SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BÀ RỊA VŨNG TÀU
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30/4
LẦN THỨ XVIII NĂM 2012
Khóa ngày 07 tháng 4 năm 2012
Môn thi: Toán lớp 11
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Chú ý:
– Đề thi này có 1 trang,
– Học sinh làm bài : những câu khác nhau không được làm chung trên 1 tờ giấy thi,
– Không được sử dụng máy tính cầm tay để làm bài.

Câu 1 (4 điểm)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 = 9 \\ 2x^2 + y^2 - 4x + y = 0 \end{cases}$.

Câu 2 (4 điểm)

Cho dãy số (x_n) xác định bởi: $x_1 = 4$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n^4 + 9}{x_n^3 - x_n + 6}$ $\forall n \in N^*$.

a. Chứng minh rằng $\lim x_n = +\infty$.

b. Với mỗi số nguyên dương *n*, đặt $y_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k^3 + 3}$. Tính $\lim y_n$.

Câu 3 (3 điểm)

Cho tam giác ABC đều cạnh a, tâm G. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua G và cắt các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = GM.GN.GP$.

Câu 4 (3 điểm)

Tìm tất cả các cặp hàm số $f, g : R \to R$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i. $f(0) = g(0) = 1,\ g(1) = 2$.

ii. $f(x) - f(y) = (x - y)g(x + y) \quad \forall x, y \in R$.

Câu 5 (3 điểm)

Một số nguyên dương $n > 1$ được gọi là hoàn toàn không chính phương nếu n không có ước chính phương khác 1. Chứng minh rằng nếu n là một hợp số và $n-1$ chia hết cho $\varphi(n)$ thì n hoàn toàn không chính phương và *n* có ít nhất 3 ước nguyên tố (trong đó $\varphi(n)$ là số các số nguyên dương không vượt quá *n* và nguyên tố cùng nhau với *n*).

Câu 6 (3 điểm)

Trên mỗi ô của một bảng 4×4 ô vuông, người ta điền một trong hai số 1 hoặc -1 sao cho tổng các số trong mỗi hàng và trong mỗi cột đều bằng 0. Hỏi có bao nhiêu cách điền như trên?

———————**Hết**———————

Học sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.. *Số báo danh:*...................................

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BÀ RỊA VŨNG TÀU
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN

KỲ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30/4
LẦN THỨ XVIII NĂM 2012
Khóa ngày 07 tháng 4 năm 2012
Môn thi: TOÁN lớp 11

HƯỚNG DẪN CHẤM THI VÀ BIỂU ĐIỂM

Câu 1. (4 điểm)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 = 9 \\ 2x^2 + y^2 - 4x + y = 0 \end{cases}$.

Đáp án câu 1:

$\begin{cases} x^3 - y^3 = 9 \\ 2x^2 + y^2 - 4x + y = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 8 = y^3 + 1 \\ -6x^2 + 12x = 3y^2 + 3y \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4x + y = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^3 = (y+1)^3 \\ 2x^2 + y^2 - 4x + y = 0 \end{cases}$	2 đ
$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = y + 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4x + y = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ 2(y+3)^2 + y^2 + y - 4(y+3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ 3y^2 + 9y + 6 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$	2 đ

Câu 2. (4 điểm)

Cho dãy số (x_n) xác định bởi: $x_1 = 4$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n^4 + 9}{x_n^3 - x_n + 6}$ $\forall n \in N^*$.

a. Chứng minh rằng $\lim x_n = +\infty$.

b. Với mỗi số nguyên dương *n*, đặt $y_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k^3 + 3}$. Tính $\lim y_n$.

<u>Đáp án câu 2</u>:

