SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BÀ RỊA VŨNG TÀU
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30/4
LẦN THỨ XVIII NĂM 2012
Khóa ngày 07 tháng 4 năm 2012
Môn thi: TOÁN Khối: 10
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Chú ý:
– Đề thi này có 01 trang.
– Học sinh làm bài : những câu khác nhau không được làm chung trên 1 tờ giấy thi.
– Không được sử dụng máy tính để làm bài.

Câu 1 (4 điểm)

Giải phương trình: $7x^2-10x+14=5\sqrt{x^4+4}$.

Câu 2 (4 điểm)

Cho đường tròn (O) tiếp xúc đường thẳng d tại điểm H. Hai điểm M và N di động trên đường thẳng d sao cho $\overline{HM}.\overline{HN}=-k^2$ (k là số khác 0 cho trước). Từ M và N kẻ tiếp tuyến MA và NB của (O) (A, B là tiếp điểm khác H).

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN luôn đi qua hai điểm cố định.

b) Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 3 (3 điểm)

Cho các số dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2\le 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\left(a+b+c\right).$$

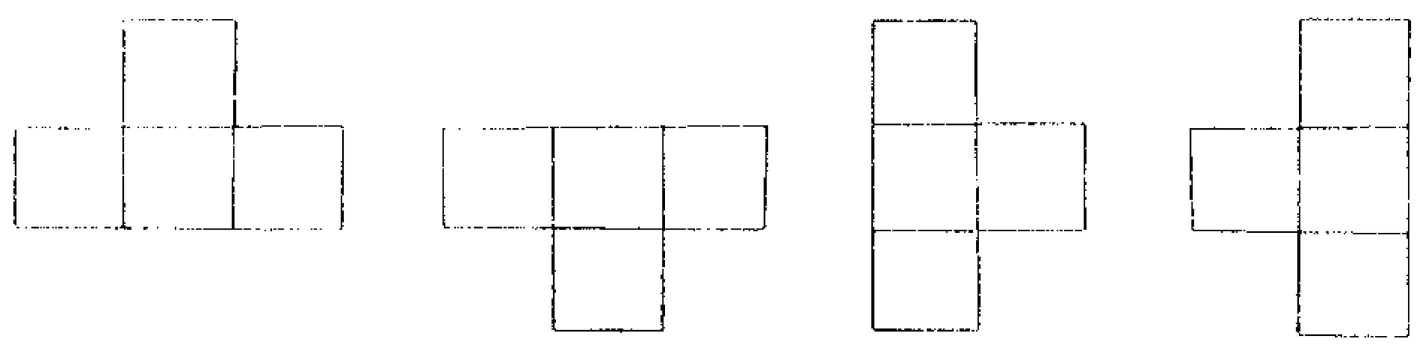
Câu 4 (3 điểm)

Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p, không tồn tại hai số nguyên dương x và y sao cho:

$$2^p+3^p=x^{y+1}.$$

Câu 5 (3 điểm)

Cho bảng hình vuông kích thước 8×8 được chia thành 64 ô vuông đơn vị. Hỏi có thể viết tất cả các số 1; 2; 3; 4; 5; …; 64 vào 64 ô vuông (mỗi ô chứa đúng một số) sao cho tổng của 4 số nằm trong 4 ô của mỗi một hình bất kì sau đây đều chia hết cho 4?



Câu 6 (3 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f:Q\to R$ thỏa mãn điều kiện:

$$f\left(x+y\right)+f\left(x-y\right)=2f\left(x\right)+2f\left(y\right);\forall x,y\in Q.$$

-------------------Hết-------------------

Học sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: .... *Số báo danh:* ....

Ở GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BÀ RỊA VŨNG TÀU
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN

KỲ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30/4
LẦN THỨ XVIII NĂM 2012
Khóa ngày 07 tháng 4 năm 2012
Môn thi: TOÁN lớp 10

HƯỚNG DẪN CHẤM THI VÀ BIỂU ĐIỂM

Câu 1 (4 điểm)

Giải phương trình: $7x^2-10x+14=5\sqrt{x^4+4}$.

