MATH.VN
math for Vietnamese

BAN BIÊN TẬP DIỄN ĐÀN MATH.VN

LỜI GIẢI ĐỀ THI

HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA

NĂM HỌC 2010 - 2011

THÁNG 01 - 2011

BAN BIÊN TẬP DIỄN ĐÀN TOÁN HỌC MATH.VN

LỜI GIẢI
ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA
NĂM HỌC 2010 – 2011

THÁNG 01 – 2011

LỜI NÓI ĐẦU

Diễn đàn toán học Math.vn chưa đầy hai tuổi, nhưng những đóng góp của các thành viên trên diễn đàn với cộng đồng đã dần được khẳng định Diễn đàn là nơi trao đổi hữu ích của các thầy cô giáo, của các em học sinh và những bạn yêu toán ... Đã có nhiều bài giảng hay, đã có những lời giải đẹp cho những bài toán khó, đã là nơi gặp gỡ trao đổi nhiều ý tưởng độc đáo cho những vấn đề tưởng chừng đơn giản ... Nhìn lại hơn một năm hoạt động, chúng tôi thấy đã có những dấu ấn:

- Tổ chức tường thuật trực tiếp đại hội Toán học thế giới ở Ấn Độ, nơi tài năng và con người Việt Nam được khẳng định bằng giải thưởng Fields của Giáo sư Ngô Bảo Châu. Những thông tin của Math.vn đã được nhiều trang web trích đăng.

- Tổ chức thi thử năm 2010 với 24 đề chất lượng được đa phần học sinh và thầy cô đánh giá cao.

- Tổ chức giải đề thi đại học khối A, B, D môn Toán có nhiều lời giải hay được công bố sớm nhất.

Phát huy tinh thần đó, nhân kỳ thi chọn học sinh giỏi Quốc gia Việt Nam 2011, diễn đàn tổ chức giải đề VMO 2011. Chúng tôi tin tưởng đây là một tài liệu tốt cho các bạn học sinh đang và sẽ tham gia các cuộc thi chọn học sinh giỏi tham khảo.

BAN BIÊN TẬP DIỄN ĐÀN MATH.VN

MỤC LỤC

BÀI SỐ 1: BẤT ĐẲNG THỨC

Bài 1. *Cho x là số thực dương và n là số nguyên dương. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{x^n(x^{n+1}+1)}{x^n+1} \leqslant \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải 1. Ta sử dụng phương pháp quy nạp theo n. Với $n=1$, bất đẳng thức của ta trở thành

$$\frac{x(x^2+1)}{x+1} \leqslant \left(\frac{x+1}{2}\right)^3.$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$x(x^2+1) = \frac{1}{2}\cdot(2x)\cdot(x^2+1) \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{(2x)+(x^2+1)}{2}\right]^2 = \frac{(x+1)^4}{8}.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{x(x^2+1)}{x+1} \leqslant \frac{\frac{(x+1)^4}{8}}{x+1} = \left(\frac{x+1}{2}\right)^3.$$

Và như vậy, bất đẳng thức đã cho đúng với $n=1$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng nếu bất đẳng thức đúng cho $n=k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) thì nó cũng sẽ đúng với $n=k+1$. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+1} \geqslant \frac{x^k(x^{k+1}+1)}{x^k+1},$$

suy ra

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2(k+1)+1} = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+1} \geqslant \left(\frac{x+1}{2}\right)^2\cdot\frac{x^k(x^{k+1}+1)}{x^k+1}.$$

Sử dụng đánh giá này, ta thấy rằng việc chứng minh có thể được đưa về chứng minh kết quả sau

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\cdot\frac{x^k(x^{k+1}+1)}{x^k+1} \geqslant \frac{x^{k+1}(x^{k+2}+1)}{x^{k+1}+1}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{(x+1)^2}{4x} \geqslant \frac{(x^{k+2}+1)(x^k+1)}{(x^{k+1}+1)^2},$$

hay là
$$\frac{(x+1)^2}{4x}-1 \geqslant \frac{(x^{k+2}+1)(x^k+1)}{(x^{k+1}+1)^2}-1.$$
Do $(x+1)^2-4x=(x-1)^2$ và $(x^{k+2}+1)(x^k+1)-(x^{k+1}+1)^2=x^k(x-1)^2$ nên ta có thể thu gọn bất đẳng thức lại thành
$$\frac{(x-1)^2}{4x} \geqslant \frac{x^k(x-1)^2}{(x^{k+1}+1)^2},$$
tương đương
$$(x-1)^2\left[(x^{k+1}+1)^2-4x^{k+1}\right] \geqslant 0.$$
Bất đẳng thức này đúng vì theo AM-GM, ta có $(x^{k+1}+1)^2 \geqslant 4x^{k+1}$.

