NGUYỄN MINH HÀ (Chủ biên) – NGUYỄN XUÂN BÌNH

BÀI TẬP NÂNG CAO VÀ MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ

HÌNH HỌC 10

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Chương I

VECTƠ

§1. VECTƠ. CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I – ĐẠI CƯƠNG VỀ VECTƠ

1. Vectơ

– Vectơ là một đoạn thẳng trong đó đã chỉ rõ điểm mút nào là điểm đầu, điểm mút nào là điểm cuối.

– Điểm đầu và điểm cuối của vectơ theo thứ tự gọi là gốc và ngọn của vectơ.

– Hướng từ gốc tới ngọn của vectơ được gọi là hướng của vectơ.

– Vectơ có gốc A, ngọn B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.

– Độ dài của đoạn thẳng AB được gọi là độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ (hay môđun của vectơ $\overrightarrow{AB}$), kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$.

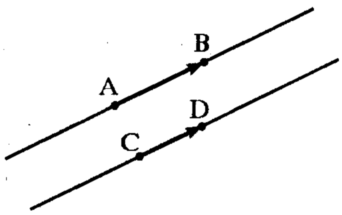
– Vectơ có gốc và ngọn trùng nhau được gọi là vectơ–không, kí hiệu là $\vec{0}$. Vectơ $\vec{0}$ có hướng tuỳ ý và có độ dài bằng 0.

2. Vectơ bằng nhau

– Giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$ (khác $\vec{0}$) là đường thẳng AB. Giá của vectơ–không $\overrightarrow{AA}$ là đường thẳng bất kì đi qua A.

– Hai vectơ được gọi là cùng phương (hay cộng tuyến) nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau. Nếu $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{CD}$, ta viết $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$.

Hai vectơ cùng phương có thể cùng hướng hoặc ngược hướng. Nếu hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng, ta kí hiệu $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ (h.1-1). Nếu hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng, ta kí hiệu $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ (h.1-2). Vectơ $\vec{0}$ cùng phương và cùng hướng với mọi vectơ.

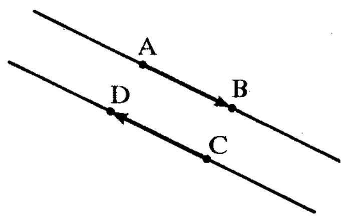


Hình 1-1

Chú ý. Khi nói hai vectơ cùng hướng hay ngược hướng có nghĩa là chúng đã cùng phương.

Nếu giá của $\vec{a}$ song song hoặc trùng với đường thẳng Δ, ta cũng viết $\vec{a} \,//\, \Delta$.

– Hai vectơ gọi là *bằng nhau* nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài. Nếu hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ bằng nhau, ta viết $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



Hình 1-2

3. Vectơ tự do

Có rất nhiều vectơ bằng một vectơ $\overrightarrow{AB}$ cho trước. Tập hợp các vectơ này được coi là một vectơ (vectơ tự do). Một vectơ tự do hoàn toàn xác định nếu biết hướng và độ dài của nó. Vectơ tự do thường được kí hiệu đơn giản là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}$,...

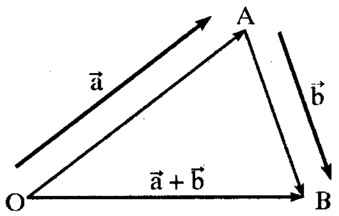
4. Phép dựng vectơ

Cho trước vectơ $\vec{a}$. Với mỗi điểm M, tồn tại duy nhất điểm N sao cho $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$.

II – CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

1. Phép cộng các vectơ

– Tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được xác định như sau : Từ một điểm O tuỳ ý, dựng $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, từ A ta dựng tiếp $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{OB}$ được gọi là vectơ tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} + \vec{b}$ (h.1-3)



Hình 1-3

Từ định nghĩa, ta có ngay các quy tắc quan trọng sau

• Quy tắc ba điểm :

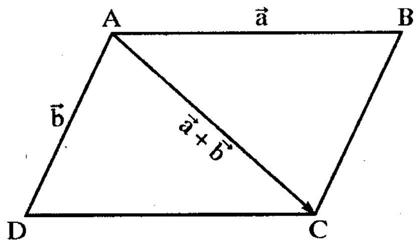
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Quy tắc mở rộng cho n điểm :

$\overrightarrow{A_1A_n} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + ... + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$.

• Quy tắc hình bình hành (h.1-4). : ABCD là hình bình hành thì

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.



Hình 1-4

– Tính chất của phép cộng các vectơ :

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (giao hoán).
- $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (kết hợp).
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Chú ý. Nhờ tính chất kết hợp, các tổng $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ được viết đơn giản là $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

2. Phép trừ hai vectơ

– Hai vectơ gọi là *đối nhau* nếu tổng của chúng bằng $\vec{0}$. Vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $-\vec{a}$.

Rõ ràng, hai vectơ là đối nhau khi và chỉ khi chúng ngược hướng và có cùng độ dài. Đặc biệt, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

– Hiệu của vectơ $\vec{a}$ và vectơ $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$, là tổng của $\vec{a}$ và $(-\vec{b})$. Như vậy :

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Ta có hai quy tắc quan trọng đối với phép trừ vectơ :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (O là điểm tuỳ ý).
- $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} \Leftrightarrow \vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$ (quy tắc chuyển vế).

3. Phép nhân một vectơ với một số thực

– Tích của số thực k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu $k\vec{a}$, được xác định như sau :

- Nếu $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$ thì $k\vec{a} = \vec{0}$.
- Nếu $k > 0$ và $\vec{a} \neq \vec{0}$ thì $k\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$ và $|k\vec{a}| = k.|\vec{a}|$.
- Nếu $k < 0$ và $\vec{a} \neq \vec{0}$ thì $k\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$ và $|k\vec{a}| = -k.|\vec{a}|$.

Hệ quả

- Nếu $k\vec{a} = \vec{0}$ thì $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.
- $|k\vec{a}| = |k|.|\vec{a}|$.

– Tính chất :

- $1\vec{a} = \vec{a}$; $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.
- $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$.

- $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$.
- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$; $k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$.

B. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1.1. Cho hai vectơ bất kì $\vec{a}$, $\vec{b}$. Chứng minh rằng :

a) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{b}|.\vec{a} = |\vec{a}|.\vec{b}$.

b) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{b}|.\vec{a} = -|\vec{a}|.\vec{b}$.

Giải. a) • Nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$, mệnh đề hiển nhiên đúng.

• Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ và $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, ta có

$|\vec{a}| > 0, |\vec{b}| > 0 \Rightarrow |\vec{b}|.\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, $|\vec{a}|.\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{b} \Rightarrow |\vec{b}|.\vec{a} \uparrow\uparrow |\vec{a}|.\vec{b}$.

Mặt khác $\left||\vec{b}|.\vec{a}\right| = \left||\vec{a}|.\vec{b}\right| = |\vec{a}|.|\vec{b}|$.

Theo định nghĩa hai vectơ bằng nhau, ta có

$$|\vec{b}|.\vec{a} = |\vec{a}|.\vec{b}.$$

Hiển nhiên có điều ngược lại.

b) Chứng minh tương tự câu a).

Nhận xét. Nếu $\vec{b} \neq \vec{0}$, ta có :

$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}.\vec{b}. \qquad (1)$$

$$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}.\vec{b}. \qquad (2)$$

Các điều kiện (1) và (2) thường được dùng để giải nhiều bài toán khác.

Ví dụ 1.2. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Chứng minh rằng A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AC}$.

Giải. – Nếu A, B, C thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ có cùng giá $\Rightarrow \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AC}$ (định nghĩa).

– Nếu $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AC}$ thì các đường thẳng AB và AC song song hoặc trùng nhau. Vì hai đường thẳng này có chung điểm A nên chúng trùng nhau. Vậy A, B, C thẳng hàng.

Ví dụ 1.3. Cho hai điểm A, B phân biệt và hai số α, β không đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng :

a) Nếu $\alpha + \beta = 0$ thì không tồn tại điểm M sao cho

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$

b) Nếu $\alpha + \beta \neq 0$ thì tồn tại duy nhất điểm M sao cho

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$

Giải. a) Giả sử $\alpha + \beta = 0$ mà có điểm M sao cho $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Suy ra $\alpha\overrightarrow{MA} - \alpha\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Rightarrow \alpha(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = \vec{0} \Rightarrow \alpha.\overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

Vì $\overrightarrow{BA} \neq \vec{0}$ nên $\alpha = 0 \Rightarrow \beta = 0$: mâu thuẫn. Vậy không tồn tại điểm M.

b) Giả sử $\alpha + \beta \neq 0$, ta có $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -\alpha\overrightarrow{AM} + \beta(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) = \vec{0}$

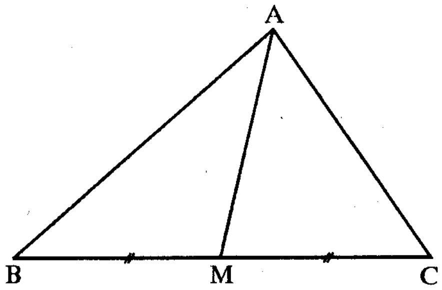
$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{AM} = \beta\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}.$

Đẳng thức cuối cùng chứng tỏ sự tồn tại và duy nhất của điểm M, đồng thời chỉ ra cách dựng điểm M.

Ví dụ 1.4. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng : điểm M là trung điểm của BC khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$



Hình 1-5

Giải (h.1-5). Với mọi điểm M, ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \\ \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}.$$

Từ đó, M là trung điểm của BC khi và chỉ khi $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$

Ví dụ 1.5. Cho tam giác ABC. Chứng minh điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

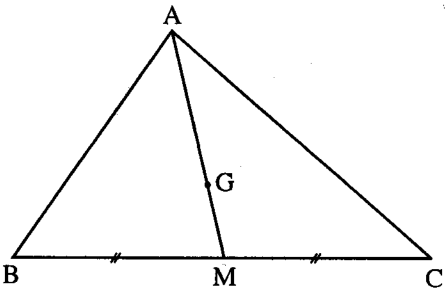
Giải (h.1-6). Gọi M là trung điểm cạnh BC, ta có

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{G thuộc đoạn AM} \\ GA = 2GM \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ G là trọng tâm ΔABC.



Hình 1-6

Hệ quả. G là trọng tâm ΔABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)$ với mọi điểm M.

Ví dụ 1.6. Các tam giác ABC và A'B'C' có trọng tâm lần lượt là G và G'. Chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}\right).$$

Giải. Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G'} \\ \overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'G'} \\ \overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'G'} \end{cases}$$

Cộng từng vế ba đẳng thức trên ta có :

$$3\overrightarrow{GG'} = \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + \left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}\right) + \left(\overrightarrow{A'G'} + \overrightarrow{B'G'} + \overrightarrow{C'G'}\right)$$

$$= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}.$$

Vậy $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}\right)$.

Hệ quả. Hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm khi và chỉ khi $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

Ví dụ 1.7. Cho lục giác ABCDEF. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

Giải (h.1-7)

Cách 1. Giả sử G là trọng tâm ΔMPR, khi đó

$$\overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GA}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}\right)$$

$$= \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GR}$$

$$= \vec{0}.$$

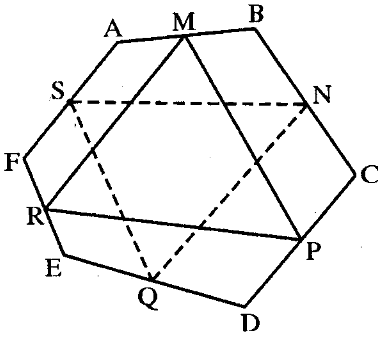
Vậy G cũng là trọng tâm ΔNQS.

Cách 2. Theo tính chất đường trung bình của tam giác ta có

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA}\right)$$

$$= \vec{0}.$$



Hình 1-7

Theo hệ quả VD 1.6, các tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

Ví dụ 1.8. Cho tam giác ABC có trọng tâm G, M là điểm tuỳ ý. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm đối xứng của M qua các trung điểm I, J, K của các cạnh BC, CA, AB.

a) Chứng minh AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại trung điểm của mỗi đoạn (gọi là điểm O).

b) Chứng minh M, O, G thẳng hàng.

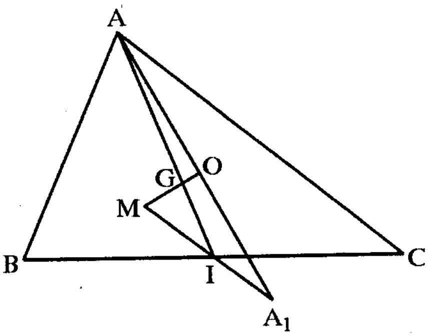
Giải (h.1-8)

a) Ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

Tương tự, $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB_1} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$;

$$\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC_1} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$



Hình 1-8

Suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB_1} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC_1}$.

Từ đó suy ra các đoạn AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại O là trung điểm của mỗi đoạn (bạn đọc tự kiểm tra).

b) Từ kết quả vừa chứng minh ta có

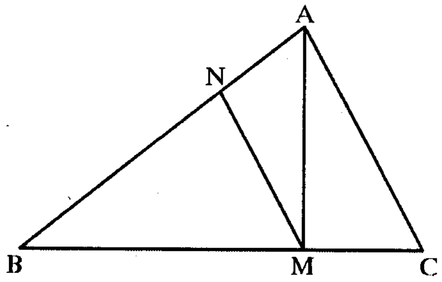
$$2\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

Suy ra $\overrightarrow{MO} // \overrightarrow{MG} \Rightarrow$ M, O, G thẳng hàng.

Ví dụ 1.9. Cho tam giác ABC, M là một điểm trên cạnh BC. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC}\overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC}\overrightarrow{AC}.$$

Giải



Hình 1-9

Cách 1 (h.1-9). Vẽ MN // AC ($N \in AB$).

Áp dụng định lí Ta-lét ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AN} = \dfrac{AN}{AB}\overrightarrow{AB} = \dfrac{MC}{BC}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{NM} = \dfrac{NM}{AC}\overrightarrow{AC} = \dfrac{MB}{BC}\overrightarrow{AC} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} = \frac{MC}{BC}\overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC}\overrightarrow{AC}.$$

Cách 2.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \\ \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MC.\overrightarrow{AM} = MC.\overrightarrow{AB} + MC.\overrightarrow{BM} \\ MB.\overrightarrow{AM} = MB.\overrightarrow{AC} + MB.\overrightarrow{CM} \end{cases}$$

Cộng từng vế của hai đẳng thức, với chú ý rằng hai vectơ $MC.\overrightarrow{BM}$ và $MB.\overrightarrow{CM}$ là hai vectơ đối nhau (ngược hướng và cùng độ dài), ta có :

$$BC.\overrightarrow{AM} = MC.\overrightarrow{AB} + MB.\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC}\overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC}\overrightarrow{AC}.$$

Ví dụ 1.10. Cho tam giác ABC và một điểm M thoả mãn $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AM} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}.$$

Giải. $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = k\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$.