<u>Đáp án:</u>

Phương trình $\Leftrightarrow\left(x^2+2x+2\right)-5\sqrt{\left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)}+6\left(x^2-2x+2\right)=0$ **(1,0 đ)**

Đặt $a=\sqrt{x^2+2x+2}$; $b=\sqrt{x^2-2x+2}$ $(a>0,b>0)$

Ta có phương trình: $a^2-5ab+6b^2=0$

$$\Leftrightarrow(a-2b)(a-3b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2b\\a=3b\end{array}\right.$$ **(1,0 đ)**

Với $a=2b$: $x^2+2x+2=4\left(x^2-2x+2\right)$

$$\Leftrightarrow 3x^2-10x+6=0\Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{7}}{3}$$ **(1,0 đ)**

Với $a=3b$: $x^2+2x+2=9\left(x^2-2x+2\right)$

$\Leftrightarrow 8x^2-20x+16=0$ (Phương trình vô nghiệm) **(1,0 đ)**

Vậy phương trình bài ra có tập nghiệm $S=\left\{\frac{5+\sqrt{7}}{3};\frac{5-\sqrt{7}}{3}\right\}$

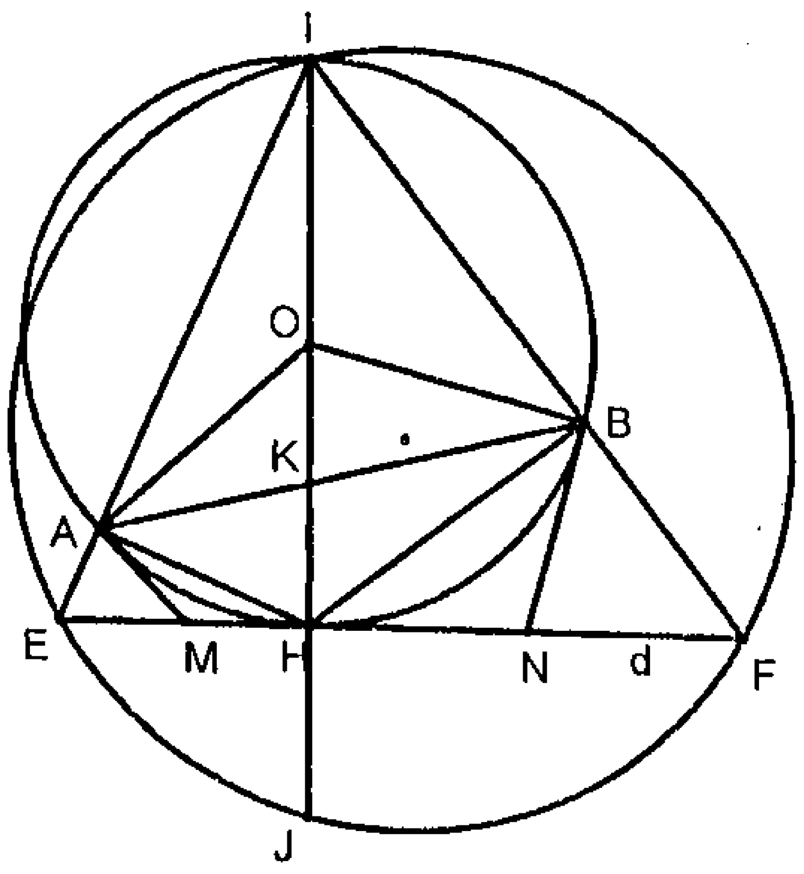
Câu 2 (4 điểm)

