Hè 2009

NGUYỄN VĂN NĂM - LÊ HOÀNG NAM

THPT Lê Hông Phong (Đồng Nai) – THPT Lê Quý Đôn (Đà Nẵng)

NHỊ THỨC NEWTON VÀ ỨNG DỤNG

http : // maths.vn

vannamlhp – mylove288

NHỊ THỨC NEWTON VÀ ỨNG DỤNG

A. LÝ THUYẾT

1. CÔNG THỨC NEWTON:

Cho 2 số thực a,b và số nguyên dương n thì:

$$\boxed{\begin{aligned}&(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+...+C_n^nb^n\\ &(a-b)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k a^{n-k}b^n=C_n^0a^n-C_n^1a^{n-1}b+...+(-1)^n C_n^nb^n\end{aligned}}$$

2. Tính Chất

a. Số các số hạng của công thức là $n+1$

b. Tổng các số mũ của a và b trong mỗi số hạng luôn luôn bằng số mũ của nhị thức: $n+n-k=n$

c. Số hạng tổng quát của nhị thức là: $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k$

(*Đó là số hạng thứ $k+1$ trong khai triển $(a+b)^n$*)

d. Các hệ số nhị thức các đều hai số hạng đầu, cuối thì bằng nhau.

e. $2^n=C_n^n+C_n^{n-1}+...+C_n^0$

f. $0=C_n^0-C_n^1+...+(-1)^nC_n^n$

g. Tam giác Pascal:

$n=0$ 1

$n=1$ 1 1

$n=2$ 1 2 1

....

$n=k$ 1.................C_k^{m-1} C_k^m................1

$n=k+1$ 1......................C_{k+1}^m......................1

....

Với $C_k^{m-1}+C_k^m=C_{k+1}^m$

$(a+b)^0=1 \qquad (a+b\#0)$

$(a+b)^1=a+b$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

....

3. Một số khai tiển hay sử dụng:

- $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n$
- $0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = C_n^0 - C_n^1 + ... + (-1)^n C_n^n$
- $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} = C_n^0 + C_n^1 x^{n-1} + ... + C_n^n x^0$
- $(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^{n-k} = C_n^0 x^0 - C_n^1 x^1 + ... + (-1)^n C_n^n x^n$
- $(x-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^{n-k} = C_n^0 - C_n^1 x^{n-1} + ... + (-1)^n C_n^n x^0$

4. Dấu hiệu nhận biết sử dụng nhị thức NEWTON

1. Khi cần chứng minh đẳng thức hay bất đẳng thức mà có $\sum_{i=1}^{n} C_n^i$ với i là các số tự nhiên liên tiếp.
2. Trong biểu thức có $\sum_{i=1}^{n} i(i-1)C_n^i$ thì ta dùng đạo hàm $(i \in \mathbb{N})$

- Trong biểu thức có $\sum_{i=1}^{n} (i+k)C_n^i$ thì ta nhân hai vế với x^k, rồi lấy đạo hàm.
- Trong biểu thức có $\sum_{i=1}^{n} a^k C_n^i$ thì ta chọn giá trị của $x = a$ thích hợp.
- Trong biểu thức có $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i-1} C_n^i$ thì ta lấy tích phân xác định trên $[a;b]$ thích hợp.
- Nếu bài toán cho khai triển $(x^a + x^b)^n = \sum_{i=1}^{n} C_n^i (x^a)^{n-i} (x^b)^i = \sum_{i=1}^{n} C_n^i x^{a(n-i)+ib}$ thì hệ số của x^m là C_n^i sao cho phương trình $a(n-i)+b.i = m$ có nghiệm $i \in \mathbb{N}$
- C_n^i đạt MAX khi $k = \frac{n-1}{2}$ hay $k = \frac{n+1}{2}$ với n lẻ, $k = \frac{n}{2}$ với n chẵn.

Việc nhận biết các dấu hiệu này sẽ giúp cho chúng ta giải quyết tốt những dạng toán liên quan đến nhị thức NEWTON, đặt biệt là trong các đề thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng.

B. CÁC BÀI TOÁN VỀ HỆ SỐ NHỊ THỨC

1. Bài toán tìm hệ số trong khai triển NEWTON

Ví dụ 1.1: (D(H Thủy lợi cơ sở II, 2000) Khai triển và rút gọn đa thức:

$$Q(x) = (1+x)^9 + (1+x)^{10} + \dots + (1+x)^{14}$$

Ta được đa thức: $Q(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{14}x^{14}$

Xác định hệ số a_9.

Giải

Hệ số x^9 trong các đa thức: $(1+x)^9 + (1+x)^{10} + \dots + (1+x)^{14}$ lần lượt là: $C_9^9, C_{10}^5, \dots, C_{14}^9$

Do đó: $a_9 = C_9^9 + C_{10}^9 + \dots + C_{14}^9$

$$= 1 + 10 + \frac{1}{2}10.11 + \frac{1}{6}10.11.12 + \frac{1}{24}.10.11.12.13 + \frac{1}{20}10.11.12.13.14$$

$$= 11 + 55 + 220 + 715 + 2002 = 3003$$

Ví dụ 1.2(ĐHBKHN- 2000) Giải bất phương trình: $\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \le \frac{6}{x}C_x^3 + 10$

Giải

Điều kiện: x là số nguyên dương và $x \ge 3$

Ta có: bất phương trình tương đương với

$$\frac{(2x-1)2x}{2} - (x-1)x \le \frac{6(x-2)(x-1)}{3!x} + 10$$

$$\Leftrightarrow 2x(2x-1) - x(x-1) \le (x-2)(x-1) + 10$$

$$\Leftrightarrow 3x \le 12 \Leftrightarrow x \le 4$$

Vì x nguyên dương và $x \ge 3$ nên $x \in \{3.4\}$

Ví dụ 1.3: Tìm hệ số x^{16} trong khai triển $(x^2 - 2x)^{10}$

Giải

Ta có: $(x^2 - 2x)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (x^2)^{10-k} (-2x)^k$

$$= \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{20-2k} x^k (-2)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{20-k} (-2)^k$$

Ta chọn: $20 - k = 16 \Leftrightarrow k = 4$

$\Rightarrow$ Hệ số x^{16} trong khai triển là: $C_{10}^4 = 3360$

Ví dụ 1.4: Tìm hệ số x^{1008} trong khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{2009}$

Giải

Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển:

$$T_{k+1} = C_{2009}^k (x^2)^{2009-k} \left(\frac{1}{x^3}\right)^k = C_{2009}^k x^{4018-5k}$$

Ta chọn: $4018-5k=1008 \Leftrightarrow k=602$

$\Rightarrow$ Hệ số của x^{1008} trong khai triển là C_{2009}^{602}

Ví dụ 1.5:(ĐH KA 2004) Tìm hệ số của x^8 trong khai triển đa thức của

$$\left[1+x^2(1-x)\right]^8$$

Giải

Cách 1: Ta có $f(x)=\sum_{k=0}^{8} C_8^k\left[x^2(1-x)\right]^k=\sum_{k=0}^{8} C_8^k x^{2k}\left[\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i x^i\right]$.

Vậy ta có hệ số của x^8 là $(-1)^i C_8^k C_k^i$ thỏa $\begin{cases}0\le i\le k\le 8\\ 2k+i=8\\ i,k\in N\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}i=0\\ k=4\end{cases}\\ \begin{cases}i=2\\ k=3\end{cases}\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Hệ số của x^8 là: $(-1)^0 C_8^4 C_4^0+(-1)^2 C_8^3 C_3^2=238$

Cách 2: Ta có**:**

$f(x)=C_8^0+\ldots+C_8^3\left[x^2(1-x)\right]^3+C_8^4\left[x^2(1-x)\right]^4+\ldots+C_8^8\left[x^2(1-x)\right]^8$

Nhận thấy: x^8 chỉ có trong các số hạng:

- Số hạng thứ tư: $C_8^3\left[x^2(1-x)\right]^3$
- Số hạng thứ năm: $C_8^4\left[x^2(1-x)\right]^4$

Với hệ số tương đương: $A_8=C_8^3C_3^2+C_8^4C_4^0=238$

Ví dụ: 1.6:(ĐH SPQN 2000) Xác định hệ số x^3 trong khai triển hàm số $P(x)=\left(1+2x+3x^2\right)^{10}$ theo lũy thừa của x

Giải

Ta có: $P(x)=\left(1+2x+3x^2\right)^{10}=\left[1+x(2+3x)\right]^{10}$

$=C_{10}^0+C_{10}^1x(2+3x)+C_{10}^2x^2(2+3x)^2+C_{10}^3x^3(2+3x)^3+\ldots+C_{10}^{10}x^{10}(2+3x)^{10}$

Nhận thấy rằng hệ số x^3 chỉ xuất hiện trong:

$C_{10}^2x^2(2+3x)^2+C_{10}^3x^3(2+3x)^3=C_{10}^2\left(4x^2+12x^3+9x^4\right)+C_{10}^3x^3(2+3x)^3$

$\Rightarrow$ Hệ số x^3 trong khai triển của $P(x)$ là: $12C_{10}^2+C_{10}^3.8=540+960=1500$

Ví dụ 1.7: Tìm hệ số của x^{16} trong khai triển thành đa thức của

$$f(x)=\left[1-x^2\left(1-x^2\right)\right]^{16}$$

Giải

Xét khai triển: $f\left(x\right)=\sum_{i=1}^{n}C_i^2\sum_{k=0}^{16}C_{16}^k\left[-x^2\left(1-x^2\right)\right]^k$

$$=\sum_{k=0}^{16}\left(-1\right)^k C_{16}^k x^{2k}\left[\sum_{i=0}^{k}\left(-1\right)^i C_k^i x^{2i}\right]=\sum_{k=0}^{16}\left(\sum_{i=0}^{k}\left(-1\right)^i C_{16}^k C_k^i x^{2(k+i)}\right)$$

Vậy ta có hệ số của x^{16} là $\left(-1\right)^{k+1}C_{16}^k C_k^i$ thỏa $\begin{cases}0\le i\le k\le 16\\ k+i=8\\ i,k\in N\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}i=0\Rightarrow k=8\\ i=1\Rightarrow k=7\\ i=2\Rightarrow k=6\\ i=3\Rightarrow k=5\\ i=4\Rightarrow k=4\end{array}\right.$

Vì vậy hệ số của x^{16} trong đa thức là: $C_{16}^8C_8^0+C_{16}^7C_7^1+C_{16}^6C_8^2+C_{16}^5C_8^3+C_{16}^4C_8^4=258570$

Ví dụ 1.8: Tìm hệ số của số hạng $x^{101}y^{99}$ trong khai triển $\left(2x-3y\right)^{200}$

Giải

Ta có: $\left(2x-3y\right)^{200}=\left[2x+\left(-3y\right)\right]^{200}=\sum_{k=0}^{200}C_{200}^k\left(2x\right)^{200-k}\left(-3y\right)^k$

$$=\sum_{k=0}^{200}\left(-1\right)^k C_{200}^k.2^{200-k}.3^k.x^{200-k}.y^k$$

Ta chon: $\begin{cases}200-k=101\\ k=99\end{cases}\Leftrightarrow k=99$

Vậy hệ số cần tìm là: $\left(-1\right)^{99}C_{200}^{99}.2^{99}.3^{99}=-C_{200}^{99}.2^{99}.3^{99}$

Ví dụ 1.9: (ĐH HCQG, 2000)

a) Tìm hệ số x^8 trong khai triển $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{12}$

b) Cho biết tổng tấc cả các hệ số của khai triển nhị thức $\left(x^2+1\right)^n$ bằng 1024. Hãy tìm hệ số a $\left(a\in N^*\right)$ của số hạng ax^{12} trong khai triển đó. (**(ĐHSPHN, khối D, 2000)**)

Giải

a) Số hạng thứ $\left(k+1\right)$ trong khai triển là: $a_k=C_{12}^k x^{12-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k=C_{12}^k x^{12-2k}$ $\left(0\le k\le 12\right)$

Ta chọn $12-2k=8\Leftrightarrow k=2$

Vậy số hạng thứ 3 trong khai triển chứa x^8 và có hệ số là: $C_{12}^2=66$

b) Ta có: $\left(1+x^2\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^{2n}=C_n^k+C_n^1x^2+...+C_n^k x^{12-2k}$

Với $x=1$ thì: $2^n=C_n^0+C_n^1+...+C_n^n=1024$

$\Leftrightarrow 2^n = 2^{10} \Leftrightarrow n = 10$

Do đó hệ số a (của x^{12}) là: $C_{10}^6 = 210$

c)

Ví dụ 1. 10: (D(H Khối A- 2006) Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức NEWTON của $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n$ biết rằng $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + ... + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$ (n nguyên dương và C_n^k là tổ hợp chập k của n phần tử)

Giải

Từ giả thiết suy ra: $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + ... + C_{2n+1}^n = 2^{20}$ (1)

Mặt khác: $C_{2n+1}^k = C_{2n+1}^{2n+1-k}, \forall k, 0 \le k \le 2n+1$, nên:

$$C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + ... + C_{2n+1}^n = \frac{1}{2}\left(C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + ... + C_{2n+1}^{2n+1}\right) \quad (2)$$

Từ khai triển nhị thức của: $(1+1)^{2n+1}$ *suy ra*:

$$C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + ... + C_{2n+1}^{2n+1} = (1+1)^{2n+1} = (2)^{2n+1} \quad (3)$$

$$\underset{(3)}{\overset{(1),(2)}{\Rightarrow}} 2^{2n} = 2^{20} \Rightarrow n = 10$$

Ta có số hạng tổng quát của nhị thức $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^{10} = \sum_{k=0}^{n} C_{10}^k \left(x^{-4}\right)^{10-k} \left(x^7\right)^k = \sum_{k=0}^{n} C_{10}^k x^{11k-40}$

Hệ số của x^{26} là C_{10}^k với k thỏa mãn $11k - 40 = 26 \Leftrightarrow k = 6$

Vậy hệ số của x^{26} là $C_{10}^6 = 210$

Ví dụ 1.11: (ĐHKT HN- 1998) Tìm hệ số đứng trước x^5 trong khai triển biểu thức sau đây thành đa thức: $f(x) = (2x+1)^4 + (2x+1)^5 + (2x+1)^6 + (2x+1)^7$

Giải

Ta xét các khai triển sau:

$$(2x+1)^4 = \sum_{k=0}^{4} C_4^k (2x)^{4-k}; \qquad (2x+1)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k (2x)^{5-k}$$

$$(2x+1)^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k (2x)^{6-k}; \qquad (2x+1)^7 = \sum_{k=0}^{7} C_7^k (2x)^{7-k}$$

Nhận xét: Số hạng chứa x^5 của $(2x+1)^4$ là 0

Số hạng chứa x^5 của $(2x+1)^5$ là $C_5^0 (2x)^5$

Số hạng chứa x^5 của $(2x+1)^6$ là $C_6^1 (2x)^5$

Số hạng chứa x^5 của $(2x+1)^7$ là $C_5^2 (2x)^5$

Vậy hệ số cần tìm là: $0 + C_5^0 (2x)^5 + C_6^1 (2x)^5 + C_7^2 (2x)^5 = 896$

Ví dụ 1.12(Khối D- 2003) Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $\left(x^2+1\right)^n\left(x+2\right)^n$. Tìm n để $a_{3n-3}=26n$

Giải

Cách 1: Ta có

$$\left(x^2+1\right)^n=C_n^0x^{2n}+C_n^1x^{2n-2}+C_n^2x^{2n-4}+...+C_n^n$$

$$\left(x+2\right)^n=C_n^0x^n+2C_n^1x^{n-1}+2^2C_n^2x^{n-2}+...+2^nC_n^n$$

Dễ thấy với $n=1, n=2$ không thỏa mãn điều kiện bài toán.