Như vậy, ta đã chứng minh được nếu khẳng định bài toán đúng cho $n=k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) thì nó cũng đúng cho $n=k+1$. Từ đây, kết hợp với việc đã xác lập được tính đúng đắn của bất đẳng thức cần chứng minh cho $n=1$, ta suy ra nó đúng với mọi số nguyên dương n (theo nguyên lý quy nạp). Ngoài ra, có thể thấy được trong suốt quá trình chứng minh, dấu đẳng thức chỉ xảy ra tại một điểm duy nhất $x=1$. □

Lời giải 2. Ta sẽ chứng minh kết quả tổng quát hơn: *Với mọi a, $b>0$, thì*
$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2n+1} \geqslant \frac{a^n b^n(a^{n+1}+b^{n+1})}{a^n+b^n}. \tag{1}$$
Kết quả bài toán đã cho là trường hợp riêng khi $a=x$ và $b=1$.

Dễ thấy (1) là một bất đẳng thức thuần nhất cho hai biến a, b, vì vậy không mất tính tổng quát ta có thể chuẩn hóa cho $a+b=2$. Khi đó (1) có thể viết lại dưới dạng $f_n(a,b) \geqslant 0$, trong đó
$$f_n(a,b)=a^n+b^n-a^n b^n(a^{n+1}+b^{n+1}).$$
Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có
$$\begin{aligned}ab(a^{n-1}+b^{n-1})(a^{n+1}+b^{n+1}) &\leqslant \left[\frac{ab(a^{n-1}+b^{n-1})+(a^{n+1}+b^{n+1})}{2}\right]^2\\ &= \frac{(a+b)^2(a^n+b^n)^2}{4}=(a^n+b^n)^2,\end{aligned}$$
từ đó suy ra
$$a^{n+1}+b^{n+1} \leqslant \frac{(a^n+b^n)^2}{ab(a^{n-1}+b^{n-1})}.$$

Sử dụng đánh giá này, ta thu được

$$\begin{aligned} f_n(a,b) &\geqslant a^n+b^n-\frac{a^{n-1}b^{n-1}(a^n+b^n)^2}{a^{n-1}+b^{n-1}} \\ &= \frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}\left[a^{n-1}+b^{n-1}-a^{n-1}b^{n-1}(a^n+b^n)\right] \\ &= \frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}f_{n-1}(a,b). \end{aligned} \tag{2}$$

Từ (2), thực hiện các đánh giá liên tiếp, ta có

$$\begin{aligned} f_n(a,b) &\geqslant \frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}f_{n-1}(a,b) \qquad (1)\\ &\geqslant \frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}\cdot\frac{a^{n-1}+b^{n-1}}{a^{n-2}+b^{n-2}}f_{n-2}(a,b) \\ &\geqslant \cdots \geqslant \frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}\cdot\frac{a^{n-1}+b^{n-1}}{a^{n-2}+b^{n-2}}\cdots\frac{a^2+b^2}{a^1+b^1}f_1(a,b) \\ &= \frac{a^n+b^n}{a+b}f_1(a,b). \qquad (3) \end{aligned}$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$\begin{aligned} f_1(a,b) &= a+b-ab(a^2+b^2) = a+b-\frac{1}{2}\cdot(2ab)\cdot(a^2+b^2) \\ &\geqslant a+b-\frac{1}{2}\left[\frac{(2ab)+(a^2+b^2)}{2}\right]^2 = a+b-\frac{(a+b)^4}{8} = 0. \end{aligned}$$

Do đó, kết hợp với (3), ta suy ra $f_n(a,b)\geqslant 0$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. □

