HOÁN VỊ – CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

I. Tóm tắt lý thuyết :

1. Định nghĩa :

☞ Chỉnh hợp :

☞ Hoán vị

☞Tổ hợp

2. Nhị thức Newtơn

☞ $(a+b)^n = ?$

☞ $(a-b)^n = ?$

☞ Tính chất : $C_n^k = C_n^{k-n}$

$$C_{n+1}^{k+1} = \frac{n+1}{k+1} C_n^k \qquad C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

Dang 1: Giải phương trình — Bất phương trình — Hệ phương trình có liên quan đến $\mathrm{A}_n^k, \mathrm{P}_n, \mathrm{C}_n^k$

Dang 2: Chứng minh 1 đẳng thức liên quan đến $\mathrm{A}_n^k, \mathrm{P}_n, \mathrm{C}_n^k$

Dựa vào đặc trưng của đẳng thức, chúng ta chọn các cách giải sau :

Cách 1: Dùng công thức cơ bản sau :

$$\mathrm{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}\ ;\ \mathrm{P}_n = n!\ ;\ C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Cách 2 : Sử dung tinhd chất : $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

Cách 3 :

Khai triển một biểu thức hoặc hai biểu thức bằng hai cách khác nhau. Sau đó đồng nhất hệ số

Nhận dạng : khi vế trái của đẳng thức là tích của hai tổ hợp $C_n^k . C_m^n$ hoặc bình phương một tổ hợp : $\left(C_n^k\right)^2$

Cách 4 Dùng khai triển $(a+bx)^n$; $(a+bx)^{2n}$. Sau đó chọn a, n, x thích hợp

Nhận dạng bài toán để chọn cách giải dựa vào các đại lượng sau :

1. Vế trái của đẳng thức chứa C_n^0 và C_n^n (hoặc C_{2n}^0 và C_{2n}^{2n}) đồng thời mỗi hệ số của tổ hợp là 1, khi đó ta khai triển $(1+x)^n ; (1+x)^{2n}$. Sau đó chọn x = 1 nếu vế trái của đẳng thức không đổi dấu; hoặc x = -1 nếu có đổi dấu

2. Vế trái của đẳng thức chứa C_n^0 và C_n^n (hoặc C_{2n}^0 và C_{2n}^{2n}) đồng thời mỗi hệ số của tổ hợp là a^{n-k} thì ta chọn khai triển $(1+x)^n ; (1+x)^{2n}$. Sau chọn $x = \pm a$

3. Vế trái của đẳng thức chứa C_n^0 và C_n^n (hoặc C_{2n}^0 và C_{2n}^{2n}) đồng thời mỗi hệ số của tổ hợp chứa $a^{n-k} b^k$ thì ta chọn khai triển $(a+x)^n ; (a+x)^{2n}$ hoặc $(a+bx)^n ; (a+bx)^{2n}$, sao cho :

chọn $\left\langle \begin{array}{l} x = \pm b \text{ với } (a+x)^n \\ x = \pm 1 \text{ với } (a+bx)^n \end{array} \right.$

4. Nếu bài toán không có đặc trưng trên ta phân tích rồi đưa về 2 tổng

Cách 5 : Dùng đạo hàm cấp 1, cấp 2

1) Các bước giải :

+ B1: Chọn nhị thức Newton để khai triển

+ B2 : Lờy đạo hàm cấp 1, cấp 2 ở 2 vế của khai triển

+ B3 : Chọn a, b, x thích hợp

2) Nhận dạng đặc trưng của bài toán để chọn cách giải nhị thức :

a./ Vế trái của đẳng thức mất C_n^0 hoặc C_n^n $\left(C_{2n}^0 \text{ hoặc } C_{2n}^{2n}\right)$ đồng thời trong mỗi tổ hợp, hệ số đi với nó tăng hoặc giảm đều 1 đơn vị thì ta dùng đạo hàm cấp 1

b./ Vế trái của đẳng thức mất C_n^0 hoặc C_n^n $\left(C_{2n}^0 \text{ hoặc } C_{2n}^{2n}\right)$ đồng thời trong mỗi tổ hợp hệ số đi với nó là tích hai số nguyên liên tiếp thì ta dùng đạo hàm cấp 2

c./ Việc chọn đúng nhị thức Newton bằng cách dựa vào đặc trưng của cách 4, sau khi đã loại bỏ các đặc trưng của hàm

3) Chú ý : Một số bài toán chưa có sẵn đặc trưng mà ta phải phân tích để đưa về bài toán có đặc trưng rồi mới giải

Cách 6: Dùng tích phân

1) Các bước giải :

+ B_1 : Chọn khai triển nhị thức Newton

+ B_2 : Lấy tích phân hai vế với cận thích hợp

+ B_3 : tính tích phân hai vế $\Rightarrow$ kết quả

2) Nhận dạng đặc trưng của bài toán để chọn cácnh giải

a./ Vế trái của đẳng thức có chứa C_n^0 và C_n^n (hoặc C_{2n}^0 và C_{2n}^{2n}) đồng thời mẫu số trong mỗi tổ hợp tăng hoặc giảm một đơn vị

b./ Mỗi hệ số trong tổ hợp có dạng : $b^{n-k} - a^{n-k}$ ta chọn cận tích phân là $\int_a^b$

c./ Chọn đúng nhị thức Newton dựa vào cách 4, sau khi đã loại đi các đặc trưng của tích phân

Dạng 3: Tính tổng một biểu thức chứa C_n^k

* nhận xét :

1./ Tính tổng một biểu thức có chứa C_n^k hay chứng minh một đẳng thức có chứa C_n^k gần giống nhau.

2./ Sự khác nhau giữa chúng là ở dạng 2, biết trước được kết quả(tức là đều phải chứng minh), còn ở dạng 3 chưa biết trước được kết quả.

3./ Vì thế cách nhận dạng đặc trưng của bài toán để chọn cách giải giống như các đặc trưng của dạng 2

Do tính phổ dụng nên chúng ta chỉ đề cập đến 3 cách giải ở dạng này là cách 4, cách 5 và cách 6 ở dạng 2.

Cách 4: Khai triển nhị thức Newton $(a+b)^n$; $(a+bx)^n$. Sau đó chọn a,b, x thích hợp

Dạng 4 : Tìm một số hạng hoặc hệ số của số hạng .
Phương pháp :
☞Viết hệ thức newton dưới dạng tổng quát : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-1} b^k$
☞Tính tổng số mũ của xvà y
☞ Dựa vào giả thiết để tính k . Từ đó suy ra số hoặc hệ số cần tìm
Dạng 5 : Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển .
Phương pháp :
☞Khai triển nhị thức newton dưới dạng tổng quát .
☞Đặt a_k là hệ số tổng quát của số hạng trong khai triển
☞ xét tính đơn điệu của dãy $\{a_k\}$. Từ đó để suy ra (a_k)max
Chú ý : để xét tính đơn điệu của $\{a_k\}$với $k \in N$ ta sử dụng :

- xét tỷ số : $\frac{a_{k+1}}{a_k}$
- Xét hiệu : $a_{k+1} - a_k$

Dang 1: Giải phương trình — Bất phương trình — Hệ phương trình có liên quan đến A_n^k, P_n, C_n^k

Phương pháp : Tiến hành theo các bước sau:

Bước 1 : Đặt điều kiện có nghĩa là : $\begin{cases} n \geq k \\ n, k \in N \end{cases}$

Bước 2: Dùng các công thức sau để rút gọn :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.P_n = n!\ ,\ C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Bước : Sau khi rút gọn được phương trình — bất phương trình — hệ phương trình đã cho về phương trình — bất phương trình — hệ phương trình cơ bản. Giải tìm nghiệm và chọn nghiệm thích hợp ở điều kiện ở bước 1

Bước 4 : Kết luận

Chú ý: Đối với hệ phương trình ta có thể giải theo phương pháp đặt ẩn phụ

Bài 1:

Giải các phương trình sau

a) $C_n^3 = 5C_n^1$

b) $C_{14}^n + C_{14}^{n+2} = 2C_{14}^{n+1}$

Giải

a) điều kiện : $n \geq 0, n \in Z$

$$C_n^3 = 5C_n^1 \Leftrightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} = 5\frac{n!}{(n-1)!} \Leftrightarrow (n-2)(n-1) = 30$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 28 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 7 \\ n = -4 \ (\text{loại}) \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là n = 7

b) điều kiện : $\begin{cases} 14 \ge n+2 \\ n \in Z^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \le 12 \\ n \in Z^+ \end{cases}$ (*)

Ta có : $C_{14}^n + C_{14}^{n+2} = 2C_{14}^{n+1}$

$$\Leftrightarrow \frac{14!}{n!(14-n)!} + \frac{14!}{(n+2)!(12-n)!} = 2\frac{14!}{(n+1)!(13-n)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(13-n)(14-n)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(13-n)}$$

$$\Leftrightarrow (n+1)(n+2) + (13-n)(14-n) = 2(n+2)(14-n)$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 12n + 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 4 \\ n = 8 \end{array}\right. \text{ thoả (*)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là : $\left[\begin{array}{l} n = 4 \\ n = 8 \end{array}\right.$

<u>Bài 2:</u>

Giải các phương trình

a) $3C_{n+1}^2 + nP_2 = 4A_n^2$

b) $C_{n+1}^2 - A_n^2 - 4n^3 = \left(A_{2n}^1\right)^2$

Giải

a) điều kiện : $\begin{cases} n \ge 2 \\ n \in Z^+ \end{cases}$

Ta có :

$$3C_{n+1}^2 + nP_2 = 4A_n^2 \Leftrightarrow 3\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} + 2n = 4\frac{n!}{(n-2)!}$$

$$\Leftrightarrow 3n(n+1) + 4n = 8(n-1)n$$

$$\Leftrightarrow 5n^2 - 15n = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 2 \ (\text{loại}) \\ n = 3 \ (\text{nhận}) \end{array}\right.$$

b) điều kiện : $\begin{cases} n \ge 2 \\ n \in Z^+ \end{cases}$

$$\text{Giả thiết} \Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} - \frac{n!}{(n-2)!} - 4n^3 = \left[\frac{(2n)!}{(2n-1)!}\right]^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} - (n-1)n - 4n^3 = 4n^2$$

$$\Leftrightarrow n^3 + 10n^2 - 3n = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=0 \\ 8n^2+10n-3=0 \end{array}\right.$$

Phương trình này vô nghiệm $\forall n \geq 2$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

Bài 5 : Hãy tìm số n nguyên dương thoả mãn đẳng thức

$$C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 - \frac{5}{4}\mathrm{A}_{\text{n-2}}^2 = 0$$

Giải

điều kiện : $\begin{cases} n \in Z \\ n \geq 5 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với :

$$\frac{(n-1)!}{4!(n-5)!} - \frac{(n-1)!}{3!(n-4)!} - \frac{5}{4}.\frac{(n-2)!}{(n-4)!} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{n - 1}}{24} - \frac{n-1}{6(n-4)} - \frac{5}{4}\frac{1}{n-4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\text{n - 1})(n-4) - (n-1)4 - 5.6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{n}^2 - 9n - 22 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=11 \\ n=-2\ (\text{loại}) \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \text{ n = 11 là giá trị n cần tìm}$$

Bài 9 : Tìm m, n $\in$ Z^+ biết : $C_{n+1}^{m+1} : C_{n+1}^{m} : C_{n+1}^{m-1} = 5:5:3$

Giải

Ta có : $\dfrac{C_{n+1}^{m+1}}{C_{n+1}^{m}} = \dfrac{\dfrac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!}}{\dfrac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!}} = \dfrac{n+1-m}{m+1}$

Và : $\dfrac{C_{n+1}^{m}}{C_{n+1}^{m-1}} = \dfrac{\dfrac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!}}{\dfrac{(n+1)!}{(m-1)!(n-m+2)!}} = \dfrac{n-m+2}{m}$

Từ giả thiết $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{n+1-m}{m+1} = 1 \\ \dfrac{n-m+2}{m} = \dfrac{5}{3} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2m \\ 3n-8m+6=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} n=6 \\ m=3 \end{cases} \in Z^+$

Vậy $\begin{cases} m=3 \\ n=6 \end{cases}$ là các giá trị cần tìm

Bài 12 : Giải các phương trình sau :

a) $\dfrac{C_{n+1}^2}{C_n^2} \geq \dfrac{3}{10}n$

b) $A_{n+1}^{3}+C_{n+1}^{n-1}<14(n+1)$

Giải

a) điều kiện : $\begin{cases} n\geq 2 \\ n\in Z^{+}\end{cases}$

$$\frac{C_{n+1}^{2}}{C_{n}^{2}}\geq\frac{3}{10}n \Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}\geq\frac{3}{10}n.\frac{n!}{2!(n-2)!}$$

$$\frac{n+1}{2}\geq\frac{3}{10}\frac{(n-1)n}{2!} \Leftrightarrow 3n^{2}-13n-10\leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}\leq n\leq 5$$

Do $\begin{cases} n\geq 2 \\ n\in Z^{+}\end{cases}$ nên n = {2, 3, 4, 5}

Vậy các nghiệm của bất phương trình là : n = {2, 3, 4, 5}

b) điều kiện : $\begin{cases} n\geq 2 \\ n\in Z^{+}\end{cases}$

$$A_{n+1}^{3}+C_{n+1}^{n-1}<14(n+1) \Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{(n-2)!}+\frac{(n+1)!}{(n-1)!2!}<14(n+1)$$

$$(n-1)n+\frac{n}{2}<14 \Leftrightarrow 2n^{2}-n-28<0 \Leftrightarrow -\frac{7}{2}<n<4$$