Với $n\geq 3$ thì $x^{3n-3}=x^{2n}x^{n-3}=x^{2n-2}x^{n-1}$

Vì vậy hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $\left(x^2+1\right)^n\left(x+2\right)^n$ là:

$$a_{3n-3}=26n\Leftrightarrow\frac{2n\left(2n^2-3n+4\right)}{3}=26n\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=5\\ n=-\frac{7}{2}\,(Loai)\end{array}\right.$$

Vậy $n=5$ là giá trị cần tìm thỏa mãn điều kiện bài toán (n nguyên dương).

Cách 2: Xét khai triển:

$$\left(x+2\right)^n\left(x^2+1\right)^n=x^{3n}\left(1+\frac{2}{x}\right)^n\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^n=x^{3n}\left[\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{2}{x}\right)^k\sum_{i=0}^{n}C_n^i\left(\frac{1}{x^2}\right)^i\right]$$

$$=x^{3n}\left[\sum_{k=0}^{n}C_n^k2^kx^{-k}\sum_{i=0}^{n}C_n^ix^{-2i}\right]$$

Trong khai triển lũy thừa của x là $3n-3\Leftrightarrow -2i-k=-3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}i=0\\ k=3\end{cases}\\ \begin{cases}i=1\\ k=1\end{cases}\end{array}\right.$

Nên của hệ số của x^{3n-3} là:

$$a_{3n-3}=26n\Leftrightarrow\frac{2n\left(2n^2-3n+4\right)}{3}=26n\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=5\\ n=-\frac{7}{2}\,(Loai)\end{array}\right.$$

Vậy $n=5$ là giá trị cần tìm thỏa mãn điều kiện bài toán (n nguyên dương).

Ví dụ: 1.13(Khối A- 2002) Cho khai triển nhị thức:

$$\left(x^{\frac{x-1}{2}}+2^{-\frac{x}{3}}\right)^n=C_n^0\left(x^{\frac{x-1}{2}}\right)^n+C_n^1\left(x^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1}.\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)+...+C_n^{n-1}\left(x^{\frac{x-1}{2}}\right).\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^{n-1}+C_n^n\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^n$$

(n là số nguyên dương). Biết rằng trong khai triển đó $C_n^3=5C_n^1$ và số hạng thứ tư bằng $20n$. Tính n và x.

Giải

Điều kiện: $n \in N$ và $n \geq 3$

Ta có: $C_n^3 = 5C_n^1 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{3!(n-3)!} = 5\dfrac{n!}{(n-1)!}$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 5n \Leftrightarrow n^2 - 3n - 28 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = 7 \text{ (Nhận)} \vee n = -4 \text{ (loại)}$$

Với $n = 7$ ta có: $\left(x^{\frac{x-1}{2}} + 2^{-\frac{x}{3}}\right)^7 = \sum_{k=0}^{7} C_7^k \left(x^{\frac{x-1}{2}}\right)^{7-k} \left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^7$

Vậy số hạng thứ tư trong khai triển trên là: $C_7^3 \left(x^{\frac{x-1}{2}}\right)^4 \left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^3 = 35.2^{2x-2}.2^{-x}$

Kết hợp với giả thiết ta được: $35.2^{2x-2}.2^{-x} = 140 \Leftrightarrow 2^{x-2} = 4 \Leftrightarrow x = 4$

Ví dụ 1.14: Tìm x biết rằng trong khai triển của nhị thức: $\left(2^x + 2^{\frac{1}{2}-x}\right)^n$ có tổng 2 số hạng thứ 3 và thứ 5 bằng 135, còn tổng 3 hệ số của 3 số hạng cuối bằng 22

Giải

Từ giải thiết ta có: $\begin{cases} C_n^2 \left(2^x\right)^{n-2}.2^{1-2x} + C_n^4 \left(2^x\right)^{n-4} = 135 \\ C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2x+1} + 2^{2-2x} = 9 \\ \dfrac{n(n-1)}{2} + n + 1 = 22 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t + \dfrac{4}{t} = 9 \Leftrightarrow 2t^2 - 9t + 4 \ (t = 2x > 0) \\ n + n - 42 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{2x} = 2^2 \\ 2^{2x} = 2^{-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} n = 6 \\ n = -7 \ (Loai) \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy $x \in \left\{1, -\dfrac{1}{2}\right\}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 1.15: Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển: $\left(1 + \dfrac{1}{5}x\right)^{17}$

Giải

Xét khai triển: $\left(1 + \dfrac{1}{5}x\right)^{17} = \sum_{k=0}^{17} C_{17}^k \left(\dfrac{1}{5}\right)^k (x)^k \Rightarrow a_k = \left(\dfrac{1}{5}\right)^k x^k \quad (k = 0, 1, 2, ..., 17)$

Ta có a_k đặt max $\Rightarrow \begin{cases} a_k \geq a_{k+1} \\ a_k \geq a_{k-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{1}{5}\right)^k C_{17}^k \geq \left(\dfrac{1}{5}\right)^{k+1} C_{17}^{k+1} \\ \left(\dfrac{1}{5}\right)^k C_{17}^k \geq \left(\dfrac{1}{5}\right)^{k-1} C_{17}^{k-1} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\dfrac{17!}{k!(17-k)!} \geq \dfrac{17!}{(k+1)!(16-k)!} \\ \dfrac{17!}{k!(17-k)!} \geq 5\dfrac{17!}{(k-1)!(18-k)!} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5k+5 \geq 17-k \\ 18-k \geq 5k \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq k \leq 3$$

- Với $k=2$ thì hệ số là: $C_{17}^{2}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2} = 5.44$
- Với $k=3$ thì hệ số là: $C_{17}^{3}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{3} = 5.44$

Vậy hệ số lớn nhất là: $C_{17}^{3}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{3} = 5.44$

Từ Ví dụ trên ta đi đến bài toán tổng quát sau:

Ví dụ: 1.15.2 Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển nhị thức NEWTON của $(a+bx)^n$

Phương pháp giải: Xét khai triển $(a+bx)^n$ có số hạng tổng quát $C_n^k a^{n-k} b^k x^k$

Ta đặt: $u_k = C_n^k a^{n-k} b^k,\ 0 \leq k \leq n$ ta được dãy số $\{u_k\}$. Việc còn lại là đi tìm số hạng lớn nhất của dãy ta làm như sau:

- Giải bất phương trình $\dfrac{u_k}{u_{k+1}} \geq 1$ tìm được k_0 $\quad \Rightarrow u_{k_0} \geq u_{k_0+1} \geq \ldots \geq u_n$
- Giải bất phương trình $\dfrac{u_k}{u_{k-1}} \leq 1$ tìm được k_0 $\quad \Rightarrow u_{k_1} \geq u_{k_1-1} \geq \ldots \geq u_0$

Từ đó ta có số hạng lớn nhất của dãy là $\max\left\{u_{k_0}, u_{k_1}\right\}$

Tuy nhiên để đơn giản chúng ta có thể làm như sau:

Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} u_k \geq u_{k+1} \\ u_k \geq u_{k-1} \end{cases} \Rightarrow k_0$

Suy ra hệ số lớn nhất trong khai triển nhị thức NEWTON là $C_n^{k_0} a^{n-k_0} b^{k_0}$

Ví dụ 1.16: (HVKTQS, 2000) Khai triển đa thức

$P(x) = (1+2x)^{12} = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{12} x^{12}$

Tìm $\max(a_0, a_1, a_2 \ldots, a_{12})$

Giải

Cách 1: Xét khai triển: $(1+2x)^{12} = \sum\limits_{k=0}^{12} C_{12}^k 1^{12-k} (2x)^k$

$\Rightarrow a_k = C_{12}^k 2^k \ (k = 0,1,2,\ldots,12) \quad (1)$

Xét bất đẳng thức: $a_k < a_{k+1}$

$\Rightarrow C_{12}^k 2^k < C_{12}^{k+1} 2^{k+1} \Leftrightarrow \dfrac{12!2^k}{k!(12-k)!} < \dfrac{12!2^{k+1}}{(k+1)!(11-k)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{12-k} < \dfrac{2}{k+1} \Leftrightarrow 3k < 23 \Leftrightarrow k < \dfrac{23}{3} = 7 + \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 0 \le k \le 7 \ (k \in Z)$

Áp dụng (1) cho $k = 0,1,2,...,12$ ta được: $a_0 < a_1 < ... < a_7 < a_8 \ge a_9 ... \ge a_{12}$

$\Rightarrow \max(a_0, a_1, a_2 ..., a_{12}) = a_8 = C_{12}^8 .2^{18} = 126720$

Cách 2: Gọi a_k là hệ số lớn nhất của khai triển suy ra: $a_k > a_{k-1}$

Từ đây ta có được hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 2^k C_{12}^k \ge 2^{k-1} C_{12}^{k-1} \\ 2^k C_{12}^k \ge 2^{k+1} C_{12}^{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{k} \ge \dfrac{1}{12-k+1} \\ \dfrac{1}{12-k} \ge \dfrac{2}{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{23}{3} \le k \le \dfrac{25}{3} \Rightarrow k = 8$$

$\Rightarrow \max(a_0, a_1, a_2 ..., a_{12}) = a_8 = C_{12}^8 .2^{18} = 126720$

Ví dụ 1.17: Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển và rút gọn tổng sau:
$f(x) = (1+x)^4 + (1+x)^5 + ... + (1+x)^{15}$

Giải

Vì tổng $f(x)$ có 12 số hạng nên ta có: $f(x) = (1+x)^4 \dfrac{1-(1+x)^{12}}{1-(1+x)} = \dfrac{(1+x)^{16} - (1+x)^4}{x}$

$\Rightarrow$ Hệ số của số hạng chứa x^4 là hệ số của số hạng chứa x^5 trong $(1+x)^{16}$

Vậy hệ số cần tìm là: $C_{16}^5 = 4368$

Đối với dạng toán này ta có phương pháp giải sau:

Bài toán tìm hệ số chứa x^k trong tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân
Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân với công bội $q \ne 1$ là:

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1 \frac{1-q^2}{1-q}. \ (1.9)$$

Xét tổng $S(x) = (1+bx)^{m+1} + (1+bx)^{m+2} + ... + (1+bx)^{m+n}$ như là tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân với $u_1 = (1+bx)^{m+1}$ và công bội $q = (1+bx)$

Áp dụng công thức (1.9) ta được:

$$S(x) = (1+bx)^{m+1} \frac{1-(1+bx)^n}{1-(1+bx)} = \frac{(1+bx)^{m+n+1} - (1+bx)^{m+1}}{bx}$$

Suy ra hệ số của số hạng chứa x^k trong $S(x)$ là tích giữa $\dfrac{1}{b}$ và hệ số của số hạng chứa x^{k+1} trong khai triển $(1+bx)^{m+n+1} - (1+bx)^{m+1}$.

Ví dụ 1.18: Tìm hệ số của số hạng chứa x và rút gọn tổng sau:
$S(x)=(1+x)+2(1+x)^2+...+(n-1)(1+x)^{n-1}+n(1+x)^n$

Giải

Ta có: $S(x)=(1+x)\left[1+2(1+x)+...+(n-1)(1+x)^{n-2}+n(1+x)^{n-1}\right]$

$$f(x)=(1+x)1+2(1+x)+3(1+x)^2+...+(n-1)(1+x)^{n-2}+n(1+x)^{n-1}$$

Đặt: $F(x)=(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+...+(1+x)^{n-1}+(1+x)^n$

$$\Rightarrow \begin{cases} S(x)=f(x)+xf(x) \\ F'(x)=f(x) \end{cases}$$

Suy ra hệ số của số hạng chứa x của $S(x)$ bằng tổng của số hạng chứa x và không chứa x của $f(x)$ bằng tổng của số hạng chứa x và hai lần hệ số của số hạng chứa x^2 của $F(x)$

Tổng $F(x)$ có n số hạng $\Rightarrow F(x)=(1+x)\dfrac{1-(1+x)^n}{1-(1+x)}=\dfrac{(1+x)^{n+1}-(1+x)}{x}$

- Suy ra hệ số của số hạng chứa x của $F(x)=C_{n+1}^2$
- Suy ra hệ số của số hạng chứa x^2 của $F(x)=C_{n+1}^3$

Vậy hệ số cần tìm là: $C_{n+1}^2+2C_{n+1}^3=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. Bài toán tìm số hạng trong khai triển NEWTON

Ví dụ 2.1: Tìm số hạng thứ 21 trong khai triển: $(2-3x)^{25}$

Giải

Số hạng thứ 21 trong khai triển là: $C_{25}^{20}2^5(-3x)^{20}=C_{25}^{20}2^5 3^{20}x^{20}$

Ví dụ 2.2 Tìm số hạng chứa chứa x^{28} trong khai triển $(x^3+xy)^{10}$

Giải

Số hạng tổng quát trong khai triển là: $T_{k+1}=C_{10}^k(x^3)^{10-k}(xy)^k=C_{10}^k x^{30-2k}y^k$

Số hạng chứa x^{28} ứng với: $30-2k=28 \Leftrightarrow k=1$

Vậy số hạng cần tìm là: $C_{10}^1x^{29}y$

Ví dụ 2.3

a. Tìm số hạng đứng giữa trong các khai triển sau $(x^3+xy)^{21}$

b. Tìm số hạng đứng giữa trong các khai triển sau $\left(x\sqrt[4]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{(xy)^2}}\right)^{20}$

Giải

a. Khai triển $\left(x^3+xy\right)^{20}$ có $21+1=22$ số hạng nên có hai số hạng đứng giữa là số hạng thứ 11 và 12

- Số hạng thứ 11: $C_{21}^{10}\left(x^3\right)^{11}\left(xy\right)^{10}=C_{21}^{10}x^{43}y^{10}$
- Số hạng thứ 12: $C_{21}^{11}\left(x^3\right)^{10}\left(xy\right)^{11}=C_{21}^{10}x^{41}y^{11}$

b. Khai triển $\left(x\sqrt[4]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(xy\right)^2}}\right)^{20}$ có $20+1=21$ số hạng. Nên số hạng đứng giữa là số hạng thứ $\left[\dfrac{21}{2}\right]+1=16$: $C_{20}^{10}\left(x^{\frac{7}{4}}\right)^{10}\left(\left(xy\right)^{-\frac{2}{3}}\right)^{10}=C_{20}^{10}x^{\frac{65}{6}}y^{-\frac{20}{3}}$