Nhận xét

– Nếu M là trung điểm của BC thì $k = \frac{1}{2}$, ta nhận được kết quả trong VD 1.4.

– Nếu M thuộc đoạn BC thì $k = \frac{MB}{BC}$, ta nhận được kết quả trong VD 1.9.

– Kết quả trên còn được viết dưới dạng sau :

Nếu $\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC}$ $(k \neq 1)$ thì

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}}{1-k}.$$

(Sau này ta sẽ thấy cách biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ qua $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ như trên là duy nhất).

Ví dụ 1.11. Cho tứ giác ABCD. Các điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn AD, BC sao cho

$$\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC} = \frac{m}{n}.$$

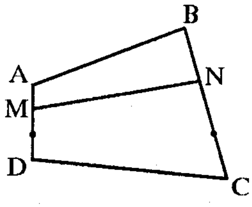
Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{MN} = \frac{n\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{DC}}{m+n}.$$

Giải (h.1-10). Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n\overrightarrow{MN} = n\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{BN} \\ m\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{MD} + m\overrightarrow{DC} + m\overrightarrow{CN} \end{cases}$$



Hình 1-10

$$\Rightarrow (m+n)\overrightarrow{MN} = \left(n\overrightarrow{MA} + m\overrightarrow{MD}\right) + \left(n\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{DC}\right) + \left(n\overrightarrow{BN} + m\overrightarrow{CN}\right)$$

$$= \vec{0} + \left(n\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{DC}\right) + \vec{0}$$

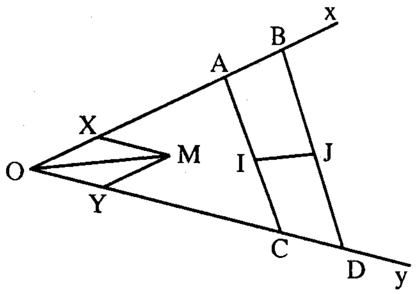
$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{n\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{DC}}{m+n}.$$

Nhận xét. – Khi A ≡ D, ta nhận được kết quả trong VD 1.10. (Lưu ý rằng $\overrightarrow{NB} = -\frac{m}{n}\overrightarrow{NC}$).

– Khi M và N là trung điểm các cạnh AD và BC, ta có $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.

– Kết quả trên vẫn đúng khi A, B, C, D là bốn điểm bất kì (không phải là bốn đỉnh của một tứ giác lồi).

Ví dụ 1.12. Hai đoạn AB, CD bằng nhau và trượt trên các cạnh Ox, Oy của góc xOy, A thuộc đoạn OB, C thuộc đoạn OD ; I, J theo thứ tự là trung điểm của AC, BD. Chứng minh rằng IJ luôn song song với phân giác của góc xOy và độ dài IJ không đổi.



Hình 1-11

Giải (h.1-11). Trên Ox, Oy lấy các điểm X, Y sao cho OX = OY = AB = CD.

Dựng hình thoi OXMY thì OM là phân giác của góc xOy và điểm M cố định.

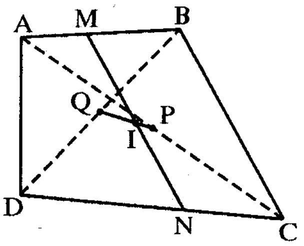
Ta có $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OM}$.

Vậy IJ song song với phân giác của góc xOy.

Hơn thế, $IJ = |\overrightarrow{IJ}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OM}| = \frac{1}{2}OM$ (không đổi).

Ví dụ 1.13. Cho tứ giác ABCD. Hai điểm M, N thay đổi trên các cạnh AB, CD sao cho :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CD}.$$



Hình 1-12

Tìm tập hợp các trung điểm I của MN.

Giải (h.1-12).

Phần thuận. Theo giả thiết ta có

$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CD}$ $(0 \le k \le 1)$.

Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AC và BD.

Ta có (theo VD 1.11) :

$$\overrightarrow{PI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CN}) = \frac{1}{2}k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}). \quad (1)$$

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{PI} = k\overrightarrow{PQ}$, chứng tỏ P, I, Q thẳng hàng. Vì $0 \le k \le 1$ nên I thuộc đoạn PQ.

Phần đảo. Bạn đọc tự chứng minh.

Kết luận. Tập hợp các trung điểm I của đoạn MN là đoạn PQ.

Ví dụ 1.14. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Giải (h.1-13).

a) *Cách 1.* $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) + 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Vậy M là đỉnh thứ tư của hình bình hành APMQ, trong đó

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Cách 2. Lấy E trên AB sao cho $\overrightarrow{EA} = -2\overrightarrow{EB}$ hay $\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} = \vec{0}$ (xem VD 1.3). Khi đó $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

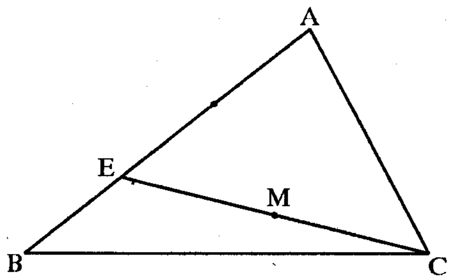
$\Leftrightarrow (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA}) + 2(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB}) + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{ME} + (\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB}) + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{ME} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ M là trung điểm của EC.



Hình 1-13

b) Vẫn lấy E như a).

Ta có :

$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{ME} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow E \equiv C$: vô lí. Vậy không tồn tại điểm M thoả mãn đề bài.

Ví dụ 1.15. Cho tam giác ABC và ba số thực α, β, γ. Chứng minh rằng vectơ

$$\vec{u}(M) = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$$

không phụ thuộc vị trí của M khi và chỉ khi $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Giải. Ta có

$$\vec{u}(M) = \alpha\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right) + \beta\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right) + (\alpha + \beta + \gamma)\,\overrightarrow{MC}$$

$$= \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB} + (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MC}.$$

Vậy $\vec{u}(M)$ không phụ thuộc vào M khi và chỉ khi $(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào M hay $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Ví dụ 1.16. Cho tam giác ABC và ba số α, β, γ không đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng :

a) Nếu $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ thì tồn tại duy nhất điểm I sao cho

$$\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

b) Nếu $\alpha + \beta + \gamma = 0$ thì không tồn tại điểm M sao cho

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Giải. a) Vì $\alpha + \beta + \gamma \neq 0 \Rightarrow (\alpha + \beta) + (\beta + \gamma) + (\gamma + \alpha) \neq 0$ nên một trong ba số $\alpha + \beta$; $\beta + \gamma$; $\gamma + \alpha$ khác không.

Chẳng hạn $\alpha + \beta \neq 0$. Theo VD 1.3, tồn tại điểm E sao cho : $\alpha\overrightarrow{EA} + \beta\overrightarrow{EB} = \vec{0}$. Khi đó

$$\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \alpha\left(\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EA}\right) + \beta\left(\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EB}\right) + \gamma\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{IE} + \left(\alpha\overrightarrow{EA} + \beta\overrightarrow{EB}\right) + \gamma\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{IE} + \gamma\overrightarrow{IC} = \vec{0}. \ (*)$$

Vì $(\alpha + \beta) + \gamma \neq 0$ nên theo VD 1.3, tồn tại duy nhất điểm I thoả mãn (*).

b) Giả sử tồn tại điểm M thoả mãn đẳng thức đã cho và giả sử, chẳng hạn $\alpha \neq 0$. Ta có : $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} - (\alpha + \beta)\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \alpha\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right) + \beta\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = -\frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{CB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CA} \,//\, \overrightarrow{CB} \text{ (mâu thuẫn).}$$

Vậy không tồn tại điểm M.

Nhận xét. – Trong trường hợp $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, với điểm M tuỳ ý ta có :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \alpha\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) + \beta\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) + \gamma\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)$$
$$= (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MI} + \left(\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC}\right)$$
$$= (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MI}.$$

– Bằng phép quy nạp, ta có thể chứng minh được kết quả tổng quát : Cho n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và n số thực $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sao cho $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0$. Khi đó, tồn tại duy nhất điểm I sao cho :

$$\alpha_1\overrightarrow{IA_1} + \alpha_2\overrightarrow{IA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{IA_n} = \vec{0}. \qquad (1)$$

Điểm I gọi là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ ứng với các hệ số

$\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ $(n \geq 2)$.

Từ (1), với điểm M tuỳ ý ta có :

$$\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \alpha_2\overrightarrow{MA_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)\overrightarrow{MI}.$$

Công thức này thường xuyên được sử dụng trong những bài toán có liên quan tới tâm tỉ cự. Ta gọi nó là công thức thu gọn.

Với $n = 3$ và $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, ta thấy lại tính chất trọng tâm của tam giác.

Ví dụ 1.17. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho

$$2\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right|.$$

Giải. Gọi G là trọng tâm ΔABC, J là điểm sao cho :

$$\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$$

(xem cách xác định J ở VD 1.14a).

Theo công thức thu gọn, với mọi điểm M ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \\ \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MJ}. \end{cases}$$

Vậy : $2\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right|$

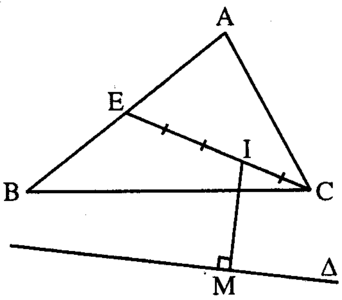
$\Leftrightarrow 6\left|\overrightarrow{MG}\right| = 6\left|\overrightarrow{MJ}\right|$

$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MG}\right| = \left|\overrightarrow{MJ}\right|$

$\Leftrightarrow MG = MJ.$

Tập hợp các điểm M là đường trung trực của GJ.

Ví dụ 1.18. Cho tam giác ABC và đường thẳng Δ. Tìm trên Δ điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.



Hình 1-14

Giải (h.1-14). Gọi I là điểm thoả mãn

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

(bạn đọc tự chỉ rõ vị trí của I).

Với mọi điểm M ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 5\overrightarrow{MI}.$$

Suy ra

$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow |5\overrightarrow{MI}|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MI nhỏ nhất.

Kết hợp điều kiện $M \in \Delta$, ta suy ra điểm M phải tìm là hình chiếu vuông góc của I trên Δ.

Ví dụ 1.19. Cho tam giác ABC với BC = a, CA = b, AB = c. Tìm điểm I sao cho :

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

Giải. (h.1-15). Lấy điểm A' thuộc đoạn BC sao cho $b\overrightarrow{A'B} + c\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$ (chỉ việc lấy A' sao cho $\frac{A'B}{A'C} = \frac{a}{b}$ hay AA' là đường phân giác của góc A)

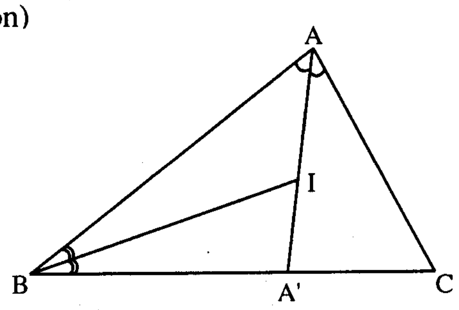
Ta có : $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + (b + c)\overrightarrow{IA'} = \vec{0}$ (công thức thu gọn)

$\Leftrightarrow$ I thuộc đoạn AA' và

$$\frac{IA}{IA'} = \frac{b + c}{a} = \frac{c}{\frac{ac}{b + c}} = \frac{BA}{BA'}.$$

Nhờ tính chất của đường phân giác trong tam giác, dễ dàng thấy rằng điểm I thuộc phân giác của góc B, tức I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.



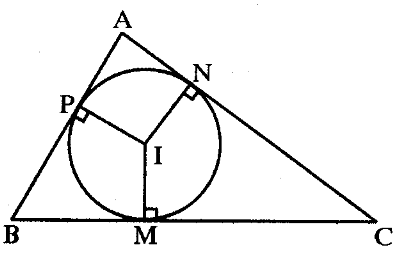
Hình 1-15

Ví dụ 1.20. Đường tròn (I) nội tiếp ΔABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P. Chứng minh rằng

$$a\overrightarrow{IM} + b\overrightarrow{IN} + c\overrightarrow{IP} = \vec{0}.$$

Giải (h.1-16). Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC, ta có :

$$\begin{cases} AP = AN = p - a, \\ BM = BP = p - b, \\ CN = CM = p - c. \end{cases}$$



Hình 1-16

Áp dụng VD 1.9 ta có

$$\overrightarrow{IM} = \frac{MC}{BC}\overrightarrow{IB} + \frac{MB}{BC}\overrightarrow{IC}$$

$$\Rightarrow a\overrightarrow{IM} = (p - c)\overrightarrow{IB} + (p - b)\overrightarrow{IC}.$$

Tương tự, $\begin{cases} b\overrightarrow{IN} = (p - a)\overrightarrow{IC} + (p - c)\overrightarrow{IA} & (2) \\ c\overrightarrow{IP} = (p - b)\overrightarrow{IA} + (p - a)\overrightarrow{IB}. & (3) \end{cases}$

Cộng từng vế các đẳng thức (1), (2), (3) thu được

$$\begin{aligned} a\overrightarrow{IM} + b\overrightarrow{IN} + c\overrightarrow{IP} &= (2p - b - c)\overrightarrow{IA} + (2p - a - c)\overrightarrow{IB} + (2p - a - b)\overrightarrow{IC} \\ &= a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} \\ &= \vec{0} \text{ (VD 1.19).} \end{aligned}$$

Hệ quả. Với điểm J bất kì trong tam giác ABC, hạ JM_1, JN_1, JP_1 lần lượt vuông góc với BC, CA, AB. Ta có

$$\frac{a}{JM_1}\overrightarrow{JM_1} + \frac{b}{JN_1}\overrightarrow{JN_1} + \frac{c}{JP_1}\overrightarrow{JP_1} = \vec{0}.$$

(xem thêm định lí Con nhím, BT 1.3).