Do $n\in Z^{+}$ và $n\geq 2$ nên n = {2, 3}

Vậy các nghiệm của bất phương trình là : n = {2, 3}

<u>Bài 13 :</u> Giải các bất phương trình sau :

a) $\dfrac{A_{n+4}^{4}}{(n+2)!}<\dfrac{143}{4P_{n}}$ (1)

b) $\dfrac{A_{n}^{4}}{A_{n+1}^{3}-C_{n}^{n-4}}\leq\dfrac{23}{24}$ (2)

Giải

a) điều kiện : n $\in$ N

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(n+4)!}{n!}<\frac{143}{4n!}(n+2)! \Leftrightarrow 4(n+3)(n+4)<143$$

$$\Leftrightarrow 4n^{2}+28n-95<0 \Leftrightarrow -9.5<n<2.5$$

Do $n\in N$ nên $n=\{0,1,2\}$

Vậy các nghiệm của bất phương trình là : $n=\{1,2,3\}$

b) điều kiện : $\begin{cases} n\geq 4 \\ n\in Z^{+}\end{cases}$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-4)!\left[\frac{(n+1)!}{(n-2)!}-\frac{n!}{(n-4)!4!}\right]}\leq\frac{23}{24}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4!}{4!\frac{n+1}{(n-2)(n-3)}-1} \le \frac{23}{24} \Leftrightarrow 4n^2-6n+5\le 0 \Leftrightarrow 1\le n\le 5$$

Do $\begin{cases} n\ge 4 \\ n\in Z^+ \end{cases}$ nên $n=\{4,5\}$

Vậy các nghiệm của bất phương trình là : $n=\{4,5\}$

Bài 14 : Giải bấ phương trình : $C_{x-1}^4 - C_{x-1}^3 - \frac{5}{4}A_{x-2}^2 \le 0$ (1)

Giải

điều kiện : $\begin{cases} x\ge 5 \\ x\in Z^+ \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(x-1)!}{4!(x-5)!} - \frac{(x-1)!}{3!(x-4)!} - \frac{5}{4}\frac{(x-2)!}{(x-4)!} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{4!} - \frac{x-1}{3!(x-4)} - \frac{5}{4}\frac{1}{x-4} \le 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-9x-22\le 0 \Leftrightarrow \ \le x\le 11$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là : $x=\{5,6,7,8,9,10,11\}$

Bài 17 : Giải bất phương trình

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 4C_n^3 + ... + nC_n^n \le n(7-n) \quad (n\ge 1) \qquad (1)$$

Giải

Ta có : $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$ (2)

Lấy đạo hàm cấp 1 hai vế của (2) ta được :

$$n(1+n)^{n-1} = C_n^1 + C_n^1 x + 2C_n^2 x + ... + nC_n^n x^{n-1} \qquad (2)$$

Chọn x = 1 ta được :

$$n.2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n$$

Khi đó : (1) $\Leftrightarrow n.2^{n-`} \le n(7-n)$

$$\Leftrightarrow 2^{n-1} \le (7-n)$$

$$\Leftrightarrow 2^{n-1} + n \le 7 \qquad (2)$$

Hàm $f(n) = 2^{n-1} + n$ có $f'(n) = 2^{n-1}\ln 2 + 1 > 0 \ \forall n\ge 1$

$\Rightarrow$ f(n) là hàm tăng $\forall n\ge 1$

Lại có : f(3) = 7 $\Rightarrow$ nghiệm của bất phương trình (2) là : $n\le 3$

Vậy tập hợp nghiệm của bất phương trình đã cho là : $n=\{1,2,3\}$

Dang 2: Chứng minh 1 đẳng thức liên quan đến A_n^k, P_n, C_n^k

Dựa vào đặc trưng của đẳng thức, chúng ta chọn các cách giải sau :

Cách 1: Dùng công thức cơ bản sau :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \ ; P_n = n! \ ; \ C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Bài 1: Chứng minh rằng

$$C_{n+m}^{m} = \frac{m+1}{n} C_{n+m}^{m+1} \qquad m, n \in Z^{+}$$

Ta có : $\frac{m+1}{n} C_{n+m}^{m+1} = \frac{m+1}{n} \frac{(m+n)!}{(m+1)!(n-1)!} = \frac{(n+m)!}{n!m!} = C_{n+m}^{m} \Rightarrow$ đpcm

Bài 2: Cho m, n, k ∈ N và $m \le n$; $k \le m$. Chứng minh rằng :

$$C_n^m C_m^k = C_m^k C_{n-k}^{m-k}$$

Giải

Ta có :

$$C_n^k C_{n-k}^{m-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

$= C_{nn}^m . C_m^k$ (đpcm)

Bài 3: Cho $n \in Z^{+}$.Chứng minh rằng :

$$C_{2n}^n + C_{2n}^{n-1} - \frac{1}{2} C_{2n+2}^{n+1} \qquad (1)$$

Giải

Cách a: Theo công thức : $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ ta có :

$$C_{2n}^n + C_{2n}^{n-1} = C_{2n+1}^n$$

Khi đó : (1) $\Leftrightarrow C_{2n+1}^n = \frac{1}{2} C_{2n+2}^n . C_{2n+1}^n = \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} = \frac{(2n+1)!(2n+2)}{2(n+1)n!(n+1)!}$

$$= \frac{(2n+2)!}{2(n+1)!(n+1)!} = \frac{1}{2} C_{2n+2}^{n+1} \Rightarrow \text{đpcm}$$

Cách b: Khai triển vế trái. Ta có :

$$A = C_{2n}^n + C_{2n}^{n-1} = \frac{(2n)!}{n!n!} + \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$$

$$= \frac{(2n)!(n+1)^2 + (2n)!n(n+1)}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{1}{2} \frac{(2n)!(2n+2)(n+1) + (2n)!(2n+2)n}{(n+1)!(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{1}{2} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{1}{2} C_{2n+2}^{n+1} \quad \text{(đpcm)}$$

Bài 4: Cho $n \ge 2$ và $n \in Z^{+}$. Chứng minh rằng : $C_{n+1}^2 = C_n^2 + n$ (1)

Giải

(1) $\Leftrightarrow C_{n+1}^2 = C_n^2 + C_n^1$

Ta có : $C_n^2 + C_n^1 = \frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n!(n-1) + 2n!}{2!(n-1)!}$

$$= \frac{n!(n+1)}{2!(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{2(n-1)!} = C_{n+1}^2 \quad \text{(đpcm)}$$

Bài 5: Chứng minh rằng

$$C_n^1 + 2\frac{C_n^2}{C_n^1} + 3\frac{C_n^3}{C_n^2} + ... + k\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} + ... + n\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Giải

Ta có : $C_n^1 = n$

$$2.\frac{C_n^2}{C_n^1} = 2.\frac{\frac{n!}{2!(n-2)!}}{\frac{n!}{(n-1)!}} = 2.\frac{n!}{2!(n-2)!}.\frac{(n-1)!}{n!} = n-1$$

$$3.\frac{C_n^3}{C_n^2} = 3.\frac{\frac{n!}{3!(n-3)!}}{\frac{n!}{2!(n-2)!}} = n-2$$

□□□□□□□□□□..

$$k.\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} = n-k+1$$

□□□□□□□□□□.

$$n.\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = 1$$

Cộng n đẳng thức trên vế theo vế ta được :

$$C_n^1 + 2.\frac{C_n^2}{C_n^1} + 3.\frac{C_n^3}{C_n^2} + ... + k.\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} + ... + n.\frac{C_n^n}{C_n^{n=1}}$$

$$= n + (n-1) + (n-2) + ... + (n-k+1) + ... + 2 + 1$$

$$= 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(Theo công thức tính tổng cấp số cộng)

Bài 6: Chứng minh rằng

$$\frac{C_n^0}{C_{n+2}^1} + \frac{C_n^1}{C_{n+3}^2} + \frac{C_n^2}{C_{n+4}^3} + ... + \frac{C_n^k}{C_{n+k+2}^{k+1}} + ... + \frac{C_n^n}{C_{2n+n}^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

Giải

Ta có :

$$\frac{C_n^k}{C_{n+k+2}^{k+1}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} : \frac{(n+k+2)!}{(k+1)!(n+1)!} = \frac{n!(n+1)!(k+1)!}{(n+k+2)!(n-k)!k!}$$

$$= \frac{n!(n+1)!(k+1)}{(n+k+2)!(n-k)!} = \frac{1}{2}\left[\frac{n!(n+1)!}{(n-k)!(n+k+1)!} - \frac{n!(n+1)!}{(n-k-1)!(n+k2)!}\right]$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{C_{2n+1}^{n-k} - C_{2n+1}^{n-k-1}}{C_{2n+1}^{n}} \qquad (*)$$

Lần lượt thay x = 0, 1, 2, 3, □, n vào (*) ta được :

+ Với k = 0 : $\dfrac{C_n^0}{C_{n+2}^1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{C_{2n+1}^n-C_{2n+1}^{n-1}}{C_{2n+1}^n}$

+ Với k = 1 : $\dfrac{C_n^1}{C_{n+3}^2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{C_{2n+1}^{n-1}-C_{2n+1}^{n-2}}{C_{2n+1}^n}$

+ Với k = 2 : $\dfrac{C_n^2}{C_{n+4}^3}=\dfrac{1}{2}\dfrac{C_{2n+1}^{n-2}-C_{2n+1}^{n-3}}{C_{2n+1}^n}$

□□□□□□□□□□□□□□.

+ Với k = n — 1 : $\dfrac{C_n^{n-1}}{C_{2n+1}^n}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{C_{2n+1}^1-C_{2n+1}^0}{C_{2n+1}^n}$

+ Với k = n : $\dfrac{C_n^n}{C_{2n+1}^n}=\dfrac{1}{2}\dfrac{C_{2n+1}^0}{C_{2n+1}^n}$

Cộng vế theo vế các đẳng thức trên ta được :

$$\frac{C_n^0}{C_{n+2}^1}+\frac{C_n^1}{C_{n+3}^2}+\frac{C_n^2}{C_{n+4}^3}+...+\frac{C_n^k}{C_{n+k+2}^{k+1}}+...+\frac{C_n^n}{C_{2n+2}^{n+1}}$$

$$=2\frac{1}{C_{2n+1}^n}\left(C_{2n+1}^n-C_{2n+1}^{n-1}+C_{2n+1}^{n-1}-C_{2n+1}^{n-2}+C_{2n+1}^{n-2}+...+C_{2n+1}^1-C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^0\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{C_{2n+1}^n}{C_{2n+1}^n}=\frac{1}{2}\quad \text{(đpcm)}$$

<u>Bài 7:</u> Chứng minh rằng : $P_1 + 2P_2 + 3P_3 +$ □ $+ nP_n = P_{n+1}$ — 1 (với $n\in Z^+$ và P_n là hoán vị của n phần tử)

Giải

Ta có : $T = P_1 + 2P_2 + 3P_3 +$ □ $+ nP_n$

= 1! + 2.2! + 3.3! + □ + n.n!

= 1! + (3 — 1)2! + (4 — 1)3! + □.+ [(n + 1) — 1]n!

= 1! + 3.2! + 4.3! + □ + (n + 1)n! — (2! + 3! + □ + n!)

= 1! + 3! + 4! + □ + (n + 1)! — (2! + 3! + □ + n!)

= 1! — 2! + P_{n+1} = P_{n+1} — 1 (đpcm)

Bài 9. Nếu a_1, a_2, a_3 và a_4 là 4 hệ số liên tiếp trong khai triển

$(1+x)^2$ thì $\dfrac{a_1}{a_1+a_2}+\dfrac{a_2}{a_3+a_4}=\dfrac{2a_2}{a_2+a_3}$

Tức là : $\dfrac{a_1}{a_1+a_2};\dfrac{a_2}{a_2+a_3};\dfrac{a_3}{a_3+a_4}$ Tạo thành cấp số cộng

Giải

Giả sử : $a_1=C_n^k$, $a_2=C_n^{k+1}$, $a_3=C_n^{k+2}$, $a_4=C_n^{k+3}$

Khi đó : $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{C_n^{k+1}}{C_n^k}=\dfrac{\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}}=\dfrac{n-k}{k+1}$

$$\frac{a_4}{a_3}=\frac{C_n^{k+3}}{C_n^{k+2}}=\frac{\dfrac{n!}{(k+3)!(n-k-3)!}}{\dfrac{n!}{(k+2)!(n--2)!}}=\frac{n-k-2}{k+3}$$

$$\frac{a_3}{a_2}=\frac{C_n^{k+2}}{C_n^{k+1}}=\frac{\dfrac{n!}{(k+2)!(n-k-2)!}}{\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}=\frac{n-k-1}{k+2}$$

$$\frac{1}{1+\dfrac{a_2}{a_1}}+\frac{1}{1+\dfrac{a_4}{a_3}}=\frac{1}{1+\dfrac{n-k}{k+1}}+\frac{1}{1+\dfrac{n-k-2}{k+3}}$$

$$=\frac{k+1}{n+1}+\frac{k+3}{n+1}=\frac{2k+4}{n+1}+\frac{2(k+2)}{n+1}$$

Mặt khác : $\dfrac{2}{1+\dfrac{a_1}{a_2}}=\dfrac{2}{1+\dfrac{n-k-1}{k+2}}=\dfrac{2(k+2)}{n+1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\dfrac{a_2}{a_1}}+\frac{1}{1+\dfrac{a_4}{a_3}}=\frac{2}{1+\dfrac{a_3}{a_2}}$$