(Với $\left[x\right]$ là ký hiệu phần nguyên của x nghĩa là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

Ví dụ 2.4 Tìm số hạng chứa x^3 trong khai triển $\left(1+x\left(1+x\right)\right)^{10}$

Giải

Cách 1: Xét khai triển

$$\left(1+x\left(1+x\right)\right)^{10}=C_{10}^0+C_{10}^1x\left(1+x\right)+C_{10}^2x^2\left(1+x\right)^2+C_{10}^3x^3\left(1+x\right)^3+...+C_{10}^{10}x^{10}\left(1+x\right)^{10}$$

Nhận thấy: x^3 chỉ có trong các số hạng:

- Số hạng thứ ba: $C_{10}^2x^2\left(1+x\right)^2=C_{10}^2\left(x^2+2x^3+x^4\right)$
- Số hạng thứ tư: $C_{10}^3x^3\left(1+x\right)^3=C_{10}^3\left(x^3+3x^4+3x^5+x^6\right)$

Vậy số hạng cần tìm là: $2C_{10}^2x^3+C_{10}^3x^3=210x^3$

Cách 2: Số hạng tổng quát trong khai triển là: $C_{10}^kx^k\left(1+x\right)^k$

$\Rightarrow$ Số hạng chứa x^3 ứng với: $2\le k\le 3$

- Với $k=2$ ta được: $C_{10}^2x^2\left(1+x\right)^2$ nên số hạng chứa x^3 là: $2C_{10}^2x^3$
- Với $k=3$ ta được: $C_{10}^3x^3\left(1+x\right)^3$ nên số hạng chứa x^3 là: $C_{10}^3x^3$

Vậy số hạng cần tìm là: $2C_{10}^2x^3+C_{10}^3x^3=210x^3$

Ví dụ 2.5:(ĐH Khối D- 2004) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển

$$f\left(x\right)=\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7 \text{ với } x>0$$

Giải

Số hạng tổng quát trong khai triển: $T_{k+1}=C_7^k\left(\sqrt[3]{x}\right)^{7-k}\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k=C_7^kx^{\frac{7}{3}-\frac{7}{12}k}$ $\left(k\in N,k\le 7\right)$

Ứng với số hạng không chứa x ta có: $\dfrac{7}{3}-\dfrac{7}{12}k=0\Leftrightarrow k=4$

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển $f\left(x\right)$ là: $C_7^4 = 35$

Ví dụ 2.6:(ĐHQG HN 2000) Tìm hệ số không chứa x trong khai triển:

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3}\right)^{17} \quad x \neq 0$$

Giải

Số hạng tổng quát trong khai triển:

$$T_{k+1} = C_{17}^k \left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{17-k}\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^k \quad \text{Với } \left(0 \le k \le 17, k \in Z\right)$$

$$= C_{17}^k x^{\frac{3k}{4}+\frac{2k}{3}-\frac{34}{3}} = C_{17}^k x^{\frac{17k}{12}-\frac{34}{3}}$$

Đến đây ta phải tìm k sao cho $\dfrac{17k}{12} - \dfrac{34}{3} = 0 \Leftrightarrow k = 8$

Vậy số hạng cần tìm là số hạng thứ 9 trong khai triển và có giá trị là: $C_{17}^8 = 24310$

Ví dụ 2.7:(CĐGT – TH&TT- Đề 2- 2004) Số hạng chứa a, b và có số mũ bằng nhau trong khai triển: $\left(\sqrt[3]{\dfrac{a}{\sqrt{b}}} + \sqrt{\dfrac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$

Giải

Ta có số hạng ổng quát cảu khai triển: $\left(\sqrt[3]{\dfrac{a}{\sqrt{b}}} + \sqrt{\dfrac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21} = \left(a^{\frac{1}{3}}.b^{-\frac{1}{6}} + a^{-\frac{1}{6}}.b^{\frac{1}{2}}\right)^{21}$

$$= \sum_{k=0}^{21} C_{21}^k a^{\frac{k}{3}}.b^{-\frac{k}{6}} a^{\frac{k-21}{6}}.b^{\frac{21-k}{2}} = \sum_{k=0}^{21} C_{21}^k a^{\frac{3k-21}{6}}.b^{\frac{63-4k}{3}}$$

Để số mũ của a và b bằng nhau $\Leftrightarrow \dfrac{3k-21}{6} = \dfrac{63-4k}{6} \Leftrightarrow k = 84$

Vậy hệ số của số hạng chứa a và b có số mũ bằng nhau trong khai triển là: $C_{12}^{21} = 293930$

Ví dụ 2.8 :(ĐHSP Khối A, 2000) Trong khai triển $\left(x\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{28}{15}}\right)^n$ $\left(x \neq 0\right)$**.** Hãy tìm số hạng không phụ thuộc vào x, biết rằng: $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$

Giải

Từ giả thiết ta có: $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79 \Leftrightarrow 1 + n + \dfrac{n\left(n-1\right)}{2} = 79$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 156 = 0 \Leftrightarrow n = 12$$

Ta có số hạng tổng quát trong khai triển $\left(x\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{28}{15}}\right)^{12}$ là:

$$C_{12}^{k}\left(x\sqrt[3]{x}\right)^{12-k}.\left(x^{-\frac{28}{5}}\right)^{k}=C_{12}^{k}x^{16-\frac{4k}{3}-\frac{28k}{15}}=C_{12}^{k}x^{16-\frac{48k}{15}}$$

Số hạng này không phụ thuộc vào $x \Leftrightarrow 16-\frac{48}{15}k=0 \Leftrightarrow k=5$

Vậy số hạng cần tìm là: $C_{12}^{5}=792$

Ví dụ: 2.9: Tìm số hạng thứ 6 trong khai triển $\left(\frac{x^2}{y^2}+\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}\right)^n$, $\left(x,y\neq 0, n\in N^*\right)$

Biết tổng tấc cả các hệ số trong khai triển này bằng: 4096

Giải

Trước tiên ta đi tìm n thông qua giả thiết đã cho: Có thể trình bày theo hai cách sau

Cách 1: Ta có: $\left(1+x\right)^n=a_0+a_1x+...+a_nx^n=4096\ (*)$ Trong đó: $a_k=C_n^k$

Với $x=1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2^n=a_0+a_1+...+a_n=4096=2^{12}\Rightarrow n=12$

Cách 2: Tổng tấc cả các hệ số trong khai triển là:

$$C_n^0+C_n^1+...+C_n^n=4079 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}C_n^0=2^{12}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n}C_n^0\left(1\right)^{n-k}.1^k=2^{12} \Leftrightarrow \left(1+1\right)^n=2^{12}\Leftrightarrow 2^n=2^{12}\Leftrightarrow n=12$$

Vậy số hạng thứ 6 trong khai triển $\left(\frac{x^2}{y^2}+\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}\right)^{12}$ là: $C_{12}^{5}\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^7\left(\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}\right)^5=792\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{32}{3}}$

Ví dụ 2.10:(ĐH SPHN- 2001) Cho khai triển nhị thức:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}=a_0+a_1x+...+a_9x^9+a_{10}x^{10}.$$

Hãy tìm số hạng a_k lớn nhất.

Giải

Ta có: $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}=\frac{1}{3^{10}}\left(1+2x\right)^{10}=\frac{1}{3^{10}}\sum_{k=0}^{n}C_{10}^{k}\left(2x\right)^k \Rightarrow a_k=\frac{1}{3^{10}}C_{10}^{k}2^k$

Ta có a_k đạt max $\Rightarrow \begin{cases}a_k\geq a_{k+1}\\ a_k\geq a_{k-1}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}C_{10}^{k}2^k\geq C_{10}^{k+1}2^{k+1}\\ C_{10}^{k}2^k\geq C_{10}^{k-1}2^{k-1}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{2^k10!}{k!(10-k)!}\geq\dfrac{2^k10!}{(k+1)!(9-k)!}\\ \dfrac{2^k10!}{k!(10-k)!}\geq\dfrac{2^k10!}{(k-1)!(11-k)!}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{10-k}\geq\dfrac{2}{k+1}\\ \dfrac{2}{k}\geq\dfrac{2}{11-k}\end{cases} \Leftrightarrow \frac{19}{3}\leq k\leq\frac{22}{3}$$

$\Rightarrow k = 7\left(k \in N, k \in [0,10]\right)$

Vậy $\max a_k = a_7 = \dfrac{2^7}{3^{10}} C_{10}^7$

Ví dụ 2.11:(Đề nghị Olimpic 30- 4)Tìm số hạng lớn nhất trong khai triển: $(1+0,2)^{1000}$

Giải

Ta có: Số hạng thứ k: $T_k = C_{1000}^{k-1}(0.2)^{k-1} = \dfrac{1}{5^{k-1}} C_{1000}^{k-1}$

Số hạng thứ $k+1$: $T_{k+1} = \dfrac{1}{5^k} C_{1000}^{k}$

Số hạng thứ $k-1$: $T_{k-1} = \dfrac{1}{5^{k-2}} C_{1000}^{k-2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_k \ge T_{k+1} \\ T_k \ge T_{k-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{1000}^{k-1} \ge \dfrac{1}{5} C_{1000}^{k} \\ \dfrac{1}{5} C_{1000}^{k-1} \ge C_{1000}^{k-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1000!}{(k-1)!(1001-k)!} \ge \dfrac{1}{5}.\dfrac{1000!}{k!(1000-k)!} \\ \dfrac{1}{5}.\dfrac{1000!}{(k-1)!(1001-k)!} \ge \dfrac{1000!}{(k-2)!(1002-k)!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1001-k} \ge \dfrac{1}{5k} \\ \dfrac{1}{5(k-1)} \ge 1002-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1002-k \ge 5k-5 \\ 5k \ge 1001-k \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1001}{6} \le k \le \frac{1007}{6} \Leftrightarrow k = 167$$

Vậy $\max T_k = \dfrac{1}{5^{166}} C_{1000}^{166}$

Ví dụ 2.12: Tìm số hạng hữu tỉ trong khai triển $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt[3]{5}\right)^{10}$

Giải

Số hạng tổng quát trong khai triển: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt[3]{5}\right)^{10} = \dfrac{1}{32} C_{10}^k 2^{\frac{k}{2}} 5^{\frac{k}{3}} = \left(\dfrac{1+2^{\frac{1}{2}}5^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{2}}\right)^{10}$

Số hạng hữu tỉ (số hạng thứ k) trong khai triển thỏa: $\begin{cases} \dfrac{k}{2} \in N \\ \dfrac{k}{3} \in N \end{cases} (k \in N, 0 \le k \le 10) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = 6 \end{array}\right.$

- Với $k = 0 \Rightarrow$ số hạng hữu tỉ là $\dfrac{1}{32} C_{10}^0 = \dfrac{1}{32}$
- Với $k = 6 \Rightarrow$ số hạng hữu tỷ là $\dfrac{1}{32} C_{10}^k 2^3.5^2 = \dfrac{2625}{2}$

Vậy số hạng cần tìm là: $\dfrac{2625}{2}$ *và* $\dfrac{1}{32}$

Phương pháp:

- Số hạng tổng quát trong khai triển là $(a+b)^n = C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^k a^{\frac{m}{p}} b^{\frac{r}{q}}$ (a, b là hữu tỉ)
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{m}{p} \in N \\ \frac{r}{q} \in N \end{cases}$ $(k \in N, 0 \le k \le n) \Rightarrow k_0$
- Số hạng cần tìm là: $C_n^{k_0} a^{n-k_0} b^{k_0}$

Ví dụ: Trong khai triển $\left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}\right)^{10}$ có bao nhiêu số hạng hữu tỉ.

Giải

Số hạng tổng quát trong khai triển:

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}\right)^{10} = \left(3^{\frac{1}{2}} - 5^{\frac{1}{4}}\right)^{124} = \sum_{k=0}^{124} C_{124}^k \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{124-k} . \left(-5^{\frac{1}{4}}\right)^k = \sum_{k=0}^{124} (-1)^k C_{124}^k 3^{62-\frac{k}{2}} . 5^{\frac{k}{4}}$$

Số hạng hữu tỉ (số hạng thứ k) trong khai triển thỏa

$$\begin{cases} 62 - \frac{k}{2} \in N \\ \frac{k}{4} \in N \\ k \in N \\ 0 \le k \le 124 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le k \le 124 \\ \frac{k}{4} \in N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i \in N \\ 0 \le k \le 124 \\ k = 4i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i \in N \\ 0 \le i \le 31 \\ k = 4i \end{cases} \Leftrightarrow i \in \{0,1,...,31\}$$

Vậy có 32 số hạng hữu tỉ

Ví dụ: Có bao nhiêu số hạng nguyên trong khai triển: $\left(\sqrt[3]{7}+\sqrt[5]{96}\right)^{36}$

Giải

Với $0 \le k \le 36$ ta có số hạng nguyên tổng quát trong khai triển:

$$C_{36}^k \left(\sqrt[3]{7}\right)^{36-k} . \left(\sqrt[5]{96}\right)^k = C_{36}^k 7^{12-\frac{k}{3}} . 2^k . 3^{\frac{k}{5}}$$

Số hạng nguyên $\Leftrightarrow 12 - \frac{k}{3}, \frac{k}{5} \in N \Leftrightarrow \begin{cases} k \vdots 15 \\ 0 \le k \le 36 \\ k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow k \in \{0, 15, 30\}$

Bài Tập Áp Dụng

Bài 1:(ĐH TK- 2002) Gọi $a_1, a_2, ..., a_{11}$ là các hệ số trong khai triển sau:

$$(x+1)(x+2) = x^{11} + a_1 x^{10} + a_2 x^9 + ... + a_{11}.$$

Hãy tính hệ số a_5

Bài 2: Tìm hệ số của số hạng trong các khai triển nhị thức NEWTON sau:

a) Hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển $\left(\frac{1}{x^4}+\sqrt[2]{x^5}\right)^{12}$

b) Hệ số của số hạng chứa x^{16} trong khai triển $\left[1-x^2\left(1-x^2\right)\right]^{16}$

c) Hệ số của số hạng chứa x^5 trong khai triển $x\left(1-2x\right)^5+x^2\left(1+3x\right)^{10}$ **(Khối D- 2007)**

d) Hệ số của số hạng chứa x^9 trong khai triển $\left(x^3-3x^2+2\right)^n$. Biết $\frac{A_n^4}{A_{n+1}^3-C_n^{n-4}}=\frac{24}{23}$

e) Hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển $f\left(x\right)=\left(1+2x\right)^3+\left(1+2x\right)^4+...+\left(1+2x\right)^{22}$

f) Hệ số của $x^5y^3z^6t^6$ trong khai triển đa thức: $\left(x+y+z+t\right)^{20}$ **(Đề 4 "TH&TT"- 2003)**

Bài 3:(TTĐH- Đề 3-2009- Thầy Nguyễn Tất Thu Tìm hệ số x^8 trong khai triển $\left(x^2-2\right)^n$, biết $A_n^3+C_n^1=8C_n^2+49$