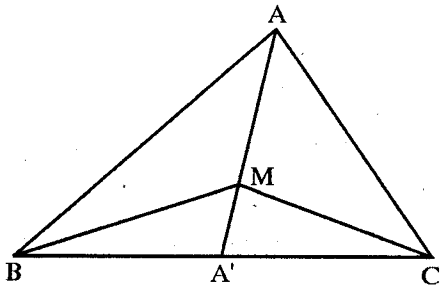
Ví dụ 1.21. Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì trong tam giác. Đặt $S_{MBC} = S_a$, $S_{MCA} = S_b$, $S_{MAB} = S_c$. Chứng minh rằng :

$$S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Giải (h.1-17). Gọi A' là giao điểm của đường thẳng MA với BC.

Ta có : $\overrightarrow{MA'} = \frac{A'C}{BC}\overrightarrow{MB} + \frac{A'B}{BC}\overrightarrow{MC}$

Nhưng $\frac{A'C}{A'B} = \frac{S_{MA'C}}{S_{MA'B}} = \frac{S_{MAC}}{S_{MAB}} = \frac{S_b}{S_c}$



Hình 1-17

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{A'C}{BC} = \dfrac{S_b}{S_b + S_c} \\ \dfrac{A'B}{BC} = \dfrac{S_c}{S_b + S_c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA'} = \frac{S_b}{S_b + S_c}\overrightarrow{MB} + \frac{S_c}{S_b + S_c}\overrightarrow{MC}. \ (*)$$

Mặt khác

$$\frac{MA'}{MA} = \frac{S_{MA'B}}{S_{MAB}} = \frac{S_{MA'C}}{S_{MAC}} = \frac{S_{MA'B} + S_{MA'C}}{S_{MAB} + S_{MAC}} = \frac{S_a}{S_b + S_c}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA'} = \dfrac{-S_a}{S_b + S_c}\overrightarrow{MA}$. Thay vào (*) ta được

$$-S_a\overrightarrow{MA} = S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} \Rightarrow S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0} \text{ (đpcm).}$$

Nhận xét

– Cho M trùng với trọng tâm ΔABC, ta được kết quả ở VD 1.5.

– Cho M trùng với tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, ta được kết quả ở VD 1.19.

– Nếu ΔABC đều thì với điểm M bất kì trong tam giác, ta có

$$x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \vec{0},$$

trong đó x, y, z là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB.

– Nếu M nằm ngoài ΔABC, chẳng hạn M thuộc góc $\widehat{BAC}$, chứng minh tương tự ta có kết quả

$$S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} - S_a\overrightarrow{MA} = \vec{0}.$$

Ví dụ 1.22. Cho tam giác đều ABC tâm O, M là điểm bất kì trong tam giác. Hạ MD, ME, MF lần lượt vuông góc với các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng :

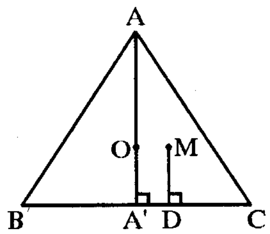
$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}.$$

Giải (h.1-18)

Gọi AA', BB', CC' là các đường cao của tam giác ABC.

Với kí hiệu như ở VD 1.21, ta có

$$S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0}. \quad (1)$$



Hình 1-18

Mặt khác, $\overrightarrow{MD} = \frac{MD}{AA'}\overrightarrow{AA'} = \frac{S_a}{S}\overrightarrow{AA'} = \frac{3}{2}\cdot\frac{S_a}{S}\overrightarrow{AO}$ (với $S = S_{ABC}$).

Tương tự như vậy, $\overrightarrow{ME} = \frac{3}{2}\cdot\frac{S_b}{S}\overrightarrow{BO}$; $\overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\cdot\frac{S_c}{S}\overrightarrow{CO}$.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} &= \frac{3}{2S}\left(S_a\overrightarrow{AO} + S_b\overrightarrow{BO} + S_c\overrightarrow{CO}\right) \\
&= \frac{3}{2S}\left[S_a\left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MA}\right) + S_b\left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MB}\right) + S_c\left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MC}\right)\right] \\
&= \frac{3}{2S}(S_a + S_b + S_c)\,\overrightarrow{MO} - \frac{3}{2S}\left(S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC}\right) \\
&= \frac{3}{2S}\cdot S.\overrightarrow{MO} \text{ (theo (1))} \\
&= \frac{3}{2}\overrightarrow{MO} \text{ (đpcm).}
\end{aligned}$$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Chứng minh rằng trong một ngũ giác, tổng các vectơ nối mỗi đỉnh của ngũ giác với trung điểm của các cạnh không chứa đỉnh ấy bằng vectơ–không.

1.2. Cho ngũ giác ABCDE. Các điểm M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm các đoạn EA, AB, BC, CD, MP, NQ. Chứng minh rằng RS // ED và $RS = \frac{1}{4}ED$.

1.3. Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$; $\overrightarrow{e_i}$ $(1 \le i \le n)$ là vectơ đơn vị vuông góc với $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ (xem $A_{n+1} \equiv A_1$) và hướng ra phía ngoài đa giác. Chứng minh rằng :

$A_1A_2\overrightarrow{e_1} + A_2A_3\overrightarrow{e_2} + ... + A_nA_1\overrightarrow{e_n} = \vec{0}$ (định lí Con nhím).

1.4. Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn tâm I. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các đường chéo AC, BD. Chứng minh rằng I, E, F thẳng hàng.

1.5. Cho tam giác ABC không đều, BC là cạnh nhỏ nhất. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại X, Y, Z. Gọi G là trọng tâm ΔXYZ. Trên các tia BA, CA lần lượt lấy các điểm E, F sao cho BE = CF = BC. Chứng minh rằng $IG \perp EF$.

1.6. Cho tam giác ABC ; M, N, P lần lượt là các điểm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $\frac{BM}{BC} = \frac{CN}{CA} = \frac{AP}{AB}$.

Chứng minh rằng AM, BN, CP là độ dài ba cạnh của một tam giác nào đó.

1.7. Cho tứ giác ABCD ; M là một điểm thuộc đoạn CD ; p, p_1, p_2 là chu vi của các tam giác AMB, ACB, ADB. Chứng minh rằng :

$$p < \max\{p_1 ; p_2\}.$$

1.8. Cho lục giác ABCDEF. Các điểm M, N, P, Q, R, S lần lượt thay đổi trên các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA sao cho :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{CP}{CD} = \frac{DQ}{DE} = \frac{ER}{EF} = \frac{FS}{FA}.$$

Chứng minh rằng trọng tâm hai tam giác MPR và NQS luôn đối xứng với nhau qua một điểm cố định.

1.9. Cho tứ giác ABCD. Điểm G được gọi là trọng tâm của tứ giác nếu $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

a) Hãy chỉ ra cách dựng điểm G.

b) Chứng minh rằng với mọi M ta có :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right).$$

1.10. Cho tứ giác ABCD ; X, Y, Z, T theo thứ tự là trọng tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng AX, BY, CZ, DT đồng quy tại trọng tâm của tứ giác ABCD.

1.11. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Chứng minh rằng vectơ

$$\vec{u}(M) = 4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$$

không phụ thuộc vào vị trí của M. Tính độ dài $\vec{u}(M)$.

1.12. Cho tam giác ABC, hai điểm M, N thay đổi sao cho

$$\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}.$$

Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

1.13. Cho tứ giác ABCD. Tìm tập hợp các điểm M sao cho

$$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right|.$$

1.14. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Tìm điểm M thuộc (O) sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|$ lớn nhất, nhỏ nhất.

1.15. Cho tam giác đều ABC, M là một điểm bất kì trong tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm đối xứng của M qua các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm.

1.16. Cho tam giác ABC, điểm O nằm trong tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của O trên BC, CA, AB. Lấy các điểm A_2, B_2, C_2 lần lượt thuộc các tia OA_1, OB_1, OC_1 sao cho $OA_2 = a$, $OB_2 = b$, $OC_2 = c$. Chứng minh O là trọng tâm $\Delta A_2B_2C_2$.

§2. SỰ BIỂU THỊ VECTƠ.
PHÉP CHIẾU VECTƠ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I – CÁC ĐỊNH LÍ CƠ BẢN VỀ BIỂU THỊ VECTƠ

Trong §1 ta đã định nghĩa hai vectơ cùng phương, cùng hướng, ngược hướng. Bây giờ ta hãy xem xét kĩ hơn vấn đề này để thấy những ứng dụng quan trọng của nó.

Định lí 2.1. Cho vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b}$ là vectơ tuỳ ý. Khi đó $\vec{b} // \vec{a} \Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{R}$: $\vec{b} = k\vec{a}$. Số k xác định như vậy là duy nhất.

Chứng minh

– Nếu $b = k\vec{a}$ thì $\vec{b} // \vec{a}$ theo định nghĩa phép nhân số thực với vectơ.

– Ngược lại, giả sử $\vec{a} // \vec{b}$. Xét các khả năng sau :

- $\vec{b} = \vec{0}$, chọn $k = 0$.
- $\vec{b} \neq \vec{0}$, số k được xác định như sau :

$k = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ nếu $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $k = -\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ nếu $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Theo VD 1.1, trong cả hai trường hợp, ta đều có $\vec{b} = k\vec{a}$.

Giả sử có số thực k' thoả mãn $\vec{b} = k'\vec{a}$ thì

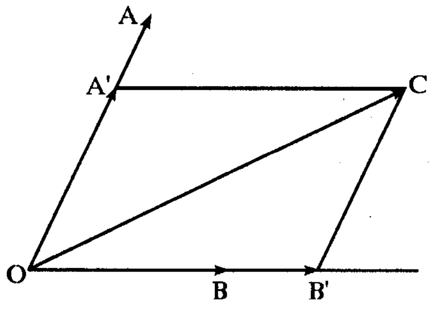
$k'\vec{a} - k\vec{a} = (k' - k)\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow k' - k = 0 \Rightarrow k' = k$.

Vậy số k nói trong định lí là duy nhất.

Hệ quả

Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Khi đó A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại số thực $k \neq 0$ sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$. Ngoài ra, $k > 0 \Leftrightarrow$ A nằm ngoài đoạn BC ; $k < 0 \Leftrightarrow$ A nằm trong đoạn BC.

Định lí 2.2. Cho $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ không cùng phương, $\vec{c}$ là vectơ bất kì. Khi đó tồn tại duy nhất cặp số (m, n) sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.



Hình 2-1

Chứng minh. (h.2-1) Từ điểm O nào đó dựng các vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Vì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nên các đường thẳng OA, OB không trùng nhau. Từ C ta vẽ các đường thẳng song song với OA, OB, chúng lần lượt cắt các đường thẳng OB, OA tại B', A'. Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$. Vì $\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}$ lần lượt cùng phương với $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ nên tồn tại các số m, n sao cho $\overrightarrow{OA'} = m\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB'} = n\overrightarrow{OB}$.

Vậy $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ hay $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Nếu có m', n' thoả mãn $\vec{c} = m'\vec{a} + n'\vec{b}$ thì $m'\vec{a} + n'\vec{b} = m\vec{a} + n\vec{b}$

$\Rightarrow (m' - m).\vec{a} = (n - n')\vec{b}$.

Giả sử chẳng hạn $m' \neq m \Rightarrow \vec{a} = \dfrac{n - n'}{m' - m}\vec{b} \Rightarrow \vec{a} // \vec{b}$, mâu thuẫn. Vậy m' = m. Tương tự , n' = n.

Vậy hai số m, n xác định như trong định lí là duy nhất.

Hệ quả

1) Giả sử có hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.

Nếu $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$ thì m = n = 0.

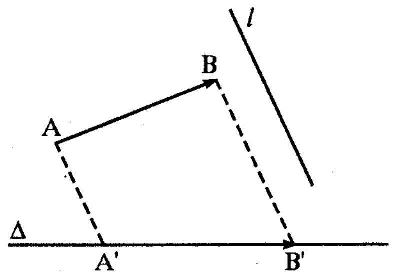
Thật vậy, ta có $0\vec{a} + 0\vec{b} = \vec{0}$. Theo định lí 2.2 suy ra m = n = 0.

2) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists$ m, n không đồng thời bằng 0 sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$ (suy trực tiếp từ định lí 2.1 và hệ quả 1).

II – PHÉP CHIẾU VECTƠ

1. Định nghĩa

Cho đường thẳng Δ và đường thẳng l không song song với Δ, $\overrightarrow{AB}$ là vectơ bất kì. Qua A, B kẻ các đường thẳng song song với l, chúng cắt Δ theo thứ tự tại A', B' (h.2-2). Vectơ $\overrightarrow{A'B'}$ được gọi là



Hình 2-2

hình chiếu của vectơ $\overrightarrow{AB}$ qua *phép chiếu vectơ* phương l (phương chiếu) lên đường thẳng Δ (đường thẳng chiếu).

Đương nhiên, nếu hai vectơ bằng nhau thì các hình chiếu của chúng qua cùng một phép chiếu vectơ cũng bằng nhau.

2. Tính chất

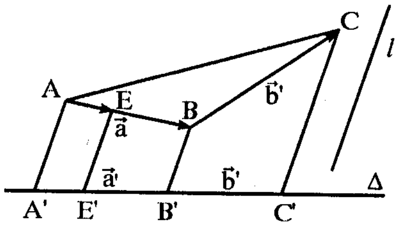
Nếu $\vec{a'}, \vec{b'}$ là hình chiếu của $\vec{a}, \vec{b}$ qua phép chiếu vectơ phương l lên đường thẳng Δ thì :

a) $\vec{a'} + \vec{b'}$ là hình chiếu của $\vec{a} + \vec{b}$.

b) $k\vec{a'}$ là hình chiếu của $k\vec{a}$ $(k \in \mathbb{R})$.

c) $\vec{a'} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \,//\, l$.

d) $\vec{a'} = \vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} \,//\, \Delta$.



Hình 2-3

Chứng minh. (h.2-3)

Từ điểm A bất kì dựng $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, từ B dựng $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm trên Δ sao cho AA', BB', CC' song song với l.

a) $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \vec{a'} + \vec{b'}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Vì $\overrightarrow{A'C'}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{AC}$ qua phép chiếu vectơ phương l lên Δ nên $\vec{a'} + \vec{b'}$ là hình chiếu của $\vec{a} + \vec{b}$ qua phép chiếu nói trên.

b) Giả sử $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB} = k\vec{a}$, E' là hình chiếu của E (qua phép chiếu nói trên). Theo định lí Ta-lét ta có

$\overrightarrow{A'E'} = k\overrightarrow{A'B'} = k\vec{a'} \Rightarrow k\vec{a'}$ là hình chiếu của $k\vec{a}$.

c) $\vec{a'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = \vec{0} \Leftrightarrow A' \equiv B' \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \,//\, l$.

d) $\vec{a'} = \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow \vec{a} \,//\, \Delta$.