Hay : $\dfrac{a_1}{a_1+a_2}+\dfrac{a_3}{a_2+a_4}=\dfrac{2a_2}{a_2+a_3}$ (đpcm)

<u>Cách 2 : Sử dung tinhd chất</u> : $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$

<u>Bài 1:</u> Chứng minh rằng : $C_n^{k+1}+C_n^{k-1}+2C_n^k=C_{n+2}^{k+1}$

Giải

Ta có : $T=C_n^{k+1}+C_n^{k-1}+2C_n^k=\left(C_n^k+C_n^{k+1}\right)+\left(C_n^{k-1}+C_n^k\right)$

$=C_{n+1}^{k+1}=C_{n+1}^{k}=C_{n+2}^{k+1}$ (đpcm)

<u>Bài 2:</u> Chứng minh rằng :

$C_n^k+3C_n^{k-1}+3C_n^{k-2}+C_n^{k-3}=C_{n+3}^k$ với $3\le k\le n$

Giải

Ta có : $T=C_n^k+3C_n^{k-1}+3C_n^{k-2}+C_n^{k-3}$

$=\left(C_n^k+C_n^{k-1}\right)+2\left(C_n^{k-1}+C_n^{k-2}\right)+\left(C_n^{k-2}+C_n^{k-3}\right)$

$=C_{n+1}^k+2C_{n+1}^{k-1}+C_{n+1}^{k-2}$

$=C_{n+1}^kC_{n+1}^{k-1}+C_{n+1}^{k-1}+C_{n+1}^{k-2}$

$=C_{n+2}^k+C_{n+2}^{k-1}=C_{n+3}^k$ (đpcm)

<u>Bài 3:</u> Chứng minh rằng :

$2C_n^k+5C_n^{k+1}+4C_n^{k+2}+C_n^{k+3}=C_{n+2}^{k+2}+C_{n+3}^{k+3}$

Giải

Ta có : $T = 2C_n^k + 5C_n^{k+1} + 4C_n^{k+2} + C_n^{k+3}$

$= 2\left(C_n^k + C_n^{k+1}\right) + 3\left(C_n^{k+1} + C_n^{k+2}\right) + C_n^{k+2} + C_n^{k+3}$

$= 2C_{n+1}^{k+1} + 3C_{n+1}^{k+2} + C_{n+1}^{k+3}$

$= 2\left(C_{n+1}^{k+1} + C_{n+1}^{k+2}\right) + C_{n+1}^{k+2} + C_{n+1}^{k+3}$

$= 2C_{n+2}^{k+2} + C_{n+2}^{k+3}$

$= C_{n+2}^{k+2} + \left(C_{n+2}^{k+2} + C_{n+2}^{k+3}\right)$

$= C_{n+2}^{k+2} + C_{n+3}^{k+3}$ (đpcm)

<u>Bài 4 :</u> Cho $4 \le k \le n$. Chứng minh rằng :

$$C_n^k + 4C_n^{k-1} + 5C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^k$$

Giải

Ta có : $T = C_n^k + 4C_n^{k-1} + 5C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4}$

$= C_n^k + C_n^{k+1} + 3\left(C_n^{k-1} + C_n^{k-2}\right) + 3\left(C_n^{k-2} + C^{k-3}\right) + C_n^{k-3} + C_n^{k-4}$

$= C_{n+1}^k + 3C_{n+1}^{k-1} + 3C_{n+1}^{k-2} + C_{n+1}^{k-3}$

$= C_{n+2}^k + C_{n+1}^{k-1} + 2\left(C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2}\right) + C_{n+1}^{k-2} + C_{n+1}^{k-3}$

$= C_{n+2}k + 2C_{n+3}^{k-1} = C_{n+4}^k$ (đpcm)

<u>Bài 5:</u> Cho $1 \le m \le n$. Chứng minh rằng :

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-2}^{m-1} + \ldots + C_m^{m-1} + C_{m-1}^{m-1}$$

Giải

Theo tính chất :

$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} = C_{n-1}^k$

$\Rightarrow C_{n-1}^{k-1} = C_n^k - C_{n-1}^k$

áp dụng :

$C_{n-1}^{m-1} = C_n^m - C_{n-1}^m$

$C_{n-2}^{m-2} = C_{n-1}^m - C_{n-2}^m$

....

$C_m^{m-1} = C_{m+1}^m - C_m^m$

Cộng vế theo vế các đẳng thức trên ta được :

$C_{n-1}^{m-1} + C_{n-2}^{m-2} + \ldots + C_m^{m-1} = C_n^m - C_m^m$

$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-2}^{m-2} + \ldots + C_n^{m-1} + C_{m-1}^{m-1}$ (đpcm)

(Do $C_m^m = C_{m-1}^{m-1} = 1$)

<u>Bài 6 :</u> Cho m, n là các số tự nhiên và thoả mãn $5 \le k \le n$. Chứng minh rằng

$$C_5^0 C_n^k + C_5^1 C_n^{k-1} + \ldots + C_5^5 C_n^{k-5} = C_{n+5}^k \quad (1)$$

Giải

Cách a: Phương pháp tách ghép :

Ta có : $T = C_5^0 C_n^k + C_5^1 C_n^{k-1} + \ldots + C_5^5 C_n^{k-5}$

$= C_n^k + 5C_n^{k-1} + 10C_n^{k-2} + 10C_n^{k-3} + 5C_n^{k-4} + C_n^{k-5}$

$= C_n^k + C_n^{k-1} + 4\left(C_n^{k-1} + C_n^{k-2}\right) + 6\left(C_n^{k-2} + C_n^{k-3}\right) + 4\left(C_n^{k-3} + C_n^{k-4}\right) + C_n^{k-4} + C_n^{k-5}$

$= C_{n+1}^k + 4C_{n+1}^{k-1} + 6C_{n+1}^{k-2} + 4C_{n+1}^{k-3} + C_{n+1}^{k-4}$

$= C_{n+1}^k + C_{n+1}^{k-1} + 3\left(C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2}\right) + 3\left(C_{n+1}^{k-2} - C_{n+1}^{k-3}\right) + C_{n+1}^{k-3} + C_{n+1}^{k-4}$

$= C_{n+2}^k + 3C_{n+2}^{k-1} + 3C_{n+2}^{k-2} + C_{n+2}^{k-3}$

$= C_{n+2}^k + C_{n+2}^{k-1} + 2\left(C_{n+2}^{k-1} + C_{n+2}^{k-2}\right) + C_{n+2}^{k-2} + C_{n+2}^{k-3}$

$= C_{n+3}^k + 2C_{n+3}^{k-1} + C_{n+3}^{k-2}$

$= C_{n+3}^k + C_{n+3}^{k-1} + C_{n+3}^{k-1} + C_{n+3}^{k-2}$

$= C_{n+4}^k + C_{n+4}^{k-1} = C_{n+5}^k$ (đpcm)

Cách b : Sử dụng phương pháp đồng nhất hệ số:

Ta có : $(1+x)^5 = C_5^0 + C_5^1 x + C_5^2 x^2 + C_5^3 x^3 + C_5^4 x^4 + C_5^5 x^5$

$(1+x)^n = ...C_n^k x^k + C_n^{k-1}x^{k-1} + C_n^{k-2}x^{k-2} + C_n^{k-3}x^{k-3}...$

$\Rightarrow (1+x)^5(1+x)^n = (1+x)^{n+5} = ... + C_{n+5}^k x^k + ...$

Hệ số x^k trong khai triển $(1+x)^5(1+x)^n$ là :

$C_5^0 C_n^k + C_5^1 C_n^{k-1} + C_5^2 C_n^{k-2} + C_5^3 C_n^{k-3} + C_5^4 C_n^{k-4} + C_5^5 C_n^{k-5}$

Còn hệ số x^k trong khai triển $(1+x)^{n+5}(1+x)^n$ cũng chính là hệ số x^k trong khai triển $(1+x)^{n+5}$ từ đó suy ra đpcm

<u>Bài 7 :</u> chứng minh rằng :

$$\sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^k = C_{n+m+1}^m$$

Giải

Theo tính chất : $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

$\Rightarrow C_{n+k+1}^k = C_{n+k}^{k-1} + C_{n+k}^k$

$\Rightarrow C_{n+k}^k = C_{n+k+1}^k - C_{n+k}^{k-1}$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^k = C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + ... + C_{n+m}^m$

Ta có :

$C_n^0 = C_{n+1}^0$

$C_{n+1}^1 = C_{n+2}^1 - C_{n+1}^0$

$C_{n+2}^2 = C_{n+3}^2 - C_{n+2}^1$

$C_{n+3}^3 = C_{n+4}^3 - C_{n+3}^2$

....

$C_{n+m}^m = C_{n+m+1}^m - C_{n+m}^{m-1}$

$\Rightarrow C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + ... + C_{n+m}^m = C_{n+m+1}^m$ hay $\sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^k = C_{n+m+1}^m$ (đpcm)

Cách 3 :

Khai triển một biểu thức hoặc hai biểu thức bằng hai cách khác nhau. Sau đó đồng nhất hệ số

Nhận dạng : khi vế trái của đẳng thức là tích của hai tổ hợp $C_n^k.C_m^n$ hoặc bình phương một tổ hợp : $\left(C_n^k\right)^2$

Bài 1: Chứng minh rằng :

$$C_6^0C_n^k + C_6^1C_n^{k-1} + C_6^2C_n^{k-2} + C_6^3C_n^{k-3} + C_6^4C_n^{k-4} + C_6^5C_n^{k-5} + C_6^6C_n^{k-6} = C_{n+6}^k$$

Giải

Ta có : $(1+x)^6 = C_6^0 + C_6^1x + C_6^2x^2 + C_6^3x^3 + C_6^4x^4 + C_6^5x^5 + C_6^6x^6$

$$(1+x)^n + ... + C_n^kx^k + C_n^{k-1}x^{k-1} + C_n^{k-2}x^{k-2} + C_n^{k-3}x^{k-3} + C_n^{k-4}x^{k-4} + C_n^{k-5}x^{k-5} + C_n^{k-6}x^{k-6} + ...$$

$\Rightarrow$ Hệ số x^k trong khai triển $(1+x)^6(1+x)^n$ là :

$$C_0^6C_n^k + C_6^1C_n^{k-1} + C_6^2C_n^{k-2} + C_6^3C_n^{k-3} + C_6^4C_n^{k-4} + C_6^5C_n^{k-5} + C_6^6C_n^{k-6}$$

Mặt khác :

$$(1+x)^6(1+x)^n = (1+x)^{n+6} = ... + C_{n+6}^kx^k + ...$$

$\Rightarrow$ Hệ số x^k trong khai triển $(1+x)^6(1+x)^n$ cũng chính là hệ số x^k trong khai triển $(1+x)^{n+6}$ $\Rightarrow$ Điều phải chứng minh

Bài 2: chứng minh rằng :

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$$

Giải

Ta có : $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$

$$= \left(C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^nx^n\right)\left(C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^nx^n\right)$$

$$= \left(C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^nx^n\right)\left(C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1} + C_n^2x^{n-2} + ... + C_n^n\right)$$

Hệ số của x^n trong tích $(1+x)^n(1+x)^n$ là : $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2$

Mặt khác : $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1x + C_{2n}^2x^2 + ... + C_{2n}^nx^n + ... + C_{2n}^{2n}x^{2n}$

$\Rightarrow$ hệ số của x^n trong $(1+x)^n$ là C_{2n}^n

Mà hệ số của x^n trong tích $(1+x)^n(1+x)^n$ cũng chính là hệ số của x^n trong khai triển : $(1+x)^{2n}$

$$\Rightarrow \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n \quad \text{(đpcm)}$$

Bài 3: chứng minh rằng :

$$\left(C_{2n}^0\right)^2 - \left(C_{2n}^1x\right)^2 + \left(C_{2n}^2x^2\right)^2 - ... + \left(C_{2n}^{2n}\right)^2 = (-1)^nC_{2n}^n$$

Giải

Ta có : $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1x + ... + C_{2n}^nx^n + ... + C_{2n}^{2n}x^{2n}$

$$(1-x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1x + ... + (-1)^nC_{2n}^n \pm ... + C_{2n}^{2n}x^{2n}$$

Hệ số : x^{2n} trong tích $(1+x)^{2n}(1-x)^{2n}$ là:

$$\left(C_{2n}^0\right)^2-\left(C_{2n}^1\right)^2+...+(-1)^n\left(C_{2n}^n\right)^2\pm...+\left(C_{2n}^{2n}\right)^2 \qquad (1)$$

Mặt khác :

$$(1+x)^{2n}(1-x)^{2n}=\left(1-x^2\right)^{2n}=C_{2n}^0-C_{2n}^1x^2+...+(-1)^nC_{2n}^n\left(-x^2\right)^n+...+C_{2n}^{2n}\left(x^2\right)^{2n}$$

$\Rightarrow$ Hệ số x^{2n} trong khai triển $(1-x)^{2n}$ là $(-1)^nC_{2n}^n$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $\left(C_{2n}^0\right)^2-\left(C_{2n}^1\right)^2+...+(-1)^n\left(C_{2n}^n\right)^2\pm...+\left(C_{2n}^{2n}\right)^2=(-1)^nC_{2n}^n$ (đpcm)

Bài 4 : Chứng minh rằng :

$$C_n^0C_n^r+C_n^1C_n^{r+1}+...+C_n^{n-r}C_n^n=\frac{(2n)!}{(n-r)!(n+r)!}$$

Giải

Ta có : $\left(C_n^0+C_n^1\frac{1}{x}+C_n^2\frac{1}{x^2}+...+C_n^n\frac{1}{x^n}\right)\left(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^n\right)$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^n(1+x)^n=\frac{1}{x^n}(1+x)^{2n}=\frac{1}{x^n}\left(C_{2n}^0+C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2+...\right)$$