Bài 4:(TTĐH- Đề 1-2009- Thầy Nguyễn Tất Thu) Tìm hệ số của x^6 trong khải triển $\left(x^2-x-1\right)^n$ thành đa thức. Trong đó n là số nguyên dương thỏa mãn:

$$C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n=2^{20}-1.$$

Bài 5(TTĐH 2009- Chuyên Phan Bội Châu- Nghệ An)Xác định hệ số của x^{11} trong khai triển đa thức $\left(x^2+2\right)^n\left(3x^3+1\right)^n$ biết:

$$C_{2n}^{2n}-3C_{2n}^{2n-1}+...+\left(-1\right)^k3^kC_{2n}^{2n-k}+...+3^{2n}C_{2n}^0=1024$$

Bài 6 Tìm các số hạng trong các khai triển sau:

a) Số hạng thứ 13 trong khai triển: $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt[4]{x^3}\right)^{17}$, $x\neq 0$

b) Số hạng thứ 3 trong khai triển $\left(2+x^2\right)^n$. Biết rằng:

$$3^nC_n^0-3^{n-1}C_n^1+3^{n-2}C_n^2+...+\left(-1\right)^nC_n^n$$

Bài 7 Tìm hệ số không phụ thuộc vào x trong các khai triển

a) $\left(x^3+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^{50}$ **b)** $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}-x\sqrt[3]{x}\right)^{12}$ **c)** $\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{x^2}}-x^3\right)^{16}$

Bài 8 Tìm các số hạng không chứa x trong các khai triển sau:

a) $\left(x+\frac{1}{x^{12}}\right)^{60}$ b) $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{12}$ c) $\left(1+x^2-x^4\right)^8$

d) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$ Biết số hạng thứ ba lớn hơn số hạng thứ hai bằng 35

Bài 9 Đặt: $\left(1+x+x^2+x^4\right)^7=a_0+a_1x+...+a_{28}x^{28}$

a) Tính: a_3

b) Tính: $S=a_0+a_1+a_2+...+a_{28}$

c) Tính: $S = a_0 - a_1 + a_2 - ... + a_{28}$

Bài 10:(LAISAC) Khai triển $P(x) = \left(x^3 + \dfrac{1}{2x^2}\right)^n$ ta được

$P(x) = a_0 x^{3n} + a_1 x^{3n-5} + a_2 x^{3n-10} + ...$ Biết rằng ba hệ số đầu a_0, a_1, a_2 lập thành một cấp số cộng. Tính số hạng chứa x^4

Bài 11: Trong khai triển của $\left(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3}\right)^{200}$ có bao nhiêu số hạng có hệ số là hữu tỉ?

Bài 12: Tìm hệ số lớn nhất trong các khai triển:

a) $(1-0.0001)^{1001}$ **b)** $(1+2x)^{21}$ **c)** $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2\sqrt{x}}{3}\right)^{11}$

C. ÁP DỤNG NHỊ THỨC NEWTON ĐỂ CHỨNG MINH HỆ THỨC VÀ TÍNH TỔNG TỔ HỢP.

I. Thuần nhị thức Newton

Dấu hiệu nhận biết: Khi các số hạng của tổng đó có dạng $C_n^k a^{n-k} b^k$ thì ta sẽ dùng trực tiếp nhị thức Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$. Việc còn lại chỉ là khéo léo chọn a,b

Ví dụ I.1: Tính tổng $3^{16}C_{16}^0 - 3^{15}C_{16}^1 + 3^{14}C_{16}^2 - ... + C_{16}^{16}$

Giải

Dễ dàng thấy tổng trên có dạng như dấu hiệu nêu trên. Ta sẽ chọn a = 3, b = -1. Khi đó tổng trên sẽ bằng $(3-1)^{16} = 2^{16}$

Ví dụ I2: Chứng minh rằng $C_{2001}^0 + 3^2 C_{2001}^2 + 3^4 C_{2001}^4 + ... + 3^{2000} C_{2001}^{2000} = 2^{2000}\left(2^{2001} - 1\right)$

Giải

Tương tự như trên, ta nghĩ ngay đến việc dùng nhị thức với $a = 1, b = 3$:

$$C_{2001}^0 + 3^1 C_{2001}^1 + 3^2 C_{2001}^2 + 3^3 C_{2001}^3 + 3^4 C_{2001}^4 + ... + 3^{2000} C_{2001}^{2000} = (3+1)^{2001} = 4^{2001}$$

Nhưng tổng cần tìm chỉ chứa các số hạng có C_{2001}^k với k chẵn nên ta phải triệt tiêu được các số hạng "lẻ" bằng cách tính tổng khác với $a = 1, b = -3$

$$C_{2001}^0 - 3^1 C_{2001}^1 - 3^2 C_{2001}^2 - 3^3 C_{2001}^3 + 3^4 C_{2001}^4 + ... + 3^{2000} C_{2001}^{2000} = (3-1)^{2001} = 2^{2001}$$

Do đó tổng cần tìm là $\dfrac{4^{2001} + 2^{2001}}{2} = 2^{2000}\left(2^{2001} - 1\right)$

Từ ví dụ trên ta có được bài toán tổng quát sau:

Ví dụ I.3:(ĐH Hàng Hải- 2000) Chứng minh rằng:

$$C_{2n}^0 + 3^2 C_{2n}^2 + 3^4 C_{2n}^4 + ... + 3^{2n} C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}\left(2^{2n} + 1\right)$$

Giải

$\left(1+x\right)^{2n}=C_{2n}^{0}x+C_{2n}^{1}x+C_{2n}^{2}x^{2}+...+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+C_{2n}^{2n}x^{2n}\quad(1)$

$\left(1-x\right)^{2n}=C_{2n}^{0}x-C_{2n}^{1}x+C_{2n}^{2}x^{2}+...-C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+C_{2n}^{2n}x^{2n}\quad(2)$

Lấy $(1)+(2)$ ta được: $\left(1+x\right)^{2n}+\left(1-x\right)^{2n}=2\left[C_{2n}^{0}+C_{2n}^{2}x^{2}+...+C_{2n}^{2n}x^{2n}\right]$

Chọn $x=3$ suy ra: $\left(4\right)^{2n}+\left(-2\right)^{2n}=2\left[C_{2n}^{0}+C_{2n}^{2}3^{2}+...+C_{2n}^{2n}3^{2n}\right]$

$\Leftrightarrow\dfrac{2^{4n}+2^{2n}}{2}=C_{2n}^{0}+C_{2n}^{2}3^{2}+...+C_{2n}^{2n}3^{2n}$

$\Leftrightarrow\dfrac{2^{2n}\left(2^{2n}+1\right)}{2}=C_{2n}^{0}+C_{2n}^{2}3^{2}+...+C_{2n}^{2n}3^{2n}$

$\Leftrightarrow 2^{2n-1}\left(2^{2n}+1\right)=C_{2n}^{0}+C_{2n}^{2}3^{2}+...+C_{2n}^{2n}3^{2n}$

$\Rightarrow$ *Đ*PCM

Ví dụ I.4: Tính tổng: $S=C_{2009}^{0}2^{11}3^{1}+C_{2009}^{1}2^{10}3^{2}+C_{2009}^{2}2^{9}3^{3}+...+C_{10}^{9}2^{2}3^{10}+C_{10}^{9}2^{1}3^{11}$

Giải

Để ý rằng bậc của 2 giảm dần từ $11\to1$, bậc của 3 tăng dần từ $1\to11$ vì vậy ta cần giảm bậc của 2 *v*à 3 trong mỗi số hạng xuống 1 đơn vị

Vậy ta có: $S=2.3\left(C_{2009}^{0}2^{10}3^{0}+C_{2009}^{2}2^{8}3^{2}+...+C_{10}^{9}2^{1}3^{9}+C_{10}^{9}2^{0}3^{10}\right)=6\left(2+3\right)^{10}=6.5^{10}$

Ví dụ I.5 : Tính tổng:

$$S=C_{2009}^{0}3^{2009}-C_{2009}^{1}3^{2008}4^{1}+C_{2009}^{2}3^{2007}4^{2}-...-C_{2009}^{2008}3^{1}4^{2008}+4^{2009}$$

Giải

Ta có: $T_{k+1}=\left(-1\right)^{k}C_{2008}^{k}3^{2008-k}4^{k}=C_{2008}^{k}3^{2008-k}\left(-4^{k}\right)$

$\Rightarrow S=\sum_{k=1}^{2009}C_{2009}^{k}3^{2009-k}\left(-4\right)^{k}=\left[3+\left(-4\right)\right]^{2009}=\left(-1\right)^{2009}=-1$

Ví dụ I.6: Cho n là số nguyên dương và chẵn, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1!\left(n-1\right)!}+\frac{1}{3!\left(n-3\right)!}+...+\frac{1}{\left(n-1\right)!1!}=\frac{2^{n-1}}{n!}\quad(*)$$

Giải

Ta có: $\left(1-1\right)^{n}=C_{n}^{0}-C_{n}^{1}+C_{n}^{2}-C_{n}^{3}+...+\left(-1\right)^{n}C_{n}^{n}$

Vì n chẵn $\left(n\in N\right)$ nên $\left(-1\right)^{n}=1$

Suy ra : $C_{n}^{0}-C_{n}^{1}+C_{n}^{2}-C_{n}^{3}+...+\left(-1\right)^{n}C_{n}^{n}=0\ (**)$

Ta có: $(*)\Leftrightarrow\dfrac{n!}{1!\left(n-1\right)!}+\dfrac{n!}{3!\left(n-3\right)!}+...+\dfrac{n!}{\left(n-1\right)!1!}=2^{n-1}$

$\Leftrightarrow C_{n}^{1}+C_{n}^{3}+...+C_{n}^{n-1}=2^{n-1}$

Từ $(*)\Rightarrow\begin{cases}C_{n}^{0}-C_{n}^{1}+C_{n}^{2}-C_{n}^{3}+...-C_{n}^{n-1}+C_{n}^{n}=0\ (i)\\ C_{n}^{0}+C_{n}^{1}+C_{n}^{2}+C_{n}^{3}+...+C_{n}^{n-1}+C_{n}^{n}=2^{n}\ (ii)\end{cases}$

Lấy (i) trừ (ii) ta được: $2\left(C_n^1+C_n^3+...+C_n^{n-1}\right)=2^n$

$\Leftrightarrow\left(C_n^1+C_n^3+...+C_n^{n-1}\right)=\dfrac{2^n}{2}=2^{n-1}\ \Rightarrow(ĐPCM)$

Ví dụ I.7: (CĐXD Số 3, 2003) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta đều có: $C_{2n}^1+C_{2n}^3+C_{2n}^5+...+C_{2n}^{2n-1}=C_{2n}^0+C_{2n}^2+C_{2n}^4+...+C_{2n}^{2n}$

Giải

Ta có khai triển: $(x+1)^{2n}=C_{2n}^0x^{2n}+C_{2n}^1x^{2n-1}+C_{2n}^2x^{2n-2}+...+C_{2n}^{2n}$

Chọn $x=-1$ ta được: $0=C_{2n}^0x^{2n}-C_{2n}^1+C_{2n}^2-C_{2n}^3+...+C_{2n}^{2n}$

$\Leftrightarrow C_{2n}^1+C_{2n}^3+C_{2n}^5+...+C_{2n}^{2n-1}=C_{2n}^0+C_{2n}^2+C_{2n}^4+...+C_{2n}^{2n}\ (ĐPCM)$

Chọn $2n=20$ ta có được một đẳng thức "đẹp" sau:

Ví dụ I.8:(CĐSP Bến Tre –Khối A-2002) Chứng minh rằng:

$$C_{20}^1+C_{20}^3+C_{20}^5+...+C_{20}^{19}=2^{19}$$

Giải

Cách 1: Ta có:

$(1-x)^{20}=C_{20}^0-C_{20}^1x+C_{20}^2x^2-...-C_{20}^{19}x^{19}+C_{20}^{20}x^{20}$

Chọn $x=1$ ta được:

$0=C_{20}^0-C_{20}^1+C_{20}^2-...-C_{20}^{19}+C_{20}^{20}$

$\Leftrightarrow C_{20}^0+C_{20}^2+...+C_{20}^{20}=C_{20}^1+C_{20}^3+...+C_{20}^{19}$

$\Leftrightarrow A=B$ với $\begin{cases}A=C_{20}^0+C_{20}^2+...+C_{20}^{20}\\B=C_{20}^1+C_{20}^3+...+C_{20}^{19}\end{cases}$ (1)

Mặt khác: $(1+x)^{20}=C_{20}^0+C_{20}^1x+C_{20}^2x^2+...+C_{20}^{19}x^{19}+C_{20}^{20}x^{20}$

Chọn $x=1$ cho ta: $2^{20}=C_{20}^0+C_{20}^1+C_{20}^2+...+C_{20}^{19}+C_{20}^{20}$

$\Rightarrow A+b=2^{20}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $A=\dfrac{2^{20}}{2}=2^{19}\ (ĐPCM)$

Cách 2: Áp dụng công thức $C_{n+1}^k=C_n^{k-1}+C_n^k$ và $C_n^0=1$

Ta được: $C_{20}^1+C_{20}^3+C_{20}^5+...+C_{20}^{19}=C_{19}^1+C_{19}^2+C_{19}^3+...+C_{19}^{18}+C_{19}^{19}=(1+1)^{19}=2^{19}$

Ví dụ 1.9: Rút gọn tổng sau:

$S=3^{2006}.2.C_{2007}^1-3^{2004}.2^3.C_{2007}^3+3^{2002}.2^5.C_{2007}^5+...+2^{2007}.C_{2007}^{2007}$

Giải

Ta có các khai triển:

$(3+2)^{2007}=3^{2007}C_{2007}^0+3^{2006}.2.C_{2007}^1+3^{2005}.2^2.C_{2007}^2+...+3.2^{2006}.C_{2007}^{2007}+2^{2007}.C_{2007}^{2007}\quad(*)$

$(3-2)^{2007}=3^{2007}C_{2007}^0-3^{2006}.2.C_{2007}^1+3^{2005}.2^2.C_{2007}^2-...+3.2^{2006}.C_{2007}^{2007}-2^{2007}.C_{2007}^{2007}\quad(**)$

Trừ $(*)$ và $(**)$ ta được:

$$2\left(3^{2006}.2.C_{2007}^{1}+3^{2004}.2^{3}.C_{2007}^{2}+...+3.2^{2006}.C_{2007}^{2007}+2^{2007}.C_{2007}^{2007}\right)=5^{2007}-1$$

Vậy $S=\dfrac{5^{2007}-1}{2}$.

