử với $a=2$ thì $S=\left\{2x+y-3z \mid 0\le x,y,z\le L\right\}=\left\{-3L,-3L+1,...,3L-1,3L\right\}$

cũng gồm các số nguyên liên tiếp.

Như vậy qua hai trường hợp $a=1$ và $a=2$ thì ta sẽ có ý tưởng là chứngminh S chứa một tập con có dạng $\left\{-M,-M+1,...,M-1,M\right\}$.

Chú ý là tập $\left\{y-z \mid 0\le x,y,z\le L\right\}=\left\{-L,-L+1,...,L-1,L\right\}$ nên ta sẽ nghĩ đến việc đặt $x=z+1$ và đặt

$X_l=\left\{a\left(z+l\right)+y-\left(a+1\right)z \mid 0\le y\le L, 0\le z\le L-l\right\}=\left\{y-z+al \mid 0\le y\le L, 0\le z\le L-l\right\}$ là tập gồm các số nguyên liên tiếp. Tương tự ta có Y_1 nếu đặt $z=x+1$.

Đểcó S chứa các số nguyên liên tiếp thì ta cần có X_1 và X_{l+1} phải giao nhau, ta thu được điều kiện cần và đủ là $a+l\le 2L$. Vậy ta cần phải có $a\le 2L$. Kiểm tra với Y_1 ta thu được điều kiện tương tự.

Vấn đề còn lại là phải có $a<2L$. Quay trở lại ta chú ý ngay đến vai trò của a và $-(a+1)\equiv p-(a+1)$ là như nhau và một trong hai phải không vượt quá $\frac{p-1}{2}<2L.$

- Các cách giải khác :

Hai cách giải dưới đây đều sử dụng đến định lý thuộc lĩnh vực lý thuyết số cộng tính và tổ hợp sau đây

Định lý Cauchy-Davenport

Cho hai tập các số nguyên A, B và số nguyên tố p. Không có hai phần tử nào của A đồng dư với nhau theo modun p. Tương tự cho B. Khi đó tập $C=\left\{a+b \mid a\in A, b\in B\right\}$ *sẽ chứa ít nhất* $\min\left\{|A|+|B|-1,p\right\}$ *phần tử đôi một không đồng dư với nhau mod p.*

Đặt $A=\left\{0,1,2,...,L\right\}$ thì ta có $S=aA+bA+cA$. Theo định lý *Cauchy-Davenport* ta có $|S|\ge 3|A|=3\left[\frac{p}{3}\right]-2$.

Tuy nhiên, nói chung đây chưa phải là điều ta cần, ta có thể vượt qua điều này bằng một số cách như sau:

Cách 1. ***(dựa theo bạn chemthan)***

Đặt $B=\{ax+by+cz\,|\,1\le x,y,z\le L-1\}$ và $C=\{ax+by+cz\,|\,-1\le x,y,z\le 1\}$.

Áp dụng định lý *Cauchy-Davenport,* ta có:

$$|S|\ge \min\{|B|+|C|-1,p\} \text{ và } |B|\ge 3(L-1)-2.$$

Do đó $|S|\ge \min\{3L-5+|C|-1,p\}=\min\{3L-6+|C|,p\}$.

Nếu ta chứng minh được $3L-6+|C|\ge p$ thì ta chứng minh được bài toán cho $t=3$.

Ta có $3L-6=3\left[\frac{p}{3}\right]-9\ge p-11$ nên $|C|$ phải ít nhất là 11 (ta cần chứng minh).

Đặt $D=\{a,b,c,-a,-b,-c\}$ và

$E=\{a-b,b-c,c-a,a-b-c,b-c-a,c-a-b\}=\{a-b,b-c,c-a,2a,2b,2c\}$

thì dễ thấy $|D|=|E|=6$. Nếu D và E rời nhau thì ta có $|C|\ge|D|+|E|\ge 12$ thỏa mãn.

Nếu D và E không rời nhau thì tồn tại.

- Trường hợp 1 : $a=a-b$ (không xảy ra)
- Trường hợp 2 : $a=b-c$ hay $a+c\equiv b\Rightarrow -b\equiv b$ (không xảy ra)
- Trường hợp 3 : $a=2b$ thì có thể dễ dàng chỉ ra $|C|\ge 13$.

Vậy ta có $|C|\ge 11$ và ta có đpcm.

Cách 2. ***(Dựa trên cách trên với cách đặt tập C)***

Vì $a+b+c\equiv 0$ nên với $K=\frac{L}{2}$ thì ta có $|S|\ge|X|$, với

$$X=\{ax+by+cz\,|-K\le x,y,z\le K\}=C+C+C+...+C \text{ (K phiên bản C)}$$

Áp dụng định lý *Cauchy-Davenport* $K-1$ lần thì $|X|\ge\min\{K|C|-K+1,p\}$.

Ta cần có $K|C|-K+1\ge p$. Ta đếm $|C|$. Dễ thấy rằng

$D=\{0,a,b,c,-a,-b,-c,a-b,b-c,c-a\}$ chứa các phần tử đôi một không đồng dư modun p nên $|C|\ge|D|=10$.

Ta có $|K|C-K+1\geq 9K+1$. Ta cần chứng minh $9K+1\geq p$ với $K=\left[\dfrac{[p/3]-1}{2}\right]$. (*)

Đến đây thử với $p=6l+1$ hoặc $p=6l-1$ với $l\geq 3$ ta thấy (*) luôn đúng.

- Lời giải và bình luận trên đây được thực hiện bởi bạn Lê Hồng Quý (Traum), huy chương đồng Olympic Toán quốc tế năm 2006.