Đồng nhất hoá hệ số x^r ở hai vế ta có :

$$C_n^0C_n^r+C_n^1C_n^{r+1}+C_n^2C_n^{r+2}+...+C_n^{n-r}C_n^n=C_{2n}^{n+r}=\frac{(2n)!}{(n+r)!(n-r)!} \text{ (đpcm)}$$

Bài 5: Chứng minh rằng :

$$\left(C_{2n+1}^0\right)^2-\left(C_{2n+1}^1\right)^2+\left(C_{2n+1}^2\right)^2-...-\left(C_{2n+1}^{2n+1}\right)=0$$

Giải

Ta có : $(1+x)^{2n+1}=C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1x+C_{2n+1}^2x^2+...+C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1}$

$$(x-1)^{2n+1}=C_{2n+1}^0x^{2n+1}-C_{2n+1}^1x^{2n}+C_{2n+1}^2x^{2n-1}-...-C_{2n+1}^{2n+1}$$

Hệ số của hạng tử x^{2n+1} trong tích $(1+x)^{2n+1}(x-1)^{2n+1}$ là :

$$\left(C_{2n+1}^0\right)^2-\left(C_{2n+1}^1\right)^2+\left(C_{2n+1}^2\right)^2-...-\left(C_{2n+1}^{2n+1}\right)^2$$

Ta lại có : $(1+x)^{2n+1}(x-1)^{2n+1}=\left(x^2-1\right)^{2n+1}$

Có hệ số của hạng tử chứa x^{2n+1} là 0, vì tất cả các hạng tử đều chứa luỹ thừa bậc chẵn của x

$$\Rightarrow \left(C_{2n+1}^0\right)^2-\left(C_{2n+1}^1\right)^2+\left(C_{2n+1}^2\right)^2-...-\left(C_{2n+1}^{2n+1}\right)^2=0$$

Bài 6: Chứng minh rằng

$$C_n^0C_m^p+C_n^1C_m^{p-1}+C_n^2C_m^{p-2}+...+C_n^pC_m^0=C_{m+n}^p$$

Giải

Ta có : $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n$

$$(1-x)^m=C_m^0+C_m^1x+C_m^2x^2+...+C_m^mx^m$$

Hệ số x^p trong tích $(1+x)^n(1+x)^m$ là :

$$C_n^0C_m^p+C_n^1C_m^{p-1}+...+C_n^pC_m^0$$

Mà hệ số x^p trong $(1+x)^{m+n}$ cũng chính là hệ số x^p trong tích $(1+x)^m.(1+x)^n$ nên :

$$C_n^0 C_m^p + C_n^1 C_m^{p-1} + C_n^2 C_m^{p-2} + ... + C_n^p C_m^0 = C_{m+n}^p \text{ (đpcm)}$$

Cách 4 Dùng khai triển $(a+bx)^n$; $(a+bx)^{2n}$. Sau đó chọn a, n, x thích hợp

Nhận dạng bài toán để chọn cách giải dựa vào các đại lượng sau :

1. Vế trái của đẳng thức chứa C_n^0 và C_n^n (hoặc C_{2n}^0 và C_{2n}^{2n}) đồng thời mỗi hệ số của tổ hợp là 1, khi đó ta khai triển $(1+x)^n; (1+\text{x})^{2n}$. Sau đó chọn x = 1 nếu vế trái của đẳng thức không đổi dấu; hoặc x = -1 nếu có đổi dấu

2. Vế trái của đẳng thức chứa C_n^0 và C_n^n (hoặc C_{2n}^0 và C_{2n}^{2n}) đồng thời mỗi hệ số của tổ hợp là a^{n-k} thì ta chọn khai triển $(1+x)^n; (1+\text{x})^{2n}$. Sau chọn $x = \pm a$

3. Vế trái của đẳng thức chứa C_n^0 và C_n^n (hoặc C_{2n}^0 và C_{2n}^{2n}) đồng thời mỗi hệ số của tổ hợp chứa $a^{n-k}b^k$ thì ta chọn khai triển $(a+x)^n; (\text{a}+\text{x})^{2n}$ hoặc $(a+bx)^n; (\text{a}+\text{bx})^{2n}$, sao cho :

$$\text{chọn} \left\langle \begin{array}{l} x = \pm b \text{ với } (\text{a}+\text{x})^n \\ x = \pm 1 \text{ với } (\text{a}+\text{bx})^n \end{array} \right.$$

4. Nếu bài toán không có đặc trưng trên ta phân tích rồi đưa về 2 tổng

<u>Bài 1:</u> Chứn minh rằng

a) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$

b) $9^0 C_n^0 + 9^1 C_n^1 + ... + 9^n C_n^n = 10^n$

Giải

a) Ta có : $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$

Chọn x = 1 ta được : $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n$ (đpcm)

b) Thay x = 9 vào 2 vế của khai triển trên ta được

$$10^n = C_n^0 + 9C_n^1 + 9^2 C_n^2 + ... + 9^n C_n^n \text{ (đpcm)}$$

<u>Bài 2</u> Chứng minh rằng

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + ... + (-1)^n C_n^n = 0$$

Giải

Ta có : $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + ... + C_n^n x^n$

Chọn x = 1 ta được :

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + ... + (-1)^n C_n^n = 0 \text{ (đpcm)}$$

<u>Bài 3:</u> Cho khai triển $(1+x^2)^n$ biết tổng các hệ số trong khai triển trên bằng 1024. Tìm n.

Giải

Ta có : $(1+x^2)^n = C_n^0 + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^4 + ... + C_n^2 x^{2n}$

Tổng các hệ số của khai triển trên là :

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n$$

Lại có : $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$

Chọn x = 1 ta được : $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$

Như vậy theo đề thì $2^n = 1024 = 2^{10} \Leftrightarrow n = 10$

Bài 4 : Chứng minh rằng :

$$5^n\left(C_n^0 + \frac{1}{5}C_n^1 + \frac{1}{5^2}C_n^2 + \frac{1}{5^3}C_n^3 + ... + \frac{1}{5^n}C_n^n\right) = 6^n \qquad (1)$$

Giải

(1) $\Leftrightarrow 5^n C_n^0 + 5^{n-1}C_n^1 + 5^{n-2}C_n^2 + ... + C_n^n = 6^n$

Ta có : $(1+x)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + ... + C_n^n$

Chọn x = 5 ta được :

$\Leftrightarrow 5^n C_n^0 + 5^{n-1}C_n^1 + 5^{n-2}C_n^2 + ... + C_n^n = 6^n$ (đpcm)

Bài 5 : Chứng minh rằng

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + ... + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + ... + C_{2n}^{2n-1}$$

Giải

Ta có : $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + ... + C_{2n}^{2n} x^{2n}$

Chọn x = -1 ta được :

$0 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + ... + (-1)^n C_{2n}^n + ... - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$

$\Leftrightarrow C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + ... + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + ... + C_{2n}^{2n-1}$ (đpcm)

Bài 6 : Chứng minh rằng

$$(-1)^n.C_n^0 + (-1)^{n-1}.2C_n^1 + ... + (-1)^n.C_n^k.2^k + ... + 2^n C_n^n = 1$$

Giải

Ta có : $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - C_n^3 x^3 + ... + (-1)^n C_n^n x^n$

Chọn x = 2 ta được :

$(1-2)^n = C_n^0 - C_n^1 2 + C_n^2 2^2 - C_n^3 2^3 + ... + (-1)^n C_n^n 2^n$

$\Leftrightarrow (-1)^n C_n^0 + (-1)^{n-1} 2C_n^1 + (-1)^{n-2} 2^2 C_n^2 + ... + (-1)^{n-k} 2^k C_n^k + ... + 2^n C_n^n = 1$ (đpcm)

Bài 7: Chứng minh rằng :

a) $3^{2004}C_{2004}^0 + 3^{2003}C_{2004}^1 + 3^{2002}C_{2004}^2 + ... + C_{2004}^{2004} = 4^{2004}$

b) $3^{2004}C_{2004}^0 + 3^{2003}4^1 C_{2004}^1 + 3^{2002}4^2 C_{2004}^2 + ... + 4^{2004}C_{2004}^{2004} = 7^{2004}$

Giải

a) Ta có : $(x+1)^{2004} = x^{2004}C_{2004}^0 + x^{2003}C_{2004}^1 + ... + C_{2004}^{2004}$

Chọn x = 3 ta được :

$3^{2004}C_{2004}^0 + 3^{2003}C_{2004}^1 + 3^{2002}C_{2004}^2 + ... + C_{2004}^{2004} = 4^{2004}$ (đpcm)

b) Ta có : $(a+bx)^{2004} = a^{2004}C_{2004}^0 + a^{2003}bC_{2004}^1 + a^{2002}b^2 C_{2004}^2 + ... + b^{2004}C_{2004}^{2004}$

Chọn a = 3 và b = 4 ta được :

$3^{2004}C_{2004}^0 + 3^{2003}4^1 C_{2004}^1 + 3^{2002}4^2 C_{2004}^2 + ... + 4^{2004}C_{2004}^{2004} = 7^{2004}$ (đpcm)

Bài 8 : Chứng minh rằng

$$2^n C_n^0 + 2^{n-1}7^1 C_n^1 + 2^{n-2}7^2 C_n^2 + ... + 7^n C_n^n = 9^n$$

Giải

Ta có : $(2+x)^n = 2^n C_n^0 + 2^{n-1}x^1C_n^1 + 2^{n-2}x^2C_n^2 + ... + x^nC_n^n$

Chọn x = 7 ta được :

$$2^n C_n^0 + 2^{n-1}7^1C_n^1 + 2^{n-2}7^2C_n^2 + ... + 7^nC_n^n = 9^n \text{ (đpcm)}$$

Chú ý : ta có thể khai triển :

$(a+b)^n = a^nC_n^0 + a^{n-1}C_n^1b + a^{n-2}C_n^2b^2 + ... + b^nC_n^n$ sau đó chọn a = 2, b = 7 cũng được đpcm

Bài 9 : Chứng minh rằng

$$3^nC_n^0 + 3^{n-1}5^16^1C_n^1 + 3^{n-2}5^26^2C_n^2 + ... + 5^n6^nC_n^n = 33^n$$

Giải

Ta có : $(a+bx)^n = a^nC_n^0 + a^{n-1}bxC_n^1 + a^{n-2}(bx)^2C_n^2 + ... + (bx)^nC_n^n$

Chọn $\begin{cases} a=3 \\ b=5 \\ x=6 \end{cases}$ ta được :

$$3^nC_n^0 + 3^{n-1}5^16^1C_n^1 + 3^{n-2}5^26^2C_n^2 + ... + 5^n6^nC_n^n = 33^n \text{ (đpcm)}$$

Bài 10: Chứng minh rằng :

$$C_{2004}^0 + C_{2004}^1 + C_{2004}^2 + ... + C_{2004}^{2002} + C_{2004}^{2004} = 2^{2003}$$

Giải

Ta có : $(1+x)^{2004} = C_{2004}^0 + C_{2004}^1x + C_{2004}^2x^2 + ... + C_{2004}^{2003}x^{2003} + C_{2004}^{2004}x^{2004}$

Chọn x = 1 ta được :

$$2^{2002} = C_{2004}^0 + C_{2004}^1 + C_{2004}^2 + ... + C_{2004}^{2002} + C_{2004}^{2004} \quad (1)$$

Chọn x = -1 ta được :

$$0 = C_{2004}^0 - C_{2004}^1 + C_{2004}^2 - ... - C_{2004}^{2002} + C_{2004}^{2004} \quad (2)$$

Lấy (1) cộng (2) vế theo vế ta được :

$$2^{2004} = 2\left(C_{2004}^0 + C_{2004}^2 + C_{2004}^4 + ... + C_{2004}^{2004}\right)$$

$$\Leftrightarrow C_{2004}^0 + C_{2004}^1 + C_{2004}^2 + ... + C_{2004}^{2002} + C_{2004}^{2004} = 2^{2003} \text{ (đpcm)}$$

Bài 12 Chứng minh rằng :

$$4^nC_n^0 - 4^{n-1}C_n^{n-1} + 4^{n-2}C_n^{n-2} - ... + (-1)^nC_n^n = C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + ... + 2^nC_n^n$$

Giải

Ta có : $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^nx^n$

Chọn x = 2 ta được :

$$C_n^0 + C_n^1 2 + C_n^2 2^2 + C_n^3 2^3 + ... + C_n^n 2^n = 3^n \quad (1)$$

Mặt khác :

$$(4-x)^n = 4^nC_n^0 - 4^{n-1}C_n^1x + 4^{n-2}C_n^2x^2 - ... + (-1)^nC_n^nx^n$$

Chọn x = 1 ta được :

$$3^n = 4^nC_n^0 - 4^{n-1}C_n^1 + 4^{n-2}C_n^2 - ... + (-1)^nC_n^n \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm

Bài 13 Chứng minh rằng

$$3^nC_n^0+3^{n-1}2^1C_n^1+3^{n-2}2^2C_n^2+...+2^nC_n^n=4^nC_n^0+4^{n-1}C_n^1+4^{n-2}C_n^2+...+C_n^n$$