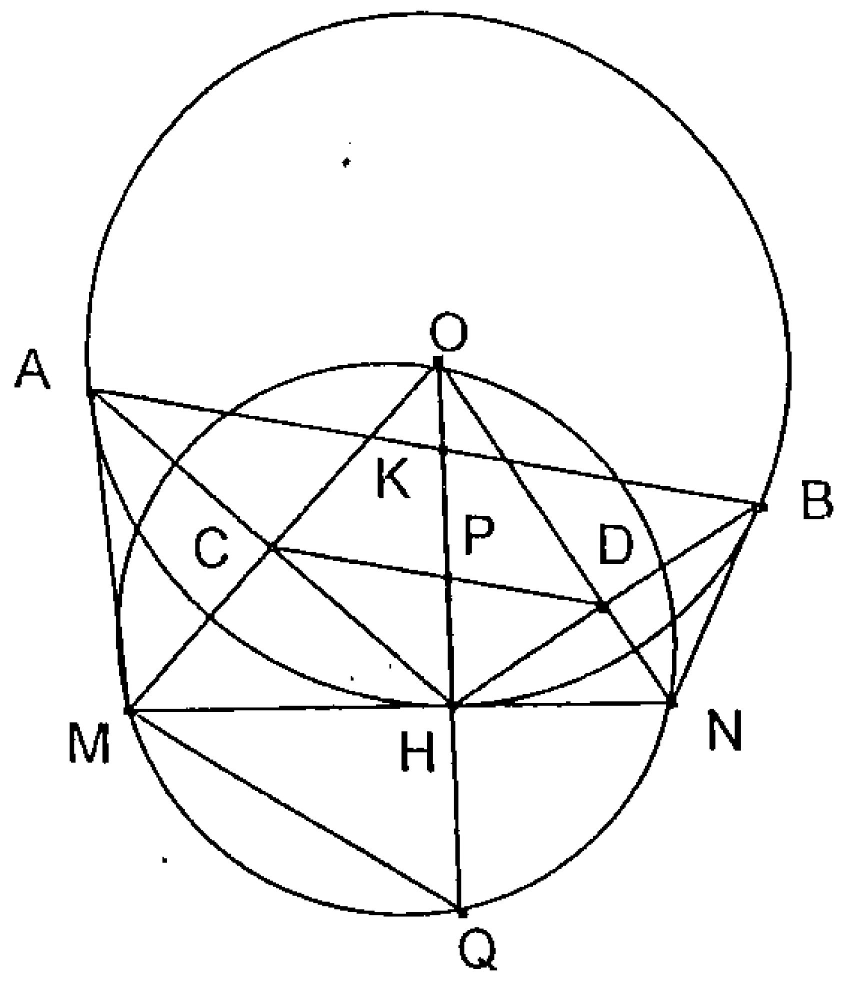
Cho đường tròn (O) tiếp xúc đường thẳng d tại điểm H. Hai điểm M và N di động trên đường thẳng d sao cho $\overline{HM}.\overline{HN} = -k^2$ (k là số khác 0 cho trước). Từ M và N kẻ tiếp tuyến MA và NB của (O) (A, B là tiếp điểm khác H).

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN đi qua một điểm cố định.

b) Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Đáp án:





a) Gọi Q là giao điểm của OH với đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN (Q khác O). **(0,5 đ)**
Ta có $\overline{HM}.\overline{HN} = \overline{HO}.\overline{HQ} = -k^2$. Mà H và O là hai điểm cố định, k không đổi nên Q là điểm cố định. **(1,0 đ)**

b) ***Cách 1:***

+ Kẻ đường kính IH của (O). Gọi E, F lần lượt là giao điểm của IA và IB với d. Chứng minh được M, N là trung điểm của HE, HF.

+ Khi đó $\overline{HE}.\overline{HF} = 2\overline{HM}.2\overline{HN} = -4k^2$

+ Dựng đường tròn (IEF) cắt IH kéo dài tại J. Ta có:
$\mathscr{P}_{H/(IEF)} = \overline{HI}.\overline{HJ} = \overline{HE}.\overline{HF} = -4k^2$, suy ra J cố định. **(1,0 đ)**

+Áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông IHE và IHF ta có:
$IA.IE = IB.IF = IH^2 \Rightarrow$ tứ giác ABFE nội tiếp $\Rightarrow \angle IAB = \angle IFE$

+ Do tứ giác IFJE nội tiếp nên $\angle IFE = \angle IJE \Rightarrow \angle IAB = \angle IJE$
$\Rightarrow$ AKJE nội tiếp (với K là giao điểm của AB và IH). **(1,0 đ)**

+ Xét $\mathscr{P}_{I/(AKJE)} = \overline{IK}.\overline{IJ} = \overline{IA}.\overline{IE} = IH^2$

Do I, J, H cố định nên K cố định **(0,5 đ)**

Vậy AB luôn đi qua điểm K cố định.

