



MỘT SỐ BÀI TOÁN TÌM GIỚI HẠN DÃY TỔNG

Huỳnh Chí Hào

Trường THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp

A. Một số kiến thức có liên quan.

Định nghĩa 1

Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số tăng** nếu với mọi n ta có $u_n < u_{n+1}$

Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số giảm** nếu với mọi n ta có $u_n > u_{n+1}$

Định nghĩa 2

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số **bị chặn trên** nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số **bị chặn dưới** nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số **bị chặn** nếu tồn tại một số M và một số m sao cho $m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Định lý 1

- 1) Mọi dãy tăng và bị chặn trên thì hội tụ.
- 2) Mọi dãy giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.

Định lý 2

- 1) Mọi dãy tăng và không bị chặn trên thì tiến tới $+\infty$.
- 2) Mọi dãy giảm và không bị chặn dưới thì tiến tới $-\infty$.

Định lý 3

- 1) Nếu một dãy (u_n) hội tụ đến a thì mọi dãy con trích từ (u_n) cũng hội tụ đến a .
- 2) (u_n) hội tụ đến $a \Leftrightarrow (u_{2n})$ và (u_{2n+1}) hội tụ đến a

Định lý 4

- 1) Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ và $u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = \infty$
- 2) Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \infty$ và $u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$

B. Các bài toán.

Bài toán 1.

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1, \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Tìm giới hạn sau:
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n} \right).$$

Hướng dẫn tư duy:

- + Tính một số số hạng của dãy
- + Tính tổng đã cho theo một số số hạng của dãy (u_n)
- + Sử dụng tiêu chuẩn **Weierstrass**

Lời giải

- Một số số hạng của dãy: 2, 3, 7, 42, ...
- Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n \geq 2, \forall n \geq 1$
- Xét tính đơn điệu của (u_n) : Từ hệ thức (1) ta suy ra được

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)^2 > 0, \text{ vậy } (u_n) \text{ tăng.}$$

- Tính tổng: Xuất phát từ hệ thức truy hồi (1) ta suy ra được

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 = u_n(u_n - 1) &\Rightarrow \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{u_n(u_n - 1)} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n} \\ &\Rightarrow \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (*) \end{aligned}$$

- Thay n bởi 1, 2, 3, ..., n vào (*) và cộng vế với vế các đẳng thức ta suy ra được:

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n} = 1 - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$$

- Do (u_n) là dãy tăng nên có hai khả năng sau xảy ra:

1) Dãy (u_n) bị chặn trên. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, do (u_n) tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn.

Giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ thì $a \geq 2$. Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n \rightarrow +\infty$ ta có:

$$a = a^2 - a + 1 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ (vô lý)}$$

2) Dãy (u_n) không bị chặn trên, do (u_n) tăng và không bị chặn trên nên:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - 1) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_{n+1} - 1} = 0$$

- Vì thế từ (2) ta suy ra: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right) = 1$

- Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n} \right) = 1 \quad \otimes$.

Bài toán 2.

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2011} + u_n, \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Tìm giới hạn sau:
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right).$$

Hướng dẫn tư duy:

- + Tính một số số hạng của dãy
- + Tính tổng đã cho theo một số số hạng của dãy (u_n)
- + Sử dụng tiêu chuẩn **Weierstrass**

Lời giải

- Một số số hạng của dãy: $1, \frac{2012}{2011}, \frac{2012^2}{2011^3} + 1, \dots$
- Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n \geq 1, \forall n \geq 1$
- Xét tính đơn điệu của (u_n) : Từ hệ thức (1) ta suy ra được

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2011} > 0, \text{ vậy } (u_n) \text{ tăng.}$$

- Tính tổng: Xuất phát từ hệ thức truy hồi (1) ta suy ra được

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2011} + u_n &\Rightarrow u_n^2 = 2011(u_{n+1} - u_n) \\ &\Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}} = 2011 \frac{(u_{n+1} - u_n)}{u_n \cdot u_{n+1}} \\ &\Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}} = 2011 \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \right) \quad (n=1, 2, \dots) \quad (*) \end{aligned}$$

- Thay n bởi 1,2,3,...,n vào (*) và cộng vế với vế các đẳng thức ta suy ra được:

$$\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} = 2011 \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}} \right) = 2011 \left(1 - \frac{1}{u_{n+1}} \right) \quad (2)$$

- Do (u_n) là dãy tăng nên có hai khả năng sau xảy ra:

1) Dãy (u_n) bị chặn trên. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, do (u_n) tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn.

Giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ thì $a \geq 1$. Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n \rightarrow +\infty$ ta có:

$$a = \frac{a^2}{2011} + a \Leftrightarrow a = 0 \text{ (vô lý)}$$

2) Dãy (u_n) không bị chặn trên, do (u_n) tăng và không bị chặn trên nên:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_{n+1}} = 0$$

- Vì thế từ (2) ta suy ra: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2011 \left(1 - \frac{1}{u_{n+1}} \right) = 2011$
- Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right) = 2011 \quad \otimes$.

Bài toán 3.

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2010u_n}{2011}, \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Tìm giới hạn sau:
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_1}{u_2 - 1} + \frac{u_2}{u_3 - 1} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1} - 1} \right)$$

Hướng dẫn tư duy:

- + Tính một số số hạng của dãy
- + Tính tổng đã cho theo một số số hạng của dãy (u_n)
- + Sử dụng tiêu chuẩn **Weierstrass**

Lời giải

- Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n \geq 2, \forall n \geq 1$
- Xét tính đơn điệu của (u_n) : Từ hệ thức (1) ta suy ra được

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(u_n - 1)}{2011} > 0, \text{ vậy } (u_n) \text{ tăng.}$$

- Tính tổng: Từ hệ thức truy hồi (1) ta suy ra được

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n^2 + 2010u_n}{2011} \Rightarrow u_n^2 + 2010u_n = 2011u_{n+1} \\ &\Rightarrow u_n(u_n - 1) = 2011(u_{n+1} - u_n) \\ &\Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1} - 1} = 2011 \frac{(u_{n+1} - 1) - (u_n - 1)}{(u_{n+1} - 1)(u_n - 1)} \\ &\Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1} - 1} = 2011 \left(\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (*) \end{aligned}$$

- Thay n bởi 1,2,3,...,n vào (*) và cộng vế với vế các đẳng thức ta suy ra được:

$$\frac{u_1}{u_2 - 1} + \frac{u_2}{u_3 - 1} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1} - 1} = 2011 \left(1 - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right) \quad (2)$$

- Do (u_n) là dãy tăng nên có hai khả năng sau xảy ra:
 - Dãy (u_n) bị chặn trên. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, do (u_n) tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn. Giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ thì $a \geq 2$. Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n \rightarrow +\infty$ ta có:

$$a = \frac{a(a-1)}{2011} + a \Leftrightarrow a(a-1) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = 1 \text{ (vô lý)}$$

- Dãy (u_n) không bị chặn trên, do (u_n) tăng và không bị chặn trên nên:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - 1) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_{n+1} - 1} = 0$$

- Vì thế từ (2) ta suy ra: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_1}{u_2 - 1} + \frac{u_2}{u_3 - 1} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1} - 1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2011 \left(1 - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right) = 2011$.
- Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_1}{u_2 - 1} + \frac{u_2}{u_3 - 1} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1} - 1} \right) = 2011$. \otimes

Bài toán 4.

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_n = \frac{\sqrt{u_{n-1}^2 + 4u_{n-1} + u_{n-1}}}{2}, \forall n \geq 2 \end{cases} \quad (1)$$

Tìm giới hạn sau: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_2^2} + \dots + \frac{1}{u_n^2} \right)$.

Hướng dẫn tư duy:

- + Tính một số số hạng của dãy
- + Tính tổng đã cho theo một số số hạng của dãy (u_n)
- + Sử dụng tiêu chuẩn **Weierstrass**

Lời giải

- Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n > 0, \forall n \geq 1$
- Xét tính đơn điệu của (u_n) : Từ hệ thức (1) ta suy ra được

$$u_n - u_{n-1} = \frac{\sqrt{u_{n-1}^2 + 4u_{n-1} + u_{n-1}}}{2} - u_{n-1} = \frac{\sqrt{u_{n-1}^2 + 4u_{n-1} + u_{n-1}} - u_{n-1}}{2} = \frac{2u_{n-1}}{\sqrt{u_{n-1}^2 + 4u_{n-1} + u_{n-1}}} > 0$$

Suy ra: (u_n) tăng.