Chú ý. 1) Qua phép chiếu vectơ, vectơ–không biến thành vectơ–không.

2) Sau này khi nói đến phép chiếu vectơ mà không nói rõ phương chiếu thì ta hiểu đó là phép chiếu vectơ có phương chiếu vuông góc với đường thẳng chiếu.

B. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 2.1. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ không cùng phương. Tìm số thực x sao cho các vectơ $\vec{c} = (x-2)\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{d} = (2x+1)\vec{a} - \vec{b}$ cùng phương.

Giải. Rõ ràng $\vec{c} \neq 0$ vì hệ số của $\vec{b}$ khác 0. Theo định lí 2.1, nếu hai vectơ $\vec{c}$ và $\vec{d}$ cùng phương thì tồn tại số y sao cho $\vec{d} = y\vec{c}$, tức là :

$$(2x+1)\vec{a} - \vec{b} = y(x-2)\vec{a} + y\vec{b}$$

$$\Rightarrow (yx - 2y - 2x - 1)\,\vec{a} + (y+1)\vec{b} = \vec{0}.$$

Theo hệ quả định lí 2.2, suy ra $\begin{cases} yx - 2y - 2x - 1 = 0 \\ y + 1 = 0. \end{cases}$

Giải hệ này tìm được $y = -1,\ x = \frac{1}{3}$.

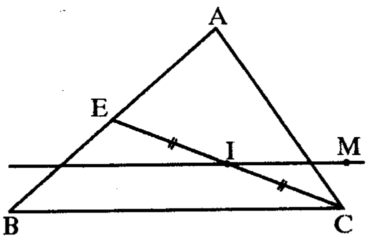
Rõ ràng, với $x = \frac{1}{3}$ thì $\vec{c} = -\frac{5}{3}\vec{a} + \vec{b}, \vec{d} = \frac{5}{3}\vec{a} - \vec{b}$, thấy ngay rằng $\vec{c} = -\vec{d}$.

Ví dụ 2.2. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ cùng phương với $\overrightarrow{BC}$.

Giải (h.2-4). Gọi E là trung điểm của AB, I là trung điểm của EC, ta có

$$\vec{v} = 2\overrightarrow{ME} + 2\overrightarrow{MC} = 2\left(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MC}\right) = 4\overrightarrow{MI}.$$

$\vec{v} // \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} // \overrightarrow{BC}$. Tập hợp các điểm M là đường thẳng qua I, song song với BC.



Hình 2-4

Ví dụ 2.3. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng điểm M thuộc đường thẳng BC khi và chỉ khi tồn tại các số α, β sao cho

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}. \end{cases}$$

Giải. Theo định lí 2.1, M thuộc đường thẳng BC khi và chỉ khi B, C, M thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} // \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \exists\, k : \overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$

$$\Leftrightarrow \exists k : \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = k\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists k : \overrightarrow{AM} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta : \begin{cases} \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \text{ (đặt } \alpha = 1 - k, \beta = k)$$

Theo định lí 2.2, các số α, β xác định như trên là duy nhất.

Hệ quả

M thuộc đường thẳng BC và $x\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$ thì $x = y + z$.

Ví dụ 2.4. Cho tam giác ABC, lấy các điểm P, Q sao cho

$$\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB},\ 3\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QC} = \vec{0}.$$

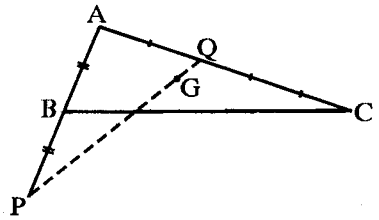
a) Biểu thị $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh PQ đi qua trọng tâm tam giác ABC.

Giải (h.2-5). a) Từ giả thiết suy ra :

$\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{BP} = 2(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) \Rightarrow \overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}$;

$3\overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{QC} = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AQ}) \Rightarrow \overrightarrow{AQ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.



Hình 2-5

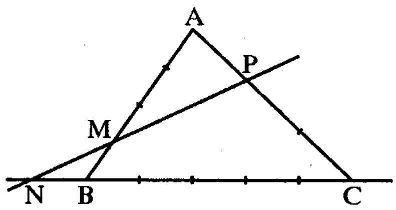
b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AP} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AQ}.$$

Để ý rằng $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$, theo VD 2.3, ta có ngay P, G, Q thẳng hàng.

Ví dụ 2.5. Trên các cạnh của tam giác ABC lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 6\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{PC} + 2\overrightarrow{PA} = \vec{0}$.

Hãy biểu thị $\overrightarrow{AN}$ qua $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AP}$, từ đó suy ra M, N, P thẳng hàng.



Hình 2-6

Giải (h.2-6). Từ giả thiết $\overrightarrow{NC} = 6\overrightarrow{NB}$, dùng công thức ở V.D 1.10,

ta có : $\overrightarrow{AN} = \dfrac{\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB}}{-5} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AP} + \frac{8}{5}\overrightarrow{AM}.$

Do $\frac{8}{5} - \frac{3}{5} = 1$ suy ra M, N, P thẳng hàng.

Ví dụ 2.6. Cho tam giác ABC ; M, N, P là các điểm thoả mãn $\overrightarrow{MB} = \alpha\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC} = \beta\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{PA} = \gamma\overrightarrow{PB}$ $(\alpha, \beta, \gamma \neq 0, \neq -1)$.

Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $\alpha\beta\gamma = 1$.

Giải (h.2-7). $\overrightarrow{MB} = \alpha\overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \alpha(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM})$

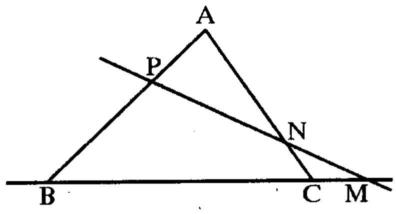
$\Rightarrow (1-\alpha)\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \alpha\overrightarrow{AC}$. (1)

• $\overrightarrow{NC} = \beta\overrightarrow{NA} \Rightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AN} = \beta\overrightarrow{NA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = (1-\beta)\overrightarrow{AN}$. (2)

• $\overrightarrow{PA} = \gamma\overrightarrow{PB} \Rightarrow \overrightarrow{PA} = \gamma\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}\right)$

$\Rightarrow \gamma\overrightarrow{AB} = (\gamma - 1)\overrightarrow{AP}$. (3)



Hình 2-7

Từ (1), (2), (3) rút ra :

$$(1-\alpha)\overrightarrow{AM} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\overrightarrow{AP} - \alpha(1-\beta)\overrightarrow{AN}.$$

Theo VD 2.3 ta thấy M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi

$$1 - \alpha = \frac{\gamma - 1}{\gamma} - \alpha(1-\beta) \Leftrightarrow \gamma - \alpha\gamma = \gamma - 1 - \alpha\gamma + \alpha\beta\gamma \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = 1.$$

Nhận xét. Đây chính là dạng vectơ của định lí Mê-nê-la-uyt. Trong §3, ta sẽ gặp lại nó dưới dạng thông thường.

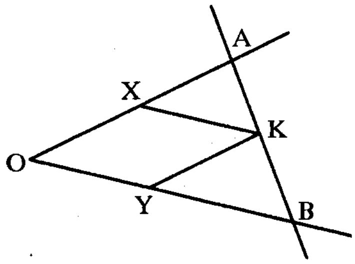
Ví dụ 2.7. Cho góc xOy và hai số dương a, b. A và B là hai điểm chạy trên Ox, Oy sao cho $\frac{a}{OA} + \frac{b}{OB} = 1$. Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Giải (h.2-8). Trên Ox, Oy lấy lần lượt các điểm X, Y sao cho OX = a, OY = b. Dựng hình bình hành OXKY ta có

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} = \frac{OX}{OA}\overrightarrow{OA} + \frac{OY}{OB}\overrightarrow{OB}$$

$$= \frac{a}{OA}\overrightarrow{OA} + \frac{b}{OB}\overrightarrow{OB}.$$

Vì $\frac{a}{OA} + \frac{b}{OB} = 1$ nên các điểm A, K, B thẳng hàng.



Hình 2-8

Vậy đường thẳng AB luôn đi qua điểm K cố định.

Ví dụ 2.8. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đôi một không cùng phương và thoả mãn các điều kiện :

$$\begin{cases} m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0} & (m \neq 0) \\ m'\vec{a} + n'\vec{b} + p'\vec{c} = \vec{0} & (m' \neq 0). \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'} = \frac{p}{p'}$.

Giải. Từ giả thiết $m \neq 0$, $m' \neq 0$ suy ra ngay n, p, n', p' cũng khác 0, vì chẳng hạn $n = 0$ thì $m\vec{a} + p\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow m = p = 0$ (do $\vec{a}$ và $\vec{c}$ không cùng phương), trái giả thiết.

Ta có $\begin{cases} \vec{a} = -\frac{n}{m}\vec{b} - \frac{p}{m}\vec{c} \\ \vec{a} = -\frac{n'}{m'}\vec{b} - \frac{p'}{m'}\vec{c}. \end{cases}$

Theo định lí 2.2 ta có

$$\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'}, \frac{p}{m} = \frac{p'}{m'} \Rightarrow \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'} = \frac{p}{p'}.$$

Nhận xét. Các trường hợp đặc biệt thường gặp :

1) Nếu $\begin{cases} \vec{a} = n\vec{b} + p\vec{c} \\ \vec{a} = n'\vec{b} + p'\vec{c} \end{cases}$ thì $\begin{cases} n = n' \\ p = p'. \end{cases}$

2) Nếu $\begin{cases} \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \\ \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \end{cases}$ thì $\alpha = \beta = \gamma$.

Ví dụ 2.9. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng các tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm khi và chỉ khi

$$\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB}.$$

Giải. Theo hệ quả của VD 1.6 ta có ΔABC và ΔMNP cùng trọng tâm khi và chỉ khi ΔBCA và ΔMNP cùng trọng tâm $\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \frac{BM}{BC}.\overrightarrow{BC} + \frac{CN}{CA}\overrightarrow{CA} + \frac{AP}{AB}\overrightarrow{AB} = \vec{0}.$$

Vì $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ nên theo VD 2.8, đẳng thức trên tương đương với $\frac{BM}{BC} = \frac{CN}{CA} = \frac{AP}{AB} \Leftrightarrow \frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB}$ (tính chất của dãy tỉ số bằng nhau).

Ví dụ 2.10. Cho tam giác ABC, M là một điểm trong tam giác. H, I, K lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng M là trọng tâm ΔABC khi và chỉ khi

$$a^2\overrightarrow{MH} + b^2\overrightarrow{MI} + c^2\overrightarrow{MK} = \vec{0}.$$

Giải (h.2-9). Với mọi tam giác ABC và điểm M trong tam giác ta có

$$\begin{cases} S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0} \text{ (VD 1.21)} & (1) \\ \dfrac{a}{MH}\overrightarrow{MH} + \dfrac{b}{MI}\overrightarrow{MI} + \dfrac{c}{MK}\overrightarrow{MK} = \vec{0} \text{ (hệ quả của VD 1.20)} & (2) \end{cases}$$

Do đó : M là trọng tâm ΔABC

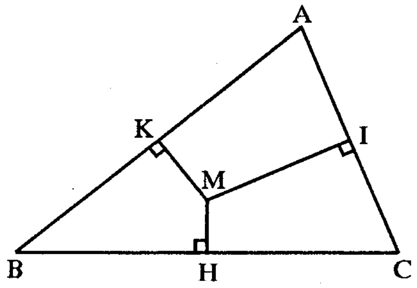
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow S_a = S_b = S_c$ (theo (1) và VD 2.8)

$\Leftrightarrow a.MH = b.MI = c.MK$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{\dfrac{a}{MH}} = \frac{b^2}{\dfrac{b}{MI}} = \frac{c^2}{\dfrac{c}{MK}}$$

$\Leftrightarrow a^2\overrightarrow{MH} + b^2\overrightarrow{MI} + c^2\overrightarrow{MK} = \vec{0}$ (theo (2) và VD 2.8).



Hình 2-9

Ví dụ 2.11. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng điểm M *nằm trong* tam giác khi và chỉ khi tồn tại duy nhất bộ ba số (α, β, γ) sao cho

$$\begin{cases} \alpha, \beta, \gamma > 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}. \end{cases} \quad (*)$$

Giải. Giả sử M nằm trong tam giác ABC, ta có

$$S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0} \text{ (VD 1.21).}$$

Đặt $\alpha = \dfrac{S_a}{S}$, $\beta = \dfrac{S_b}{S}$, $\gamma = \dfrac{S_c}{S}$, ta có α, β, γ thoả mãn (*).

Giả sử có các số α', β', γ' cũng thoả mãn (*). Ta có $\alpha'\overrightarrow{MA} + \beta'\overrightarrow{MB} + \gamma'\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Vì $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ đôi một không cùng phương nên

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha' + \beta' + \gamma'} = 1$$

$\Rightarrow \alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$. Tính duy nhất được chứng minh.

– Bây giờ giả sử tồn tại α, β, γ thoả mãn (*). Ta phải chứng minh điểm M nằm trong tam giác ABC.

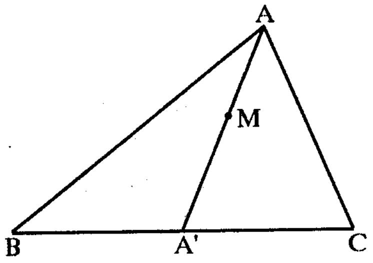
Lấy A' thoả mãn $\beta\overrightarrow{A'B} + \gamma\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$.

Vì $\beta > 0, \gamma > 0$ nên A' thuộc đoạn BC (h.2-10).

Khi đó $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$

$= \alpha\overrightarrow{MA} + (\beta + \gamma)\overrightarrow{MA'}$

$= \alpha\overrightarrow{MA} + (1 - \alpha)\overrightarrow{MA'} = \vec{0}$.



Hình 2-10

Vì $\alpha > 0$, $1 - \alpha > 0$ nên M thuộc đoạn AA'.

Vậy M nằm trong tam giác ABC.