Lời giải 3. Ta chứng minh bổ đề sau

Bổ đề. *Cho a, b là hai số thực dương. Khi đó, với mọi $n\geqslant 1$, ta có*

$$(ab)^{\frac{n(n-1)}{2}}(a^n+b^n)\leqslant 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n^2}. \tag{4}$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a+b=2$ và đặt $a=1+x$, $b=1-x$ với $0\leqslant x<1$. Bất đẳng thức (4) có thể viết lại thành

$$\left[(1+x)(1-x)\right]^{\frac{n(n-1)}{2}}\left[(1+x)^n+(1-x)^n\right]\leqslant 2,$$

hay tương đương

$$g(x)=(1+x)^{\frac{n(n+1)}{2}}(1-x)^{\frac{n(n-1)}{2}}+(1+x)^{\frac{n(n-1)}{2}}(1-x)^{\frac{n(n+1)}{2}}\leqslant 2.$$

Ta có

$$
\begin{aligned}
&\left[(1+x)^{\frac{n(n+1)}{2}}(1-x)^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]' = \\
&\quad = \frac{n(n+1)}{2}(1+x)^{\frac{n(n+1)}{2}-1}(1-x)^{\frac{n(n-1)}{2}} - \frac{n(n-1)}{2}(1+x)^{\frac{n(n+1)}{2}}(1-x)^{\frac{n(n-1)}{2}-1} \\
&\quad = \frac{n}{2}(1+x)^{\frac{n(n+1)}{2}-1}(1-x)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}\left[(n+1)(1-x)-(n-1)(1+x)\right] \\
&\quad = n(1+x)^{\frac{n(n+1)}{2}-1}(1-x)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}(1-nx)
\end{aligned}
$$

và

$$
\begin{aligned}
&\left[(1+x)^{\frac{n(n-1)}{2}}(1-x)^{\frac{n(n+1)}{2}}\right]' = \\
&\quad = \frac{n(n-1)}{2}(1+x)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}(1-x)^{\frac{n(n+1)}{2}} - \frac{n(n+1)}{2}(1+x)^{\frac{n(n-1)}{2}}(1-x)^{\frac{n(n+1)}{2}-1} \\
&\quad = \frac{n}{2}(1+x)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}(1-x)^{\frac{n(n+1)}{2}-1}\left[(n-1)(1-x)-(n+1)(1+x)\right] \\
&\quad = -n(1+x)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}(1-x)^{\frac{n(n+1)}{2}-1}(1+nx),
\end{aligned}
$$

do đó

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= n(1+x)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}(1-x)^{\frac{n(n-1)-1}{2}}\left[(1+x)^n(1-nx)-(1-x)^n(1+nx)\right] \\
&= n(1-x^2)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}(1+x)^n(1+nx)\left[\frac{1-nx}{1+nx}-\frac{(1-x)^n}{(1+x)^n}\right].
\end{aligned}
$$

Từ đây ta thấy $g'(x)$ có cùng dấu với $h(x) = \frac{1-nx}{1+nx} - \frac{(1-x)^n}{(1+x)^n}$. Tính đạo hàm của $h(x)$, ta được

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{2n(1-x)^{n-1}}{(1+x)^{n+1}} - \frac{2n}{(1+nx)^2} = \frac{2n(1-x^2)^{n-1}}{(1+x)^{2n}} - \frac{2n}{(1+nx)^2} \\
&\leqslant \frac{2n}{(1+x)^{2n}} - \frac{1}{(1+nx)^2} = 2n\left[\frac{1}{(1+x)^n} - \frac{1}{1+nx}\right]\left[\frac{1}{(1+x)^n} + \frac{1}{1+nx}\right] \leqslant 0
\end{aligned}
$$

do theo bất đẳng thức Bernoulli thì $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ (chú ý rằng $n \geqslant 1$).