Ví dụ I.10:(CĐ, khối T-M- 2004) Chứng minh rằng:

$$C_{2004}^{0}+2^{2}C_{2004}^{1}+...+2^{2004}.C_{2004}^{2004}=\frac{3^{2004}+1}{2}$$

Giải

Ta có:

$$\begin{cases}(1+x)^{2004}=\sum\limits_{k=0}^{2004}C_{2004}^{k}x^{k}\\(1-x)^{2004}=\sum\limits_{k=0}^{2004}C_{2004}^{k}(-x)^{k}\end{cases}\Rightarrow(1+x)^{2004}+(1-x)^{2004}=\sum_{k=0}^{2004}C_{2004}^{k}\left[x^{k}+(-x)^{k}\right]$$

$$=2\left(C_{2004}^{0}+C_{2004}^{2}x^{2}+...+C_{2004}^{2004}x^{2004}\right)$$

Với $x=2$ ta có: $C_{2004}^{0}+C_{2004}^{2}2^{2}+...+C_{2004}^{2004}2^{2004}=\dfrac{3^{2004}+1}{2}$

Ví dụ I.11: Chứng minh: $C_{a}^{p}+C_{a}^{p-1}C_{b}^{1}+C_{a}^{p-1}C_{b}^{1}+...+C_{a}^{p-q}C_{b}^{q}+...+C_{b}^{p}=C_{a+b}^{p}$

Giải

Điều kiện: $p\le a,b$

Ta có:

$$\begin{cases}(1+x)^{a}=C_{a}^{0}+C_{a}^{1}x+C_{a}^{2}x^{2}...+C_{a}^{a}x^{a}\\(1+x)^{b}=C_{b}^{0}+C_{b}^{1}x+C_{b}^{2}x^{2}...+C_{b}^{b}x^{b}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(1+x)^{a+b}=M+\left(C_{a}^{p}+C_{a}^{p-1}C_{b}^{1}+C_{a}^{p-1}C_{b}^{1}+...+C_{a}^{p-q}C_{b}^{q}+...+C_{b}^{p}\right)x^{p}\ (*)$$

Với M là một đa thức không chứa x^{p}

Mặt khác $(1+x)^{a+b}=C_{a+b}^{0}+C_{a+b}^{1}x+...+C_{a+b}^{p}x^{p}...+C_{a+b}^{a+b}x^{a+b}$ (**)

Đồng nhất hệ số ở (*) và (**) cho ta (ĐPCM)

II.Sử dụng đạo hàm cấp 1,2

1. Đạo hàm cấp 1

Dấu hiệu: Khi hệ số đứng trước tổ hợp tăng dần hoặc giảm dần từ 1,2,3,…n hay n,…,3,2,1 tức số hạng đó có dạng kC_{n}^{k} hoặc $kC_{n}^{k}a^{n-k}b^{k-1}$ thì ta có thể dùng đạo hàm cấp 1 đến tính. Cụ thể

$$(a+x)^{n}=C_{n}^{0}a^{n}+C_{n}^{1}a^{n-1}x+C_{n}^{2}a^{n-2}x^{2}+C_{n}^{3}a^{n-3}x^{3}+...+C_{n}^{n}x^{n}$$

Lấy đạo hàm hai vế theo x ta được :

$$n(a+x)^{n-1}=C_{n}^{1}a^{n-1}+2C_{n}^{2}a^{n-2}+3C_{n}^{3}a^{n-3}x^{2}+...+nC_{n}^{n}x^{n-1}\qquad(1)$$

Đến đây thay x,a bằng hằng số thích hợp ta được tổng cần tìm.

Ví dụ II.1.1:(ĐH BKHN- 1999) Tính tổng $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - 4C_n^4 + ... + (-1)^{n-1}nC_n^n$

Giải

Ta thấy tổng cần tính có dạng như VP (1). Việc còn lại chỉ cần chọn $a = 1, x = -1$ ta tính được tổng bằng 0.

Cách khác: Sử dụng đẳng thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ ta được tổng bằng :

$$nC_{n-1}^0 - nC_{n-1}^1 + nC_{n-1}^2 - nC_{n-1}^3 + ... + (-1)^{n-1}nC_{n-1}^{n-1} = n(1-1)^{n-1} = 0$$

Dùng cách này có thể tránh được dùng đạo hàm do đó phù hợp với các bạn 11 chưa học đến đạo hàm hoặc cảm thấy dùng chưa quen đạo hàm.

Ví dụ II.1.2: Tính tổng: $2C_n^1 + 2.C_n^2 2 + 3C_n^2 2^2 + ... + nC_n^n 2^{n-1}$

Giải

Xét: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 ... + C_n^n$

$\Rightarrow f'(x) = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^{k-1} = n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + ... + nC_n^n x^{n-1}$

$\Rightarrow f'(2) = n3^{n-1}$

Ví dụ II.1.3:(ĐH KTQD- 2000) Chứng minh

$(2+x)^n = 1.2^{n-1}C_n^1 + 2.2^{n-2}.C_n^2 + 3.2^{n-2}.C_n^2 ... + nC_n^n = n3^{n-1} \quad (\forall 1 \le n \in Z)$

Giải

Cách 1: Ta có: $(2+x)^n = C_n^0 2^n + C_n^1 2^{n-1} x + C_n^2 2^{n-2} x^2 + ... + C_n^n x^n$

Đạo hàm hai vế theo biến x ta được:

$n(2+x)^{n-1} = C_n^1 2^{n-1} + 2C_n^2 2^{n-2} x + 3C_n^3 2^{n-3} x^2 ... + C_n^n n.x^n$

Với $x = 1 \Rightarrow n3^{n-1} = C_n^1 2^{n-1} + C_n^2 2^{n-2}.2 + C_n^3 2^{n-3}.3 ... + C_n^n n \Rightarrow Đ$PCM

Cách 2: Ta có: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$

Đạo hàm hai vế theo biến x ta được: $n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + ... + nC_n^n x^{n-1}$

Ta chọn $x = \frac{1}{2} \Rightarrow n\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 \frac{1}{2} + ... + nC_n^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\Rightarrow n3^{n-1} = C_n^1 2^{n-1} + 2.2^{n-2} C_n^2 + 3.2^{n-3} C_n^3 ... + nC_n^n \Rightarrow Đ$PCM

Ví dụ II.1.4: Tính tổng

$$S = n2^{n-1}C_n^0 + (n-1)2^{n-2}.3.C_n^1 + (n-2)2^{n-3}.3^2.C_n^2 + ... + 3^{n-1}C_n^{n-1}$$

Giải

Nhận thấy hệ số đứng trước tổ hợp giảm dần n,n-1, …,3,2,1 nên phải hoán đổi vị trí a và x:

$$(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + ... + C_n^n a^n$$

Đạo hàm theo x: $n(x+a)^{n-1} = nx^{n-1}C_n^0 + (n-1)x^{n-2}aC_n^1 + (n-2)x^{n-3}a^2C_n^2 + ... + a^{n-1}C_n^{n-1}$

Thay x = 2, a = 3 ta được tổng bằng $n5^{n-1}$

Cách khác: Khéo léo sử dụng 2 đẳng thức $C_n^{n-k} = C_n^k, kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ ta có thể tránh việc phải dùng đạo hàm phức tạm:

$$S = n2^{n-1}C_n^n + (n-1)2^{n-2}3C_n^{n-1} + (n-2)2^{n-3}3^2C_n^{n-2} + ... + 3^{n-1}C_n^1$$
$$= n2^{n-1}C_{n-1}^{n-1} + n2^{n-2}3C_{n-1}^{n-2} + n2^{n-3}3^2C_{n-1}^{n-3} + ... + n3^{n-1}C_{n-1}^0$$
$$= n\left(2^{n-1}C_{n-1}^{n-1} + 2^{n-2}3C_{n-1}^{n-2} + 2^{n-3}3^2C_{n-1}^{n-3} + ... + 3^{n-1}C_{n-1}^0\right) = n(2+3)^{n-1} = n5^{n-1}$$

Ví dụ II.1.5: Tính tổng $2008C_{2007}^0 + 2007C_{2007}^1 + 2006C_{2007}^2 + ... + 2C_{2007}^{2006} + C_{2007}^{2007}$

Giải

Hệ số trước tổ hợp giảm dần từ 2008,2007,…2,1 nên dùng đạo hàm là điều dễ hiểu:

$$(x+1)^{2007} = C_{2007}^0x^{2007} + C_{2007}^1x^{2006} + C_{2007}^2x^{2005} + ... + C_{2007}^{2006}x + C_{2007}^{2007}$$

Bây giờ nếu lấy đạo hàm thì chỉ được $2007C_{2007}^0x^{2006}$ trong khi trong đề đến 2008 do đó ta phải nhân thêm x vào đẳng thức trên rồi mới đạo hàm:

$$x(x+1)^{2007} = C_{2007}^0x^{2008} + C_{2007}^1x^{2007} + C_{2007}^2x^{2006} + ... + C_{2007}^{2006}x^2 + C_{2007}^{2007}x$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^{2006}(2008x+1) = 2008C_{2007}^0x^{2007} + 2007C_{2007}^1x^{2006} + ... + 2C_{2007}^{206}x + C_{2007}^{2007}$$

Thay x = 1 vào ta tìm được tổng là 2009.2^{2006}

Ví dụ II.1.6: Chứng minh đẳng thức:

a) (ĐH TCKT Hà Nội 2000): $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + C_n^nx^n = n.2^{n-1}$

b) $C_n^1 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + (p+1)C_n^p + ... + (n+1)C_n^n = (n+2).2^{n-1}$

Giải:

a) Xét nhị thức $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 ... + C_n^nx^n$

Lấy đạo hàm hai vế đẳng thức theo biến x:

$n(1+x)^{n-1} = C_n^0 + 2C_n^2x + ... + nC_n^nx^{n-1}$

Chọn $x = 1$ ta được: $C_n^0 + 2C_n^2 + ... + C_n^n = n.2^{n-1}$

b) Tương tự như câu **a** ta nhân x cho 2 vế của đẳng thức rồi lấy đạo hàm.

Ví dụ II.1.7: Rút gọn biểu thức sau: $S = 3C_n^0 + 4C_n^1 + 5C_n^2 + ... + (n+3)C_n^n$

Giải

Cách 1: Nhận thấy rằng với $x = 1$ thì ta có:

- $3C_n^0 = \left(C_n^0x^3\right)'$
- $4C_n^1 = \left(C_n^1x^4\right)'$

……………

- $(n+3)C_n^0 = \left(C_n^nx^{n+3}\right)'$

Suy ra:

$$C_n^0x^3 + C_n^1x^4 + C_n^2x^5 ... + (n+3)C_n^nx^{n+3} = x^3\left(C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^3 + ... + C_n^nx^{n+3}\right) = x^3(1+x)^n \quad (*)$$

Xét hàm số: $f(x)=x^3(1+x)^n$

$\Rightarrow f'(x)=3x^2(1+x)^n+nx^3(1+x)^{n-1}$

Kêt hợp với (*) $\Rightarrow f'(x)=3x^2C_n^0+4x^3C_n^1+C_n^2 5x^4+...+(n+3)x^{n+2}C_n^n$

Chọn $x=1$ thì: $S=3C_n^0+4C_n^1+5C_n^2+...+(n+3)C_n^n$

$=3.2^n+n2^{n-1}=2^{n-1}(n+6)$

2. Đạo hàm cấp 2

Dấu hiệu: Khi hệ số đứng trước tổ hợp có dạng 1.2 , 2.3 , …, (n-1).n hay (n-1)n, …, 2.3 , 1.2 hay $1^2, 2^2, ..., n^2$ (không kể dấu) tức có dạng $k(k-1)C_n^k a^{n-k}$ hay tổng quát hơn $k(k-1)C_n^k a^{n-k}b^k$ thì ta có thể dùng đạo hàm đến cấp 2 để tính. Xét đa thức:

$$(a+bx)^n = C_n^0 + C_n^1 a^{n-1}bx + C_n^2 a^{n-2}b^2x^2 + C_n^3 a^{n-3}b^3x^3 + ... + C_n^n b^n x^n$$

Khi đó đạo hàm hai vế theo x ta được:

$$bn(a+bx)^{n-1} = C_n^1 a^{n-1}b + 2C_n^2 a^{n-2}b^2x + 3C_n^3 a^{n-3}b^3x^2 + ... + nC_n^n b^n x^{n-1}$$

Đạo hàm lần nữa:

$$b^2n(n-1)(a+bx)^{n-2} = 2.1C_n^2 a^{n-2}b^2 + 3.2C_n^3 a^{n-3}b^3x + ... + n(n-1)C_n^n b^n x^{n-2} (2)$$

Đến đây ta gần như giải quyết xong **Ví dụ** toán chỉ việc thay a, b, x bởi các hằng số thích hợp nữa thôi.

Ví dụ I.2.1: Chứng minh rằng

$$S=2.1C_n^2+3.2C_n^3+4.3C_n^4+...+n(n-1)C_n^n=n(n-1)2^{n-2}$$

Dễ dàng thấy được VT của đẳng thức trên giống gần như hoàn toàn VP (2) ta chỉ việc thay $a=b=x=1$ là đã giải quyết xong bài toán

<u>Chú ý</u>: Đây chỉ là ý tưởng còn khi trình bày vào bài kiểm tra hay bài thi thì ta phải ghi rõ xét đa thức $(1+x)^n$ rồi đạo hàm 2 lần và thay x = 1 vào mới được trọn số điểm.

Cách khác: Ta vẫn có thể sử dụng được đẳng thức $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$ 2 lần để tính tổng trên, cụ thể:

$$S=n1C_{n-1}^1+n2C_{n-1}^2+n3C_{n-1}^3+...+n(n-1)C_{n-1}^{n-1}=$$

$$=n(n-1)C_{n-2}^0+n(n-1)C_{n-2}^1+n(n-1)C_{n-2}^2+...+n(n-1)C_{n-2}^{n-2}=$$

$$=n(n-1)(1+1)^{n-2}=n(n-1)2^{n-2}$$

Tương tự như trên ta dễ dàng tính được tổng bằng cách thay x = -1 và n = 16

$$1.2C_{16}^2-2.3C_{16}^3+3.4C_{16}^4-...-14.15C_{16}^{15}+15.16C_{16}^{16}$$

Hoặc ta cũng có thể sử dụng $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$ để đơn giản hơn một chút.

Ví dụ I.2.2 Rút gọn tổng sau $1^2C_{2009}^1 2^{2008}+2^2C_{2009}^2 2^{2007}+3^2C_{2009}^3 2^{2006}+...+2009^2C_{2009}^{2009}$

Giải

Với ý tưởng như **Ví dụ** trên ta xét đa thức

$$(2+x)^{2009}=C_{2009}^{0}2^{2009}+C_{2009}^{1}2^{2008}x+C_{2009}^{2}2^{2007}x^{2}+C_{2009}^{3}2^{2006}x^{3}+...+C_{2009}^{2009}x^{2009}$$

Đạo hàm lần 1:

$$2.2009(2+x)^{2008}=1C_{2009}^{1}2^{2008}+2C_{2009}^{2}2^{2007}x+3C_{2009}^{3}2^{2006}x^{2}+...+2009C_{2009}^{2009}x^{2008}$$

Nếu ta tiếp tục đạo hàm lần nữa thì chỉ thu được 1.2, 2.3 ,… do đó để thu được $2^2, 3^2$ ta phải nhân thêm hai vế với x rồi mới lấy đạo hàm:

$$2009x(2+x)^{2008}=1C_{2009}^{1}2^{2008}x+2C_{2009}^{2}2^{2007}x^{2}+...+2009C_{2009}^{2009}x^{2009}$$

$$2009(2+x)^{2008}+2009.2008x(2+x)^{2007}=1^2C_{2009}^{1}2^{2008}+2^2C_{2009}^{2}2^{2007}x+...+2009^2C_{2009}^{2009}x^{2008}$$

Thay x = 1 ta rút gọn được tổng trên thành $2011.2009.3^{2007}$

Tương tự khi tính tổng $2.1C_n^1+3.2C_n^2+4.3C_n^3+...+(n+1)nC_n^n$ ta cần chú ý là trước tổ hợp có một hệ số lớn hơn k trong C_n^k nên ta phải nhân với x trước khi đạo hàm 2 lần.