Giải

Ta có : $(3+x)^n=3^nC_n^0+3^{n-1}xC_n^1+3^{n-2}x^2C_n^2+...+x^nC_n^n$

Chọn x = 2 ta được :

$$5^n=3^nC_n^0+3^{n-1}2C_n^1+3^{n-2}2^2C_n^2+...+2^nC_n^n \qquad (1)$$

Mặt khác :

$$(2x+1)^n=(2x)^nC_n^0+(2n)^{n-1}C_n^1+(2n)^{n-2}C_n^2+...+C_n^n$$

Chọn x = 2 ta được :

$$5^n=4^nC_n^0+4^{n-1}C_n^1+4^{n-2}C_n^2+...+C_n^n \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm

Bài 14 : Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{1!(n-1)!}+\frac{1}{3!(n-3)!}+\frac{1}{5!(n-5)!}+...+\frac{1}{(n-1)!1!}=\frac{n-1}{n!} \quad (1)$$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \frac{n!}{1!(n-1)!}+\frac{n!}{3!(n-3)!}+\frac{n!}{5!(n-5)!}+...+\frac{n!}{(n-1)!1!}=n-1$$

$\Leftrightarrow C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... + C_n^{n-1} = 2n - 1$

Ta có : $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$

Chọn x = 1 ta được :

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n \qquad (2)$$

Chọn x = -1 ta được :

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + ... + C_n^n \text{ do n chẵn} \qquad (3)$$

Lấy (2) trừ đi (3) vế theo vế được :

$$2^n = 2\left(C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... + C_n^{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... + C_n^{n-1} = 2^{n-1} \qquad \text{(đpcm)}$$

Cách 5 : Dùng đạo hàm cấp 1, cấp 2

1) Các bước giải :

+ B1: Chọn nhị thức Newton để khai triển

+ B2 : Lờy đạo hàm cấp 1, cấp 2 ở 2 vế của khai triển

+ B3 : Chọn a, b, x thích hợp

2) Nhận dạng đặc trưng của bài toán để chọn cách giải nhị thức :

a./ Vế trái của đẳng thức mất C_n^0 hoặc C_n^n $\left(C_{2n}^0 \text{ hoặc } C_{2n}^{2n}\right)$ đồng thời trong mỗi tổ hợp, hệ số đi với nó tăng hoặc giảm đều 1 đơn vị thì ta dùng đạo hàm cấp 1

b./ Vế trái của đẳng thức mất C_n^0 hoặc C_n^n $\left(C_{2n}^0 \text{ hoặc } C_{2n}^{2n}\right)$ đồng thời trong mỗi tổ hợp hệ số đi với nó là tích hai số nguyên liên tiếp thì ta dùng đạo hàm cấp 2

c./ Việc chọn đúng nhị thức Newton bằng cách dựa vào đặc trưng của cách 4, sau khi đã loại bỏ các đặc trưng của hàm

3) Chú ý : Một số bài toán chưa có sẵn đặc trưng mà ta phải phân tích để đưa về bài toán có đặc trưng rồi mới giải

Bài 1 : Chứng minh rằng

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n = n.2^{n-1}$$

Giải

Ta có : $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$

Lờy đạo hàm cấp 1 hai vế ta được :

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + ... + nC_n^n x^{n-1}$$

Chọn x = 1 ta được :

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n = n2^{n-1} \qquad \text{(đpcm)}$$

<u>Bài 2:</u> Chứng minh rằng :

$$1.C_n^1 - 2.C_n^2 + 3C_n^3 - ... + (-1)^n C_n^n = 0$$

Giải

Ta có : $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - C_n^3 x^3 + ... + (-1)^n C_n^n x^n$

Đạo hàm 2 vế ta được :

$$n(1-x)^{n-1} = -C_n^1 + 2C_n^2 x - 3C_n^3 x^2 + ... + n(-1)^n C_n^n x^{n-1}$$

Chọn x = 1 $\Rightarrow$ $0 = -C_n^1 + 2C_n^2 - 3C_n^3 + ... + n(-1)^n nC_n^n$

$\Rightarrow 1.C_n^1 - 2.C_n^2 + 3C_n^3 - ... + (-1)^n C_n^n = 0$ (đpcm)

Bài 3: Chứng minh rằng :

$$nC_n^0 - (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 - (n-3)C_n^3 + ... + (-1)^n C_n^{n-1} = 0$$

Giải

Ta có : $(x-1)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} - ... + (-1)^n C_n^{n-1} x + (-1)^n C_n^n$

Đạo hàm 2 vế:

$$n(x-1)^{n-1} = C_n^0 nx^{n-2} - C_n^1 (n-1)x^{n-3} - ... + (-1)^n C_n^{n-1}$$

Cho x = 1 ta được :

$$nC_n^0 - (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 - (n-3)C_n^3 + ... + (-1)^n C_n^{n-1} = 0 \quad \text{(đpcm)}$$

Bài 4: Chứng minh rằng

$$C_{2n}^1 + 3C_n^3 + ... + (2n-1)C_n^{2n-1} = 2C_{2n}^2 + 4C_{2n}^4 + ... + 2nC_{2n}^{2n}$$

Giải

Ta có : $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + ... + C_{2n}^{2n} x^{2n}$

Lấy đạo hàm cấp 1 hai vế ta được :

$$2n(1+x)^{2n-1} = C_{2n}^1 + 2C_{2n}^2 x + ... + 2nC_{2n}^{2n} x^{2n-1}$$

Chọn x = -1 ta được :

$$0 = C_{2n}^1 - 2C_{2n}^2 + ... + (2n-1)C_{2n}^{2n-1} - 2nC_{2n}^{2n}$$

$$\Leftrightarrow C_{2n}^1 - 3C_{2n}^3 + ... + (2n-1)C_{2n}^{2n-1} = 2C_{2n}^2 + 4C_{2n}^4 + ... + 2nC_{2n}^{2n} \quad \text{(đpcm)}$$

Bài 5: Chứng minh rằng :

$$(-1)^{n-1} C_n^1 + (-1)^{n-2} 2.2.C_n^2 + ... + (-1)^{n-1} k.2^{k-1} C_n^k + ... + n2^{n-1} C_n^n = n$$

Giải

Ta có : $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^k x^k + ... + C_n^n x^n$

Lấy đạo hàm cấp 1 hai vế :

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + ... + kC_n^k x^{k-1} + ... + nC_n^n x^{n-1}$$

Chọn x = -2 ta được :

$$n(1-2)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2(-2) + 3C_n^3(-2)^2 + ... + kC_n^k(-2)^{k-1} + ... + nC_n^n(-2)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow n(-1)^{n-1}(-1)^{n-1} = (-1)^{n-1} C_n^1 + (-1)^{n-2} 2.2C_n^2 + (-1)^{n-3} 2.3C_n^3 + ... +$$

$$+ (-1)^{n-k}.k.2^{k-1} C_n^k + ... + (-1)^{n-1}(-2)^{n-2}.n.C_n^n$$

$$\Leftrightarrow (-1)^{n-1} C_n^1 + (-1)^{n-2}.2.2.C_n^2 + (-1)^{n-3}.2.3.C_n^3 + ... + (-1)^{n-1}.k.2^{k-1} C_n^k + ... +$$

$$+ 2^{n-1}.nC_n^n = n \quad \text{(đpcm)}$$

Bài 6: Chứng minh rằng

$$n2^{n-1} C_n^0 + (n-1)2^{n-2} 3C_n^1 + (n-2)2^{n-3} 3^2 C_n^2 + ... + 3^{n-1} C_n^{n-1} = n.5^{n-1}$$

Giải

Ta có : $(x+3)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} 3 + C_n^2 x^{n-2} 3^2 + ... + C_n^n 3^n$

Lờy đạo hàm cấp 1 hai vế :

$$n(x+3)^{n-1} = nC_n^0 x^{n-1} + (n-1)C_n^1 x^{n-2} 3 + (n-2)C_n^2 x^{n-3} 3^2 + ... + C_n^{n-1} 3^{n-1}$$

Chọn x = 2 ta được :

$$n2^{n-1} C_n^0 + (n-1)2^{n-2} 3C_n^1 + (n-2)2^{n-3} 3^2 C_n^2 + ... + 3^{n-1} C_n^{n-1} = n.5^{n-1} \text{ (đpcm)}$$

Bài 7: Chứng minh rằng :

$$1.3^0.5^{n-1} C_n^{n-1} + 2.3^1.5^{n-2} C_n^{n-2} + 3.3^2 5^{n-3} C_n^{n-3} + ... + n.3^{n-1} C_n^0 = n.8^{n-1}$$

Giải

Ta có : $(a+x)^n = a^n C_n^n + a^{n-1} x C_n^{n-1} + a^{n-2} x^2 C_n^{n-2} + ... + x^n C_n^0$

Lờy đạo hàm cấp 1 hai vế ta được :

$$n(a+x)^{n-1} = a^{n-1} C_n^{n-1} + 2a^{n-2} x.C_n^{n-2} + ... + nx^{n-1} C_n^0$$

Chọn x = 3; a = 5, ta được :

$$1.3^0.5^{n-1} C_n^{n-1} + 2.3^1.5^{n-2} C_n^{n-2} + 3.3^2 5^{n-3} C_n^{n-3} + ... + n.3^{n-1} C_n^0 = n.8^{n-1} \text{ (đpcm)}$$

Bài 8: Chứng minh rằng

$$2.1.C_n^2 + 3.2.C_n^3 + 4.3.C_n^{n-2} + ... + n(n-1)C_n^n = n(n-1)2^{n-2}$$

Giải

Ta có : $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$

Lờy đạo hàm cấp 1:

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + ... + nC_n^n x^{n-1}$$

Lờy đạo hàm cấp 2:

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = 2C_n^2 + 3.2C_n^3 x + ... + n(n-1)C_n^n x^{n-2}$$

Chọn x = 1 ta được :

$$2.1.C_n^2 + 3.2.C_n^3 + 4.3.C_n^{n-2} + ... + n(n-1)C_n^n = n(n-1)2^{n-2} \text{ (đpcm)}$$

Bài 9 : Chứng minh rằng

$$n(n-1)3^{n-2} C_n^n + (n-1)(n-2)3^{n-3} 4^1 C_n^{n-1} + (n-2)(n-3)3^{n-4} 4^2 C_n^{n-2} + ... + 2.1.4^{n-2} C_n^2 = n(n-1)7^{n-2}$$

Giải

Ta có : $(x+4)^n = C_n^n x^n + C_n^{n-1} x^{n-1} 4 + C_n^{n-2} x^{n-2} 4^2 + C_n^{n-3} x^{n-3} 4^3 + ... + C_n^2 x^2 4^{n-2} + C_n^1 x 4^{n-1} + C_n^0 4^n$

Lấy đạo hàm cấp 1:

$$n(x+4)^{n-1} = nC_n^n x^{n-1} + (n-1)C_n^{n-1} x^{n-2} 4 + (n-2)C_n^{n-2} x^{n-3} 4^2 + (n-3)C_n^{n-3} x^{n-4} 4^3 + ... + 2C_n^2 x 4^{n-2} + C_n^1 4^{n-1}$$

Lấy đạo hàm cấp 2 :

$$n(n-1)(x+4)^{n-2} = n(n-1)C_n^n x^{n-2} + (n-1)(n-2)C_n^{n-1} x^{n-3} 4 +$$

$$(n-2)(n-3)C_n^{n-2}x^{n-4}4^2+(n-3)(n-4)x^{n-5}4^3+...+2C_n^2 4^{n-2}$$

Chọn x = 3 ta được :

$$n(n-1)3^{n-2}C_n^n+(n-1)(n-2)3^{n-3}4^1C_n^{n-1}+(n-2)(n-3)3^{n-4}4^2C_n^{n-2}+...+$$
$$+2.1.4^{n-2}C_n^2=n(n-1)7^{n-2} \quad \text{(đpcm)}$$

<u>Bài 11</u> Chứng minh rằng

$$C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+...+nC_n^{n-1}=(n+2)2^{n-1}$$

Giải

Cách a: Ta có :

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+...+C_n^nx^n$$
$$\Rightarrow x(1+x)^n=xC_n^0+C_n^1x^2+C_n^2x^3+C_n^3x^4+...+C_n^nx^{n+1}$$

Lấy đạo hàm cấp 1 hai vế :

$$(1+x)^n+nx(1+x)^{n-1}=C_n^0+2C_n^1x+3C_n^2x^2+4C_n^3x^3+...+(n+1)C_n^nx^n$$

Chọn x = 1 ta được :

$$2^n+n2^{n-1}=C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+...+(n+1)C_n^n$$
$$\Leftrightarrow C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+...+nC_n^{n-1}=(n+2)2^{n-1} \text{ (đpcm)}$$

Cách b: Tách làm 2 đẳng thức :

Ta có : T = $C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+...+(n+1)C_n^n$

$$=C_n^0+(1+1)C_n^1+(2+1)C_n^2+...+(n+1)C_n^n$$
$$=\Big(\underbrace{C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+nC_n^n}_{T_1}\Big)+\Big(\underbrace{C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n}_{T_2}\Big)=T_1+T_2$$

Ta có : $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+...+C_n^nx^n$ (*)

Lấy đạo hàm hai vế ta được :

$$n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+...+nC_n^nx^{n-1}$$

Chọn x = 1 ta được :

$$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+nC_n^n=n2^{n-1} \Rightarrow T_1=n.2^{n-1}$$

Chọn x = 1 thay vào khai triển (*) ta được :

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=2^n \Rightarrow T_2=2^n$$

Do vậy : $T = T_1 + T_2 = n.2^{n-1} + 2^n = (n + 2)2^{n-1} \Rightarrow$ (đpcm)