- Định lý *Cauchy – Davenport* có nhiều cách chứng minh khác nhau, trong đó có cách chứng minh dựa vào định lý không điểm tổ hợp (*Combinatorial Nullstenlenzat*, bài viết ***Đa thức và các bài toán tổ hợp*** đăng trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ (6/2009)). Một cách chứng minh khác dùng đa thức nhiều biến là : http://planetmath.org/encyclopedia/ProofofCauchyDavenportTheorem.html

Dưới đây chúng tôi trình bày một cách chứng minh sơ cấp cho định lý này. Cảm ơn bạn Nguyễn Ngọc Trung (chemthan), huy chương vàng Olympic Toán quốc tế năm 2010, đã cung cấp tư liệu tiếng Anh.

Đặt $A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$, $B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$. Ta chứng minh $k=|A+B|\geq m+n-1$ (theo mod p). Ta giả sử $m\leq n$ và sẽ chứng minh quy nạp theo *m*.

Với $m=1$, mệnh đề đúng vì từ $a_1+b_i\neq a_1+b_j (\text{mod } p)$ nếu $i\neq j$ nên

$$|a_1+B|=|B|=n=1+n-1.$$

Khi đó các bất đẳng thức $0<|F|<m\leq n<|G|,|F|+|G|\leq p$ và giả thiết quy nạp cho ta mệnh đề đúng đối với các tập hợp F và G.

Giả sử mệnh đề đã đúng với mọi hai tập hợp X và Y sao cho $|X|<m,|X|<|Y|$ và $|X|+|Y|\leq p$. Giả sử $|A|=m>1$ và $|B|=n$, trong đó $m\leq n$ và $m+n\leq p$. Khi đó $n<p$ và do đó tồn tại $c\notin B$.Ta chọn các phần tử a_1,a_2 khác nhau thuộc *A*. Vì dãy $c+t(a_2-a_1)(\text{mod } p)$ với $t=1,2,3,...,p-1$ chứa tất cả các số dư, trừ c nên $b=c+t(a_2-a_1)\in B$ với *t* nào đó. Gọi *t* là số nhỏ nhất có tính chất này.

Tập hợp $A'=\{b-a_2\}+A$ chứa phần tử $b-a_2+a_1, b-a_2+a_2=b$. Chú ý rằng $b-a_2+a_1=c+(t-1)(a_2-a_1)\notin B$. Vì $|A'+B|=|\{b-a_2\}+A+B|$ nên ta chỉ cần chứng minh rằng $|A'+B|\geq m+n-1$.

Đặt $F = A' \cap B$ và $F = A' \cup B$. Vì $b \in F, b - a_2 + a_1 \in F$ và $b - a_2 + a_1 \in A'$ nên F là tập con thực sự khác rỗng của A'. Như vậy B là tập con thực sự của G.

Từ đây suy ra $0 < |F| < m \le n < |G|$.

Mặt khác $m + n = |A'| + |B| = |A' \cup B| + |A' \cap B| = |F| + |G|$.

Ta cũng chú ý rằng $F + G \subset A' + B$ (Với $f \in F, g \in G$, ta có thể giả sử rằng $g \in A'$ và khi đó $f \in F \subset B$ suy ra rằng $f + g \in A' + B$). Suy ra $|A'| + |B| \ge |F| + |G|$.

Khi đó các bất đẳng thức $0 < |F| < m \le n < |G|, |F| + |G| \le p$ và giả thiết quy nạp cho ta mệnh đề đúng đối với các tập hợp F và G. Do đó

$$|A + B| = |A' + B| \ge |F + G| \ge |F| + |G| - 1 = |A'| + |B| - 1 = m + n - 1$$

và phép quy nạp được hoàn tất.

- Theo lời giải đầu tiên thì bài toán vẫn đúng cho $p = 13$.
- Đây là một bài toán khó và nó gần với một bài toán tổ hợp hơn là một bài toán số học (về phương pháp chứng minh và lập luận)
- Các bạn có thể tham khảo một bài toán có ý tưởng giải tương tự như sau:

Bài toán 3.2. *Cho $p \ge 3$ là số nguyên tố và $a_1, a_2, a_3, ..., a_{p-2}$ là dãy các số tự nhiên sao cho p không chia hết a_k và $a_k^k - 1$. Chứng minh rằng ta có thể chọn ra một số số hạng của dãy số để tích của chúng có số dư là 2 khi chia cho p.*

Hướng dẫn. Dùng căn nguyên thủy đưa về bài toán cộng tính.

<u>Bài 4.</u>

Cho dãy số nguyên dương (x_n) được xác định bởi $\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 2011, \\ x_{n+2} = 4022x_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Chứng minh rằng $\dfrac{x_{2012} + 1}{2012}$ ***là số chính phương.***

<u>Lời giải.</u>

Đây chính là bài toán nhẹ nhàng và quen thuộc nhất trong đề thi lần này. Để đơn giản hơn trong việc dùng kí hiệu và hiểu rõ bản chất vấn đề, ta sẽ phát biểu và chứng minh bài toán tổng quát như sau:

Cho p là số nguyên dương lẻ lớn hơn 1.

Xét dãy số nguyên dương (x_n) được xác định bởi $\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = p, \\ x_{n+2} = 2px_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Chứng minh rằng $\dfrac{x_{p+1}+1}{p+1}$ là số chính phương.

Bài toán này có một số lời giải như sau.