Ví dụ I.2.3:(ĐH AN – CS Khối A 1998) Cho $f(x)=(1+x)^n$, $(2\le n\le Z)$

a) Tính $f''(1)$

b) Chứng minh rằng:

$$2.1C_n^2+3.2C_n^3+4.3C_n^4+...+(n-1)nC_n^n+...+(n-1)nC_n^n=n(n-1)2^{n-2}$$

Giải

a) $f'(x)=n(1+x)^{n-1}\Rightarrow f''(x)=n(n-1)(1+x)^{n-2}\Rightarrow f''(1)=n(1+x)^{n-2}$

b) Ta có: $f(x)=(1+x)^n=\sum_{k=1}^{n}C_n^kx^k=C_n^0+C_n^1x+\sum_{k=2}^{n}C_n^kx^k$

$$f'(x)=C_n^1+\sum_{k=2}^{n}kC_n^kx^{k-1}$$

$$f''(x)=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)C_n^kx^{k-2}$$

$$\Rightarrow f''(1)=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)C_n^k=2^{n-2}$$

$$\Rightarrow 2.1C_n^1+3.2C_n^2+...+(p+1)C_n^p+...+(n+1)nC_n^n=n(n+1)2^{n-2};\ (\textbf{ĐPCM})$$

Từ câu **b** ta thay $(n-1)=(n+1)$ thì ta có một bài toán khác:

b') Chứng minh rằng: $2.1C_n^1+3.2C_n^2+...+(n+1)pC_n^p+...+(n+1)nC_n^n=n(n+1)2^{n-2}$

Với bài toán này ta có thể giải như sau:

Xét nhị thức: $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2...+C_n^nx^n$

Nhân hai vế của đẳng thức với $x\#0$ đồng thời lấy đạo hàm cấp 2 hai vế theo biến x ta được: $2n(1+x)^{n-1}+n(n-1)x(1+x)^{n-2}=2C_n^1x+3.2C_n^2x...+(n+1)nC_n^nx^{n-1}$

Cho $x=1$ ta được $Đ$PCM

III. Sử dụng tích phân xác định

Dấu hiệu: Ý tưởng của phương pháp này là dựa vào hệ thức

$$\int_a^b x^k dx = \left(\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)\Bigg|_a^b = \frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{k+1}$$

Từ đấy dễ dàng tìm được dấu hiệu để sử dụng phương pháp này là số hạng của tổng có dạng $\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{k+1}C_n^k$. Cụ thể, xét tích phân $I=\int_a^b (c+dx)^n dx$ ta có thể tính bằng hai cách.

Tính trực tiếp: $I=\frac{1}{d}\int_a^b (c+dx)^n d(c+dx)=\frac{1}{d}\left(\frac{(c+dx)^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_a^b$

Hoặc gián tiếp: $I=\int_a^b\left(\sum_{k=0}^n C_n^k c^{n-k} d^k x^k\right)dx=\sum_{k=0}^n\left(C_n^k c^{n-k} d^k \int_a^b x^k dx\right)$

$$=\sum_{k=0}^n\left[C_n^k c^{n-k} d^k\left(\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)\Bigg|_a^b\right]=\sum_{k=0}^n\left(\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{k+1}C_n^k c^{n-k} d^k\right)$$

Hai cách trên là như nhau nên từ đó ta có được:

$$\sum_{k=0}^n\left(\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{k+1}C_n^k c^{n-k} d^k\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{(c+dx)^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_a^b$$

Tùy Ví dụ toán ta chọn các hệ số a, b, c, d thích hợp

Ví dụ II.1: CMR $2C_n^0+\frac{2^2}{2}C_n^1+\frac{2^3}{3}C_n^2+...+\frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}\ (III.1)$

Giải

Nhìn vào tử của phân số dễ dàng tìm được hai cận $a=0,b=2$. Tiếp tục để ý một chút ta chọn tiếp $c=d=1$ suy ra đpcm

<u>Chú ý:</u> Khi trình bày bài thi phải ghi rõ tích phân $\int_0^2 (1+x)^n dx$ rồi tính bằng hai cách mới được trọn điểm.

Cách khác: Ta có thể tránh không dùng tích phân bằng cách áp dụng đẳng thức: $\frac{C_n^k}{k+1}=\frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$. Việc tính toán không những đơn giản hơn mà còn giảm thiểu được sai sót khi làm bài:

$$VT(III.1)=\frac{1}{n+1}\left(2C_{n+1}^1+2^2C_{n+1}^2+2^3C_{n+1}^3+...+2^{n+1}C_{n+1}^{n+1}\right)=\frac{(1+2)^{n+1}-1}{n+1}$$

Để thấy rõ sự hữu ích của đẳng thức đơn giản đó, ta xét một **Ví dụ** khác. Tính tổng

$$S=\left(\frac{C_n^0}{1}\right)^2+\left(\frac{C_n^1}{2}\right)^2+\left(\frac{C_n^3}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{C_n^n}{n+1}\right)^2$$

Rõ ràng dùng tích phân đối với bài này gần như là không thể nhưng nếu áp dụng đẳng thức đó thì lại là một chuyện khác:

$$S=\frac{1}{(n+1)^2}\left[\left(C_{n+1}^1\right)^2+\left(C_{n+1}^2\right)^2+\left(C_{n+1}^3\right)^2+\ldots+\left(C_{n+1}^{n+1}\right)^2\right]$$

Việc còn lại bây giờ chỉ là tính tổng trong ngoặc vuông đó. Có rất nhiều cách để tính nên chúng ta sẽ quay lại tổng này trong phần “ Các phương pháp khác “.

Trở lại phần tích phân, với việc thay a, b, c, d bằng cách hằng số thích hợp ta có thể “chế” ra các **Ví dụ** toán phức tạp hơn, chẳng hạn khi $a=2, b=-3, c=1, d=-1$ ta có:

$$\frac{2+3}{1}C_{2009}^1-\frac{2^2-3^2}{2}C_{2009}^2+\frac{2^3+3^3}{3}C_{2009}^3-\ldots-\frac{2^{2010}-3^{2010}}{2010}C_{2009}^{2009}=\frac{1-4^{2010}}{2010}$$

Ví dụ II.2: Tính $\frac{2^2-1}{2}C_n^0+\frac{2^3-1}{3}C_n^1+\frac{2^4-1}{4}C_n^2+\ldots+\frac{2^{n+2}-1}{n+2}C_n^n$

Giải

Mỗi số hạng của tổng có dạng $\frac{2^{k+2}-1}{k+2}C_n^k$ nên ta nghĩ ngay đến dùng tích phân. Nhưng mẫu của hệ số lại là $k+2$ so với trong dấu hiệu ở trên là $k+1$. Do đó ta phải thay tích phân $\int_a^b(1+x)^n dx$ bằng tích phân khác. Ở đây ta chọn $I=\int_a^b x(1+x)^n dx$. Dễ dàng tìm được cận trên là 2, cận dưới là 1. Thử lại:

$$I=\int_1^2\left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^{k+1}\right)dx=\sum_{k=0}^n\left(C_n^k\int_1^2 x^{k+1}dx\right)=\sum_{k=0}^n\left(\frac{2^{k+2}-1}{k+2}C_n^k\right)$$

Việc còn lại bây giờ chỉ là đi tính trực tiếp I:

$$I=\int_1^2(x+1-1)(1+x)^n dx=\int_1^2\left[(1+x)^{n+1}-(1+x)^n\right]dx=\left.\left(\frac{(1+x)^{n+2}}{n+2}-\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right)\right|_1^2$$

Với ý tưởng đó ta xét tổng sau:

$$\frac{1}{2}C_n^0-\frac{1}{4}C_n^1+\frac{1}{6}C_n^2-\frac{1}{8}C_n^3+\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+2}C_n^n$$

Mẫu của hệ số trước tổ hợp giờ đây không còn mẫu mực nữa mà “nhảy cóc” 2, 4, 6, …, 2n + 2 và để ý mỗi số hạng có dạng $\frac{C_n^k}{2k+2}$ nên số hạng ban đầu của nó trước khi lấy nguyên hàm là $C_n^k x^{2k+1}$ hay $C_n^k\left(x^2\right)^k.x$ đến đây phần nào ta đã đoán ra được tích phân ban đầu là $\int x(1+x^2)^n dx$. Nhưng như vậy thì dấu trừ ở đâu ra ? Tinh ý một chút ta sửa lại được: $\int x(1-x^2)^n dx$. Việc thay cận đơn giản hơn, ở đây ta chọn cận trên là 1, cận dưới là 0. Thử lại tí chút:

$$\int_0^1 x(1-x^2)^n dx = \int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k x^{2k+1}\right)dx = \sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k(-1)^k\int_0^1 x^{2k+1}dx\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{C_n^k(-1)^k}{2k+2}\right)$$

Phần còn lại của **Ví dụ** toán là tính tích phân đó:

$$\int_0^1 x(1-x^2)^n dx = \frac{-1}{2}\int_0^1 (1-x^2)^n d(1-x^2) = \frac{-1}{2}\left(\frac{(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\right)_0^1$$

Với việc thay đổi tích phân ta có thể làm ra ti tỉ các tổng khác phức tạp hơn ^^!. **Ví dụ**

$$\int_1^3 x^3(1-x)^n dx, \int_0^2 x^2(2-x^3)^n dx, \int_{-1}^0 (x+1)(1-x^2)^n dx...$$

Ví dụ II.3: Rút gọn: $S = \frac{1}{2}C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}C_n^n; (1 \le n \in Z)$

Giải

Xét: $f(x) = (1-x)^n = 1 - C_n^2 x + C_n^2 x^2 + ... + (-1)^n C_n^n x^n$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1-x)^n dx = \int_0^1\left(1 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + (-1)^n C_n^n x^2\right)$$

$$\left[\frac{(1-x)^{n+1}}{-(n+1)}\right]_0^1 = 1 - \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + ... + \frac{(-1)^n C_n^n}{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{C_n^1}{2} - \frac{C_n^2}{3} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}C_n^n = \frac{n}{n+1}$$

Ví dụ II.4: Chứng minh rằng: $C_n^1\frac{1}{1} - C_n^2\frac{1}{2} + C_n^3\frac{1}{3} + ... + (-1)^{n-1}C_n^n\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$

Giải

Ta có: $\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^2 = \frac{1-(1-x)^n}{x} = \frac{1-\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k x^k}{x} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^{k-1}x^{k-1} \quad (\forall x \neq 0)$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^{k-1}x^{k-1}$$

$$\Rightarrow \int_0^1\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k dx = \int_0^1\sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^{k-1}x^{k-1}dx$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{(1-x)^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=1}^{n} C_n^k(-1)^{k-1}\left[\frac{x^k}{k}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k\frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$\Rightarrow C_n^1\frac{1}{1} - C_n^2\frac{1}{2} + C_n^3\frac{1}{3} + ... + (-1)^{n-1}C_n^n\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \Rightarrow$$ **ĐPCM .**

IV. Công cụ số phức

Ý tưởng của phương pháp này là dựa tính chất đặc biệt của i:

$$i^{4k}=1 \ , \ i^{4k+1}=i \ , \ i^{4k+2}=-1 \ , \ i^{4k+3}=-i \text{ với } k\in N$$

Từ đó, ta xét đa thức

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n$$

Đặt $S_0=\sum_{i=4k} a_i, S_1=\sum_{i=4k+1} a_i, S_2=\sum_{i=4k+2} a_i, S_3=\sum_{i=4k+3} a_i$. Ta có:

$$\begin{cases} f(1)=(S_0+S_2)+(S_1+S_3) \\ f(-1)=(S_0+S_2)-(S_1+S_3) \\ f(i)=(S_0-S_2)+(S_1-S_3)i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_0+S_2=\dfrac{f(1)+f(-1)}{2} \\ S_1+S_3=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2} \\ S_0-S_2=Re(f(i)) \\ S_1-S_3=Im(f(i)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S_0=\dfrac{f(1)+f(-1)+2\operatorname{Re}(f(i))}{4} & (1) \\ S_1=\dfrac{f(1)-f(-1)+2\operatorname{Im}(f(i))}{4} & (2) \\ S_2=\dfrac{f(1)+f(-1)-2\operatorname{Re}(f(i))}{4} & (3) \\ S_3=\dfrac{f(1)-f(-1)-2\operatorname{Im}(f(i))}{4} & (4) \end{cases}$$

Với $\operatorname{Re}(f(i)),\operatorname{Im}(f(i))$ lần lượt là phần thực và phần ảo của $f(i)$

.

Ví dụ IV.1: Rút gọn $T_1=C_{4n}^0-C_{4n}^2+C_{4n}^4-...+C_{4n}^{4n}$.

Giải

Rõ ràng $S_1=S_0-S_2$ trong đa thức $f(x)=(1+x)^{4n}$. Mặt khác ta có $f(i)=(S_0-S_2)+(S_1-S_3)i$ nên công việc bây giờ chỉ là đi tính $f(i)$ và phần thực của nó chính là tổng T_1 cần tìm: $f(i)=(1+i)^{4n}=\left[(1+i)^2\right]^{2n}=\left(2i\right)^{2n}=4^n(-1)^n$.

Ta cũng có thể sử dụng (1), (3) ta đã tìm ra ở trên để giải nhưng mất công giải lại hệ phương trình 4 ẩn đó và như thế thì thật là giết ruồi mà lại dùng đến dao mổ trâu ^^!