<u>Bài 12 :</u> Chứng minh rằng :

$$1^1C_n^1+2^2C_n^2+3^3C_n^3+...+k^kC_n^k+...+n^nC_n^n=n(n+1)2^{n-2}$$

Giải

Ta có : T = $1^1C_n^1+2^2C_n^2+3^3C_n^3+...+k^kC_n^k+...+n^nC_n^n$

$$=C_n^1+(1+1)2C_n^2+(2+1)3C_n^3+...+[(k-1)+1]kC_n^k+...+[(n-1)+1]nC_n^n$$
$$=\left[1.2.C_n^2+2.3.C_n^3+3.4.C_n^4+...+(n-1)n.C_n^n\right]+\left[C_n^1+2C_n^2+3C_n^3...+nC_n^n\right]$$
$$=T_1+T_2$$
$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+...+C_n^nx^n$$

Lấy đạo hàm cấp 1 :

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + ... + nC_n^n x^{n-1} \qquad (*)$$

Lấy đạo hàm cấp 2:

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = 2C_n^2 + 3.2.C_n^3 + ... + n.(n-1)C_n^n x^{n-2}$$

Chọn x = 1 ta được :

$$T_1 = 1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + ... + n(n-1)C_n^n$$

Thay x = 1 vào hai vế của (*) ta được :

$$T_2 = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n = n.2^{n-1}$$

Do đó : $T = T_1 + T_2 = n(n-1)2^{n-2} + n.2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2} \Rightarrow$ (đpcm)

Cách 6: Dùng tích phân

1) Các bước giải :

+ B_1 : Chọn khai triển nhị thức Newton

+ B_2 : Lấy tích phân hai vế với cận thích hợp

+ B_3 : tính tích phân hai vế $\Rightarrow$ kết quả

2) Nhận dạng đặc trưng của bài toán để chọn cácnh giải

a./ Vế trái của đẳng thức có chứa C_n^0 và C_n^n (hoặc C_{2n}^0 và C_{2n}^{2n}) đồng thời mẫu số trong mỗi tổ hợp tăng hoặc giảm một đơn vị

b./ Mỗi hệ số trong tổ hợp có dạng : $b^{n-k} - a^{n-k}$ ta chọn cận tích phân là $\int_a^b$

c./ Chọn đúng nhị thức Newton dựa vào cách 4, sau khi đã loại đi các đặc trưng của tích phân

<u>Bài 1 :</u> Chứng minh rằng

$$C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right)$$

Giải

Ta có : $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + ... + C_n^n x^n$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 \left(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + ... + C_n^n x^n\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\Big|_0^2 = \left(C_n^0 + \frac{x^2}{2}C_n^1 + \frac{x^3}{3}C_{nn}^2 + ... + \frac{x^{n+1}}{n+1}C_n^n\right)\Bigg|_0^2$$

$$\Leftrightarrow 2C_n^0 + \frac{2^2}{2}C_n^1 + \frac{2^3}{3}C_n^2 + ... + \frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n = \frac{3^{n+1}-1}{n+1} \quad \text{(đpcm)}$$

<u>Bài 4:</u> Chứng minh rằng :

$$\frac{2^1-1}{1}C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + ... + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n = \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$$

Giải

Ta có : $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + ... + C_n^n x^n$

$$\Rightarrow \int_1^2 (1+x)^n dx = \int_1^2 \left(C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + ... + C_n^n x^n\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}\Big|_1^2 = \left(C_n^0 x + \frac{x^2}{2}C_n^1 + \frac{x^3}{3}C_n^2 + ... + \frac{x^{n+1}}{n+1}C_n^n\right)\Big|_1^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^1-1}{1}C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + ... + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n = \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1} \text{ (dpcm)}$$

<u>Bài 5</u> : Chứng minh rằng :

$$2C_{2n}^0 + \frac{2}{3}C_{2n}^2 + \frac{2}{5}C_{2n}^4 + ... + \frac{2}{2n+1}C_{2n}^{2n} = \frac{2^{2n+1}}{2n+1}$$

Giải

Ta có : $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + C_{2n}^3 x^3 + ... + C_{2n}^{2n} x^{2n}$

$$\int_{-1}^1 (1+x)^{2n} dx = \int_{-1}^1 \left(C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + C_{2n}^3 x^3 + ... + C_{2n}^{2n} x^{2n}\right) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2n+1}(1+x)^{2n+1}\Big|_{-1}^1 = \left(C_{2n}^0 x + \frac{x^2}{2}C_{2n}^1 + \frac{x^3}{3}C_{2n}^2 + ... + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}C_{2n}^{2n}\right)\Big|_{-1}^1$$

$$2C_{2n}^0 + \frac{2}{3}C_{2n}^2 + \frac{2}{5}C_{2n}^4 + ... + \frac{2}{2n+1}C_{2n}^{2n} = \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \qquad \text{(đpcm)}$$

<u>Bài 6.</u> Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{2}C_n^0 + \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 + ... + \frac{1}{2n+2}C_n^n = \frac{2^{2n+1}-1}{2(n+1)}$$

Giải

Ta có : $(1+x^2)^n = C_n^0 + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^4 + C_n^3 x^6 + ... + C_n^n x^{2n}$

$$\Rightarrow x(1+x^2)^n = xC_n^0 + C_n^1 x^3 + C_n^2 x^5 + C_n^3 x^7 + ... + C_n^n x^{2n+1}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x(1+x^2)^n = \int_0^1 \left(xC_n^0 + C_n^1 x^3 + C_n^2 x^5 + C_n^3 x^7 + ... + C_n^n x^{2n+1}\right) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 (1+x^2)(1+x^2)^n dx = \left(\frac{x^2}{2}C_n^0 + \frac{x^4}{4}C_n^1 + \frac{x^6}{6}C_n^2 + \frac{x^8}{8}C_n^3 + ... + \frac{x^{2n+2}}{2}C_n^n\right)\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2(2n+1)}(1+x^2)^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}C_n^0 + \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 + ... + \frac{1}{2n+2}C_n^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}C_n^0 + \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 + ... + \frac{1}{2n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{2(n+1)} \qquad \text{(dpcm)}$$

<u>Bài 7 :</u> Chứng minh rằng :

$$C_{2003}^0 + \frac{1}{3}C_{2003}^1 + ... + \frac{1}{2003}C_{2003}^{2002} = \frac{2^{2003}}{2004}$$

Giải

Ta có : $(1+x)^{2n+1} + C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 x + C_{2n+1}^2 x^2 + C_{2n+1}^3 x^3 + ... + C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1}$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 (1+x)^{2n+1} dx = \int_{-1}^1 \left(C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 x + C_{2n+1}^2 x^2 + C_{2n+1}^3 x^3 + ... + C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1}\right) dx$$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{(1+x)^{2n+2}}{2n+2}\right|_{-1}^{1} = \left.\left(xC_{2n+1}^{0} + \frac{x^2}{2}C_{2n+1}^{1} + \frac{x^3}{3}C_{2n+1}^{2} + \frac{x^4}{4}C_{2n+1}^{3} + ... + \frac{x^{2n+2}}{2n+2}C_{2n+1}^{2n+1}\right)\right|_{-1}^{1}$$

$$\Leftrightarrow 2C_{2n+1}^{0} + \frac{2}{3}C_{2n+1}^{2} + ... + \frac{2}{2n+1}C_{2n+1}^{2n} = \frac{2^{2n+2}}{2n+2}$$

Chọn n = 1001 ta được :

$$2C_{2003}^{0} + \frac{2}{3}C_{2003}^{2} + ... + \frac{2}{2003}C_{2003}^{2003} = \frac{2^{2004}}{2004}$$

$$\Leftrightarrow C_{2003}^{0} + \frac{1}{3}C_{2003}^{1} + ... + \frac{1}{2003}C_{2003}^{2002} = \frac{2^{2003}}{2004} \quad \text{(dpcm)}$$

<u>Bài 8:</u> Chứng mnh rằng :

$$\frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{6}C_n^1 + \frac{1}{9}C_n^2 + ... + \frac{1}{3n+3}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$$

Giải

Ta có : $(1+x^3)^n = C_n^0 + C_n^1x^3 + C_n^2x^6 + C_n^3x^9 + ... + C_n^nx^{3n}$

$$x^2(1+x^3)^n = x^2C_n^0 + C_n^1x^5 + C_n^2x^8 + C_n^3x^{11} + ... + C_n^n c^{3n+2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2(1+x^3)^n dx = \int_0^1 \left(x^2C_n^0 + C_n^1x^5 + C_n^2x^8 + C_n^3x^{11} + ... + C_n^nx^{3n+2}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_0^1 (1+x^3)(1+x^3)^n dx = \left.\left(\frac{x^3}{3}C_n^0 + \frac{x^61}{6}C_n^1 + \frac{x^9}{9}C_n^2 + \frac{x^{12}}{12}C_n^3 + ... + \frac{x^{3n+3}}{3n+3}C_n^{3n+2}\right)\right|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{(1+x^3)^{n+1}}{3(n+1)}\right|_0^1 = \frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{6}C_n^1 + \frac{1}{9}C_n^2 + ... + \frac{1}{3n+3}C_n^m$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{6}C_n^1 + \frac{1}{9}C_n^2 + ... + \frac{1}{3n+3}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)} \quad \text{(dpcm)}$$

<u>Bài 10:</u> Tính tích phân : $\mathrm{I} = \int_0^1 x(1-x^2)^n dx \quad (\mathrm{n} \in \mathrm{Z}^+)$. Từ đó chứng minh rằng :

$$\frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 - \frac{1}{8}C_n^3 + ... + \frac{(-1)^n}{2(n+1)}C_n^n = \frac{1}{2(n+1)}$$

Giải

Ta có : $\mathrm{I} = \int_0^1 x(1-x^2)^n dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)d(1-x^2)$

$$= -\frac{1}{2}\left.\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{2(n+1)} \qquad (1)$$

Ta có :

$$(1-x^2)^n = C_n^0 - C_n^1x^2 + C_n^2x^4 - C_n^3x^6 + ... + (-1)^n C_n^n x^{2n}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)^n = C_n^0x - C_n^1x^3 + C_n^2x^5 - C_n^3x^7 + ... + (-1)^n C_n^n x^{2n+1}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x(1-x^2)^n dx = \int_0^1 xC_n^0dx - \int_0^1 C_n^1x^3dx + \int_0^1 C_n^2x^5dx - \int_0^1 C_n^3x^7dx + ... + (-1)^n\int_0^1 C_n^nx^{2n+1}dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x\left(1-x^2\right)^n dx = C_n^0 \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 - C_n^1 \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 + C_n^2 \left.\frac{x^6}{6}\right|_0^1 - C_n^3 \left.\frac{x^8}{8}\right|_0^1 + ... + (-1)^n C_n^n \left.\frac{2^{2n+2}}{2n+2}\right|_0^1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 - \frac{1}{8}C_n^3 + ... + (-1)^n \frac{1}{2n+2}C_n^n \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$\frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 - \frac{1}{8}C_n^3 + ... + \frac{(-1)^n}{2(n+1)}C_n^n = \frac{1}{2(n+1)} \qquad \text{(dpcm)}$$

Dạng 3: Tính tổng một biểu thức chứa C_n^k

* nhận xét :

1./ Tính tổng một biểu thức có chứa C_n^k hay chứng minh một đẳng thức có chứa C_n^k gần giống nhau.

2./ Sự khác nhau giữa chúng là ở dạng 2, biết trước được kết quả(tức là đều phải chứng minh), còn ở dạng 3 chưa biết trước được kết quả.

3./ Vì thế cách nhận dạng đặc trưng của bài toán để chọn cách giải giống như các đặc trưng của dạng 2

Do tính phổ dụng nên chúng ta chỉ đề cập đến 3 cách giải ở dạng này là cách 4, cách 5 và cách 6 ở dạng 2.