Cách 1 *(dùng công thức tổng quát của dãy và biến đổi trực tiếp).*

Phương trình đặc trưng của dãy số đã cho là $t^2 = 2pt - 1 \Leftrightarrow t^2 - 2pt + 1 = 0$ có $\Delta' = p^2 - 1 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm là $t_1 = p + \sqrt{p^2-1}, t_2 = p - \sqrt{p^2-1}$.

Công thức tổng quát của dãy đã cho là $x_n = At_1^n + Bt_2^n, n = 1, 2, 3, \dots$

Thay $n = 1, 2$ tương ứng với hai số hạng cho trước của dãy, ta được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} At_1 + Bt_2 = 1 \\ At_1^2 + Bt_2^2 = p \end{cases}$$

Giải hệ này, ta thu được $A = \dfrac{t_2}{2}, B = \dfrac{t_1}{2}$ hay $x_n = \dfrac{t_1^{n-1} + t_2^{n-1}}{2}, n = 1, 2, 3, \dots$

Suy ra $\dfrac{x_{p+1}+1}{p+1} = \dfrac{t_1^p + t_2^p + 2}{2(p+1)} = \dfrac{\left(t_1^{p/2} + t_2^{p/2}\right)^2}{2(p+1)}$.

Chú ý rằng $t_1 + t_2 = 2p,\ t_1t_2 = 1$ nên $\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = \sqrt{t_1 + t_2 + 2\sqrt{t_1t_2}} = \sqrt{2(p+1)}$.

Hơn nữa, ta cũng có $S_n = t_1^n + t_2^n \in \mathbb{N}, \forall n \geq 1$ vì $S_1, S_2 \in \mathbb{N}$ và $S_{n+2} = 2pS_{n+1} - S_n$.

Đặt $\sqrt{t_1} = a, \sqrt{t_2} = b$ thì $a + b = \sqrt{2(p+1)}, ab = 1$ và $t_1^{p/2} + t_2^{p/2} = a^p + b^p$.

Ta có $a^p + b^p = (a+b)\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i a^i b^{p-1-i} = \sqrt{2(p+1)}\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i a^i b^{p-1-i}$. Xét biến đổi sau:

$$\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i a^i b^{p-1-i}=\sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}}(-1)^i a^i b^{p-1-i}+(-1)^{\frac{p-1}{2}}(ab)^{\frac{p-1}{2}}+\sum_{i=\frac{p+1}{2}}^{p-1}(-1)^i a^i b^{p-1-i}$$

$$=\sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}}(-1)^i (ab)^i b^{p-1-2i}+\sum_{i=\frac{p+1}{2}}^{p-1}(-1)^i (ab)^i a^{p-1-2i}+(-1)^{\frac{p-1}{2}}=\sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}}(-1)^i t_2^{\frac{p-1-2i}{2}}+\sum_{i=\frac{p+1}{2}}^{p-1}(-1)^i t_1^{\frac{p-1-2i}{2}}+(-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

$$=\sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}}(-1)^i\left[t_1^{\frac{p-1-2i}{2}}+t_2^{\frac{p-1-2i}{2}}\right]+(-1)^{\frac{p-1}{2}}=\sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}}(-1)^i S_{\frac{p-1-2i}{2}}+(-1)^{\frac{p-1}{2}}=N\in\mathbb{N}$$

Do đó $t_1^{p/2}+t_2^{p/2}=N\sqrt{2(p+1)}\Rightarrow\left(t_1^{p/2}+t_2^{p/2}\right)^2=N^2\left[2(p+1)\right]$.

Vậy $\dfrac{x_{p+1}+1}{p+1}=\dfrac{N^2\left[2(p+1)\right]}{2(p+1)}=N^2$ là số chính phương. Ta có đpcm.

Cách 2. ***(Xét dãy số phụ và dùng quy nạp).***

Ta thấy rằng

$x_2=p\Rightarrow\dfrac{x_2+1}{p+1}=\dfrac{p+1}{p+1}=1,$

$x_3=2p^2-1, x_4=4p^3-3p\Rightarrow\dfrac{x_4+1}{p+1}=\dfrac{4p^3-3p+1}{p+1}=(2p-1)^2,$

$x_5=8p^4-8p^2+1, x_6=16p^5-20p^3+5p\Rightarrow\dfrac{x_6+1}{p+1}=(4p^2-2p-1)^2.$

Từ công thức truy hồi là $x_{n+2}=2px_{n+1}-x_n$, ta có $2px_{n-1}=x_n+x_{n-2}$. Suy ra

$x_{n+2}=2p\left(2px_n-x_{n-1}\right)-x_n=4p^2x_n-2px_{n-1}-x_n=(4p^2-2)x_n-x_{n-2},\forall n\geq 3$.

Ta sẽ xây dựng công thức của dãy $y_n=\sqrt{\dfrac{x_{2n}+1}{p+1}}, n=1,2,3,...$ và chứng minh các số hạng của dãy này đều nguyên.

Xét dãy (y_n) thỏa mãn $\begin{cases}y_1=1, y_2=2p-1\\ y_{n+2}=ay_{n+1}+by_n, n\geq 1\end{cases}$ với a,b được chọn sau.

Do $y_3=4p^2-2p-1$ nên $a(2p-1)+b=4p^2-2p-1$; ta có thể chọn $a=2p, b=-1$.

Dãy số tương ứng là $\begin{cases} y_1 = 1, y_2 = 2p - 1 \\ y_{n+2} = 2py_{n+1} - y_n, n \ge 1 \end{cases}$.

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng $y_n^2 = \frac{x_{2n}+1}{p+1}, \forall n \ge 1$. (*)

Với $n = 1, 2$, khẳng định (*) đúng.