Tương tự ta tính được tổng $C_{4n}^1-C_{4n}^3+C_{4n}^5-...+C_{4n}^{4n-1}=0$

Ví dụ IV.2: Tính $T_2=1C_{8n}^1-3C_{8n}^3+...-(8n-1)C_{8n}^{8n-1}$

Giải

Trước tiên ta phải dùng đạo hàm để có được hệ số đứng trước tổ hợp. Xét đa thức:

$$f(x)=(1+x)^{8n}=C_{8n}^0+\sum_{k=1}^{8n}C_n^kx^k \Rightarrow f'(x)=8n(1+x)^{8n-1}=\sum_{k=0}^{8n}kC_n^kx^{k-1}$$

Lại nhân với x ta được $g(x) = 8nx(1+x)^{8n-1} = \sum_{k=0}^{8n} kC_n^k x^k$

Nhận thấy T_2 chính là phần ảo của $g(i): g(i) = 8ni(1+i)^{8n-1} = 4n.16^n + 4n.16^n i$

Do đó $T_2 = 4n.16^n$

Tương tự ta dùng đạo hàm 2 lần để tính tổng $2^2C_{8n}^2 - 4^2C_{8n}^4 + 6^2C_{8n}^6 - ... - (8n)^2C_{8n}^{8n}$:

$$(1+x)^{8n} = C_{8n}^0 + \sum_{k=1}^{8n} C_{8n}^k x^k \Rightarrow 8n(1+x)^{8n-1} = \sum_{k=1}^{8n} kC_{8n}^k x^{k-1} \Leftrightarrow 8nx(1+x)^{8n-1} = \sum_{k=1}^{8n} kC_{8n}^k x^k$$

$$\Rightarrow 8n(1+x)^{8n-2}(1+8nx) = \sum_{k=1}^{8n} k^2C_{8n}^k x^{k-1} \Leftrightarrow 8nx(1+x)^{8n-2}(1+8nx) = \sum_{k=1}^{8n} k^2C_{8n}^k x^k = f(x)$$

Tổng cần tính là phần thực của $f(i) = 8ni(1+i)^{8n-2}(1+8ni) = 16^{n-1}n + 128n^2.16^{n-2}i$

V. Một số phương pháp khác

Ví dụ V.1:(ĐHQG TP.HCM, 1997) Cho $\begin{cases} 0 \le m \in k \le n \\ k, m, n \in Z \end{cases}$.

Chứng minh: $C_n^k.C_m^0 + C_n^{k-1}.C_m^1 + ... + C_n^{k-m}.C_m^m = C_{m+n}^k$

Giải

Ta có: $\begin{cases} (1+x)^m = C_m^0 + C_m^1 x + ... + C_m^m x^m \\ (1+x)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + ... + C_n^k x^k + ... + C_n^n \\ (1+x)^{m+n} = C_{m+n}^0 + C_{m+n}^1 x + ... + C_{m+n}^{m+n} x^{m+n} \end{cases}$

Suy ra hệ số x^k trong $(1+x)^m.(1+x)^n$ là: $C_m^0.C_n^k + C_n^1.C_n^{k-1} + ... + C_m^m C_n^{k-m}$

Và hệ số x^k trong $(1+x)^{m+n}$ là C_{m+n}^k

Đồng nhất thức: $(1+x)^m.(1+x)^n = (1+x)^{m+n}$

Ta được: $C_{m+n}^k = C_m^0.C_n^k + C_m^1.C_n^{k-1} + ... + C_m^m.C_n^{k-m} \Rightarrow (ĐPCM)$

Ví dụ V.2: Cho $\begin{cases} 0 \le k \le n \\ k, n \in Z \end{cases}$. Chứng minh:

$$C_n^0C_n^k + C_n^1C_n^{k+1} + ... + C_n^{n-k}C_n^n = \frac{(2n)!}{(n-k)!.(n+k)}!$$

Giải

Ta có: $\left(1+\frac{1}{x}\right)^n (1+x)^n = \frac{1}{x^n}(1+x)^{2n}, \forall x \pm 0$

$$\Rightarrow \left(C_n^0 + C_n^1\frac{1}{x} + ... + C_n^n\frac{1}{x^n}\right)\left(C_n^0 + C_n^1 x + ... + C_n^n x^n\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^n}\left(C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + ... + C_{2n}^{2n} x^{2n}\right)$$

Đồng nhất thức hai vế đẳng thức với nhau ta được:

$$C_n^0C_n^k + C_n^1C_n^{k+1} + \ldots + C_n^{n-k}C_n^n = C_{2n}^{n+k} = \frac{(2n)!}{(n-k)!.(n+k)}!$$

Với $k=0$ ta có được bài toán đẹp sau:

Ví dụ V.3:(BĐ Tuyển Sinh) Rút gọn $S_1 = \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2$

Giải

Cách 1: Tương tự như **Ví dụ V.2** xét trong trường hợp $m=k=n$

$$C_{2n}^n = C_n^0.C_n^n + C_n^1.C_n^{n-1} + \ldots + C_n^n.C_n^0$$

$$\Rightarrow \quad \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2$$

Cách 2: Xét đồng nhất thức $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$ (1)

$$VT(1) = \left(C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \ldots + C_n^nx^n\right)\left(C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \ldots + C_n^nx^n\right) =$$

$$= \left(C_n^0C_n^n + C_n^1C_n^{n-1} + C_n^2C_n^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1}C_n^1 + C_n^nC_n^0\right)x^n + M(x) = Sx^n + M(x)$$

Trong đó $M(x)$ là đa thức không chứa x^n. Do đó S cũng chính là hệ số của x^n trong $VP(1)$ nên $S = C_{2n}^n$

Tổng quát hơn với việc tìm hệ số của x^p trong đồng nhất thức $(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$ ta có được hệ thức sau: $C_n^p + C_n^{p-1}C_m^1 + C_n^{p-2}C_m^2 + \ldots + C_n^{p-q}C_m^q + \ldots + C_m^p = C_{n+m}^p$

Cách 3: Xét công việc sau: Chọn từ n nam và n nữ ra một nhóm có n người.

Có hai hướng giải:

- Xét trường hợp chọn k nam và $n-k$ nữ: $C_n^kC_n^{n-k} = \left(C_n^k\right)^2$.Do k có thể nhận các giá trị từ 1 đến n và theo quy tắc cộng ta có S chính là tất cả số cách chọn để làm công việc trên.
- Mặt khác ta cũng có thể chọn trực tiếp n người từ hai nhóm nam và nữ sau khi ghép chung hai nhóm đó lại với nhau, do đó: $S = C_{2n}^n$. Tương tự ta xét **Ví dụ** toán mạnh hơn.

Ví dụ V.4:(Đề 2- TH&TT-2008) $S_2 = \left(C_n^1\right)^2 + 2\left(C_n^2\right)^2 + 3\left(C_n^3\right)^3 + \ldots + n\left(C_n^n\right)^2$, với n là số tự nhiên lẻ

Giải

Cách 1: Ta có:

$$S = \left(\left(C_n^1\right)^2 + (n-1)\left(C_n^{n-1}\right)^2\right) + \ldots + \left(\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(C_n^{\frac{n-1}{2}}\right)^2 + \left(\frac{n+1}{2}\right)\left(C_n^{\frac{n+1}{2}}\right)^2\right) + n\left(C_n^n\right)^2$$

$$= n\left(\left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^{n-1}\right)^2\right) + n$$

$$= n\left(\left(C_n^{n+1}\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^{n-1}\right)^2\right) + n$$

$\Rightarrow 2S_n = n\left[\left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2\right] + n$

Mặt khác ta có: $\left(1+x\right)^{2n} = \left(C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + ... + C_{2n}^n x^n + ... + C_{2n}^{2n} x^{2n}\right)^{2n}$

$\Rightarrow$ hệ số của x^n *l*à C_{2n}^n (*)

Trong khi đó: $\left(x+1\right)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + ... + C_n^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^0 x^n$

$\Rightarrow$ hệ số của x^n *l*à $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2$ (**)

Từ (*) *v*à (**) $\Rightarrow C_{2n}^n - 1 = n\left[\left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2\right]$

$\Rightarrow S_n = \dfrac{n}{2} C_{2n}^n \Rightarrow \left(ĐPCM\right)$

Cách 2: Ta có:

$f(x) = (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 ... + C_n^n x^n$ (1)

$\Rightarrow f'(x) = n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + ... + nC_n^n x^{n-1}$

$\Leftrightarrow xf'(x) = nx(1+x)^{n-1} = C_n^1 x + 2C_n^2 x^2 + 3C_n^3 x^3 + ... + nC_n^n x^n$

Thay x bằng $\dfrac{1}{x}$ vào đẳng thức trên ta được

$$\frac{n}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n-1} = C_n^1 \frac{1}{x} + 2C_n^2 \frac{1}{x^2} + 3C_n^3 \frac{1}{x^3} + ... + nC_n^n \frac{1}{x^n} \quad \left(2\right)$$

Nhân vế theo vế $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$

$\dfrac{1}{x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{n-1}(1+x)^n = C_n^1 x C_n^1 \dfrac{1}{x} + 2C_n^2 x^2 C_n^2 \dfrac{1}{x^2} + 3C_n^3 x^2 C_n^3 \dfrac{1}{x^3} + ... + nC_n^n x^n C_n^n \dfrac{1}{x^n} + M\left(x\right)$

Trong đó $M\left(x\right)$ là đa thức không chứa số hạng tự do. Khai triển và tìm hệ số của số hạng tự do trong đa thức $\dfrac{1}{x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{n-1}\left(1+x\right)^n$ ta tìm được $S_2 = nC_{2n-1}^n$

Cách 3: Xét công việc chọn từ n nam và n nữ ra một nhóm có n người và có một đội trưởng là nam.

Xét trường hợp chọn ra k nam và n − k nữ, sau đó chọn từ k nam ra một người làm đội trưởng thì số cách là $kC_n^k C_n^{n-k} = k\left(C_n^k\right)^2$. Do k có thể nhận các giá trị từ 1 đến n và theo quy tắc cộng ta có số cách chọn đội đó chính là S_2.

Mặt khác, ta cũng có thể chọn một trong n nam làm đội trưởng trước, rồi chọn mới chọn $n-1$ người khác sau khi ghép hai nhóm thành một. Do đó $S_2 = nC_{2n}^{n-1}$

Ví dụ V.5: Cho $\begin{cases} 0 \le k, n \\ k, n \in Z \end{cases}$. Chứng minh: $C_{k+1}^0 + C_{k+1}^1 + ... + C_{k+n}^n = C_{k+n+1}^n$

Giải

Xét đa thức: $P\left(x\right) = \left(x+1\right)^{k+1} + \left(x+1\right)^k + ... + \left(x+1\right)^{k+n}$

Nhận thấy hệ số x^k trong đa thức trên là: $C_k^0 + C_{k+1}^1 + ... + C_{k+n}^n$

Mặt khác: $P(x) = \dfrac{(x+1)^k\left[1-(x+1)^{n+1}\right]}{x} = \dfrac{(x+1)^k - (x+1)^{k+n+1}}{x}$

Có hệ số x^k : $C_{k+n+1}^{k+1} = C_{k+n+1}^n$

Đồng nhất thức ta có: $C_{k+1}^0 + C_{k+1}^1 + ... + C_{k+n}^n = C_{k+n+1}^n \Rightarrow ĐPCM$

Bài Tập Áp Dụng

Bài tập1. Chứng minh rằng

a) $2^n C_n^0 + 2^{n-1}.7^1.C_n^1 + 2^{n-2}.7^2.C_n^2 + ... + 7^n C_n^n = 9^n$

b) $C_n^3 3^n - C_n^1 3^{n-1} + ... + (-1)^n C_n^n = C_n^0 + C_n^1 + ... C_n^n$

c) $C_n^1 3^{n-1} + 2C_n^2 3^{n-2} + 3C_n^3 3^{n-3} + ... + nC_n^n = n4^{n-1}$ **(ĐH Luật- 2001)**

d) $\dfrac{C_n^0}{3} + \dfrac{C_n^1}{4} + \dfrac{C_n^2}{4} + ... + \dfrac{C_n^n}{n+3} = \dfrac{2^{n+1}(n^2+n+2)-2}{(n-1)(n+2)(n+3)}$

e) $\dfrac{C_n^0}{3} + \dfrac{C_n^1}{6} + \dfrac{C_n^2}{9} + ... + \dfrac{C_n^n}{3(n+1)} = \dfrac{2^{n-1}-1}{3(n+1)}$

f) $1^2 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + ... + n^2 C_n^n = n(n+1)2^{n-2}$ **(Đề 1-TH&TT- 2008)**

Bài tập 2. Tính các tổng sau:

a) $C_{30}^1 + 3.2^2 C_{30}^3 + 5.2^4 C_{30}^5 + ... + 27.2^{26} C_{30}^{27} + 29.2^{28} C_{30}^{29}$

b) $2.1C_n^2 3^{n-2} 2^2 - 3.2C_n^3 3^{n-3} 2^3 + 4.3C_n^4 3^{n-4} 2^4 + ... + (-1)^n n(n-1)C_n^n 2^n$

c) $C_n^0 - \dfrac{C_n^1}{2} + \dfrac{C_n^2}{3} ... + (-1)^n \dfrac{C_n^n}{n+1}$

d) $2C_n^0 + \dfrac{1}{2}2^2 C_n^1 + \dfrac{1}{3}2^3 C_n^2 + ... + \dfrac{(-1)^n}{n+1}2^{n+1} C_n^n = \dfrac{1-(-1)^n}{n+1}$

e) $S = C_{2003}^0 - \dfrac{1}{3}C_{2003}^2 + \dfrac{1}{5}C_{2003}^4 ... + \dfrac{1}{n+1}C_{2003}^{2002}$ **(Đề 4 TH&TT- 2004)**

Bài Tập 3:(TTĐH- Đề 8- Thầy Nguyễn Tất Thu) Đặt $T_k = (-1)^{k+1} 3^k C_{6n}^{2k+1}$. Chứng minh: $\sum_{k=1}^{3n} T_k = 0$

Bài Tập 4:(TTĐH- Đề 7- Thầy Nguyễn Tất Thu) Tính Tổng

$$P = C_{2010}^1 + 3C_{2010}^3 - 3^2 C_{2010}^5 + 3^3 C_{2007}^7 - ... - 3^{1004} C_{2010}^{2009}$$

Bài Tập 5: Cho khai triển $(x^2+3x+1)^{10} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{20} x^{20}$. Tính tổng

a. $T_1 = a_0 + a_4 + a_8 + ... + a_{20}$

b. $T_2 = a_1 + a_5 + a_9 + ... + a_{17}$

c. $T_3 = a_0 + a_1 + a_4 + a_5 + ... + a_{16} + a_{17}$

d. $T_4 = a_2 - a_3 + a_6 - a_7 + ... + a_{18} - a_{19}$

D. ÁP DỤNG NHỊ THỨC NEWTON ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN SỐ HỌC

Ví dụ D.1: (ĐHQG TPHCM) Cho $2 \le n \in Z$. Chứng minh rằng:

$$C_n^0 C_n^1 \dots C_n^n \le \left(\frac{2^n - 1}{n-1}\right)^n$$

Giải

Ta có: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^0 1^{n-k} x^k = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 \dots + C_n^n x^n$

Cho $x = 1$ ta được: $2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^0 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^0 = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 \dots + C_n^n$

Áp dụng BĐT Cauchy với n số $\Rightarrow 2^n - 2 = C_n^1 + C_n^2 \dots + C_n^n \ge n\sqrt[n]{C_n^1 C_n^2 \dots C_n^n}$

$$\Rightarrow C_n^1 C_n^2 \dots C_n^n = C_n^0 C_n^1 \dots C_n^n \le \left(\frac{2^n - 1}{n-1}\right)^n \Rightarrow \text{ĐPCM}$$

Ví dụ D.2:(ĐH Y Dược TPHCM- 1998) Cho: $\begin{cases} 0 \le k \le n \\ k, n \in Z \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$C_{2n+k}^n . C_{2n-k}^n \le \left(C_{2n}^n\right)^2$$

Giải

Với $0 \le k \le n, k \in Z$

Ta Đặt $a_k = C_{2n+k}^n . C_{2n-k}^n \Rightarrow \begin{cases} a_k = \dfrac{(2n+k)!}{n!(n+k)!} . \dfrac{(2n-k)!}{n!(n-k)!} \\ a_{k+1} = \dfrac{(2n+k+1)!}{n!(n+k+1)} . \dfrac{(2n-k-1)!}{n!(n-k-1)!} \end{cases}$.