Cách 2:

Gọi C là giao điểm của AH và OM, D là giao điểm của BH và ON, P là giao điểm của CD và OH. Chứng minh tương tự cách trên ta được P là điểm cố định. Mà P là trung điểm HK, do đó K là điểm cố định.

Câu 3 (3 điểm)

Cho các số dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2 \le 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}} \ge \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b+c).$$

<u>Đáp án:</u>

Áp dụng BĐT Cô si – Svácxơ ta được

$$T=\frac{a}{\sqrt{c+b}}+\frac{b}{\sqrt{a+c}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}} \ge \frac{(a+b+c)^2}{\left(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}\right)}$$ **(0,5 đ)**

Lại có $\left(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}\right)^2 \le (a+b+c)(2ab+2bc+2ac)$ **(1,0 đ)**

Suy ra: $T \ge \dfrac{(a+b+c)\sqrt{a+b+c}}{\sqrt{2(ab+bc+ac)}}$ (1)

Ta có $3\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge (a+b+c)^2 \Rightarrow a+b+c \le 3$ **(0,5 đ)**

Do đó $3(a+b+c) \ge (a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca) \Rightarrow a+b+c \ge ab+bc+ca$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ đpcm. **(1,0 đ)**

Câu 4 (3 điểm)

Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố *p*, không tồn tại hai số nguyên dương *x* và *y* sao cho:

$$2^p + 3^p = x^{y+1}.$$

Đáp án:

+ Với $p = 2$ thì $2^p + 3^p = 13$ không viết được dưới dạng x^{y+1} với *x*, *y* là hai số nguyên dương.

(0,5 đ)

+ Xét $p > 3$, do *p* là số nguyên tố lẻ nên

$2^p + 3^p = (2+3)\left(2^{p-1} - 2^{p-2}.3 + ... - 2.3^{p-2} + 3^{p-1}\right) \Rightarrow x^{y+1} \vdots 5 \Rightarrow x \vdots 5$ **(1,0 đ)**

+ *y* là số nguyên dương $\Rightarrow x^{y+1} \vdots 5^2 \Rightarrow \left(2^{p-1} - 2^{p-2}.3 + ... - 2.3^{p-2} + 3^{p-1}\right) \vdots 5$ (*) **(0,5 đ)**

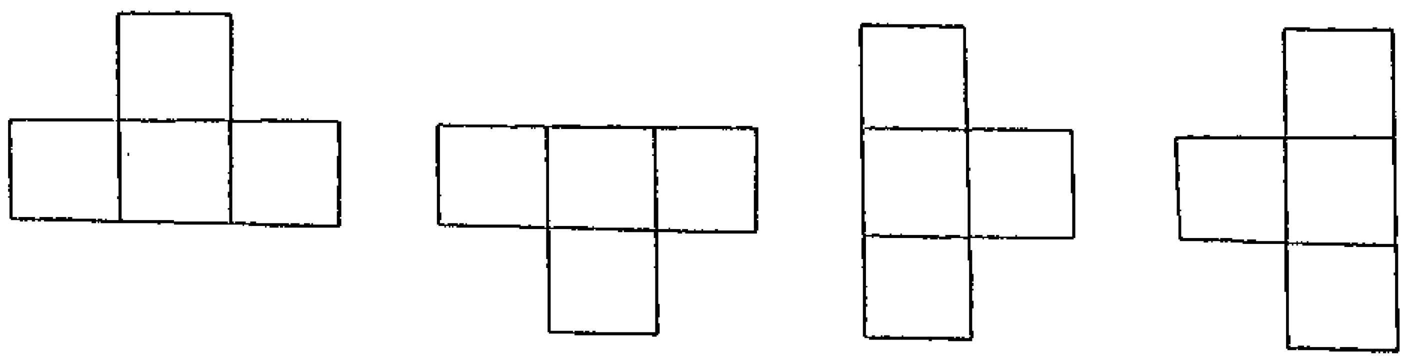
Ta có $-3 \equiv 2 \pmod 5$ nên (*)$\Rightarrow p.2^{p-1} \vdots 5 \Rightarrow p = 5$ **(0,5 đ)**

Khi đó $2^p + 3^p = 2^5 + 3^5 = 275 = 5^2.11$ không viết được dưới dạng x^{y+1} với *x*, *y* là hai số nguyên dương. **(0,5 đ)**

Vậy trong mọi trường hợp ta có đpcm.