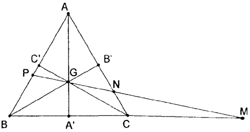
• Xét $x_{n+1} - 3 = \dfrac{x_n^4 + 9}{x_n^3 - x_n + 6} - 3 = \dfrac{(x_n - 3)(x_n^3 + 3)}{(x_n^3 + 3) - (x_n - 3)}$ (*) Bằng qui nạp chứng minh được $x_n > 3$, $\forall n \ge 1$	1đ
• Xét $x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_n^4 + 9}{x_n^3 - x_n + 6} - x_n = \dfrac{x_n^2 - 6x_n + 9}{x_n^3 - x_n + 6}$ $\Rightarrow x_{n+1} - x_n = \dfrac{(x_n - 3)^2}{x_n^3 - x_n + 6} > 0$, $\forall n \in N^*$ Do đó (x_n) là dãy tăng và $4 = x_1 < x_2 < \ldots$	1đ
• Giả sử (x_n) bị chặn trên $\Rightarrow \lim x_n = a > 4$. Do đó $a = \dfrac{a^4 + 9}{a^3 - a + 6} \Rightarrow a = 3 < 4$ (vô lý) Suy ra (x_n) không bị chặn trên. Vậy $\lim x_n = +\infty$	1đ
• Từ (*) $\Rightarrow \dfrac{1}{x_{n+1} - 3} = \dfrac{1}{x_n - 3} - \dfrac{1}{x_n^3 + 3} \Rightarrow \dfrac{1}{x_n^3 + 3} = \dfrac{1}{x_n - 3} - \dfrac{1}{x_{n+1} - 3}$ $\Rightarrow y_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k^3 + 3} = \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{x_k - 3} - \dfrac{1}{x_{k+1} - 3} \right) = \dfrac{1}{x_1 - 3} - \dfrac{1}{x_{n+1} - 3} = 1 - \dfrac{1}{x_{n+1} - 3}$ $\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} y_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x_{n+1} - 3} \right) = 1$	1đ

Câu 3. (3 điểm)

Cho tam giác ABC đều cạnh a, tâm G. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua G và cắt các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = GM.GN.GP$.

<u>Đáp án câu 3</u>:

<table>
<tr><td>Không giảm tổng quát giả sử tam giác ABC có hướng dương.


Gọi A', B' C' lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và đặt $(GA',d) = \alpha(\bmod \pi)$.
Khi đó ta có:
● $(GB',d) = (GB',GA') + (GA',d)$
$= -\frac{2\pi}{3} + \alpha(\bmod \pi)$
$(GC',d) = (GC',GA') + (GA',d) = \frac{2\pi}{3} + \alpha(\bmod \pi)$.</td><td>1đ</td></tr>
<tr><td>● Từ đó suy ra:
$T = GM.GN.GP = GA'.\frac{GM}{GA'}.GB'.\frac{GN}{GB'}.GC'.\frac{GP}{GC'}$</td><td>1đ</td></tr>
<tr><td>$= \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^3}{\left|\cos\alpha.\cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right).\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)\right|} = \frac{a^3\sqrt{3}}{18\left|\cos 3\alpha\right|} \geq \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$
● Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \left|\cos 3\alpha\right| = 1 \Leftrightarrow \sin 3\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{k\pi}{3}, k \in Z$. Vậy d trùng với một trong 3 đường cao của tam giác.</td><td>1đ</td></tr>
</table>

Câu 4. (3 điểm)

Tìm tất cả các cặp hàm số $f, g : R \to R$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i. $f(0) = g(0) = 1,\ g(1) = 2$.

ii. $f(x) - f(y) = (x-y)g(x+y) \quad \forall x, y \in R$.

<u>Đáp án câu 4</u>:

• $f(x)-f(y)=(x-y)g(x+y)\ \forall x,y \in R$ (1). Đặt $F(x)=f(x)-1, F(0)=0$. Khi đó (1) trở thành $F(x)-F(y)=(x-y)g(x+y)$. (2) • Trong (2) cho $y=0$ được $F(x)=xg(x)$. Khi đó (2) trở thành $xg(x)-yg(y)=(x-y)g(x+y)$. (3)	0.5đ
• Đặt $G(x)=g(x)-1, G(0)=0$. Ta viết lại (3): $xG(x)-yG(y)=(x-y)G(x+y)$ (4)	0.5đ
Thay x bởi $-y$ được: $-yG(-y)=yG(y)$.	0.5đ
• Trong (4) thay y bởi $-y$ được: $xG(x)-yG(y)=(x+y)G(x-y)$. Do đó: $(x-y)G(x+y)=(x+y)G(x-y)$. Đặt $x+y=a,\ x-y=b$ được: $bG(a)=aG(b)$. Suy ra $\dfrac{G(a)}{a}=\dfrac{G(b)}{b}\ \forall a,b\neq 0$. Vậy $G(x)=mx\ \forall x\in R$ (m là số thực cho trước)	1đ
• $G(1)=g(1)-1=1 \Rightarrow m=1 \Rightarrow G(x)=x \Rightarrow g(x)=x+1\ \forall x\in R$. Từ đó có $f(x)=x^2+x+1\ \forall x\in R$ Thử lại ta được $f(x)=x^2+x+1$ và $g(x)=x+1$ là các hàm cần tìm.	0.5đ