Giả sử ta có $y_n^2 = \frac{x_{2n}+1}{p+1}, y_{n+1}^2 = \frac{x_{2n+2}+1}{p+1}$.

Ta có $y_{n+2}y_n - y_{n+1}^2 = (2py_{n+1} - y_n)y_n - y_{n+1}(2py_n - y_{n-1}) = y_{n+1}y_{n-1} - y_n^2, \forall n$.

Hơn nữa $y_3y_1 - y_2^2 = 2p - 2$ nên $y_{n+2}y_n - y_{n+1}^2 = 2p - 2, \forall n$.

Từ công thức xác định dãy thì

$y_n + y_{n+2} = 2py_{n+1} \Leftrightarrow y_n^2 + y_{n+2}^2 + 2y_ny_{n+2} = 4p^2y_{n+1}^2 \Leftrightarrow y_n^2 + y_{n+2}^2 + 2\left(2p - 2 + y_{n+1}^2\right) = 4p^2y_{n+1}^2$ hay

$$y_{n+2}^2 = (4p^2 - 2)y_{n+1}^2 - y_n^2 - 4(p-1) = (4p^2 - 2)\frac{x_{2n+2}+1}{p+1} - \frac{x_{2n}+1}{p+1} - 4(p-1)$$
$$= \frac{(4p^2-2)x_{2n+2} - x_{2n} + 1}{p+1} = \frac{x_{2n+4}+1}{p+1}$$

Khẳng định (*) cũng đúng với $n+2$. Theo nguyên lí quy nạp, (*) được chứng minh.

Do đó, ta đã chứng minh được với mọi n chẵn thì $\frac{x_n+1}{p+1}$ là số chính phương; nói riêng, ta cũng có $\frac{x_{p+1}+1}{p+1}$ cũng là số chính phương. Ta có đpcm.

<u>Bình luận.</u>

Cách thứ nhất có thể kết hợp thêm quy nạp để chứng minh $t_1^{p/2} + t_2^{p/2} = N\sqrt{2(p+1)}$ cho đơn giản thay vì biến đổi trực tiếp.

Cách thứ hai của bài toán này dựa trên một định lí về dãy số gồm toàn số chính phương như sau:

Cho dãy số (u_n) *xác định như sau* $u_1 = a, u_2 = b, u_{n+2} = cu_{n+1} - u_n, n \ge 1$.

Xét dãy số mới là (v_n) *với* $v_1 = a^2, v_2 = b^2, v_{n+2} = (c^2-2)v_{n+1} - v_n - 2\left(u_1u_3 - u_2^2\right), n \ge 1$.

Khi đó $v_n = u_n^2$ *với mọi số nguyên dương* n*.*

Ý tưởng để chứng minh định lí này hoàn toàn đã được áp dụng vào lời giải thứ hai ở trên. Cũng chính cách này đã cho ta một kết quả mạnh hơn bài toán đã cho là khẳng định vẫn đúng khi thay x_{p+1} bởi x_n với *n* chẵn bất kì.

Ngoài ra, ta có thể dựa trên tính chất của dãy số (x_n) là $x_{n+2}x_n = x_{n+1}^2 + p^2 - 1$ để suy ra rằng

$\left(\frac{x_{n+2}+1}{p+1}\right)\left(\frac{x_n+1}{p+1}\right) = \left(\frac{x_{n+1}+1}{p+1}\right)^2$ và dùng quy nạp để có được điều phải chứng minh.

Ta cũng có một hướng tiếp cận khác nữa là:

Xét phương trình Pell có dạng $x^2 - (p^2-1)y^2 = 1$ với p là số nguyên dương lẻ.

Ta xét đồng thời hai dãy số được xác định như sau:

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = p, x_{n+2} = 2px_{n+1} - x_n \\ y_1 = 0, y_2 = 1, y_{n+2} = 2py_{n+1} - y_n \end{cases}, n = 1,2,3,...$$

Khi đó, bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng $x_n^2 - \left(p^2-1\right)y_n^2 = 1$ và $\left(x_n, y_n\right)$ cũng chính là tất cả các nghiệm của phương trình Pell nêu trên.

Bằng quy nạp, ta cũng chứng minh được rằng $\left(x_{2k}-1\right) \vdots \left(p-1\right), \left(x_{2k}+1\right) \vdots \left(p+1\right)$ với mọi $k > 0$ nên có thể viết đẳng thức quan hệ giữa x_n, y_n thành $\left(\frac{x_{2k}-1}{p-1}\right) \cdot \left(\frac{x_{2k}+1}{p+1}\right) = y^2$.

Ta cũng chứng minh được rằng cả hai số $\frac{x_{2k}-1}{p-1}, \frac{x_{2k}+1}{p+1}$ nguyên tố cùng nhau nên mỗi số đều phải là số chính phương. Bài toán được giải quyết nhanh chóng và có lẽ đây chính là cơ sở để xây dựng bài số 4 này!

Từ đây, ta cũng có thể thêm vào bài toán ban đầu một kết quả thú vị nữa là $\frac{x_{2012}-1}{2010}$ là một số chính phương.

Ngoài ra, công thức xác định của dãy đã cho có liên quan đến đa thức Chebyshev loại I như sau:

$$T_0(x)=1, T_1(x)=x, T_{n+2}(x)=2xT_{n+1}(x)-T_n(x), n\geq 0.$$

Do đó, dựa vào các tính chất đã biết của loại đa thức này, bài toán đã cho có thể phát triển theo nhiều hướng thú vị hơn.