Câu 5 (3 điểm)

Cho bảng hình vuông kích thước 8×8 được chia thành 64 ô vuông đơn vị. Hỏi có thể viết tất cả các số 1; 2; 3; 4; 5; …; 64 vào 64 ô vuông (mỗi ô chứa đúng một số) sao cho tổng của 4 số nằm trong 4 ô của mỗi một hình bất kì sau đây đều chia hết cho 4?



Đáp án:

Giả sử ta có thể viết được các số 1;2;3;4;...;64 vào các ô của bảng hình vuông kích thước 8x8 sao cho tổng của 4 số trong 4 ô của mỗi hình bất kỳ đã cho đều chia hết cho 4.

Gọi a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 là 5 số trong hình chữ thập +, trong đó a_5 là số ở tâm, các số được đánh theo thứ tự chiều quay của kim đồng hồ. Từ giả thiết của bài toán đã cho, ta có các số $a_1+a_2+a_3+a_5$, $a_2+a_3+a_4+a_5$, $a_3+a_4+a_1+a_5$, $a_4+a_1+a_2+a_5$ đều chia hết cho 4.

Suy ra $3(a_1+a_2+a_3+a_4)+4a_5 \vdots 4 \Rightarrow a_1+a_2+a_3+a_4 \vdots 4$.

Từ đó suy ra $a_5-a_i \vdots 4, (i=1;2;3;4)$. Như vậy các số a_i (i = 1;2;3;4;5) đều có cùng số dư khi chia cho 4. Bằng lí luận như trên ta suy ra có nhiều hơn 16 số trong bảng hình vuông có cùng số dư khi chia cho 4. Tập hợp số $\{1;2;3;4;...;64\}$ chỉ có thể chia thành 4 tập con, mỗi tập có 16 phần tử có cùng số dư khi chia cho 4. Mâu thuẫn này phủ định bài toán.

Câu 6 (3 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f:Q\to R$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)\ ;\forall x,y\in Q.$$

Đáp án:

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)\quad (1)$$

+ Thay x = y = 0 vào (1) ta có f(0) = 0 (0,25 đ)

+ Thay x = 0 vào (1) ta có $f(-y)=f(y),\ \forall y\in Q$ (*) (0,25 đ)

Đặt f(1) = a, ta sẽ chứng minh rằng $f(n)=an^2\ \ \forall n\in Z^+$ (2) bằng quy nạp

Ta thấy (2) đúng với n = 1

Thay x = y = 1 vào (1) : f(2) = 4a = a.2^2 nên (2) đúng với n = 2.

giả sử (2) đúng với 1,…,n – 1(n > 2)

Thay x = n – 1, y = 1 vào (1) ta có:

$$f(n)=2f(n-1)-f(n-2)+2a=2a(n-1)^2-a(n-2)^2+2a=an^2$$

do đó (2) cũng đúng với n. (1,0 đ)

+ Khi đó kết hợp với (*) ta có $f(n)=an^2\ \ \forall n\in Z$ (0,25 đ)

+ Tương tự ta cũng chứng minh được $f(nx)=n^2f(x)$ (3) với mọi $x\in Q$. (0,5 đ)

+ Với $x\in Q$, ta xét $x=\frac{m}{n}$ $(m,n\in Z,n\neq 0)$ thay vào (3) ta có:

$$f(m)=n^2f\left(\frac{m}{n}\right)\Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{f(m)}{n^2}=a.\left(\frac{m}{n}\right)^2$$ (0,5 đ)

Thử lại ta thấy tất cả các hàm số có dạng $f(x)=ax^2\ \ (a\in R)$ là nghiệm hàm của bài toán.

(0,25 đ)