Nhận xét. Bằng cách biểu diễn $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}$, kết hợp với nhận xét cuối ở VD 1.21, ta rút ra kết luận quan trọng sau đây :

Cho ΔABC và điểm O. Với mỗi điểm M trong mặt phẳng, tồn tại duy nhất bộ ba số (α, β, γ) sao cho :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}. \end{cases}$$

Ví dụ 2.12. Cho hình bình hành ABCD. X, Y, Z, T theo thứ tự thuộc các đường thẳng AB, BC, CD, DA. Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác BXY, CYZ, DZT, ATX. Chứng minh rằng $O_1O_2O_3O_4$ là hình bình hành.

Giải (h.2-11)

Gọi f, g là các phép chiếu vectơ vuông góc lên AB, AD. Ta sẽ chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{O_1O_4}$ và $\overrightarrow{O_2O_3}$ có hình chiếu qua hai phép chiếu f và g là bằng nhau. Thật vậy,

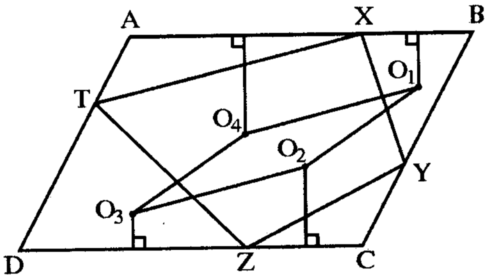
* $f\left(\overrightarrow{O_1O_4}\right) = f\left(\overrightarrow{O_2O_3}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ (đúng).

* $g\left(\overrightarrow{O_1O_4}\right) = g\left(\overrightarrow{O_2O_3}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g\left(\overrightarrow{O_1O_4} - \overrightarrow{O_2O_3}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow g\left(\overrightarrow{O_3O_4} - \overrightarrow{O_2O_1}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow g\left(\overrightarrow{O_3O_4}\right) = g\left(\overrightarrow{O_2O_1}\right)$



Hình 2-11

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ (đúng).

Vậy có $\overrightarrow{O_1O_4} = \overrightarrow{O_2O_3}$, tức $O_1O_2O_3O_4$ là hình bình hành.

Ví dụ 2.13. Cho tam giác ABC, M là điểm bất kì trong tam giác. AM, BM, CM lần lượt cắt BC, CA, AB tại A', B', C'. Chứng minh rằng M là trọng tâm tam giác ABC khi và chỉ khi M là trọng tâm tam giác A'B'C'.

Giải (h.2-12)

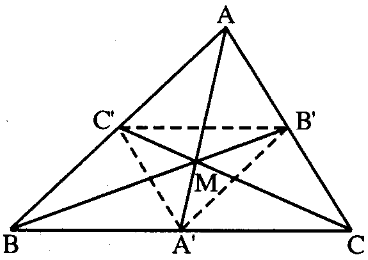
M nằm trong tam giác ABC nên $\exists\ \alpha, \beta, \gamma \neq 0$ sao cho

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}. \qquad (1)$$

Xét phép chiếu vectơ phương (BC) lên đường thẳng AA'.

Ta có $\alpha\overrightarrow{MA} + (\beta + \gamma)\overrightarrow{MA'} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA'} = -\frac{\alpha}{\beta + \gamma}\overrightarrow{MA}.$



Hình 2-12

Tương tự như vậy

$$\begin{cases} \overrightarrow{MB'} = -\frac{\beta}{\gamma + \alpha}\overrightarrow{MB} \\ \overrightarrow{MC'} = -\frac{\gamma}{\alpha + \beta}\overrightarrow{MC}. \end{cases}$$

Vậy : M là trọng tâm tam giác A'B'C' khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta + \gamma}\overrightarrow{MA} + \frac{\beta}{\gamma + \alpha}\overrightarrow{MB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta}\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\frac{\alpha}{\beta + \gamma}} = \dfrac{\beta}{\frac{\beta}{\gamma + \alpha}} = \dfrac{\gamma}{\frac{\gamma}{\alpha + \beta}}$ (kết hợp (1) và VD 2.8)

$\Leftrightarrow \beta + \gamma = \gamma + \alpha = \alpha + \beta$

$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma$

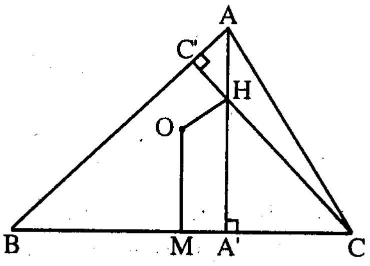
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ (vì $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}$)

$\Leftrightarrow$ M là trọng tâm ΔABC.

Ví dụ 2.14. Cho tam giác ABC ; O, H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Giải. Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của A, B, C trên các cạnh đối diện ; M là hình chiếu của O trên BC (h.2-13).



Hình 2-13

Đặt $\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OH}$.

Xét phép chiếu vectơ phương (AA') lên đường thẳng BC. Qua phép chiếu này, các véctơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OH}$ lần lượt biến thành $\overrightarrow{MA'}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA'}$. Khi đó $\vec{v}$ biến thành $\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, suy ra $\vec{v} \,//\, \overrightarrow{AA'}$. (1)

Tương tự, $\vec{v} \,//\, \overrightarrow{CC'}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\vec{v} = \vec{0}$, tức là $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Nhận xét. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Ta đã biết $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$. Theo kết quả vừa chứng minh ta có $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$, dẫn đến kết quả quen thuộc : "*Trong tam giác, trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp nằm trên một đường thẳng*" (Đường thẳng Ơ-le).

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

2.1. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương. Tìm x sao cho :

a) $\vec{u} = \vec{a} + (2x - 1)\vec{b}$ và $\vec{v} = x\vec{a} + \vec{b}$ cùng phương.

b) $\vec{u} = 3\vec{a} + x\vec{b}$ và $\vec{v} = (1 - x)\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$ cùng hướng.

2.2. Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lấy lần lượt các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{C_1A}{C_1B} = k > 0$. Trên các cạnh B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 lấy lần lượt các điểm A_2, B_2, C_2 sao cho $\frac{A_2B_1}{A_2C_1} = \frac{B_2C_1}{B_2A_1} = \frac{C_2A_1}{C_2B_1} = \frac{1}{k}$.

Chứng minh rằng tam giác $A_2B_2C_2$ có các cạnh tương ứng song song với các cạnh của tam giác ABC.

2.3. Cho tam giác ABC, điểm M nằm trên cạnh BC. Đường thẳng Δ cắt AB, AC, AM lần lượt tại B', C', M'. Chứng minh rằng :

$$BC.\frac{AM}{AM'} = MC.\frac{AB}{AB'} + MB.\frac{AC}{AC'}.$$

2.4. Cho góc xOy và hai số dương a, b. Các điểm A, B thay đổi lần lượt trên Ox, Oy sao cho aOA + bOB = 1. Chứng minh rằng trung điểm I của AB thuộc một đường thẳng cố định.

2.5*. Cho tam giác ABC, M là điểm nằm trong tam giác. H, I, K lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng M là trọng tâm ΔHIK khi và chỉ khi $a^2\overrightarrow{MA} + b^2\overrightarrow{MB} + c^2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

2.6. Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác, A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng I thuộc miền tam giác $A_1B_1C_1$ và

$$\frac{S_{IB_1C_1}}{b+c-a} = \frac{S_{IC_1A_1}}{c+a-b} = \frac{S_{IA_1B_1}}{a+b-c}.$$

2.7. Cho hai tam giác ABC, $A_1B_1C_1$. Đoạn B_1C_1 cắt các đoạn AB, AC tại M, N. Đoạn C_1A_1 cắt các đoạn BC, BA tại P, Q. Đoạn A_1B_1 cắt các đoạn CA, CB tại R, S. Chứng minh rằng

$$\frac{BC}{PS} = \frac{CA}{RN} = \frac{AB}{MQ} \Leftrightarrow \frac{B_1C_1}{NM} = \frac{C_1A_1}{QP} = \frac{A_1B_1}{SR}.$$

2.8. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). X, Y, Z, T lần lượt là trực tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng AX, BY, CZ, DT đồng quy tại trung điểm của mỗi đoạn.

2.9*. Cho tam giác ABC, các điểm M, N, P thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng : AM, BN, CP đồng quy tại tâm tỉ cự của hệ điểm {A, B, C} ứng với các hệ số {α, β, γ} khi và chỉ chi

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma \neq 0 \\ \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \gamma\overrightarrow{NC} + \alpha\overrightarrow{NA} = \alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} = \vec{0}. \end{cases}$$

2.10. Cho tam giác ABC không đều. Các đường tròn bàng tiếp góc A, B, C tương ứng tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại M, N, P. Chứng minh rằng AM, BN, CP đồng quy tại một điểm trên đường thẳng nối tâm đường tròn nội tiếp và trọng tâm ΔABC.

2.11*. Cho ΔABC, vẽ các trung tuyến AM, BN, CP và các phân giác AD, BE, CF. Các điểm X, Y, Z thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho $\widehat{MAD} = \widehat{XAD}$, $\widehat{NBE} = \widehat{YBE}$, $\widehat{PCF} = \widehat{ZCF}$. Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy.

2.12*. Cho tam giác ABC ; M là điểm bất kì ; H, I, K theo thứ tự là hình chiếu của M trên các đường thẳng BC, CA, AB. Tìm vị trí của M sao cho $MH^2 + MI^2 + MK^2$ nhỏ nhất.

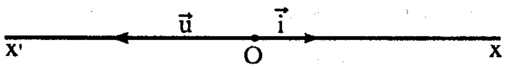
§3. TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ TRÊN TRỤC VÀ TRÊN MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I – TOẠ ĐỘ TRÊN TRỤC

1. Trục

Một đường thẳng được gọi là *trục (toạ độ)* nếu trên đó đã chọn một điểm O và một vectơ $\vec{i}$ có độ dài bằng 1. Điểm O gọi là *gốc* của trục, $\vec{i}$ được gọi là *vectơ đơn vị* của trục, hướng của $\vec{i}$ được gọi là hướng của trục. Khi viết trục x'Ox có nghĩa là $\vec{i}$ có hướng x'x (h.3-1).



Hình 3-1

2. Toạ độ của vectơ trên trục

– Cho vectơ $\vec{u}$ nằm trên trục x'Ox. Vì $\vec{u} // \vec{i}$ nên tồn tại duy nhất số x sao cho $\vec{u} = x.\vec{i}$, x được gọi là toạ độ của vectơ $\vec{u}$. Kí hiệu $\vec{u} = (x)$ hoặc đơn giản $\vec{u}(x)$ để chỉ vectơ $\vec{u}$ có toạ độ x.

– Với mỗi vectơ $\vec{u}$, tồn tại duy nhất số x sao cho $\vec{u} = (x)$. Ngược lại, với mỗi số x tồn tại duy nhất vectơ $\vec{u}$ sao cho $\vec{u} = (x)$.

– Cho $\vec{u} = (x), \vec{u'} = (x')$, khi đó

- $\vec{u} = \vec{u'} \Leftrightarrow x = x'$.
- $\alpha\vec{u} + \beta\vec{u'} = (\alpha x + \beta x')\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

– Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được gọi là *độ dài đại số* của vectơ $\overrightarrow{AB}$, kí hiệu là $\overline{AB}$. Như vậy

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB}.\vec{i}.$$

– Các hệ thức cơ bản :

- $\overline{AB} = -\overline{BA}$;
- $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$;
- $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ (hệ thức Sa-lơ).

3. Toạ độ của điểm trên trục

Cho điểm M trên trục x'Ox. Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ cũng được gọi là toạ độ của điểm M, kí hiệu M(x) hoặc M = (x) chỉ điểm M có toạ độ x. Đôi khi để cho thuận tiện, người ta còn dùng kí hiệu x_M để biểu thị toạ độ của M. Rõ ràng $M = (x_M) \Leftrightarrow x_M = \overline{OM}$.

– Độ dài đại số của một vectơ trên trục bằng toạ độ của điểm ngọn trừ toạ độ của điểm gốc :

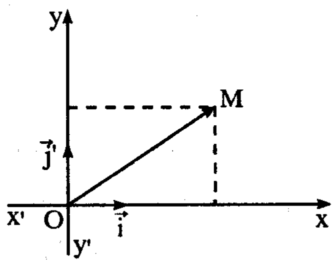
$$\overline{AB} = x_B - x_A.$$

II – TOẠ ĐỘ TRÊN MẶT PHẲNG

1. Hệ trục toạ độ Đề-các

– Cho hai trục x'Ox, y'Oy vuông góc với nhau tại gốc chung O. Hệ hai trục xác định như trên gọi là *hệ trục toạ độ Oxy* (hệ trục tọa độ Đề-các vuông góc). x'Ox là trục hoành, y'Oy là trục tung, O là gốc của hệ trục (gốc toạ độ).

– Mặt phẳng có gắn hệ trục toạ độ như trên gọi là *mặt phẳng toạ độ* (h.3-2).



Hình 3-2

2. Toạ độ của vectơ

– Cho mặt phẳng toạ độ Oxy với các vectơ đơn vị của trục hoành và trục tung lần lượt là $\vec{i}, \vec{j}$. Vì $\vec{i}$ và $\vec{j}$ không cùng phương nên với mỗi vectơ $\vec{u}$ trên mặt phẳng toạ độ, tồn tại duy nhất cặp số (x ; y) sao cho $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Cặp số (x ; y) được gọi là *toạ độ của vectơ* $\vec{u}$ (x là hoành độ, y là tung độ), kí hiệu $\vec{u}$ = (x ; y) hoặc $\vec{u}$(x ; y) để chỉ vectơ $\vec{u}$ có toạ độ (x ; y).

– Với mỗi vectơ $\vec{u}$, tồn tại duy nhất cặp số (x ; y) sao cho $\vec{u} = (x ; y)$. Ngược lại, mỗi cặp số (x ; y) xác định duy nhất một vectơ $\vec{u}$ sao cho $\vec{u} = (x ; y)$.

– Cho $\vec{u} = (x ; y)$, $\vec{u'} = (x' ; y')$. Ta có :

• $\vec{u} = \vec{u'} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y'. \end{cases}$

• $\alpha\vec{u} + \beta\vec{u'} = (\alpha x + \beta x' ; \alpha y + \beta y')\ \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3. Toạ độ của điểm

– Cho điểm M trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là *toạ độ của điểm* M.