Lời giải và bình luận bài 4 được thực hiện bởi Lê Phúc Lữ, tham khảo các lời giải của các bạn Lê Việt Hải, Võ Anh Đức và Hoàng Đỗ Kiên, Nguyễn Huy Tùng.

Bài 5.

Chứng minh rằng $C=10\sqrt{24}$ ***là hằng số lớn nhất sao cho nếu có*** 17 ***số thực dương*** $a_1, a_2, ..., a_{17}$ ***thỏa mãn điều kiện*** $a_1^2+a_2^2+...+a_{17}^2=24$ ***và***

$$a_1^3+a_2^3+\cdots+a_{17}^3+a_1+a_2+\cdots+a_{17}<C$$

thì với mọi $1\leq i<j<k\leq 17$, ***ta có*** a_i, a_j, a_k ***là độ dài ba cạnh của một tam giác.***

Lời giải.

Đặt $a_i=\sqrt{24}x_i, \forall i=1, 2, \ldots, 17,$ khi đó yêu cầu bài toán tương đương với:

Chứng minh rằng $C=10$ *là hằng số lớn nhất sao cho nếu có* 17 *số thực dương* $x_1, x_2, \ldots, x_{17}$ *thỏa mãn* $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{17}^2=1$ *và*

$$24(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_{17}^3)+(x_1+x_2+\cdots+x_{17})<C$$

thì với mọi i, j, k *thỏa mãn* $1\leq i<j<k\leq 17,$ *ta có* x_i, x_j, x_k *là độ dài ba cạnh của một tam giác.*

Chứng minh dưới đây gồm hai phần:

(a) *Chứng minh hằng số* $C=10$ *thỏa mãn yêu cầu đề bài.* Không mất tính tổng quát, ta chỉ cần chứng minh x_1, x_2, x_3 là độ dài ba cạnh của một tam giác. Để ý rằng với mọi $0<t<1,$ ta có

$$24t^3+t-(16t^4+9t^2)=t(1-t)(4t-1)^2\geq 0.$$

Do đó, từ giả thiết ta suy ra

$$16(x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{17}^4)+9(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{17}^2)<10,$$

hay

$$16(x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{17}^4)<1=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{17}^2)^2.$$

Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$16(x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{17}^4)=\Bigg(2+\underbrace{1+1+\cdots+1}_{\text{14 so 1}}\Bigg)\Big[(x_1^4+x_2^4+x_3^4)+(x_4^4+x_5^4+\cdots+x_{17}^4)\Big]$$

$$\geq\left[\sqrt{2(x_1^4+x_2^4+x_3^4)}+x_4^2+x_5^2+\cdots+x_{17}^2\right]^2.$$

Từ đây kết hợp với trên, ta thu được

$$\sqrt{2(x_1^4+x_2^4+x_3^4)}<x_1^2+x_2^2+x_3^2,$$

hay

$$2(x_1^4+x_2^4+x_3^4)<(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2.$$

Đến đây, bằng cách sử dụng đồng nhất thức

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2-2(x_1^4+x_2^4+x_3^4)=2(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2-x_3)(x_2+x_3-x_1)(x_3+x_1-x_2),$$

ta dễ dàng suy ra được $x_1,\ x_2,\ x_3$ là độ dài ba cạnh của một tam giác.

(b) *Chứng minh $C=10$ là hằng số lớn nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài.* Giả sử tồn tại hằng số $C'>10$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Khi đó, ta xét 17 số dương $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{17}$ với

$$x_1=\frac{1}{4},\quad x_2=\sqrt{\frac{1}{16}-\varepsilon},\quad x_3=\varepsilon,\quad x_4=\cdots=x_{17}=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{\varepsilon-\varepsilon^2}{14}},\quad 0<\varepsilon<\frac{1}{16}.$$

Lúc này, dễ thấy $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{17}^2=1.$ Ngoài ra, ta cũng có

$$x_1-x_3=\frac{1}{4}-\varepsilon=\sqrt{\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{16}-\frac{\varepsilon}{2}+\varepsilon^2}>\sqrt{\frac{1}{16}-\frac{\varepsilon}{2}}>\sqrt{\frac{1}{16}-\varepsilon}=x_2$$

nên $x_1,\ x_2,\ x_3$ không phải là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh rằng, bằng cách chọn ε thích hợp, các số $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{17}$ sẽ thỏa mãn bất đẳng thức

$$24(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_{17}^3)+(x_1+x_2+\cdots+x_{17})<C'.$$

Rõ ràng chứng minh được điều này cũng có nghĩa là ta đã chứng minh được $C=10$ là hằng số lớn nhất thỏa mãn yêu cầu của bài toán.
Ta có bất đẳng thức trên tương đương với

$$24\left[\frac{1}{4^3}+\sqrt{\left(\frac{1}{16}-\varepsilon\right)^3}+\varepsilon^3+14\sqrt{\left(\frac{1}{16}+\frac{\varepsilon-\varepsilon^2}{14}\right)^3}\right]+\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{16}-\varepsilon}+\varepsilon+14\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{\varepsilon-\varepsilon^2}{14}}<C'.$$

Dễ thấy vế trái là một hàm liên tục của ε trên $\left(0, \frac{1}{16}\right)$. Ngoài ra, khi $\varepsilon \to 0^+$ thì

$$VT \to 24\left[\frac{1}{4^3}+\sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^3}+14\sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^3}\right]+\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{16}}+14\sqrt{\frac{1}{16}}=10<C'.$$