- Tính tổng:

$$u_n - u_{n-1} = \frac{2u_{n-1}}{\sqrt{u_{n-1}^2 + 4x_{n-1} + u_{n-1}}} \Rightarrow u_n^2 = (u_n + 1)u_{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{u_{n-1}} - \frac{1}{u_n} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (*)$$

- Thay n bởi 1,2,3,...,n vào (*) và cộng vế với vế các đẳng thức ta suy ra được:

$$\frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_2^2} + \dots + \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_n} = 6 - \frac{1}{u_n} \quad (2)$$

- Do (u_n) là dãy tăng nên có hai khả năng sau xảy ra:

1) Dãy (u_n) bị chặn trên. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, do (u_n) tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn.

Giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ thì $a > 0$. Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n \rightarrow +\infty$ ta có:

$$a = \frac{\sqrt{a^2 + 4a} + a}{2} \Leftrightarrow a = 0 \text{ (vô lý)}$$

2) Dãy (u_n) không bị chặn trên, do (u_n) tăng và không bị chặn trên nên:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$$

- Vì thế từ (2) ta suy ra: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_2^2} + \dots + \frac{1}{u_n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(6 - \frac{1}{u_n} \right) = 6$

- Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_2^2} + \dots + \frac{1}{u_n^2} \right) = 6 \otimes$.

Bài toán 5.

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2010 \\ u_n^2 + 2009u_n - 2011u_{n+1} + 1 = 0, \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (1)$

Tìm giới hạn sau: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1 + 2010} + \frac{1}{u_2 + 2010} + \dots + \frac{1}{u_n + 2010} \right)$.

Hướng dẫn tư duy:

- + Tính một số số hạng của dãy
- + Tính tổng đã cho theo một số hạng của dãy (u_n)
- + Sử dụng tiêu chuẩn Weierstrass

Lời giải

- Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n \geq 2010, \forall n \geq 1$
- Xét tính đơn điệu của (u_n) : Từ hệ thức (1) ta suy ra được

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)^2}{2010} > 0 \Rightarrow (u_n) \text{ tăng.}$$

- Tính tổng: Xuất phát từ hệ thức truy hồi (1) ta suy ra được

$$u_n^2 + 2009u_n - 2011u_{n+1} + 1 = 0 \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2009u_n + 1}{2011}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - 1 = \frac{u_n^2 + 2009u_n + 1}{2011} - 1$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - 1 = \frac{(u_n - 1)(u_n + 2010)}{2011}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u_n + 2010} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \quad (n=1,2,\dots) \quad (*)$$

- Thay n bởi 1,2,3,...,n vào (*) và cộng vế với vế các đẳng thức ta suy ra được:

$$\frac{1}{u_1 + 2010} + \frac{1}{u_2 + 2010} + \dots + \frac{1}{u_n + 2010} = \frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{2009} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$$

- Do (u_n) là dãy tăng nên có hai khả năng sau xảy ra:

1) Dãy (u_n) bị chặn trên. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, do (u_n) tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn.

Giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ thì $a \geq 2010$. Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n \rightarrow +\infty$ ta có:

$$a^2 + 2009a - 2011a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ (vô lý)}$$

2) Dãy (u_n) không bị chặn trên, do (u_n) tăng và không bị chặn trên nên:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - 1) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_{n+1} - 1} = 0$$

- Vì thế từ (2) ta suy ra: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1 + 2010} + \frac{1}{u_2 + 2010} + \dots + \frac{1}{u_n + 2010} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2009} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right) = \frac{1}{2009}$

- Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1 + 2010} + \frac{1}{u_2 + 2010} + \dots + \frac{1}{u_n + 2010} \right) = \frac{1}{2009} \otimes$.

Bài toán 6.

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2009} \\ u_{n+1} = 2009u_n^2 + u_n, \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Tìm giới hạn sau:
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right).$$

Hướng dẫn tư duy:

+ Tính một số số hạng của dãy

+ Tính tổng đã cho theo một số số hạng của dãy (u_n)

+ Sử dụng tiêu chuẩn Weierstrass

Lời giải

- Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n > 0, \forall n \geq 1$
- Xét tính đơn điệu của (u_n) : Từ hệ thức (1) ta suy ra được

$$u_{n+1} - u_n = 2009u_n^2 > 0 \Rightarrow (u_n) \text{ tăng.}$$

- Tính tổng: Xuất phát từ hệ thức truy hồi (1) ta suy ra được

$$2009u_n^2 = u_{n+1} - u_n \Rightarrow \frac{2009u_n^2}{u_n u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n u_{n+1}} \Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{2009} \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \right) \quad (n=1,2,\dots) \quad (*)$$

- Thay n bởi 1,2,3,...,n vào (*) và cộng vế với vế các đẳng thức ta suy ra được:

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} &= \frac{1}{2009} \left[\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) + \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2009} \left(2009 - \frac{1}{u_{n+1}} \right) \end{aligned}$$

- Do (u_n) là dãy tăng nên có hai khả năng sau xảy ra:

1) Dãy (u_n) bị chặn trên. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, do (u_n) tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn.

Giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ thì $a > 0$. Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n \rightarrow +\infty$ ta có:

$$a = 2009a^2 + a \Leftrightarrow a = 0 \text{ (vô lý)}$$

2) Dãy (u_n) không bị chặn trên, do (u_n) tăng và không bị chặn trên nên:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_{n+1}} = 0$$

- Vì thế từ (2) ta suy ra: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2009} \left(2009 - \frac{1}{u_{n+1}} \right) \right] = 1$

- Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right) = 1 \otimes$.

Bài toán 7.

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n, \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Tìm giới hạn sau: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1 + 1} + \frac{1}{u_2 + 1} + \dots + \frac{1}{u_{n+1} + 1} \right)$.

Hướng dẫn tư duy:

- + Tính một số số hạng của dãy
- + Tính tổng đã cho theo một số số hạng của dãy (u_n)
- + Sử dụng tiêu chuẩn **Weierstrass**

Lời giải

- Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n > 1, \forall n \geq 3$
- Xét tính đơn điệu của (u_n) : Từ hệ thức (1) ta suy ra được

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 > 0 \Rightarrow (u_n) \text{ tăng.}$$

- Tính tổng:

$$\begin{aligned} u_{n+1} = u_n^2 + u_n &\Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n(u_n + 1)} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_n + 1} \\ &\Rightarrow \frac{1}{u_n + 1} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (*) \end{aligned}$$

- Thay n bởi 1,2,3,...,n vào (*) và cộng vế với vế các đẳng thức ta suy ra được:

$$\frac{1}{u_1 + 1} + \frac{1}{u_2 + 1} + \dots + \frac{1}{u_{n+1} + 1} = 2 - \frac{1}{u_{n+1}}$$

- Do (u_n) là dãy tăng nên có hai khả năng sau xảy ra:

1) Dãy (u_n) bị chặn trên. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, do (u_n) tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn.

Giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ thì $a > 0$. Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n \rightarrow +\infty$ ta có:

$$a = a^2 + a \Leftrightarrow a = 0 \text{ (vô lý)}$$

2) Dãy (u_n) không bị chặn trên, do (u_n) tăng và không bị chặn trên nên:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_{n+1}} = 0$$

- Vì thế từ (2) ta suy ra: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1 + 1} + \frac{1}{u_2 + 1} + \dots + \frac{1}{u_{n+1} + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{u_{n+1}} \right) = 2$

- Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1 + 1} + \frac{1}{u_2 + 1} + \dots + \frac{1}{u_{n+1} + 1} \right) = 2 \quad \otimes$.

Bài toán 8.

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + u_1 u_2 \dots u_n, \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Tìm giới hạn sau:
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} \right)$$

Hướng dẫn tư duy:

- + Tính tổng đã cho theo một số hạng của dãy (u_n)
- + Tìm giới hạn của dãy mới

Lời giải

- Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n \geq 1, \forall n \geq 1$

- Tính tổng: Từ hệ thức truy hồi (1) ta suy ra được

$$\begin{aligned} u_{n+1} = 1 + u_1 u_2 \dots u_n &\Rightarrow u_{n+1} - 1 = u_n (1 + u_1 u_2 \dots u_{n-1} - 1) \\ &\Rightarrow u_{n+1} - 1 = u_n (u_n - 1) \\ &\Rightarrow \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{u_n (u_n - 1)} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n} \\ &\Rightarrow \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Suy ra:
$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_1} + \left(\frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} \right) = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = 2 - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$$

- Do đó:
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right) = 2 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_{n+1} - 1}$$
- Vì $u_{n+1} - 1 = u_1 u_2 \dots u_n > u_1 (1 + u_1)^{n-1} = 2^{n-1}$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - 1) = +\infty$
- Vậy
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} \right) = 2 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_{n+1} - 1} = 2 \quad \otimes$$

Bài toán 9.