Để biểu thị M có toạ độ (x ; y), ta viết M = (x ; y) hoặc đơn giản là M(x ; y). Như trên, ta cũng dùng kí hiệu x_M, y_M để chỉ hoành độ và tung độ của điểm M. Với quy ước đó, ta viết $M(x_M ; y_M)$. Rõ ràng :

$$M = (x ; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x ; y).$$

– Cho hai điểm A, B trên mặt phẳng toạ độ, ta có

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A ; y_B - y_A).$$

– Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm $I(x_0 ; y_0)$. Lập hệ trục IXY sao cho các tia IX, IY tương ứng cùng hướng với các tia Ox, Oy. Khi đó, điểm M có toạ độ (X ; Y) đối với hệ trục IXY khi và chỉ khi M có toạ độ $(x_0 + X ; y_0 + Y)$ đối với hệ trục Oxy. Các hệ thức $\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{cases}$ gọi là *công thức đổi toạ độ* (xem VD 3.4).

B. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 3.1. Trên trục x'Ox cho ba điểm A, B, M (A ≠ B) và số $k \neq 1$.

a) Chứng minh rằng : $\overline{MA} = k\overline{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$.

b) Trong điều kiện a), chứng minh rằng :

$$x_M = \frac{x_A - kx_B}{1 - k}.$$

Giải. a) Gọi $\vec{i}$ là vectơ đơn vị của trục x'Ox. Ta có

$\overline{MA} = k\overline{MB} \Leftrightarrow \overline{MA}.\vec{i} = (k.\overline{MB})\vec{i} \Leftrightarrow \overline{MA}.\vec{i} = k(\overline{MB}.\vec{i}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$.

b) $\overline{MA} = k\overline{MB} \Rightarrow x_A - x_M = k(x_B - x_M)$

$\Rightarrow (1-k)x_M = x_A - kx_B$

$\Rightarrow x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k}$ (vì $A \neq B$ nên $k \neq 1$).

Khi $k = -1$ thì M là trung điểm của AB. Lúc đó

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}.$$

Hệ quả. Trên trục x'Ox cho hai điểm A, B ($A \neq B$). Với mỗi số $k \neq 1$, tồn tại duy nhất điểm M sao cho $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$ (Ta nói M chia đoạn AB theo tỉ số k).

Ví dụ 3.2. Trên trục x'Ox với vectơ đơn vị $\vec{i}$, cho hai điểm A, B. Chứng minh rằng

a) $\overline{AB} = AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \vec{i}$;

b) $\overline{AB} = -AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \vec{i}$.

Giải. Ta có $AB = |\overrightarrow{AB}| = |\overline{AB}.\vec{i}| = |\overline{AB}||\vec{i}| = |\overline{AB}|$.

Vậy : a) $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \vec{i} \Leftrightarrow \overline{AB}\,\vec{i} \uparrow\uparrow \vec{i} \Leftrightarrow \overline{AB} > 0 \Leftrightarrow \overline{AB} = AB$;

b) $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \vec{i} \Leftrightarrow \overline{AB}\,\vec{i} \uparrow\downarrow \vec{i} \Leftrightarrow \overline{AB} < 0 \Leftrightarrow \overline{AB} = -AB$.

Ví dụ 3.3. Trên trục x'Ox cho hai điểm A(–1) ; B(3). Tìm toạ độ điểm M biết rằng $2\overline{MA} + 3\overline{MB} = 17$.

Giải. Từ $2\overline{MA} + 3\overline{MB} = 17 \Rightarrow 2(x_A - x_M) + 3(x_B - x_M) = 17$

$\Rightarrow 2(-1 - x_M) + 3(3 - x_M) = 17 \Rightarrow 5x_M = -10 \Rightarrow x_M = -2$.

Ví dụ 3.4. Trên trục x'Ox lấy điểm $I(x_0)$; M là một điểm trên đường thẳng x'x. Giả sử M có toạ độ x đối với trục x'Ox và có toạ độ X đối với trục x'Ix. Chứng minh rằng

$$x = x_0 + X.$$

Giải. Ta có $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} \Rightarrow x\vec{i} = x_0\vec{i} + X\vec{i} = (x_0 + X)\vec{i} \Rightarrow x = x_0 + X$.

Chú ý. Toạ độ của điểm trên trục phụ thuộc vào việc chọn gốc của trục. Tuy nhiên, dễ thấy rằng toạ độ của vectơ và do đó độ dài đại số của vectơ trên trục không phụ thuộc vào việc chọn gốc của trục.

Ví dụ 3.5. Trên trục x'Ox cho bốn điểm M, A, B, C. Chứng minh rằng

a) $\overline{MA}.\overline{BC} + \overline{MB}.\overline{CA} + \overline{MC}.\overline{AB} = 0$ (hệ thức Ơ-le) ;

b) $\overline{MA}^2.\overline{BC} + \overline{MB}^2.\overline{CA} + \overline{MC}^2.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB} = 0$ (hệ thức Sti-oa).

Giải. a) *Cách 1.* Giả sử M = (m), A = (a), B = (b), C = (c).

Ta có $\overline{MA}.\overline{BC} = (a-m)(c-b) = ac - ab - mc + mb,$

$\overline{MB}.\overline{CA} = (b-m)(a-c) = ba - bc - ma + mc,$

$\overline{MC}.\overline{AB} = (c-m)(b-a) = bc - ac - mb + ma.$

Cộng từng vế của các đẳng thức trên ta được

$$\overline{MA}.\overline{BC} + \overline{MB}.\overline{CA} + \overline{MC}.\overline{AB} = 0.$$

Cách 2. $\overline{MA}.\overline{BC} + \overline{MB}.\overline{CA} + \overline{MC}.\overline{AB} =$

$= \overline{MA}(\overline{MC} - \overline{MB}) + \overline{MB}(\overline{MA} - \overline{MC}) + \overline{MC}(\overline{MB} - \overline{MA})$

$= \overline{MA}.\overline{MC} - \overline{MA}.\overline{MB} + \overline{MB}.\overline{MA} - \overline{MB}.\overline{MC} + \overline{MC}.\overline{MB} - \overline{MC}.\overline{MA}$

$= 0.$

b) Ta có

$\overline{MA}^2.\overline{BC} + \overline{MB}^2.\overline{CA} + \overline{MC}^2.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB}$

$$= \overline{MA}^2(\overline{MC} - \overline{MB}) + \overline{MB}^2(\overline{MA} - \overline{MC}) + \overline{MC}^2(\overline{MB} - \overline{MA}) + \\ +(\overline{MC} - \overline{MB})(\overline{MA} - \overline{MC})(\overline{MB} - \overline{MA})$$

$$= \overline{MA}^2.\overline{MC} - \overline{MA}^2.\overline{MB} + \overline{MB}^2.\overline{MA} - \overline{MB}^2.\overline{MC} + \overline{MC}^2.\overline{MB} - \overline{MC}^2.\overline{MA} - \\ -\overline{MC}.\overline{MA}^2 + \overline{MB}.\overline{MA}^2 - \overline{MA}.\overline{MB}^2 + \overline{MC}.\overline{MB}^2 - \overline{MC}^2.\overline{MB} + \overline{MC}^2.\overline{MA} + \\ +\overline{MC}.\overline{MA}.\overline{MB} - \overline{MB}.\overline{MC}.\overline{MA} = 0.$$

Ví dụ 3.6. Trên đường thẳng Δ cho hai điểm phân biệt A, B. Với mỗi số k cho trước, chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm $H \in \Delta$ sao cho $HA^2 - HB^2 = k$.

Giải

Cách 1. Chọn trên Δ điểm O và vectơ đơn vị. Như vậy Δ trở thành một trục. Gọi I là trung điểm của AB, ta có

$HA^2 - HB^2 = k \Leftrightarrow (\overline{HA} - \overline{HB})(\overline{HA} + \overline{HB}) = k \Leftrightarrow \overline{BA}(\overline{HI} + \overline{IA} + \overline{HI} + \overline{IB}) = k$

$\Leftrightarrow \overline{BA}.2\overline{HI} = k \Leftrightarrow \overline{IH} = \dfrac{k}{2\overline{AB}}.$

Đẳng thức cuối chứng tỏ điểm H tồn tại và duy nhất.

Cách 2. Ta coi Δ là một trục với gốc và vectơ đơn vị đã chọn. Giả sử A = (a), B = (b), H = (x), ta có

$HA^2 - HB^2 = k \Leftrightarrow (a - x)^2 - (b - x)^2 = k \Leftrightarrow 2(b - a)x = k + (b^2 - a^2)$.

Vì $A \neq B$ nên $a \neq b$, do đó phương trình luôn có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{k + \left(b^2 - a^2\right)}{2(b - a)}.$$

Điều đó chứng minh sự tồn tại và duy nhất của điểm H.

Chú ý. Trong nhiều bài toán hình học, đôi khi đường thẳng được coi là một trục với gốc và vectơ đơn vị đã chọn. Về sau, nếu không có gì nhầm lẫn ta không phải nói đến cụm từ "*Ta coi đường thẳng Δ là một trục*".

Ví dụ 3.7. Cho đường thẳng Δ và hai điểm phân biệt A, B trên Δ. Tìm tập hợp các điểm M trên mặt phẳng sao cho

$$MA^2 - MB^2 = k \ (k \in \mathbb{R}).$$

Giải. (h.3-3)

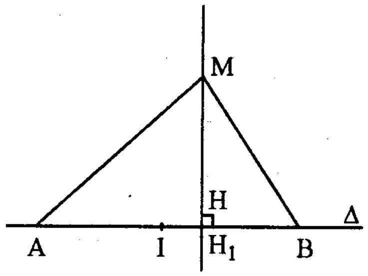
Lấy trên Δ điểm H sao cho $HA^2 - HB^2 = k$ (xem VD 3.6). Với mỗi điểm M trên mặt phẳng, gọi H_1 là hình chiếu của M trên Δ. Ta có :

$MA^2 - MB^2 = k$

$\Leftrightarrow (H_1A^2 + H_1M^2) - (H_1B^2 + H_1M^2) = k$

$\Leftrightarrow H_1A^2 - H_1B^2 = k$

$\Leftrightarrow H_1 \equiv H.$



Hình 3-3

Vậy tập các điểm M là đường thẳng vuông góc với Δ tại H. Điểm H được xác định bởi :

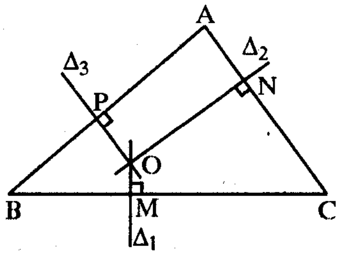
$$\overline{IH} = \frac{k}{2\overline{AB}} \text{ (I là trung điểm AB).}$$

Hệ quả. $M_1M_2 \perp AB \Leftrightarrow M_1A^2 - M_1B^2 = M_2A^2 - M_2B^2$.

Ví dụ 3.8 (Định lí Các-nô). Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các đường thẳng BC, CA, AB ; Δ_1 là đường thẳng qua M vuông góc với BC, Δ_2 là đường thẳng qua N vuông góc với CA, Δ_3 là đường thẳng qua P vuông góc với AB. Chứng minh rằng : $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ đồng quy khi và chỉ khi

$$\left(MB^2 - MC^2\right) + \left(NC^2 - NA^2\right) + \left(PA^2 - PB^2\right) = 0.$$

Giải. (h.3-4)



Hình 3-4

Gọi O là giao điểm của Δ_1 và Δ_2. Ta thấy :

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ đồng quy $\Leftrightarrow$ $PO \equiv \Delta_3$

$\Leftrightarrow PO \perp AB$

$\Leftrightarrow PA^2 - PB^2 = OA^2 - OB^2$

$\Leftrightarrow (OB^2 - OA^2) + (PA^2 - PB^2) = 0$

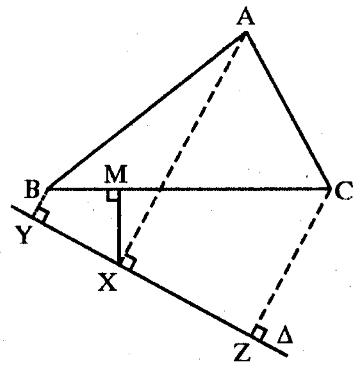
$\Leftrightarrow (OB^2 - OC^2) + (OC^2 - OA^2) + (PA^2 - PB^2) = 0$

$\Leftrightarrow (MB^2 - MC^2) + (NC^2 - NA^2) + (PA^2 - PB^2) = 0$ (theo VD 3.7) (đpcm).

Ví dụ 3.9. Cho tam giác ABC, Δ là đường thẳng bất kì.

Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu của A, B, C trên Δ, còn $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ là các đường thẳng lần lượt qua X, Y, Z tương ứng vuông góc với BC, CA, AB. Chứng minh rằng $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ đồng quy.

Giải. (h.3-5)



Hình 3-5

Đặt $M = \Delta_1 \cap BC$; $N = \Delta_2 \cap CA$; $P = \Delta_3 \cap AB$.

Ta có

$(MB^2 - MC^2) + (NC^2 - NA^2) + (PA^2 - PB^2)$

$= (XB^2 - XC^2) + (YC^2 - YA^2) + (ZA^2 - ZB^2)$

$= (ZA^2 - YA^2) + (XB^2 - ZB^2) + (YC^2 - XC^2)$

$= (ZX^2 - YX^2) + (XY^2 - ZY^2) + (YZ^2 - XZ^2)$

$= 0.$

Vậy $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ đồng quy, theo định lí Các-nô (VD 3.8).

Ví dụ 3.10. Trên trục số cho bốn điểm A, B, C, D ; I là trung điểm của AB, K là trung điểm của CD. Chứng minh rằng các điều kiện sau là tương đương :

a) $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$; (1)

b) $\dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}}$ (Hệ thức Đề-các) ;

c) $\overline{IA}^2 = \overline{IC}.\overline{ID}$ (Hệ thức Niu-tơn) ;

d) $\overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AB}.\overline{AK}$ (Hệ thức Mác-lô-ranh).

Giải. Chọn một điểm O bất kì trên trục làm gốc. Đặt $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$, $\overline{OD} = d$. Khi đó

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \Leftrightarrow \frac{a-c}{b-c} = -\frac{a-d}{b-d} \Leftrightarrow 2(ab+cd) = (a+b)(c+d). \qquad (2)$$

– Chọn $O \equiv A$ $(a = 0)$, ta có $(2) \Leftrightarrow 2cd = bc + bd \Leftrightarrow \frac{2}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \Leftrightarrow \frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}$.