Do đó, theo tính chất của hàm liên tục, ta thấy rằng tồn tại một giá trị $\varepsilon_0 \in \left(0, \frac{1}{16}\right)$ sao cho tại $\varepsilon = \varepsilon_0$ thì $VT < C'.$ Lúc này, ta có bộ số

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{17}) = \left(\frac{1}{4}, \sqrt{\frac{1}{16}-\varepsilon_0}, \varepsilon_0, \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{\varepsilon_0-\varepsilon_0^2}{14}}, \ldots, \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{\varepsilon_0-\varepsilon_0^2}{14}}\right)$$

thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{17}^2=1$ và

$$24(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_{17}^3)+(x_1+x_2+\cdots+x_{17})<C'.$$

Nhưng trong chúng có ba số x_1, x_2, x_3 không lập thành độ dài ba cạnh của một tam giác. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $C'>10$ là hằng số thỏa mãn yêu cầu đề bài. Vậy $C_{\max}=10.$

Bình luận.

Lời giải ở trên đã sử dụng đánh giá để đưa về xét bất đẳng thức

$$16(x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{17}^4)<(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{17}^2)^2,$$

rồi từ đó suy ra x_i, x_j, x_k $(1\le i<j<k\le 17)$ là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Như vậy, từ việc giải bài toán đã cho, ta thu được một bài toán khác là:

Bài toán 5.1. *Cho các số dương* $x_1, x_2, \ldots, x_{17}$ *thỏa mãn*

$$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{17}^2)^2>16(x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{17}^4).$$

Chứng minh rằng, với mọi $1\le i<j<k\le 16,$ *ta có* x_i, x_j, x_k *là độ dài ba cạnh của một tam giác.*

Một điều thú vị là kết quả tổng quát của bài toán 5.1 vẫn đúng và trên thực tế, trong lịch sử các kỳ thi Olympic, bài toán này đã từng xuất hiện trong một đề thi, đó là một trong các câu hỏi của đề thi Olympic Toán Trung Quốc năm 1988:

Bài toán 5.2. *Cho số tự nhiên $n \geq 3$ và $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực dương thỏa mãn*

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4).$$

Chứng minh rằng, với mọi $1 \leq i < j < k \leq n$, ta có a_i, a_j, a_k là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Cách giải của bài toán tổng quát hoàn toán giống với bài toán 5.1, đó là từ giả thiết, ta sẽ tìm cách đánh giá đưa về ba biến rồi sau đó sử dụng khai triển quen thuộc

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4) = (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

để suy ra điều phải chứng minh.

Qua lời giải được trình bày ở trên, có thể thấy được đánh giá

$$24t^3 + t \geq 16t^4 + 9t^2, \quad \forall t \in (0,1)$$

chính là mấu chốt, là chìa khóa quan trọng để giải bài toán. Và khi giải bài toán này, chúng tôi có cảm giác rằng tác giả bài toán đã phát hiện ra đánh giá $24t^3 + t \geq 16t^4 + 9t^2, \forall t \in (0,1)$ trước rồi sau đó đi ngược từ bài toán 5.2 để đi đến bài toán đã cho. Rất có thể đây chính là cách mà tác giả đã tạo ra bài toán.

Việc nhận ra được bài toán gốc cũng như bất đẳng thức trung gian

$$24t^3 + t \geq 16t^4 + 9t^2, \quad \forall t \in (0,1)$$

là điều không hề dễ dàng gì, và chính điều này đã gây khó khăn cho không ít thí sinh trong kỳ thi vừa qua. Tuy nhiên, theo quan điểm cá nhân của mình, chúng tôi nghĩ rằng việc sử dụng "mẹo" che giấu đề làm khó bài toán như thế là không nên. Nên có những bài toán với ý tưởng tự nhiên hơn.

Lời giải và bình luận bài 5 này được thực hiện bởi Võ Quốc Bá Cẩn.

Bài 6.

Có 42 học sinh tham dự kì thi chọn đội tuyển Olympic toán quốc tế. Biết rằng một học sinh bất kì quen đúng 20 học sinh khác.

Chứng minh rằng ta có thể chia 42 học sinh thành 2 nhóm hoặc 21 nhóm sao cho số học sinh trong các nhóm bằng nhau và 2 học sinh bất kì nào trong cùng nhóm thì quen nhau.

Lời giải.

Cách 1. ***(Của thầy Nguyễn Chu Gia Vượng)***

Bài toán có thể phát biểu dưới dạng đồ thị một cách hiển nhiên: một đồ thị trên $2n+2$ đỉnh, bậc mỗi đỉnh bằng *n* thì hoặc là hợp rời của 2 đồ thị đầy đủ trên $n+1$ đỉnh hoặc có thể tìm được $n+1$ cạnh với đầu mút đôi một rời nhau.

Ta xét bổ đề sau: *Một đồ thị liên thông trên N đỉnh, bậc nhỏ nhất bằng d (bậc mỗi đỉnh không ít hơn d) luôn có một đường đi có độ dài không ít hơn* $\min\{2d, N-1\}$.

Quay trở lại bài toán, nếu *G* không liên thông thì hiển nhiên điều kiện về bậc cho thấy *G* được tạo thành từ hai đồ thị đầy đủ trên $n+1$ đỉnh.

Giả sử *G* liên thông, thế thì theo bổ đề trên, *G* có một đường đi có độ dài $2n$ hoặc $2n+1$.

Nói rằng *G* có đường đi độ dài $2n+1$ nghĩa là nói *G* có đường đi Hamilton (đi qua $2n+2$ đỉnh, mỗi đỉnh 1 lần), trường hợp này hiển nhiên cho ta lời giải bài toán.