Cách 4: Khai triển nhị thức Newton $(a+b)^n$; $(a+bx)^n$. Sau đó chọn a,b, x thích hợp

Bài 1: Tính tổng : $S = C_{2004}^0 + C_{2004}^1 + C_{2004}^2 + ... + C_{2004}^{2004}$

Giải

Ta có: $(1+x)^{2004} = C_{2004}^0 + C_{2004}^1 x + C_{2004}^2 x^2 + C_{2004}^3 x^3 + ... + C_{2004}^{2004} x^{2004}$

Chọn x = 1 ta được : $S = 2^{2004}$

Bài 2 : Tính tổng : $S = C_{2004}^0 + 2C_{2004}^1 + 3C_{2004}^2 + ... + 2005C_{2004}^{2004}$

Giải

Cách a: Tách thành hai tổng :

Ta có: $S = \left(C_{2004}^0 + C_{2004}^1 + C_{2004}^2 + ... + C_{2004}^{2004}\right) + \left(C_{2004}^1 + 2C_{2004}^2 + 3C_{2004}^3 + ... + 2004C_{2004}^{2004}\right)$

$= S_1 + S_2$

Ta có : $(1+x)^{2004} = C_{2004}^0 + C_{2004}^1 x + C_{2004}^2 x^2 + ... + C_{2004}^{2004} x^{2004} \qquad (*)$

Chọn x = 1 ta được : $S_1 = 2^{2004}$

Lấy đạo hàm cấp 1 hai vế của (*) :

$$2004(1+x)^{2003} = C_{2004}^1 + 2C_{2004}^2 x + ... + 2004C_{2004}^{2004} x^{2003}$$

Chọn x = 1 ta được : $S_2 = 2004.2^{2003}$

Vậy : $S = 2^{2004} + 2004.2^{2003} = 2^{2003}.2006$

Cách b :

Ta có : $(1+x)^{2004} = C_{2004}^0 + C_{2004}^1 x + C_{2004}^2 x^2 + ... + C_{2004}^{2004} x^{2004}$

$$\Rightarrow x(1+x)^{2004} = C_{2004}^0 x + C_{2004}^1 x^2 + C_{2004}^2 x^3 + ... + C_{2004}^{2004} x^{2005}$$

Lấy đạo hàm hai vế :

$$(1+x)^{2004} + 2004x(1+x)^{2003} = C_{2004}^0 + 2xC_{2004}^1 + 3x^2C_{2004}^2 + ... + 2005x^{2004}C_{2004}^{2004}$$

Chọn x = 1 ta được :

$$S = 2^{2004} + 2004.2^{2003} = 2^{2003}.2006$$

Bài 3: Tính tổng : $S = C_n^0 + C_n^1.3^1 + C_n^2.3^2 + ... + C_n^n.3^n$

Giải

Ta có : $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + ... + C_n^n x^n$

Chọn x = 3 ta được : $S = 4^n$

Bài 4 : Tính các tổng sau :

a) $S_1 = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + ... + C_{2n}^{2n}$

b) $S_2 = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + ... + C_{2n}^{2n-1}$

Giải

a) Ta có : $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + ... + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n}$

Chọn x = 1 ta được :

$$2^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + ... + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} \quad (1)$$

Chọn x = -1 ta được :

$$0 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + ... - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} \quad (2)$$

Lấy (1) cộng với (2) ta được :

$$2^{2n} = 2\left(C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + ... + C_{2n}^{2n}\right) \Rightarrow S_1 = 2^{2n-1}$$

b) Lấy (1) trừ đi (2) ta được :

$$2^{2n} = 2\left(C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + ... + C_{2n}^{2n-1}\right) \Rightarrow S_1 = 2^{2n-1}$$

Bài 5 : Tính S = $C_{2004}^0 + 3^2 C_{2004}^2 + 3^4 C_{2004}^4 + ... + 3^{2004} C_{2004}^{2004}$

Giải

Ta có : $(1+x)^{2004} = C_{2004}^0 + C_{2004}^1 x + C_{2004}^2 x^2 + ... + C_{2004}^{2004} x^{2004}$

Chọn x = 3 ta được :

$$4^{2004} = C_{2004}^0 + C_{2004}^1.3^1 + C_{2004}^2.3^2 + ... + C_{2004}^{2004}.3^{2004}$$

Chọn x = -3 ta được :

$$2^{2004} = C_{2004}^0 - C_{2004}^1.3^1 + C_{2004}^2.3^2 - ... + C_{2004}^{2004}.3^{2004}$$

Cộng vế theo vế hai đẳng thức trên ta được :

$$4^{2004} + 2^{2004} = 2\left(C_{2004}^0 + C_{2004}^2.3^2 + C_{2004}^4.3^4 + ... + C_{2004}^{2004}.3^{2004}\right)$$

$$S = \frac{2^{2008} + 2^{2004}}{2} = 2^{2004}\left(2^{2003} - 1\right)$$

<u>Bài 6 :</u> Tính tổng : S = $C_{11}^5 + C_{11}^6 + C_{11}^7 + C_{11}^8 + C_{11}^9 + C_{11}^{10} + C_{11}^{11}$

Giải

Ta có : S = $C_{11}^5 + S_1$ với $S_1 = C_{11}^6 + C_{11}^7 + C_{11}^8 + C_{11}^9 + C_{11}^{10} + C_{11}^{11}$

Theo công thức : $C_n^k = C_n^{n-k}$ nen :

$$S_1 = S_2 = C_{11}^0 + C_{11}^1 + C_{11}^2 + C_{11}^3 + C_{11}^4 + C_{11}^5$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = C_{11}^0 + C_{11}^1 + C_{11}^2 + C_{11}^3 + C_{11}^4 + C_{11}^5 + C_{11}^6 + C_{11}^7 + C_{11}^8 + C_{11}^9 + C_{11}^{10} + C_{11}^{11}$$

$$(1+x)^{11} = C_{11}^0 + C_{11}^1 x + C_{11}^2 x^2 + C_{11}^3 x^3 + ... + C_{11}^{11} x^{11}$$

Chọn x = 1 ta được :

$$2^{11} = C_{11}^0 + C_{11}^1 + C_{11}^2 + C_{11}^3 + C_{11}^4 + C_{11}^5 + C_{11}^6 + C_{11}^7 + C_{11}^8 + C_{11}^9 + C_{11}^{10} + C_{11}^{11}$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = 2^{11}$$

Mà $S_1 = S_2$ nên $S_1 = 2^{10}$

Do đó : S = $C_n^5 + S_1 = C_{11}^5 + 2^{10} = 1486$

Bài 7 : Tính tổng $S = C_n^1 + 3.C_n^2 + 7.C_n^3 + ... + (2^n - 1)C_n^n$

Giải

Cách a : Tách thành 2 tích :

Ta có : $S = C_n^1 + (2^2 - 1)C_n^2 + (2^3 - 1)C_n^3 + ... + (2^n - 1)C_n^n$

$$= (2^1 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + 2^3 C_n^3 + ... + 2^n C_n^n) - (C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^n)$$

$$= (2^0 C_n^0 + 2^1 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + ... + 2^n C_n^n) - (C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n)$$

$= S_1 + S_2$

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + ... + C_n^n x^n$$

Chọn x = 2 ta được :

$$C_n^0 + C_n^1 2^1 + C_n^2 2^2 + ... + C_n^n 2^n = 3^n \Leftrightarrow S_1 = 3^n$$

Chọn x = 1 ta được :

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n \Leftrightarrow S_2 = 2^n$$

Vậy $S = 3^n — 2^n$

Cách b: lấy đạo hàm và tích phân

Ta có : $(1+x)^{n0} = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + ... + C_n^n x^n$

Lấy đạo hàm cấp 1:

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + ... + nC_n^n x^{n-1}$$

Lấy tích phân 2 vế :

$$n\int_1^2 (1+x)^{n-1} dx = \int_1^2 (C_n^1 + 2xC_n^2 + 3x^2 C_n^3 + ... + nx^{n-1} C_n^n) dx$$

$$\Leftrightarrow (1+x)^n \Big|_1^2 = (xC_n^1 + x^2 C_n^2 + x^3 C_n^3 + ... + x^n C_n^n)\Big|_1^2$$

$$\Leftrightarrow (2^1 - 1)C_n^1 + (2^2 - 1)C_n^2 + (2^3 - 1)C_n^3 + ... + (2^n - 1)C_n^n = 3^n - 2^n$$

Vậy $S = 3^n — 2^n$

Bài 8 : Tính tổng S = $2^n C_n^0 + 2^{n-1} 5^1 C_n^1 + 2^{n-1} 5^2 C_n^2 + ... + 5^n C_n^n$

Giải

Ta có : $(a+x)^n = a^n C_n^0 + a^{n-1} x C_n^1 + a^{n-2} x^2 C_n^2 + ... + x^n C_n^n$

Chọn a = 2; x = 5 ta được :

$$2^n C_n^0 + 2^{n-1} 5 C_n^1 + 2^{n-2} 5^2 C_n^2 + ... + 5^n C_n^n = 7^n$$

Vậy $S = 7^n$

Bài 9 : Tính tổng : S = $C_{2004}^0 + 3C_{2004}^1 + 4C_{2004}^2 + 5C_{2004}^3 + ... + 2006C_{2004}^{2004}$

Giải

Cách a: Tách thành hai tổng :

Ta có :

$$S = C_{2004}^{0} + (1+2)C_{2004}^{1} + (2+2)C_{2004}^{2} + (2+3)C_{2004}^{3} + ... + (2+2004)C_{2004}^{2004}$$
$$= \left(C_{2004}^{1} + 2C_{2004}^{2} + 3C_{2004}^{3} + ... + 2004C_{2004}^{2004}\right)$$
$$+ 2\left(C_{2004}^{0} + C_{2004}^{1} + C_{2004}^{2} + ... + C_{2004}^{2004}\right) - C_{2004}^{0}$$
$$= S_1 + 2S_2 - 1$$

$$(1+x)^{2004} = C_{2004}^{0} + C_{2004}^{1}x + C_{2004}^{2}x^2 + C_{2004}^{3}x^3 + ... + C_{2004}^{2004}x^{2004} \qquad (*)$$

Lấy đạo hàm hai vế :

$$2004(1+x)^{2003} = C_{2004}^{1} + 2C_{2004}^{2}x + 3C_{2004}^{3}x^2 + ... + 2004C_{2004}^{4}x^{2003}$$

Chọn x = 1 ta được

$$C_{2004}^{1} + 2C_{2004}^{2} + 3C_{2004}^{3} + ... + 2004C_{2004}^{2004} = 2004.2^{2003}$$
$$\Leftrightarrow S_1 = 2004.2^{2003}$$

Chọn x = 1 thay vào (*) ta được :

$$C_{2004}^{0} + C_{2004}^{1} + C_{2004}^{2} + ... + C_{2004}^{2004} = 2^{2004}$$
$$S_2 = 2^{2004}$$

Vậy $S = 2004.2^{2003} + 2.2^{2004} - 1$

Cách b : Dùng đạo hàm sau khi nhân thêm với x^2 :

Ta có : $(1+x)^{2004} = C_{2004}^{0} + C_{2004}^{1}x + C_{2004}^{2}x^2 + C_{2004}^{3}x^3 + ... + C_{2004}^{2004}x^{2004}$

$$\Rightarrow x^2(1+x)^{2004} = C_{2004}^{0}x^2 + C_{2004}^{1}x^3 + C_{2004}^{2}x^4 + C_{2004}^{3}x^5 + ... + C_{2004}^{2004}x^{2006}$$

Lấy đạo hàm hai vế ta được

$$2x(1+x)^{2004} = 2C_{2004}^{0}x + 3C_{2004}^{1}x^2 + 4C_{2004}^{3}x^3 + 5C_{2004}^{4}x^4 + ... + 2006C_{2004}^{2004}x^{2005}$$

Chọn x = 1 ta được :

$$2C_{2004}^{0} + 3C_{2004}^{1} + 4C_{2004}^{2} + 5C_{2004}^{3} + ... + 2006C_{2004}^{2004}$$
$$\Rightarrow S = C_{2004}^{0} + 3C_{2004}^{1} + 4C_{2004}^{2} + ... + 2006C_{2004}^{2004} = 2.2^{2004} + 2004.2^{2003} - 1$$

Bài 10 : Tính

$$A = 2^nC_n^0 + 2^{n-2}C_n^2 + 2^{n-4}C_n^4 + ...$$
$$B = 2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-3}C_n^3 + 2^{n-5}C_n^5 + ...$$

Giải

Ta có : $(x+1)^n = x^nC_n^0 + x^{n-1}C_n^1 + x^{n-2}C_n^2 + x^{n-3}C_n^3 + ...$

Chọn x = 2 ta được : $3^n = 2^nC_n^0 + 2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-2}C_n^2 + ...$

$$\Leftrightarrow 3^n = \left(2^nC_n^0 + 2^{n-2}C_n^2 + 2^{n-4}C_n^4 + ...\right) + \left(2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-3}C_n^3 + 2^{n-5}C_n^5 + ...\right)$$
$$\Leftrightarrow 3^n = A + B \quad (1)$$

Mặt khác : $(x-1)^n = x^nC_n^0 - x^{n-1}C_n^1 + x^{n-2}C_n^2 - x^{n-3}C_n^3 + ...$

$$\Leftrightarrow (x-1)^n + x^{n-1}C_n^1 + x^{n-3}C_n^3 + ... = x^nC_n^0 + x^{n-2}C_n^2 + x^{n-4}C_n^4 + ...$$

Chọn x = 2 ta được :

$$1+2^{n-1}C_n^1+2^{n-3}C_n^3+...=2^nC_n^0+2^{n-2}C_n^2+2^{n-4}C_n^4+...$$

$$\Leftrightarrow 1+B=A \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có : $\begin{cases} A+B=3^n \\ A=B+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2}(3^n+1) \\ B=\frac{1}{2}(3^n-1) \end{cases}$

Cách 5 Dùng đạo hàm

Bài 1: Tính tổng : $S=18C_{18}^0+17C_{18}^1+16C_{18}^2+...+C_{18}^{17}$

Giải

Ta có : $(1+x)^{18}=C_{18}^0x^{18}+C_{18}^1x^{17}+C_{18}^2x^{16}+...+C_{18}^{18}$

Lấy đạo hàm hai vế :

$$18(1+x)^{17}=18C_{18}^0C_{18}^{17}+17C_{18}^1x^{16}+16C_{18}^2x^{15}+....C_{18}^{17}$$

Chọn x = 1 ta được :

$$18C_{18}^0+17C_{18}^1+16C_{18}^2+...+C_{18}^{17}=18.2^{17}$$

Vậy $S=18.2^{17}$

Bài 2 Tính tổng :

$$S=2004.3^{2003}C_{2004}^0+2003.3^{2002}C_{2004}^1+2002.3^{2001}C_{2004}^2+...+C_{2004}^{2003}$$

Giải

Ta có : $(x+1)^{2004}=x^{2004}C_{2004}^0+x^{2003}C_{2004}^1+x^{2002}C_{2004}^2+x^{2001}C_{2004}^3+...+C_{2004}^{2004}$

Lấy đạo hàm cấp 1 hai vế :

$$2004(x+1)^{2003}=2004.x^{2003}C_{2004}^0+2003x^{2002}C_{2004}^1+2002.x^{2001}C_{2004}^2+...+C_{2004}^{2003}$$

Chọn x = 3 ta được : $S=2004.4^{2003}$

Dang 4 : Tìm một số hạng hoặc hệ số của số hạng .