Vậy a) $\Leftrightarrow$ b).

– Chọn $O \equiv I$, ta có $a = -b$ và do đó

$(2) \Leftrightarrow a^2 = cd \Leftrightarrow \overline{IA}^2 = \overline{IC}.\overline{ID}$.

Vậy a) $\Leftrightarrow$ c).

– Lại có $\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AB} \cdot \frac{\overline{AC} + \overline{AD}}{2} \Leftrightarrow \overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AB}.\overline{AK}$ (xem VD 3.1).

Vậy b) $\Leftrightarrow$ d).

Chú ý. Bốn điểm A, B, C, D trên trục và thoả mãn một trong các điều kiện trên được gọi là *hàng điểm điều hoà* (theo thứ tự đó). Để chỉ A, B, C, D là hàng điểm điều hoà, người ta dùng kí hiệu $(ABCD) = -1$. Rõ ràng nếu $(ABCD) = -1$ thì cũng có $(CDAB) = (BACD) = (BADC) = (ABDC) = -1$ (suy từ hệ thức (2), để ý vai trò bình đẳng của a và b ; c và d).

Ví dụ 3.11. Trên đường thẳng Δ cho bốn điểm A, C, B, D theo thứ tự đó. S là một điểm không thuộc Δ. Một đường thẳng song song với SA theo thứ tự cắt các tia SB, SC, SD tại Y, X, Z. Chứng minh rằng

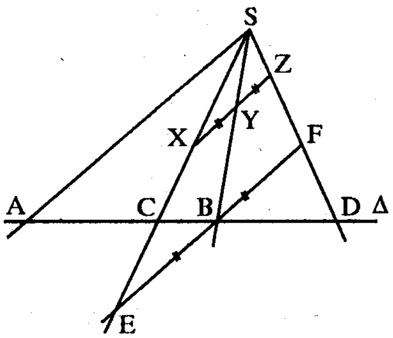
$$(ABCD) = -1 \Leftrightarrow YX = YZ.$$

Giải. (h.3-6)

Qua B vẽ đường thẳng song song với SA, cắt SC và SD lần lượt tại E, F. Theo định lí Ta-lét ta có

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{BE}} \qquad (1)$$

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{BF}} \qquad (2)$$



Hình 3-6

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{YX}}{\overline{YZ}} \qquad (3)$$

Do đó :

$$(ABCD) = -1 \Leftrightarrow \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AS}}{\overline{BE}} = -\frac{\overline{AS}}{\overline{BF}} \Leftrightarrow \frac{\overline{BE}}{\overline{BF}} = -1 \Leftrightarrow \frac{\overline{YX}}{\overline{YZ}} = -1$$

$$\Leftrightarrow YX = YZ.$$

Chú ý. Trong chứng minh trên ta coi $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{BE}}$, tức là ta đã coi các vectơ đơn vị của hai trục AS, EB là cùng hướng. Sự định hướng như vậy là theo thói quen thông thường đối với các đường thẳng song song.

Nhưng nếu ta cho hai vectơ đơn vị của các trục AS, EB ngược hướng thì $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{EB}}, \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{FB}}$, song kết quả vẫn không có gì thay đổi.

Tuy nhiên, dù định hướng thế nào đi nữa thì trên một trục, nếu M nằm trong đoạn AB thì $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{MA}{MB} < 0$, M nằm ngoài đoạn AB thì $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{MA}{MB} > 0$.

Hệ quả. Cho bốn đường thẳng a, b, c, d đồng quy. Đường thẳng Δ cắt a, b, c, d theo thứ tự tại A, B, C, D. Đường thẳng Δ' cắt a, b, c, d theo thứ tự tại A', B', C', D'. Chứng minh rằng

$$(ABCD) = -1 \Leftrightarrow (A'B'C'D') = -1.$$

Ví dụ 3.12 (Định lí Mê-nê-la-uyt). Cho tam giác ABC. Ba điểm M, N, P theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1. \qquad (1)$$

Giải. (h.3-7)

Giả sử M, N, P thẳng hàng. Qua C kẻ đường thẳng song song với AB, cắt đường thẳng qua M, N, P tại D. Áp dụng định lí Ta-lét, ta có

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1.$$

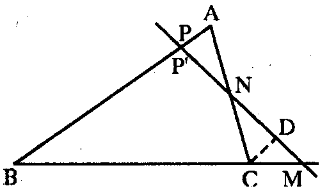
Ngược lại, giả sử có hệ thức (1). Gọi P' là giao điểm của các đường thẳng MN và AB. Vì M, N, P' thẳng hàng nên theo chứng minh trên :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{P'A}}{\overline{P'B}} = 1. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) rút ra

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{P'A}}{\overline{P'B}} \Rightarrow P \equiv P'.$$

Vậy M, N, P thẳng hàng.



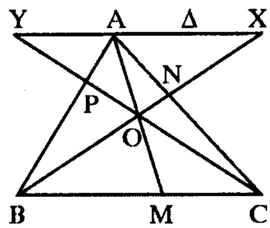
Hình 3-7

Ví dụ 3.13 (Định lí Xê-va). Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng các đường thẳng AM, BN, CP đồng quy hoặc song song khi và chỉ khi

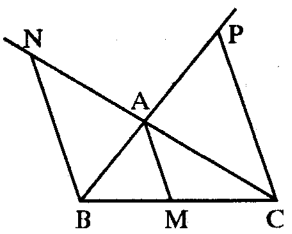
$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1. \qquad (1)$$

Giải (h.3-8). a) Giả sử AM, BN, CP đồng quy tại O. Vẽ qua A đường thẳng Δ song song với BC, đặt $X = BN \cap \Delta$, $Y = CP \cap \Delta$. Theo định lí Ta-lét ta có

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{AY}}\cdot\frac{\overline{CB}}{\overline{AX}}\cdot\frac{\overline{AY}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{BC}} = -1.$$



Hình 3-8



Hình 3-9

Giả sử ba đường thẳng AM, BN, CP song song (h.3-9). Ta có

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{BC}}{\overline{BM}}.\frac{\overline{CM}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{BM}}.\frac{\overline{BC}}{\overline{CB}}.\frac{\overline{CM}}{\overline{MC}} = -1.$$

b) Ngược lại, giả sử ba điểm M, N, P tương ứng trên các đường thẳng BC, CA, AB thoả mãn hệ thức (1).

– Nếu hai trong ba đường AM, BN, CP cắt nhau, chẳng hạn AM và BN cắt nhau tại O. Đặt $P' = OC \cap AB$ (bạn đọc tự chứng minh sự tồn tại của điểm P'). Theo phần thuận ta có

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{P'A}}{\overline{P'B}} = -1. \qquad (2)$$

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{YX}}{\overline{YZ}} \qquad (3)$$

Do đó :

$$(ABCD) = -1 \Leftrightarrow \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AS}}{\overline{BE}} = -\frac{\overline{AS}}{\overline{BF}} \Leftrightarrow \frac{\overline{BE}}{\overline{BF}} = -1 \Leftrightarrow \frac{\overline{YX}}{\overline{YZ}} = -1$$

$$\Leftrightarrow YX = YZ.$$

Chú ý. Trong chứng minh trên ta coi $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{BE}}$, tức là ta đã coi các vectơ đơn vị của hai trục AS, EB là cùng hướng. Sự định hướng như vậy là theo thói quen thông thường đối với các đường thẳng song song.

Nhưng nếu ta cho hai vectơ đơn vị của các trục AS, EB ngược hướng thì $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{EB}}, \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{FB}}$, song kết quả vẫn không có gì thay đổi.

Tuy nhiên, dù định hướng thế nào đi nữa thì trên một trục, nếu M nằm trong đoạn AB thì $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{MA}{MB} < 0$, M nằm ngoài đoạn AB thì $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{MA}{MB} > 0$.

Hệ quả. Cho bốn đường thẳng a, b, c, d đồng quy. Đường thẳng Δ cắt a, b, c, d theo thứ tự tại A, B, C, D. Đường thẳng Δ' cắt a, b, c, d theo thứ tự tại A', B', C', D'. Chứng minh rằng

$$(ABCD) = -1 \Leftrightarrow (A'B'C'D') = -1.$$

Ví dụ 3.12 (Định lí Mê-nê-la-uyt). Cho tam giác ABC. Ba điểm M, N, P theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1. \qquad (1)$$

Giải. (h.3-7)

Giả sử M, N, P thẳng hàng. Qua C kẻ đường thẳng song song với AB, cắt đường thẳng qua M, N, P tại D. Áp dụng định lí Ta-lét, ta có

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} . \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} . \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{DC}} . \frac{\overline{DC}}{\overline{PA}} . \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1.$$

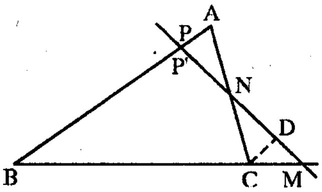
Ngược lại, giả sử có hệ thức (1). Gọi P' là giao điểm của các đường thẳng MN và AB. Vì M, N, P' thẳng hàng nên theo chứng minh trên :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{P'A}}{\overline{P'B}} = 1. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) rút ra

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{P'A}}{\overline{P'B}} \Rightarrow P \equiv P'.$$

Vậy M, N, P thẳng hàng.



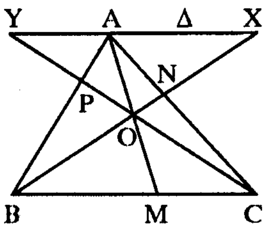
Hình 3-7

Ví dụ 3.13 (Định lí Xê-va). Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng các đường thẳng AM, BN, CP đồng quy hoặc song song khi và chỉ khi

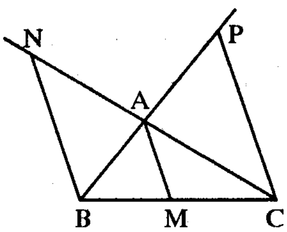
$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1. \qquad (1)$$

Giải (h.3-8). a) Giả sử AM, BN, CP đồng quy tại O. Vẽ qua A đường thẳng Δ song song với BC, đặt $X = BN \cap \Delta$, $Y = CP \cap \Delta$. Theo định lí Ta-lét ta có

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{AY}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{AX}} \cdot \frac{\overline{AY}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{BC}} = -1.$$



Hình 3-8



Hình 3-9

Giả sử ba đường thẳng AM, BN, CP song song (h.3-9). Ta có

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{BC}}{\overline{BM}}.\frac{\overline{CM}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{BM}}.\frac{\overline{BC}}{\overline{CB}}.\frac{\overline{CM}}{\overline{MC}} = -1.$$

b) Ngược lại, giả sử ba điểm M, N, P tương ứng trên các đường thẳng BC, CA, AB thoả mãn hệ thức (1).

– Nếu hai trong ba đường AM, BN, CP cắt nhau, chẳng hạn AM và BN cắt nhau tại O. Đặt $P' = OC \cap AB$ (bạn đọc tự chứng minh sự tồn tại của điểm P'). Theo phần thuận ta có

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{P'A}}{\overline{P'B}} = -1. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) rút ra $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \dfrac{\overline{P'A}}{\overline{P'B}} \Rightarrow P' \equiv P \Rightarrow$ AM, BN, CP đồng quy tại O.

– Nếu không có hai đường nào trong ba đường AM, BN, CP cắt nhau thì hiển nhiên cả ba đường thẳng song song với nhau.

Ví dụ 3.14. Cho tam giác ABC, M là điểm trong tam giác. AM, BM, CM lần lượt cắt BC, CA, AB tại X, Y, Z (X không là trung điểm của BC). Lấy điểm T trên đường thẳng BC. Chứng minh rằng (BCXT) = –1 khi và chỉ khi Z, Y, T thẳng hàng.

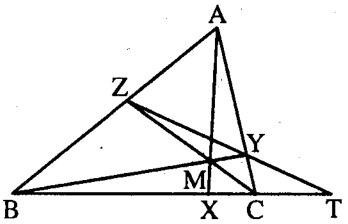
Giải (h.3-10). Giả sử (BCXT) = –1.

Theo định lí Xê-va ta có

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}\cdot\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = -1$$

$$\Rightarrow -\frac{\overline{TB}}{\overline{TC}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}\cdot\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{TB}}{\overline{TC}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}\cdot\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = 1.$$



Hình 3-10

Theo định lí Mê-nê-la-uyt ta có Z, Y, T thẳng hàng.

– Ngược lại, giả sử Z, Y, T thẳng hàng. Lấy T' trên đường thẳng BC sao cho (BCXT') = –1. Theo chứng minh trên thì Z, Y, T' thẳng hàng ⇒ T ≡ T'. Vậy (BCXT) = –1.

Ví dụ 3.15. Cho tam giác ABC, điểm O nằm trong tam giác. Các đường thẳng AO, BO, CO lần lượt cắt các cạnh BC, CA, AB tại M, N, P. Đường thẳng qua O, song song với BC lần lượt cắt MN, MP tại E, F. Chứng minh rằng OE = OF.

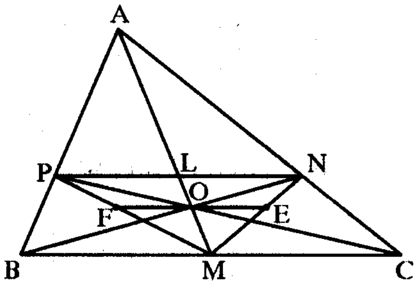
Giải. Trường hợp 1 : NP // BC (h.3-11). Theo định lí Xê-va ta có

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1. \qquad (1)$$

Vì NP // BC nên theo định lí Ta-lét ta có

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}} \Rightarrow \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -1 \Rightarrow \dfrac{\overline{LP}}{\overline{LN}} = -1$



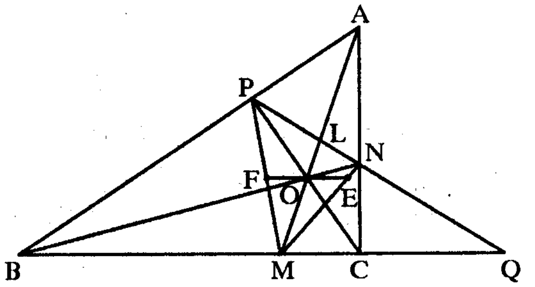
Hình 3-11

$\Rightarrow \dfrac{\overline{OF}}{\overline{OE}} = -1 \Rightarrow OE = OF.$

(ở đây L = AO ∩ PN)

Trường hợp 2 : NP và BC không song song (h.3-12)

Đặt Q = (NP) ∩ (BC). Theo VD 3.1 ta có (BCMQ) = –1, suy ra (NPLQ) = –1 (theo hệ quả VD 3.11). Từ đó ta có OE = OF (VD 3.11).