Giả sử G có đường đi độ dài *2n*: $A_1B_1A_2B_2...A_nB_nA_{n+1}$. Gọi đỉnh còn lại là A_{n+2}. Nếu A_{n+2} kề A_i với *i* nào đó thì các cạnh $A_{n+2}A_i, A_jB_j, j<i$ và $B_jA_{j+1}, j>i$ thỏa mãn bài toán. Giả sử A_{n+2} không kề với bất kì A_i, thế thì do bậc của A_{n+2} bằng *n* nên ta suy ra A_{n+2} kề B_i với mọi *i*.

Lập luận như trên với đường đi $A_{n+2}B_1A_2...A_nB_nA_{n+1}$ (thay đổi vai trò của A_1 với A_{n+2}) ta suy ra A_1 kề B_i với mọi *i*.

Tương tự, suy luận với đường đi $A_1B_1A_{n+2}B_2A_3B_3...A_nB_nA_{n+1}$ (thay đổi vai trò của A_2 với A_{n+2}) ta suy ra A_2 kề B_i với mọi *i*.

Bằng cách này, ta dễ dàng suy ra A_j kề B_i với mọi *i, j*. Thế nhưng khi đó mỗi đỉnh B_i có bậc bằng $n+2$, vô lý.

Ta có điều phải chứng minh.

Để kết thúc phép chứng minh, ta sẽ chứng minh bổ đề.

Gọi *G* là đồ thị có liên thông có *N* đỉnh và bậc mỗi đỉnh không nhỏ hơn *d*. Với *X* là đồ thị bất kỳ ta ký hiệu $V(X), E(X)$ tương ứng là tập các đỉnh, các cạnh của *X*.

Trước hết ta có nhận xét sau:
Nếu *P* là một đường đi trong *G*. Nếu tồn tại phần tử $x \in V(G)\setminus V(P)$ thì tồn tại $y \in V(G)\setminus V(P)$ kề với *P*.

Thật vậy, giả sử $x \in V(G) \setminus V(P)$ và $v \in V(P)$. Do tính liên thông, tồn tại đường đi *Q* từ *x* đến *v*. Lấy đỉnh *y* là đỉnh kề trước của *v* trong *Q* ta được điều phải chứng minh.

Bây giờ gọi $P = a...b$ là đường đi dài nhất trong *G*. Gọi *k* là độ dài của *P* và giả sử $k < \min\{2d, N-1\}$.

Nếu $ab \in E(G)$ thì $yzPabPz^*$ là đường đi trong *G* dài hơn *P* (đường đi từ *y* đến *z*, từ *z* theo *P* đến a, đến *b*, từ *b* theo *P* đến *z** là đỉnh kề với *z* trong *P*).

Nếu $ab \notin E(G)$, gọi $K \subset V(P)$ là tập các đỉnh trước của các đỉnh kề a trong *P* (với *P* được sắp thứ tự từ a đến *b*). Vì tất cả các đỉnh kề của a phải nằm trong *P*, ta có $|K| \geq d$. Vì $k < 2d$, ta có $\left|\left(V(P) \setminus K\right) \setminus b\right| < d$. Như vậy tồn tại $q \in K$ kề với *b*. Bây giờ ta xét chu trình $C = aPqbPq^*a$, khi đó *yzCz** (theo chiều bất kỳ của *C*) là đường đi trong *G* dài hơn *P*, mâu thuẫn.

Từ mâu thuẫn ở trên, ta suy ra $k \geq \min\{2d, N-1\}$. Bổ đề được chứng minh.

Cách 2. ***(Của Traum@ dựa trên ý tưởng của mnnn@)***

Nhắc lại một *cặp ghép (matching)* hay *tập cạnh độc lập* của một đồ thị *G* là một tập các cạnh không có đỉnh chung. *Cặp ghép cực đại (maximal matching)* của *G* là cặp ghép mà không thể mở rộng được nữa.

1. Gọi *S* là một cặp ghép cực đại của *G*. Nếu $|S| = 21$ thì ta có điều phải chứng minh.

2. Nếu $|S| \leq 20$, gọi *V(S)* là tập các đỉnh trong *S*.

3. Gọi *A* và *B* là hai đỉnh bất kì không thuộc *V(S)*. Vì *S* là một cặp ghép cực đại nên *A* và *B* không kề nhau.

4. Gọi $N(A), N(B)$ là tập các đỉnh kề với *A*, *B* trong *V(S)* tương ứng thì ta có $|N(A)| = |N(B)| = 20$, do bậc mỗi đỉnh là 20.

5. Với mỗi *C* thuộc *N(A)*, ta gọi đỉnh còn lại của cạnh chứa *C* trong *S* là *C(S)*. Đặt *M(A)* là tập các đỉnh *C(S)* trên thì ta có $|M(A)| = |N(A)| = 20$.

6. Nhận thấy rằng mỗi đỉnh trong *M(A)* không kề với *B*. Thật vậy nếu có *C(S)* trong *M(A)* kề với *B* thì ta có thể thay cạnh *C&C(S)* bởi 2 cạnh *A&C* và *C(S)&B*. Ta thu được một

cặp ghép mới lớn hơn *S*, điều này mâu thuẫn với giả thiết lớn nhất của *S*. Vậy $\left|M(A)\cap N(B)\right|=0$.

7. Bởi vì $\left|M(A)\right|=20$ và $\left|N(B)\right|=20$ suy ra $\left|V(S)\right|\geq\left|M(A)\right|+\left|N(B)\right|=40$, mà ở trên ta có $40\geq\left|V(S)\right|$ nên $\left|V(S)\right|=40$ hay $\left|S\right|=20$.