Như vậy, $h(x)$ là hàm nghịch biến trên $[0,\ 1)$. Suy ra $h(x) \leqslant h(0) = 0$, $\forall x \in [0,\ 1)$. Mà $g'(x)$ có cùng dấu với $h(x)$ nên ta cũng có $g'(x) \leqslant 0$ với mọi $x \in [0,\ 1)$. Do vậy $g(x)$ là hàm nghịch biến trên $[0,\ 1)$. Từ lý luận này, ta suy ra $g(x) \leqslant g(0) = 2$, $\forall x \in [0,\ 1)$. Bổ đề được chứng minh. ■

Quay trở lài bài toán. Theo (4), ta có

$$
(ab)^{\frac{k(k-1)}{2}}(a^k+b^k) \leqslant 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k^2}, \quad \forall a,\ b > 0,\ k \geqslant 1, \tag{5}
$$

suy ra

$$a+b \geqslant 2(ab)^{\frac{k-1}{2k}}\left(\frac{a^k+b^k}{2}\right)^{\frac{1}{k^2}}. \tag{6}$$

Trong (6), cho $a=x^n$, $b=1$ và $k=\frac{n+1}{n}>1$, ta được

$$x^n+1 \geqslant 2x^{\frac{n}{2(n+1)}}\left(\frac{x^{n+1}+1}{2}\right)^{\frac{n^2}{(n+1)^2}}.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{x^n(x^{n+1}+1)}{x^n+1} \leqslant \frac{x^n(x^{n+1}+1)}{2x^{\frac{n}{2(n+1)}}\left(\frac{x^{n+1}+1}{2}\right)^{\frac{n^2}{(n+1)^2}}} = x^{\frac{n(2n+1)}{2(n+1)}}\left(\frac{x^{n+1}+1}{2}\right)^{\frac{2n+1}{(n+1)^2}}.$$

Như thế, phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được rằng

$$x^{\frac{n(2n+1)}{2(n+1)}}\left(\frac{x^{n+1}+1}{2}\right)^{\frac{2n+1}{(n+1)^2}} \leqslant \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$x^{\frac{n(n+1)}{2}}(x^{n+1}+1) \leqslant 2\left(\frac{x+1}{2}\right)^{(n+1)^2}.$$

Đây chính là kết quả của bất đẳng thức (5) áp dụng cho $a=x$, $b=1$ và $k=n+1$. Bài toán được chứng minh xong. □

Nhận xét. Có thể thấy ý tưởng tự nhiên nhất khi giải bài này chính là sử dụng phép quy nạp. Lời giải 3 tuy dài và phức tạp nhưng nó cũng có ý nghĩa riêng của nó. Thật vậy, qua lời giải này ta có thể thấy được bất đẳng thức đã cho vẫn đúng cho trường hợp n là số thực tùy ý không nhỏ hơn 1. Kết quả này không thể suy ra được từ hai lời giải bằng quy nạp 1 và 2.

BÀI SỐ 2: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Bài 2. *Cho dãy* $\{x_n\}$ *được xác định bởi*

$$x_1 = 1 \text{ và } x_n = \frac{2n}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n-1} x_i \text{ với mọi } n \geqslant 2.$$

Chứng minh rằng dãy $y_n = x_{n+1} - x_n$ *có giới hạn hữu hạn khi* $n \to +\infty$.

Lời giải 1. Từ giả thiết, ta suy ra với mọi $n \geqslant 1$, thì

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i = \frac{(n-1)^2}{2n} x_n.$$

Do đó

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{2(n+1)}{n^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{2(n+1)}{n^2}\left(x_n + \sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) \\ &= \frac{2(n+1)}{n^2}\left[x_n + \frac{(n-1)^2}{2n}x_n\right] = \frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3}x_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Sử công thức truy hồi vừa tìm được này kết hợp với phép quy nạp, ta sẽ chứng minh

$$x_n \leqslant 4(n-1), \quad \forall n \geqslant 2. \tag{2}$$

Do $x_2 = \frac{2\cdot 2}{(2-1)^2}x_1 = 4$ nên dễ thấy (2) đúng với $n = 2$. Giả sử (2) đúng với $n = k \geqslant 2$, khi đó ta có

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{(k+1)(k^2+1)}{k^3}x_k \leqslant \frac{(k+1)(k^2+1)}{k^3}\cdot 4(k-1) \\ &= \frac{4(k^2-1)(k^2+1)}{k^3} = \frac{4(k^4-1)}{k^3} = 4k - \frac{4}{k^3} < 4k, \end{aligned}$$

suy ra (2) cũng đúng với $n = k+1$. Từ đây, áp dụng nguyên lý quy nạp, ta có (2) đúng với mọi $n \geqslant 2$.

Bây giờ, ta sẽ đi chứng minh bài toán đã cho, cụ thể ta sẽ chỉ ra rằng y_n là dãy tăng và bị chặn trên.