Câu 5. (3 điểm)

Một số nguyên dương $n>1$ được gọi là hoàn toàn không chính phương nếu n không có ước chính phương khác 1. Chứng minh rằng nếu n là một hợp số và $n-1$ chia hết cho $\varphi(n)$ thì n hoàn toàn không chính phương và n có ít nhất 3 ước nguyên tố (trong đó $\varphi(n)$ là số các số nguyên dương không vượt quá n và nguyên tố cùng nhau với n).

<u>Đáp án câu 5</u>:

<table>
<tr>
<td>

• Gọi p là một ước nguyên tố bất kỳ của n. Ta viết $n=p^r m$ với r và m là các số nguyên dương mà $(p,m)=1$.

Ta có: $\varphi(n)=\varphi(p^r)\varphi(m)=p^{r-1}(p-1)\varphi(m)$ và $(n-1)=p^r m-1$

Theo giả thiết: $\varphi(n)|(n-1) \Rightarrow p^{r-1}|(p^r m-1) \Rightarrow r-1=0$ (vì $(p,p^r m-1)=1$)

$\Rightarrow r=1$ (và do đó $m>1$ vì n là một hợp số).

Vậy n là một số hoàn toàn không chính phương và n có ít nhất hai ước nguyên tố.

</td>
<td>1.5đ</td>
</tr>
<tr>
<td>

• Giả sử $n=pq$ với p và q là hai số nguyên tố khác nhau. Khi đó:

$$(p-1)(q-1)=\varphi(p)\varphi(q)=\varphi(n)|(n-1)=pq-1$$

suy ra $(p-1)|(pq-1)$.

Ta lại có: $(p-1)|(p-1)q \Rightarrow (p-1)|[(pq-1)-(p-1)q]=q-1$

Tương tự, $q-1|(p-1)$; vậy $p=q$, vô lý!

Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng n có ít nhất ba ước nguyên tố, điều phải chứng minh.

</td>
<td>1.5đ</td>
</tr>
</table>

Câu 6. (3 điểm)

Trên mỗi ô của một bảng 4×4 ô vuông, người ta điền một trong hai số 1 hoặc -1 sao cho tổng các số trong mỗi hàng và trong mỗi cột đều bằng 0. Hỏi có bao nhiêu cách điền như trên?

Đáp án câu 6:

Ta thấy mỗi hàng và mỗi cột đều chứa hai số 1 và hai số -1. Nếu 3 hàng đầu tiên đã được điền số sao cho tổng các số trong mỗi hàng bằng 0 và trong mỗi cột có không quá hai số bằng nhau thì ta có duy nhất một cách điền số vào hàng thứ tư. Do đó ta chỉ tìm số cách điền số ba hàng đầu tiên.	0.5đ
Ở hàng thứ nhất và hàng thứ hai, mỗi hàng có $C_4^2=6$ cách điền số mà tổng các số bằng 0. Trong 6 cách điền số ở hàng thứ hai ta chia thành 3 trường hợp:	0.5đ
• Trường hợp 1: Cách điền số ở hàng thứ hai trùng với cách điền số ở hàng thứ nhất 0 vị trí: có 1 cách. Khi đó, có 6 cách điền dòng thứ ba.	0.5đ
• Trường hợp 2: Cách điền số ở hàng thứ hai trùng với cách điền số ở hàng thứ nhất 4 vị trí: có 1 cách. Khi đó, có 1 cách điền dòng thứ ba.	0.5đ
• Trường hợp 3: Cách điền số ở hàng thứ hai trùng với cách điền số ở hàng thứ nhất 2 vị trí: có 4 cách. Khi đó, mỗi cách điền dòng thứ hai, có 2 cách điền dòng thứ ba.	0.5đ
Vậy số cách điền số thỏa mãn yêu cầu bài toán là: 6.1.6 + 6.1.1 + 6.4.2 = 90 cách.	0.5đ