8. Từ 6. và 7, ta thấy rằng nếu *C* kề với *A* mà *C(S)* không kề với *A* thì ta có *C* kề với *B* và *S(C)* không kề với *B*.

9. Gọi *X(A)* là tập các đỉnh *C* trong *V(S)* mà *C* và *C(S)* đều kề với *A*. Tương tự ta có định nghĩa cho *X(B)*. Gọi *Y* là tập các đỉnh kề với cả *A* và *B* và *Z* là các đỉnh không kề với cả *A* và *B*. Theo các nhận xét 6, 7, 8, ta có $\left|Y\right|=\left|Z\right|$ và $\left|X(A)\right|=\left|X(B)\right|$ và $\left|X(A)\right|+\left|Y\right|=20$.

10. Ta có các điều sau:

a. Các đỉnh thuộc *X(A)* chỉ có thể kề với các đỉnh thuộc *X(A)* hoặc *Y*.

b. Các đỉnh thuộc *X(B)* chỉ có thể kề với các đỉnh thuộc *X(B)* hoặc *Y*.

c. Các đỉnh thuộc *Z* chỉ có thể kề với các đỉnh thuộc *Y*.

11. Các đỉnh thuộc *Z* chỉ kề với các đỉnh thuộc *Y*. Vì các đỉnh thuộc *Z* chỉ kề với các đỉnh thuộc Y nên ta có $20\left|Z\right|\leq 18\left|Y\right|$, mà $\left|Y\right|=\left|Z\right|$ nên $\left|Y\right|=\left|Z\right|=0$.

Vậy ta có $\left|X(A)\right|=\left|X(B)\right|=20$. Mà theo 10. thì các đỉnh thuộc *X(A)* chỉ kề với *A* và các đỉnh thuộc *X(A)*. Nên ta có 21 đỉnh gồm *A* và các đỉnh trong *X(A)* tạo thành một K_{21}. Tương tự ta có một K_{21} nữa tương ứng với *B*.

12. Bài toán được chứng minh xong.

Bình luận.

- Đây là một bài toán về sự tồn tại cặp ghép hoàn hảo *(perfect matching)* trong một đồ thị có bậc chẵn. Vì thế xu hướng sử dụng các suy luận liên quan đến cặp ghép là rất rõ ràng.
- Lời giải 1 được định hướng bởi điều kiện rất "*Dirac*" của đề bài. Chú ý là theo phiên bản cơ sở của định lý Dirac thì đồ thị trên *n* đỉnh có bậc của mỗi đỉnh không nhỏ hơn $\frac{n}{2}$ sẽ Hamilton, và như thế nếu *n* chẵn sẽ có gặp ghép hoàn hảo. Tuy

nhiên, nếu sử dụng đúng định lý Dirac thì không giúp ích. Ở đây, ta cần đến một biến thể của định lý Dirac, chính là bổ đề trong lời giải. Bổ đề này thực chất là một bài tập trong các tài liệu về lý thuyết Graph. Chứng minh nêu trên của bổ đề được tham khảo tại đây:

http://www.mpi-inf.mpg.de/departments/d1/teaching/ss11/graph_theory/exercises/Graph_Theory_sol_02.pdf

- Ngoài cách phát biểu như ở định lý Dirac nguyên thủy, ta còn có một cách phát biểu khác cho định lý Dirac, tổng quát hơn và rất gần với bổ đề:

  Định lý (Dirac). *Cho G là đồ thị 2-liên thông với bậc mỗi đỉnh không nhỏ hơn d. Khi đó G chứa chu trình độ dài ít nhất là* $\min\{2d, |V(G)|\}$.

  Có thể tham khảo về chứng minh định lý này tại:

  http://math.fau.edu/locke/Dirac.htm

- Lời giải 2 cũng khá tự nhiên, theo hướng chứng minh nếu không tồn tại cặp ghép hoàn chỉnh thì G phải là hợp của 2 phiên bản K_{21} rời nhau. Cũng như trong lời giải 1, việc sử dụng nguyên lý cực hạn (cặp ghép cực đại) đem lại những thông tin bổ sung quan trọng (*A*, *B* thuộc $V(G)\setminus S$ không kề nhau) dẫn đến lời giải bài toán.

- Ngoài hai cách giải trên còn một cách giải khác sử dụng đến một kết quả về cặp ghép hoàn hảo là định lý Tutte sau:

  Định lý Tutte. *Đồ thị G = (V, E) có cặp ghép hoàn hảo khi và chỉ khi với mọi tập con U của V, số thành phần liên thông có số đỉnh lẻ trong đồ thị con cảm sinh bởi* $V\setminus U$ *nhỏ hơn hay bằng* $|U|$.

  Chứng minh định lý Tutte có thể tham khảo tại:

  http://en.wikipedia.org/wiki/Tutte_theorem

  Lời giải bài 6 sử dụng định lý Tutte tham khảo tại:

  http://forum.mathscope.org/showthread.php?t=30511&page=3

- Đây là một bài toán khó đối với các thí sinh không quen thuộc với lý thuyết đồ thị, nhưng đối với các bạn đã biết về cặp ghép hoàn hảo hoặc định lý *Dirac* (đặc biệt là phương pháp suy luận đường đi dài nhất – *longest path argument*) thì bài này không quá khó. Đây là điểm khiến chúng tôi đánh giá tính phân loại của bài này không cao bằng bài 2, và không những thế, tạo nhiều lợi thế cho những bạn "biết đúng chỗ".