- *Chứng minh* y_n *tăng*. Theo (1), ta có

$$y_n = x_{n+1} - x_n = \frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3}x_n - x_n = \frac{n^2+n+1}{n^3}x_n.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
y_{n+1}-y_n &= \frac{(n+1)^2+(n+1)+1}{(n+1)^3}x_{n+1}-\frac{n^2+n+1}{n^3}x_n\\
&= \frac{n^2+3n+3}{(n+1)^3}\cdot\frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3}x_n-\frac{n^2+n+1}{n^3}x_n\\
&= \frac{x_n}{n^3}\left[\frac{(n^2+3n+3)(n^2+1)}{(n+1)^2}-(n^2+n+1)\right]\\
&= \frac{x_n}{n^3}\left\{\left[1+\frac{n+2}{(n+1)^2}\right](n^2+1)-(n^2+n+1)\right\}\\
&= \frac{x_n}{n^3}\left[\frac{(n+2)(n^2+1)}{(n+1)^2}-n\right]=\frac{2x_n}{n^3(n+1)^2}>0.
\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ y_n là dãy tăng.

- *Chứng minh y_n bị chặn trên.* Sử dụng (2), với mọi $n \geqslant 2$, ta có

$$y_n=\frac{n^2+n+1}{n^3}x_n\leqslant\frac{n^2+n+1}{n^3}\cdot 4(n-1)=\frac{4(n^3-1)}{n^3}<4.$$

Do đó $y_1<y_2<\cdots<y_n<4$, hay nói cách khác, dãy y_n bị chặn trên bởi 4.

Từ hai kết quả vừa chứng minh trên, ta dễ dàng suy ra kết quả cần chứng minh. □

Nhận xét. Khi làm bài toán này, có lẽ các bạn học sinh đều không khó để tìm ra các tính chất

- $x_{n+1}=\frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3}x_n$.
- $y_n=\frac{n^2+n+1}{n^3}x_n$.
- y_n là dãy tăng.

Và khi đó, công việc còn lại sẽ chỉ là tìm ra một chặn trên cho y_n. Có thể nói đây chính là yếu tố quan trọng nhất của bài toán. Việc tìm ra đánh giá (2) có thể được giải thích như sau: Ta biết rằng hàm phân thức $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ với $g(x)$, $h(x)$ là các đa thức đồng bậc và $h(x)>0$ thì bị chặn trên bởi một hằng số. Mà quan sát công thức truy hồi của y_n, ta thấy rằng $\frac{n^2+n+1}{n^3}$ là hàm phân thức theo n với n^2+n+1 là đa thức bậc 2 và n^3 là đa thức bậc 3. Từ đây ta chợt có một ý tưởng là đánh giá x_n với hàm đa thức bậc nhất theo n (chiều $\leqslant$) vì khi đó y_n sẽ bị chặn trên bởi một hàm phân thức với tử là đa thức bậc 3 và mẫu cũng là đa thức bậc 3, và như thế theo tính chất vừa nhắc lại ở trên, ta biết chắc rằng y_n sẽ bị chặn trên bởi một hằng số.

Với ý tưởng như vậy, ta mong muốn có một đánh giá dạng $x_n \leqslant an+b$. Ngoài ra, từ công thức truy hồi trên của x_n, ta cũng nghĩ đến việc thiết lập đánh giá này bằng quy nạp (vì như thế là đơn giản hơn cả). Như thế, ta cần phải chọn các số thực a, b sao cho

$$\frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3}(an+b) \leqslant a(n+1)+b.$$

Thực hiện phép khai triển, ta viết được bất đẳng thức này lại thành

$$-(a+b)n(n+1)-b \geqslant 0.$$

Để điều này đúng với mọi $n \geqslant 1$, ta cần có $a+b \leqslant 0$ và $2(a+b)+b \leqslant 0$. Và tất nhiên, để đơn giản, ta chọn ngay $a+b=0$ và $b<0$, tức $a=-b>0$. Khi đó, ta thu được bất đẳng thức dạng

$$x_n \leqslant a(n-1).$$

Ta thấy rằng nếu có a sao cho đánh giá này đúng với một số n_0 nào đó thì đánh giá cũng sẽ đúng với mọi $n \geqslant n_0$ (do lý luận trên). Và như thế, ta chỉ cần xét một vài giá trị n nhỏ và chọn a sao cho bất đẳng thức đúng với các giá trị đó là được. Ngoài ra, ta thấy bất đẳng thức sẽ không được thỏa mãn với $n=1$, nên ta sẽ xét với $n=2$. Khi đó, bất đẳng thức trở thành $4 \leqslant a$. Và rất đơn giản, ta nghĩ ngay đến việc chọn $a=4$. Đây chính là nguồn gốc của việc thiết lập (2).