Để chứng minh BĐT trên ta cần chứng minh dãy a_k giảm bằng cách chứng minh $a_k > a_{k+1}$.

$$\Leftrightarrow \frac{(2n+k)!}{n!(n+k)!} . \frac{(2n-k)!}{n!(n-k)!} > \frac{(2n+k+1)!}{n!(n+k+1)} . \frac{(2n-k-1)!}{n!(n-k-1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n-k}{n-k} > \frac{2n+k+1}{n+k+1} \Leftrightarrow 1 + \frac{n}{n-k} > 1 + \frac{n}{n+k+1} \quad (\text{Đúng})$$

$\Rightarrow a_k > a_{k+1} \Rightarrow$ dãy a_k giảm $\Rightarrow a_0 > a_1 > \dots > a_k > a_{k+1} \Rightarrow a_0 > a_k$

$$\Rightarrow C_{2n+k}^n . C_{2n-k}^n \le \left(C_{2n}^n\right)^2$$

Ví dụ D.3: Chứng minh với $n \in N$ và n > 2 thì:

$$\frac{1}{n}\left(C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n\right) < n! \quad (\mathbf{1})$$

Giải

Xét khai triển: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 ... + C_n^nx^n$

Lấy đạo hàm hai vế theo biến x ta được: $n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2x + 3C_n^3x^2 ... + nC_n^nx^{n-1}$

Chọn $x = 1 \Rightarrow n2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 ... + nC_n^n$

$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \frac{1}{n}\left(n.2^{n-1}\right) < n! \Leftrightarrow 2^{n-1} < n! \qquad (2)$

Việc còn lại là ta đi chứng minh (2) luôn đúng $\forall n \in N, n \geq 2$

Cách 1: Ta có: $n! = 1.2.3.4....n > 2.2.2....2 \geq 2^{n-1}$ $(n-1$ số)

$\Rightarrow 2^{n-1} < n! \Rightarrow (2)$ đúng hay chúng ta có thể dùng quy nạp để chứng minh.

Cách 2: Chứng minh bằng quy nạp

- Với $n = 3 \Rightarrow n! \geq 2^{n-1} \Leftrightarrow 3! = 6 > 2^{3-1} = 4$ (đúng)
- Giả sử (2) đúng với $n = k$ với $k > 3 \Rightarrow k! > 2^{k-1}$

Vậy $(k+1)k! > (k+1)2^{k-1} \Leftrightarrow (k+1)! > 2.2^{k-1} = 2^k$ $(\text{vì } k > 3 \Rightarrow k+1 > 4)$

Vậy theo nguyên lí quy nạp ta có: $n! > 2^{n-1}, \forall n \geq 3$ *"Từ kết quả này ta có thể áp dụng để giải một số bài toán ở phần* ***Bài tập áp dụng****"*

Vậy do $(2) \Rightarrow \frac{1}{n}\left(C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n\right) < n! \Rightarrow$ *Đ*PCM

Ví dụ D.4:(ĐH AN- 2000)

a) Cho $3 \leq n \in Z$. Chứng minh rằng: $n^{n+1} > (n+1)^n$

b) $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} < 3$

c) Cho $2 \leq n \in Z$. Chứng minh rằng: $2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$

d) $m > n$ với mọi số nguyên dương m, n .Chứng minh: $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Giải

a) Ta có:

$$n^{n+1} > (n+1)^n \Leftrightarrow n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = C_n^0 + C_n^1\frac{1}{n} + C_n^2\frac{1}{n^2} + ... + C_n^n\frac{1}{n^n}$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + ... +$$

$$+ \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)....\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + ... + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)....\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$< 2 + \underbrace{1 + ... + 1}_{(n-2) \text{ số } 1} = n$$

b) Ta có:

$$+\begin{cases} 1+\dfrac{1}{1!}=2 \\ \dfrac{1}{2!}=1-\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2!}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{4!}<\dfrac{1}{3.4}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{5!}<\dfrac{1}{4.5}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5} \\ \dfrac{1}{n!}<\dfrac{1}{(n-1)^n}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Cộng vế theo vế $\Rightarrow 1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+...+\dfrac{1}{n!}<3-\dfrac{1}{n}<3\Rightarrow$ ĐPCM

c) Xét khai triển: $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=C_n^0+C_n^1\dfrac{1}{n}+C_n^2\dfrac{1}{n^2}+...+C_n^n\dfrac{1}{n^n}=2+C_n^2\dfrac{1}{n^2}+...+C_n^n\dfrac{1}{n^n}>2$

Mà: $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}\quad (2\le k\le n)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{n^k}C_n^k=\dfrac{1}{k!}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{2}{n}\right)....\left(1-\dfrac{k-1}{n}\right)<\dfrac{1}{k!}$

Áp dụng kết quả câu $b)$ $\Rightarrow 2<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<2+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+...+\dfrac{1}{n!}<3$

Vậy: $2<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<3$

d) Xét khai triển:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=C_n^0+C_n^1\frac{1}{n}+C_n^2\frac{1}{n^2}+...+C_n^n\left(\frac{1}{n^{n-1}}+\frac{1}{n^n}\right)$$

$$=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+...+$$

$$+\frac{n(n-1)....2}{(n-1)!}\frac{1}{n^{n-1}}+\frac{n(n-1)....1}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+...+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)....\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\quad (*)$$

Tương tự ta có:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+...+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)....\left(1-\frac{n}{n+1}\right)+$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)....\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\quad (**)$$

So sánh giữa $(*)$ và $(**)$ suy ra: $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Ví dụ D. 5(TH&TT) Cho $\forall n \in N^*, \forall 3 \leq m \in N^*$ Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{C_m^1}+\frac{1}{C_{m+1}^2}+...+\frac{1}{C_{m+n}^{n+1}}<\frac{1}{m-2}$$

Giải

Ta có: $\frac{1}{C_{i+k}^{k+1}}=\frac{(k+1)!i!}{(i+k)!}=\frac{(k+1)!(i-1)!}{(i+k)!(i-2)!}\left[1997+k-(k+2)\right]$

$$\frac{1}{C_{i+k}^{k+1}}=\frac{(k+1)!m!}{(m+k)!}=\frac{(k+1)!(m-1)!}{(m+k)!(m-2)!}\left[i+k-(k+2)\right]$$

$$=\frac{(m-1)}{(m-2)}\left[\frac{(m-1)!(k+1)!}{\left[(m-1)+k\right]!}-\frac{(m-2)!(k+2)!}{(m+k)!}\right]$$

$$=\frac{(m-1)}{(m-2)}\left[\frac{1}{C_{k+m-1}^{k+1}}-\frac{1}{C_{m+k}^{k+2}}\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{C_{m+k}^{k+1}}=\frac{(m-1)}{(m-2)}\left[\frac{1}{C_{m-1}^1}-\frac{1}{C_{m+k}^{k+2}}\right]<\frac{(m-1)}{(m-2)}.\frac{1}{C_{m-1}^1}=\frac{1}{m-2}\Rightarrow \text{ĐPCM}$$

Ví dụ D. 6: Chứng minh rằng:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$

b) Nếu $m>0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{m}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=2$

Giải

Đặt $m=\sqrt[n]{n}-1>0 \quad (n\geq 2)$

$$\Rightarrow n=(m+1)^n=\sum_{k=0}^{k}C_n^k m^k \geq C_n^2 m^2=\frac{n(n-1)}{2}m^2$$

$$\Rightarrow n\geq \frac{n(n-1)}{2}m^2 \Rightarrow 0<m=\sqrt[n]{n}-1\leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

$$\Rightarrow 1<\sqrt[n]{n}\leq 1+\sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)=1\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1\Rightarrow$ ĐPCM

Sử dụng kết quả câu $a)$ kết hợp với nguyên lí kẹp ta suy ra được câu $b)$

Ví dụ D.7: Cho $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ n \in N^* \end{cases}$. Chứng minh rằng: $(1+x)^n + (1-x)^n \le 2^n$

Giải

Đặt: $\begin{cases} a = 1+x \ge 0 \\ b = 1-x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow 2^n = (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}.b^k \ge C_n^0 a^n + C_n^n b^n = a^n + b^n$

$\Rightarrow (1+x)^n + (1-x)^n \le 2^n$

Ví dụ D.8: Cho $a,b>0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^n+b^n}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^n, \forall 1 \le b \in Z$

Giải

Ta có: $\left(a^{n-i}+b^{n-i}\right)\left(a^i+b^i\right) \Rightarrow a^n+b^n \ge a^{n-i}-b^i+b^{n-i}a^i \quad (\forall 0 \le i \le n)$

Mặt khác ta có khai triển: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}.b^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b^{n-k}.a^k$

$\Rightarrow 2(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(a^{n-k}.b^k + b^{n-k}.a^k\right) = 2^n (a+b)^n \le \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(a^n+b^n\right)$

$\Rightarrow \frac{a^n+b^n}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$

Ví dụ D.9: Chứng minh rằng

a) Chứng minh rằng: $\sqrt{1001}\left[\left(\sqrt{1001}+1\right)^{2000} - \left(\sqrt{1001}-1\right)^{2000}\right]$ là số tự nhiên chia hết cho 11.

b) $3^n\left[C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + ... + (-1)^n \frac{1}{3^n} C_n^1\right], \forall 3 \le n \in Z$

Giải

a) Ta có: $\left(\sqrt{1001}+x\right)^{2000} = C_{2000}^0\left(\sqrt{1001}\right)^{2000} + C_{2000}^1\left(\sqrt{1001}\right)^{1999} x + C_{2000}^{2000} x^{2000}$

- Với $x=1 \Rightarrow \left(\sqrt{1001}+1\right)^{2000} = C_{2000}^0\left(\sqrt{1001}\right)^{2000} + C_{2000}^1\left(\sqrt{1001}\right)^{1999} + ... + C_{2000}^{2000}$
- Với $x=-1 \Rightarrow \left(\sqrt{1001}-1\right)^{2000} = C_{2000}^0\left(\sqrt{1001}\right)^{2000} - C_{2000}^1\left(\sqrt{1001}\right)^{1999} + ... + C_{2000}^{2000}$

$\Rightarrow \left(\sqrt{1001}+1\right)^{2000} - \left(\sqrt{1001}-1\right)^{2000} = 2\sqrt{1001}\left(C_{2000}^1 + C_{2000}^3.1001 + ... + C_{2000}^{1999}1001^{1999}\right)$

$= 2\sqrt{1001}.X \quad (X \in N)$

$\Rightarrow 2\sqrt{1001}\left(\left(\sqrt{1001}+1\right)^{2000} - \left(\sqrt{1001}-1\right)^{2000}\right) = 2002 = 11.182 \vdots 11 \Rightarrow$ ĐPCM

b) Ta có:

$$3^n\left[C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + ... + (-1)^n \frac{1}{3^n} C_n^1\right] = 3^n\left[C_n^0 1^n + \left(-\frac{1}{3}\right) C_n^1 1^{n-1} + ... + \left(-\frac{1}{3^n}\right) C_n^n\right]$$

$$= 3^n\left(1-\frac{1}{3}\right)^n = 3^n\left(\frac{2}{3}\right)^n = 2^n \vdots 8, \forall n \ge 3 (n \in Z)$$

Ví dụ ID. 10

a) Cho $2 \le p$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng: $C_p^k \vdots p, \forall k = 1, 2, ..., p-1$

b) (Định lí Fermat nhỏ) $\forall n \in N, \forall p \ge 2$ là số nguyên tố. Ta luôn có $n^p - n \vdots p$

Giải

a) Với $k \in 1, 2, ..., p-1$ và P là số nguyên tố. Ta có:

$C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p(p-1)(p-2)...(p-k+1)}{1.2.3.....k} = q$ Vì p là số nguyên tố nên không chia hết cho k.

Mặt khác $C_p^k \in N \Rightarrow \left[p(p-1)(p-2)...(p-k+1)\right] \vdots (1.2....k)$

$\Rightarrow C_p^k = p.q \Rightarrow C_p^k \vdots p$

b) Đặt $a_n = n^p - n$

- Với $n = 1 \Rightarrow a_n = n^p - n \Leftrightarrow a_1 = 1^p - 1 = 0 \vdots P$
- Giả sử a_n đúng với $n = k \Rightarrow a_n \vdots P$
- Với $n = k+1$: Xét

$$a_{k+1} - a_k = (k+1)^p - k^p - 1 = C_p^0 k^p + C_p^1 k^{p-1} + C_p^2 k^{p-2} + ... + C_p^{p-1} k - k^p - 1$$
$$= C_p^1 k^{p-1} + C_p^2 k^{p-2} + ... + C_p^{p-1} k - k^p - 1$$

Áp dụng kết quả câu $a) \Rightarrow C_p^k \vdots p, \forall k = 1, 2, ..., p-1 \Rightarrow \begin{cases} a_{k+1} - a_k \vdots p \\ a_k \vdots p \end{cases} \Rightarrow a_{k+1} \vdots p$

Vậy theo nguyên lí nguyên nạp cho ta $n^p - n \vdots p$

Bài Tập Ứng Dụng

Bài 1: Cho $3 \le n \in Z$ **Tính**

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!}, (0 \le a \le 2)$ **b)** $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!}, (a \in R)$

Bài 2: Cho $a \ge 0, 1 \le m < n (m, n \in Z)$ **. Chứng minh**

a) $(1+n)^m < (1+m)^n$ **b)** $1998^{2001} + 1999^{2001} < 2000^{2001}$

Bài 3: $\forall n \in N^*$ **. Chứng minh rằng:** $\frac{1!2! + 2!3! + ... + n!(n+1)!}{n\sqrt[n]{(1!)^2 ...(n!)^2}} \ge 2\sqrt[2n]{n!}$

Bài 4: Cho $\begin{cases} S = a_1 + a_2 + ... + a_n \\ a_1, a_2, ..., a_n \ge 0 \\ 1 \le n \in Z \end{cases}$ **Chứng minh rằng:**

$$(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n) \le 1 + \frac{S}{1!} + \frac{S^2}{2!} + ... + \frac{S^n}{n!}$$

Bài 5: Chứng minh rằng:

$2.1C_{200}^2 + 3.2C_{2000}^3 + ... + 2000.1999C_{2000}^{1999} \vdots 3998000 \ (\forall 2 \le n \in Z)$

MỤC LỤC

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Phương pháp giải toán Đại Số Tổ Hợp – Võ Giang Giai
2. Đại Số Tổ Hợp- Nguyễn Phú Khánh
3. Tạp Chí Toán Học Và Tuổi Trẻ
4. Các đề thi HSG- Olimpic
5. Các Diễn đàn Toán học như: nguyentatthu.violet.vn- k2pi.violet.vn- maths.vn- mathscope.org- diendantoanhoc.net………