Phương pháp :

☞Viết hệ thức newton dưới dạng tổng quát : $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-1}b^k$

☞Tính tổng số mũ của xvà y

☞ Dựa vào giả thiết để tính k . Từ đó suy ra số hoặc hệ số cần tìm

Bài tập :

Bài 1 :a. Tìm hệ số của số hạng x^4 trong khai triển : $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$

b. Tìm hệ số của số hạng x^{31} trong khai triển : $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{40}$

c. Tìm hệ số của số hạng x^{43} trong khai triển : $\left(\sqrt{x^5}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^{21}$

d. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển : $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{7}$

HD : Ta có $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}x^{10-k}\left(\frac{1}{x}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^{k}x^{10-2k}$. Theo đề ra : 10-2k=4 $\Rightarrow k=3$

Vậy hệ số chứa x^4 là $C_{10}^{3}=120$

b. ĐS : $C_{40}^{3}=9880$ c. $C_{21}^{3}=1330$. d. $C_7^4=35$

Bài 2 : biết rằng trong khai triển $\left(x-\frac{1}{3}\right)^{n}$ có hệ số của số hạng thứ 3 bằng 5 . Hãy tìm số hạng chính giữa của khai triển trên .

HD : Ta có : $\left(x-\frac{1}{3}\right)^{n}=C_n^0x^n-C_n^1x^{n-1}\frac{1}{3}+C_n^2x^{n-2}\frac{1}{9}-....$

Theo giả thiết : gệ số của số hạng thứ 3 trong khai triển trên là :

$\frac{1}{9}C_n^2=5\Leftrightarrow\frac{n!}{2!(n-2)!}=45\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=10\\n=-9\end{array}\right.$. Khi đó n=10 thì khai triển $\left(x-\frac{1}{3}\right)^{10}$ sẻ có 11 số hạng

Do đó số hạng chính giửa là số hạng thứ 6 và số hạng đó là : $C_{10}^{5}x^5\left(-\frac{1}{3}\right)^{3}=-\frac{28}{27}x^5$

Bài 3 : Cho khai triển $(\sqrt{x^3}+\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}})^n$. Biết tổng hệ số của ba số hạng đầu tiên trong khai triển trên bằng 631. Tìm hệ số của số hạng có chứa x^5

HD : $(\sqrt{x^3}+\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}})^n=C_n^0x^{\frac{3n}{2}}+C_n^1x^{\frac{3(n-1)}{2}}.\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}+C_n^2x^{\frac{3(n-2)}{2}}.\frac{3^2}{\sqrt[3]{x^4}}+...+$

Tổng số hạng của ba số hạng đầu tiên là :

$C_n^0+3C_n^1+9C_n^2=631\Leftrightarrow 1+3n+9\frac{n!}{2!(n-2)!}=631\Leftrightarrow n=12$. Khi đó :

$(\sqrt{x^3}+\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}})^n=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^{k}\left(\sqrt{x^3}\right)^{12-k}\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^{k}x^{18-\frac{13k}{6.}}.3^k$. Theo giả thiết : $18-\frac{13k}{6}=5\Leftrightarrow k=6$

Vậy hệ số của x^5 là $C_{12}^{6}3^6$

Bài 4 : Biết tổng hệ số của 3 số hạng đầu tiên trong khai triển : $\left(x\sqrt[3]{3}+\frac{1}{\sqrt[15]{x^{28}}}\right)^n$ bằng 79 . Tìm số hạng không phụ thuộc vào x

HD : tổng hệ số của 3 số hạng đầu tiên của khai triển là: $C_n^0+C_n^1+C_n^2=79 \Leftrightarrow n=12$

Khi đó khai triển là : $\left(x\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[15]{x^{28}}}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k\left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{12-k}.x^{-\frac{28}{15}}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k x^{\left(16-\frac{48k}{15}\right)}$. Theo giả thiết : 16- $\frac{48k}{15}=0 \Leftrightarrow k=5$, Vậy số hạng không chứa x là 792

Bài 4 : tìm hệ số x^8 trong khai triển : $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n$. Biết rằng : $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^n=70n+3$

Theo giả thiết : $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^n=70n+3 \Leftrightarrow \frac{(n+4)!}{3!(n+1)!}-\frac{(n+3)!}{3!n!}=7(n+3) \Leftrightarrow n=12$

Khi đó : $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n=\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^{12}=\left(x\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[15]{x^{28}}}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k x^{-3k}.x^{\frac{5}{2}(12-k)}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^k x^{\left(30-\frac{11k}{2}\right)}$

<u>Măt khác :</u> theo giả thiết $30-\frac{11k}{2}=8 \Leftrightarrow k=4$. Vậy hệ số của x^8 là :495

Bài 5 : Biết tổng các hệ số trong khai triển $\left(1+x^2\right)^n$ bằng 1024. Tìm hệ số x^{12}

Ta có : $\left(1+x^2\right)^n=C_n^0+C_n^1x^2+C_n^2x^4+...+C_n^nx^{2n}$. Tổng các hệ số :
$C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=1024 \Leftrightarrow 2^n=2^{10}$, khi đó : $\left(1+x^2\right)^n=\left(1+x^2\right)^{10}==\sum_{k=0}^{10}C_{10}^kx^{2k}$. Suy ra : k=6

Bài 6 : Biết tổng trong khai triển $(1+2x)^n$ bằng 6561. tìm hệ số của x^4

ĐS : $C_8^4 2^4$=1120

Bài 7 : Tìm hệ số x^6y^2 trong khai triển : $\left(\sqrt{xy}+\frac{x}{y}\right)^{10}$.

Ta có : $\left(\sqrt{xy}+\frac{x}{y}\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k(x.y)^{\frac{10-k}{2}}\left(\frac{x}{y}\right)^k=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k(x)^{\frac{10+k}{2}}\ y^{\frac{10-3k}{2}}$

Theo đề rat a có : $\begin{cases}\frac{10+k}{2}=6\\ \frac{10-3k}{2}=2\end{cases} \Leftrightarrow k=2$. Vây hệ số : $C_{10}^2=45$

Bài 8 : Cho khai triển : $\left(\sqrt[3]{xy^2}+\sqrt{xy}\right)^{12}$. Tìm số hạng chứa x, y sao cho số mũ của x , y là các số nguyên .

Ta có $\left(\sqrt[3]{xy^2}+\sqrt{xy}\right)^{12} = =\sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \left(x.y^2\right)^{\frac{12-k}{3}} (xy)^{\frac{k}{2}} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (x)^{\frac{24+k}{6}} \ y^{\frac{48-k}{6}}$

Chọn k thoã mãn : $\begin{cases} 0 \le k \le 12 \\ \frac{24+k}{6} \in Z \\ \frac{48-k}{6} \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=0 \\ k=6 \\ k=12 \end{array}\right.$. Vậy các số hạng cần tìm : $C_{12}^0 x^4 y^8; C_{12}^6 x^5 y^7; C_{12}^{12} x^6 y^6$

Bài 8 : tìm các hạng tử là cá số nguyên : $(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})^{19}$

Ta có : $(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})^{19} = =\sum_{k=0}^{19} C_{19}^k \left(\sqrt{3}\right)^{19-k} \left(\sqrt[3]{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{19} C_{19}^k (3)^{\frac{19-k}{2}} (2)^{\frac{k}{3}}$. để các hạng tử là các số nguyên thì :

$$\begin{cases} k \in N \\ 0 \le k \le 19 \\ \frac{19-k}{2} \in N \\ \frac{k}{3} \in N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m; k \in N \\ 0 \le k \le 19 \\ \frac{19-k}{2} \in N \\ k = 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m; k \in N \\ 0 \le k \le 19; 0 \le 3m \le 19 \\ \frac{19-3m}{2} \in N \\ k = 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m; k \in N \\ 0 \le m \le 6 \\ \frac{19-3m}{2} \in N \\ k \in N \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \Rightarrow k=3 \\ m=3 \Rightarrow k=9 \\ m=5 \Rightarrow k=15 \end{array}\right.$$

Bài 9 : Tìm hệ số của x^8 trong khai triển : $\left[1+x^2(1-x)\right]^8$`

Ta có :

$$\left[1+x^2(1-x)\right]^8 = \sum_{k=0}^{8} C_8^k \left[x^2(1-x)\right]^k = \sum_{k=0}^{8} C_8^k x^{2k} (1-x)^k = \sum_{k=0}^{8} C_8^k x^{2k} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i x^i \ \sum_{k=0}^{8} \ \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_8^k C_k^i x^{2k+i}$$

Theo giả thiết : $\begin{cases} 0 \le i \le k \le 8 \\ i; k \in N \\ 2k+i=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le i \le k \le 4 \\ i; k \in N \\ 2k+i=8 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=4 \wedge i=0 \\ k=3 \wedge i=2 \end{array}\right.$

Vậy hệ số của x^8 là $C_8^4 C_4^0 + C_8^3 C_3^2 = 238$

Dang 5 : Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển .

Phương pháp :

☞Khai triển nhị thức newton dưới dạng tổng quát .

☞Đặt a_k là hệ số tổng quát của số hạng trong khai triển

☞ xét tính đơn điệu của dãy $\{a_k\}$. Từ đó để suy ra $(a_k)\max$

Chú ý : để xét tính đơn điệu của $\{a_k\}$ với $k \in N$ ta sử dụng :

- xét tỷ số : $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$
- Xét hiệu : $a_{k+1} - a_k$

Bài 1 : a.Trong khai triển $(1+x)^{101}$. Trong các hệ số của các số hạng . Tìm hệ số lớn nhất .

b. Trong khai triển $(1+2x)^{30}$. Tìm hệ số lớn nhất trong các hệ số của các số hạng trong khai triển trên .

c. Tìm hệ số lớn nhất trong các hệ số của khai triển : $\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}x\right)^{40}$

HD :a. Ta có : $(1+x)^{101} = \sum\limits_{k=0}^{101} C_{101}^k x^k$. Hệ số tổng quát : $a_k = C_{101}^k$ với $0 \le k \le 101$

Xét tỷ số : $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{C_{101}^k}{C_{101}^k} = \dfrac{101!}{(k+1)!(100-k)!}.\dfrac{k!(101-k)!}{101!} = \dfrac{101-k}{k+1} \Rightarrow \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \ge 1 \Leftrightarrow \dfrac{101-k}{k+1} \ge 1$

$\Leftrightarrow 0 \le k \le 50$. Suy ra dãy $\{a_k\}$ tăng với $\forall 0 \le k \le 50 \Rightarrow a_k \le a_{50} = C_{101}^{50}$

Như vậy : $51 \le k \le 101$ thì $\{a_k\}$ giảm . Suy ra $a_k \le a_{51} = C_{101}^{51} = C_{101}^{50}$.

Vậy $(a_k)\max = a_{50} = C_{101}^{50}$

b. Ta có : $(1+2x)^{30} = \sum\limits_{k=0}^{30} C_{30}^k 2^k x^k$. Hệ số tổng quát : $a_k = 2^k C_{30}^k$ với $0 \le k \le 30$

Xét tỷ số : $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{2^{k+1}C_{30}^{k+1}}{2^k C_{30}^k} = 2\dfrac{30!}{(k+1)!(29-k)!}.\dfrac{k!(30-k)!}{30!} = 2\dfrac{30-k}{k+1} \Rightarrow \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \ge 1 \Leftrightarrow 2\dfrac{30-k}{k+1} \ge 1$

$\Leftrightarrow 0 \le k \le 19$. Suy ra dãy $\{a_k\}$ tăng với $\forall 0 \le k \le 19 \Rightarrow (a_k)\max = a_{19}$

Như vậy : $20 \le k \le 30$ thì $\{a_k\}$ giảm . Suy ra $\Rightarrow (a_k)\max = a_{20}$ .Mà $\dfrac{a_{20}}{a_{19}} = 2.\dfrac{30-19}{20} > 1 \Rightarrow a_{20} > a_{19}$

Vậy $(a_k)\max = a_{20} = C_{30}^{20}2^{20}$

c. Ta có : $\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}x\right)^{40} = \dfrac{1}{3^{40}}(1+2x)^{40} = \dfrac{1}{3^{40}}\sum\limits_{k=0}^{40} C_{40}^k 2^k x^k$. Hệ số tổng quát : $a_k = \dfrac{1}{3^{40}}2^k C_{40}^k$ với $0 \le k \le 40$

Xét tỷ số : $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{2^{k+1}C_{40}^{k+1}}{2^k C_{40}^k} = 2\dfrac{40!}{(k+1)!(39-k)!}.\dfrac{k!(40-k)!}{40!} = 2\dfrac{40-k}{k+1} \Rightarrow \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \ge 1 \Leftrightarrow 2\dfrac{40-k}{k+1} \ge 1$

$\Leftrightarrow 0 \le k \le 26$. Suy ra dãy $\{a_k\}$ tăng với $\forall 0 \le k \le 26 \Rightarrow (a_k)\max = a_{26}$

Như vậy : $27 \le k \le 40$ thì $\{a_k\}$ giảm . Suy ra $(a_k)\max = a_{27}$ .Mà $\frac{a_{20}}{a_{19}} = 2.\frac{40-26}{27} > 1 \Rightarrow a_{20} > a_{19}$

Vậy $(a_k)\max = a_{27} = \frac{1}{3^{40}} C_{40}^{27} 2^{27}$

Bài :