Lời giải 2. Áp dụng giả thiết đã cho ở đề bài, ta có

$$\frac{n^2x_{n+1}}{2(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} x_k = x_n + \sum_{k=1}^{n-1} x_k = x_n + \frac{(n-1)^2x_n}{2n} = \frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3}x_n. \quad (3)$$

Từ đó suy ra

$$x_{n+1}-x_n = \frac{n^2+n+1}{n^2}u_n \text{ với } u_n = \frac{x_n}{n}. \quad (4)$$

Do (3) nên ta có

$$u_{n+1} = \frac{n^2+1}{n^2}u_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)u_n.$$

Mặt khác, dễ thấy $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên ta cũng có $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Vì vậy, ta có thể đặt $\ln u_n = v_n$. Khi đó

$$v_{n+1} = v_n + \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) > v_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ là dãy tăng. Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức cơ bản $\ln(1+x) < x$, $\forall x > 0$, ta thu được

$$v_{n+1} < v_n + \frac{1}{n^2}.$$

Từ đây ta có

$$v_n < v_1 + 1 + \sum_{k=2}^{(n-1)^2} \frac{1}{k^2} < v_1 + 1 + \sum_{k=2}^{(n-1)^2} \frac{1}{k(k-1)} = v_1 + 2 - \frac{1}{n-1}, \quad \forall n \geqslant 2.$$

Điều này chứng tỏ $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ bị chặn, hơn nữa do $\{v_n\}$ là dãy tăng nên ta suy ra được $\{v_n\}$ hội tụ. Vì $u_n = e^{v_n}$ và hàm $f(x) = e^x$ là hàm liên tục nên $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ cũng hội tụ. Từ lý luận này kết hợp với $\lim \frac{n^2+n+1}{n^2} = 1$ và (4), ta suy ra điều phải chứng minh. $\square$

BÀI SỐ 3: HÌNH HỌC PHẲNG

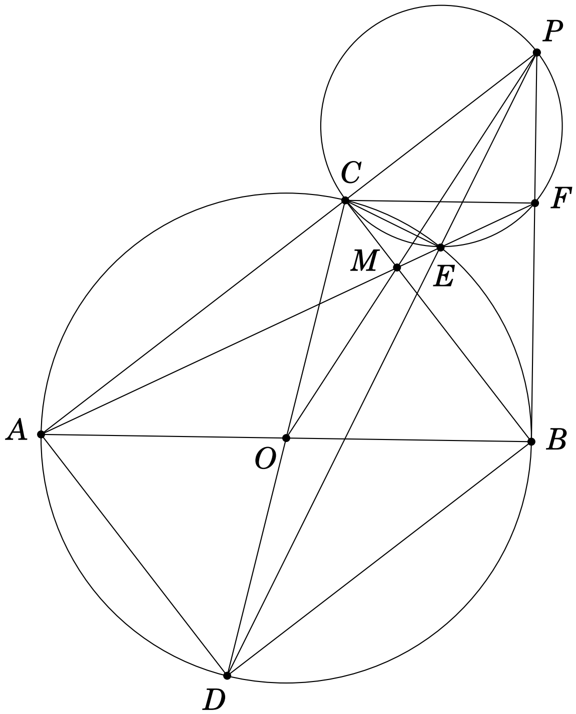
Bài 3. *Cho đường tròn (O), đường kính AB. P là một điểm trên tiếp tuyến của (O) tại B ($P \neq B$). Đường thẳng AP cắt (O) lần thứ hai tại C. D là điểm đối xứng của C qua O. Đường thẳng DP cắt (O) lần thứ hai tại E.*

(a) Chứng minh rằng AE, BC, PO đồng quy tại M.

(b) Tìm vị trí của điểm P để diện tích tam giác AMB là lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó theo R là bán kính của (O).