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n (u_n + 1)(u_n + 2)(u_n + 3)} + 1, \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Tìm giới hạn sau:
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1 + 2} + \frac{1}{u_2 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2} \right)$$

Hướng dẫn tư duy:

+ Tính tổng đã cho theo một số hạng của dãy (u_n)

+ Tìm giới hạn của dãy mới

Lời giải

• Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n > 0, \forall n \geq 1$

• Tính tổng: Từ hệ thức truy hồi (1) ta suy ra được

$$u_{n+1} = \sqrt{(u_n^2 + 3u_n + 1)^2} = u_n^2 + 3u_n + 1 \Rightarrow u_{n+1} + 1 = (u_n + 1)(u_n + 2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_{n+1} + 1} = \frac{1}{(u_n + 1)(u_n + 2)} = \frac{1}{u_n + 1} - \frac{1}{u_n + 2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{u_n + 1} - \frac{1}{u_{n+1} + 1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Suy ra: $\frac{1}{u_1 + 2} + \frac{1}{u_2 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{u_1 + 1} - \frac{1}{u_{n+1} + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{u_{n+1} + 1}$

• Do đó: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1 + 2} + \frac{1}{u_2 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{u_{n+1} + 1} \right) = \frac{1}{2} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_{n+1} + 1}$

• Vì $u_{n+1} = u_n^2 + 3u_n + 1 \Rightarrow u_{n+1} > 3u_n > 3^{n-1} \Rightarrow u_{n+1} + 1 > 3^{n-1} + 1$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} + 1) = +\infty$

• Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1 + 2} + \frac{1}{u_2 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2} \right) = \frac{1}{2} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_{n+1} + 1} = \frac{1}{2} \otimes$.

Bài toán 10.

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2007u_n + 2}{2010}, \forall n \geq 1 \end{cases}$

Tìm giới hạn sau: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_1 - 1}{u_2 - 2} + \frac{u_2 - 1}{u_3 - 2} + \dots + \frac{u_n - 1}{u_{n+1} - 2} \right)$

Hướng dẫn tư duy:

+ Tính một số số hạng của dãy

+ Tính tổng đã cho theo một số hạng của dãy (u_n)

+ Sử dụng tiêu chuẩn **Weierstrass**

Lời giải

• Biến đổi $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2007u_n + 2}{2010} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(u_n - 2)}{2010} \quad (1)$

Vì $u_1 = 3$ nên $3 = u_1 < u_2 < u_3 < \dots < u_n$, suy ra dãy $\{u_n\}$ tăng.

- Giả sử dãy $\{u_n\}$ bị chặn trên $\Leftrightarrow \exists L \in \mathbb{R}: \lim u_n = L (L > 3)$
 Suy ra $\lim u_{n+1} = \lim \frac{u_n^2 + 2007u_n + 2}{2010}$ hay $L = \frac{L^2 + 2007L + 2}{2010}$
 $\Leftrightarrow L^2 - 3L + 2 = 0 \Leftrightarrow L = 1$ hoặc $L = 2$ (vô lý vì $L > 3$)
 Do đó $\{u_n\}$ không bị chặn trên hay $\lim u_n = +\infty$ hay $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$
- Biến đổi (1) $\Leftrightarrow (u_n - 1)(u_n - 2) = 2010(u_{n+1} - u_n)$
 $\Leftrightarrow \frac{u_n - 1}{u_{n+1} - 2} = 2010 \left(\frac{1}{u_n - 2} - \frac{1}{u_{n+1} - 2} \right) (*)$
- Cho n lần lượt nhận các giá trị $1, 2, 3, \dots, n$, sau đó cộng vế theo vế ta được:

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{u_i - 1}{u_{i+1} - 2} = 2010 \left(1 - \frac{1}{u_{n+1} - 2} \right)$$
- Vậy $\lim S_n = 2010 \otimes$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] **Phan Huy Khải.** *Các bài toán về dãy số.* NXBGD 2007.
- [2] **Nguyễn Văn Mậu - Nguyễn Thủy Thanh.** *Giới hạn dãy số & hàm số.* NXBGD 2002.
- [3] **Nguyễn Văn Mậu - Nguyễn Văn Tiến.**
Một số chuyên đề giải tích bồi dưỡng học sinh giỏi THPT. NXBGD 2009.
- [4] **Phạm Văn Nhâm.** *Một số lớp bài toán về dãy số.* Luận văn thạc sĩ khoa học 2011.
- [5] *Tuyển tập đề thi OLYMPIC 30/4 lần thứ XV – 2009.*
- [6] *Tuyển tập đề thi OLYMPIC 30/4 lần thứ XVI – 2010.*