Lời giải. Trước hết xin nhắc lại không chứng minh bổ đề sau

Bổ đề. *Cho hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$. Giả sử AC cắt BD tại O và AD cắt BC tại I. Khi đó, OI đi qua trung điểm AB và CD.*



Quay trở lại bài toán:

(a) Gọi F là giao điểm của AE và BP. Từ tính chất góc nội tiếp và đường cao của tam giác vuông ta dễ thấy $\angle AEC = \angle ABC = \angle BPC$, vậy tứ giác $CPFE$ nội tiếp. Từ đó suy ra

$$\angle CPE = \angle CFE, \quad \angle PCE = \angle EFB.$$

Cộng các đẳng thức góc với chú ý $\angle CEP = 90^\circ$, ta suy ra

$$90^\circ = \angle CPE + \angle PCE = \angle CFE + \angle EFB = \angle CFB,$$

hay $CF \perp PB$, và do đó $CF \parallel AB$.

Gọi M là giao điểm của CB và AE. Áp dụng bổ đề cho hình thang $ABFC$, ta có MP đi qua trung điểm AB hay MP đi qua O. Vậy AE, BC, OP đồng quy tại M, đó là điều phải chứng minh.

(b) Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác APO với C, M, B thẳng hàng, ta dễ thấy

$$\frac{OM}{OP} = \frac{CA}{CA + 2CP}.$$

Từ đó ta có

$$\frac{S_{MAB}}{S_{PAB}} = \frac{OM}{OP} = \frac{CA}{CA + 2CP}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} S_{MAB} &= S_{PAB} \cdot \frac{CA}{CA + 2CP} \geqslant S_{PAB} \cdot \frac{CA}{2\sqrt{2}BC} \\ &= \frac{BC \cdot PA}{2} \cdot \frac{CA}{2\sqrt{2}BC} = \frac{4R^2}{4\sqrt{2}} = \frac{R^2}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy khi $PB = \sqrt{2}R$. □

BÀI SỐ 4: TOÁN RỜI RẠC

Bài 4. *Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ có các cạnh và hai đường chéo AC, AD có độ dài không vượt quá $\sqrt{3}$. Trong ngũ giác lồi lấy* 2011 *điểm phân biệt bất kì. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn đơn vị có tâm nằm trên cạnh của ngũ giác lồi $ABCDE$ và chứa ít nhất* 403 *điểm trong số* 2011 *điểm đã cho.*

Lời giải. Trước hết ta chứng minh bổ đề sau

Bổ đề. *Cho điểm I nằm trong tam giác XYZ có độ dài các cạnh nhỏ hơn $\sqrt{3}$. Khi đó,*

$$\min\{IX, IY, IZ\} < 1.$$

Chứng minh. Thật vậy, vì $\angle XIY + \angle YIZ + \angle ZIX = 360^\circ$ nên trong ba góc $\angle XIY$, $\angle YIZ$, $\angle ZIX$ phải có một góc không nhỏ hơn 120°. Giả sử $\angle XIY \geqslant 120^\circ$ thì trong tam giác $\triangle IXY$, theo định lý cosin ta có

$$\begin{aligned} 3 \geqslant XY^2 &= IX^2 + IY^2 - 2IX \cdot IY \cos\angle XIY \\ &\geqslant IX^2 + IY^2 + IX \cdot IY \geqslant 3\min\{IX^2, IY^2\}. \end{aligned}$$

Từ đây đưa đến $\min\{IX, IY\} \leqslant 1$. Bổ đề được chứng minh. ■

Quay trở lại bài toán. Theo giả thiết thì các tam giác $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ADE$ đều có cả ba cạnh nhỏ hơn $\sqrt{3}$, mà mỗi điểm trong 2011 điểm gieo trong ngũ giác $ABCDE$ đều thuộc miền trong của một trong ba tam giác này nên theo bổ đề, mỗi điểm phải cách một đỉnh nào đó của ngũ giác một khoảng không lớn hơn 1. Theo nguyên lý Dirichlet, có một đỉnh của ngũ giác có khoảng cách không lớn hơn 1 đến ít nhất $\left\lceil \frac{2011}{5} \right\rceil = 403$ điểm. Từ đó ta có điều phải chứng minh. □