Hình 3-12

Ví dụ 3.16. Cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn (O). Các tiếp tuyến của (O) tại A, B, C lần lượt cắt các đường thẳng BC, CA, AB tại M, N, P. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Giải (h.3-13)

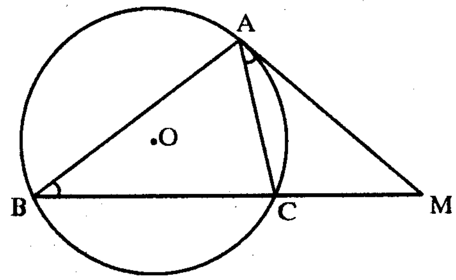
Ta có $\widehat{MBA} = \widehat{MAC}\left(=\frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AC}\right)$

$\Rightarrow \Delta MBA \backsim \Delta MAC$

$\Rightarrow \dfrac{MB}{MA} = \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{BA}{AC}$

$\Rightarrow \dfrac{MB}{MA}\cdot\dfrac{MA}{MC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$

$\Rightarrow \dfrac{MB}{MC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2.$



Hình 3-13

Vì M luôn nằm ngoài đoạn BC nên ta có :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{MB}{MC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

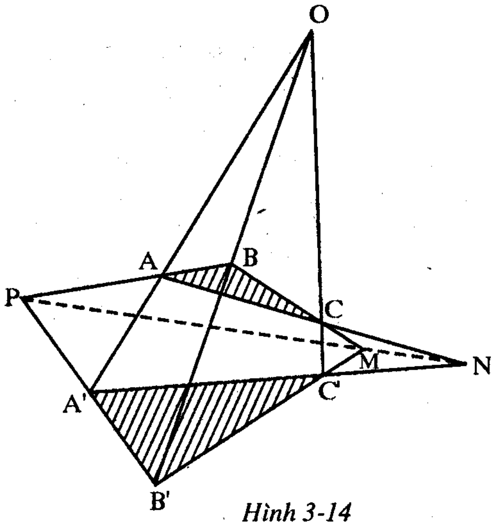
Tương tự như vậy, ta có : $\dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \left(\dfrac{BC}{BA}\right)^2$; $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \left(\dfrac{CA}{CB}\right)^2$.

Vậy, $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\cdot\dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\cdot\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1 \Rightarrow$ M, N, P thẳng hàng (định lí Mê-nê-la-uyt).

Ví dụ 3.17. Trên các tia Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các cặp điểm (A, A') ; (B, B') ; (C, C'). Đặt $M = BC \cap B'C'$; $N = CA \cap C'A'$; $P = AB \cap A'B'$.

Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng (định lí Đờ-dác).

Giải (h.3-14). Áp dụng định lí Mê-nê-la-uyt cho các tam giác OBC, OCA, OAB với sự thẳng hàng của các bộ ba điểm tương ứng (M, C', B'), (N, C', A'), (P, A', B'), ta có :



Hình 3-14

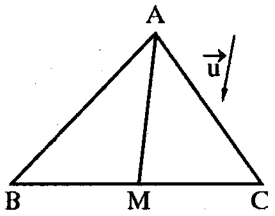
$$\begin{cases} \dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\cdot\dfrac{\overline{C'C}}{\overline{C'O}}\cdot\dfrac{\overline{B'O}}{\overline{B'B}} = 1 \\ \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\cdot\dfrac{\overline{A'A}}{\overline{A'O}}\cdot\dfrac{\overline{C'O}}{\overline{C'C}} = 1 \\ \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\cdot\dfrac{\overline{B'B}}{\overline{B'O}}\cdot\dfrac{\overline{A'O}}{\overline{A'A}} = 1. \end{cases}$$

Nhân từng vế các đẳng thức trên với nhau ta được

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1.$$

Cũng theo định lí Mê-nê-la-uyt đối với tam giác ABC, ta có M, N, P thẳng hàng.

Ví dụ 3.18. Cho hình bình hành ABCD. Các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh BC, DC ; I, J, K theo thứ tự là trung điểm của AM, AN, MN. Chứng minh rằng BI, DJ, CK đồng quy.



Hình 3-15

Giải

• Trước hết ta chứng minh bổ đề sau

Bổ đề (h.3-15). Cho tam giác ABC, M thuộc đường thẳng BC ; $\vec{u} // \overrightarrow{AM}$, $\vec{u} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$. Khi đó ta có $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Chứng minh. Vì $\vec{u} // \overrightarrow{AM}$ nên $\vec{u} = k\overrightarrow{AM}$ $(k \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow k\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}.$$

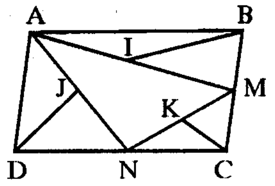
Xét phép chiếu phương (AM) lên đường thẳng BC, ta có

$$\vec{0} = \alpha\overrightarrow{MB} + \beta\overrightarrow{MC} \Rightarrow \alpha\overline{MB} + \beta\overline{MC} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ (đpcm).}$$

Nhận xét. Bổ đề này rất có ý nghĩa, nó cho phép ta tính $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$ mà không cần vẽ điểm M.

• Bây giờ ta chứng minh bài toán (h.3-16)



Hình 3-16

Giả sử $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DN} = l\overrightarrow{DC}$. Đặt $X = BI \cap DC$,

$Y = DJ \cap BC, Z = CK \cap BD$.

Ta có : $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}) + \frac{k}{2}\overrightarrow{BC}$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{k-1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Theo bổ đề ta có $\frac{\overline{XD}}{\overline{XC}} = -(k-1) = 1-k.$ (1)

Tương tự : $\frac{\overline{YC}}{\overline{YB}} = -\frac{1}{l-1} = \frac{1}{1-l}.$ (2)

Lại có $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}(1-k).\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}(1-l).\overrightarrow{CD} \Rightarrow \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZD}} = \frac{l-1}{1-k}.$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$\frac{\overline{XD}}{\overline{XC}}.\frac{\overline{YC}}{\overline{YB}}.\frac{\overline{ZB}}{\overline{ZD}} = (1-k).\frac{1}{1-l}.\frac{l-1}{1-k} = -1.$$

Áp dụng định lí Xê-va cho ΔBCD ta có BI, DJ, CK đồng quy.

Ví dụ 3.19. Trên mặt phẳng toạ độ cho hai điểm A, B. M là điểm chia đoạn AB theo tỉ số cho trước $k \neq 1$ (tức là $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$).

Tính toạ độ của M theo toạ độ của A, B.

Giải. Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ $(k \neq 1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A - x_M = kx_B - kx_M \\ y_A - y_M = ky_B - ky_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-k)x_M = x_A - kx_B \\ (1-k)y_M = y_A - ky_B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k}. \end{cases}$$

Nhận xét. 1) Có thể dùng cách biểu diễn $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1-k}$

(O là gốc toạ độ, xem VD 1.10).

2) Với $k = -1$ thì M là trung điểm của đoạn AB. Khi đó toạ độ của M là

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \quad \text{hay} \quad M = \left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Ví dụ 3.20. Trên mặt phẳng toạ độ cho các điểm $A(0 ; 2)$; $B(1 ; 1)$; $C(-1 ; -2)$. Các điểm A', B', C' lần lượt chia các đoạn BC, CA, AB theo các tỉ số -1 ; $\dfrac{1}{2}$; -2.

a) Tìm toạ độ các điểm A', B', C'.

b) Chứng minh ba điểm A', B', C' thẳng hàng.

Giải (h.3-17)

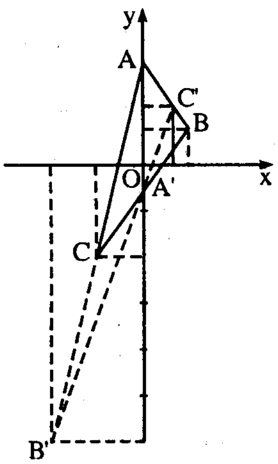
a) • $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -1 \Rightarrow$ A' là trung điểm đoạn BC.

Có ngay $A' = \left(\dfrac{x_B + x_C}{2} ; \dfrac{y_B + y_C}{2}\right) \Rightarrow A' = \left(0 ; -\dfrac{1}{2}\right)$.

• $\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \dfrac{1}{2}$, áp dụng công thức ở VD 3.19 ta có

$$\begin{cases} x_{B'} = \dfrac{x_C - \frac{1}{2}x_A}{1 - \frac{1}{2}} = -2 \\ y_{B'} = \dfrac{y_C - \frac{1}{2}y_A}{1 - \frac{1}{2}} = -6. \end{cases}$$

Vậy $B' = (-2 ; -6)$.



Hình 3-17

• Tương tự tính được $C' = \left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

b) Ta có $\overrightarrow{A'B'} = \left(-2; -\frac{11}{2}\right)$; $\overrightarrow{A'C'} = \left(\frac{2}{3}; \frac{11}{6}\right)$.

Rõ ràng $\overrightarrow{A'B'} = -3\overrightarrow{A'C'}$ nên A', B', C' thẳng hàng.

Nhận xét. Có thể áp dụng định lí Mê-nê-la-uyt suy ra ngay ba điểm A', B', C' thẳng hàng, vì :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = (-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2) = 1.$$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

3.1. Cho tam giác ABC ; điểm M thuộc đường thẳng BC. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overline{MC}}{\overline{BC}}\overrightarrow{AB} - \frac{\overline{MB}}{\overline{BC}}\overrightarrow{AC}.$$

3.2*. Chứng minh rằng với các điểm M, N, A, B, C cùng nằm trên một đường thẳng, ta có :

$$\frac{\overline{AM}.\overline{AN}}{\overline{AB}.\overline{AC}} + \frac{\overline{BM}.\overline{BN}}{\overline{BC}.\overline{BA}} + \frac{\overline{CM}.\overline{CN}}{\overline{CA}.\overline{CB}} = 1.$$

3.3. Chứng minh hệ thức Sti-oa mở rộng :

$$MA^2.\overline{BC} + MB^2.\overline{CA} + MC^2.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB} = 0$$

với ba điểm A, B, C thẳng hàng, M là điểm bất kì trên mặt phẳng.

3.4*. Cho tam giác ABC. Dựng các tam giác BCA_1, CAB_1, ABC_1 cân tại A_1, B_1, C_1. Gọi X, Y, Z theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. Δ_x, Δ_y, Δ_z là các đường thẳng lần lượt qua X, Y, Z tương ứng vuông góc với B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Chứng minh rằng Δ_x, Δ_y, Δ_z đồng quy.

3.5. Cho tam giác ABC. Vẽ phân giác trong AD, phân giác ngoài AE (D, E thuộc đường thẳng BC). Chứng minh rằng (BCDE) = –1.

3.6. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại A', B', C'. Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng A'I và B'C'. Chứng minh rằng (AM) là trung tuyến của tam giác ABC.

3.7*. Cho tứ giác ABCD ; $E = AB \cap CD$, $F = AD \cap BC$; I, J, K lần lượt là trung điểm của AC, BD, EF. Chứng minh rằng I, J, K thẳng hàng (đường thẳng Gau-xơ).

3.8*. Cho tam giác ABC và các đường tròn (O_1) tiếp xúc với các tia AB, AC ; (O_2) tiếp xúc với các tia BC, BA ; (O_3) tiếp xúc với các tia CA, CB. Đường tròn (O_4) tiếp xúc ngoài với (O_1), (O_2), (O_3) lần lượt tại X, Y, Z. Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy.

3.9. Cho tam giác ABC ; điểm O nằm trong tam giác. Các đường thẳng AO, BO, CO lần lượt cắt BC, CA, AB tại A', B', C'. Lấy điểm O' nằm trong tam giác A'B'C'. Các đường thẳng AO', BO', CO' lần lượt cắt B'C', C'A', A'B' tại A'', B'', C''. Chứng minh rằng A'A'', B'B'', C'C'' đồng quy.

3.10. Cho hình bình hành ABCD. Các điểm X, Y, Z, T theo thứ tự thuộc các cạnh DA, AB, BC, CD sao cho

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BY}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{CZ}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DT}}{\overline{DC}} = k.$$

Δ_1, Δ_2, Δ_3 là các đường thẳng theo thứ tự qua A, B, C tương ứng song song với XT, YT, ZT. Chứng minh rằng Δ_1, Δ_2, Δ_3 đồng quy.

3.11. Cho tam giác ABC, điểm O nằm trong tam giác. Đường thẳng qua O song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại C_2, B_1. Đường thẳng qua O song song với CA cắt BC, BA lần lượt tại A_2, C_1. Đường thẳng qua O song song với AB cắt CA, CB lần lượt tại B_2, A_1. Vẽ các hình bình hành $OA_1A_3A_2$, $OB_1B_3B_2$, $OC_1C_3C_2$. Chứng minh rằng AA_3, BB_3, CC_3 đồng quy.

3.12. Cho các điểm A(−1 ; 1), B(1 ; 3), C(−2 ; 0).

a) Chứng minh rằng A, B, C thẳng hàng.

b) Tìm toạ độ điểm D sao cho (ABCD) = −1.

3.13. Trong mặt phẳng toạ độ cho tam giác ABC ; M, N, P lần lượt chia các đoạn BC, CA, AB theo các tỉ số $-\frac{1}{3}$; -1 ; $\frac{1}{3}$. Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác ABC, biết M = (3 ; 0), N = (2 ; 4), P = (−4 ; 8).

Chương II

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

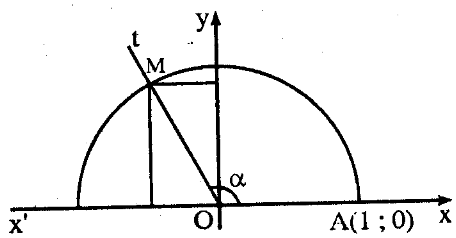
§4. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC α ($0^o \leq \alpha \leq 180^o$)

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I – CÁC ĐỊNH NGHĨA

1. Biểu diễn góc

– Trong hệ toạ độ Oxy, nửa đường tròn tâm O bán kính bằng 1, thuộc nửa mặt phẳng bờ x'x chứa Oy được gọi là nửa đường tròn đơn vị (h.4-1).



Hình 4-1

– Với mỗi góc α ($0^o \leq \alpha \leq 180^o$), vẽ tia Ot sao cho $\widehat{xOt} = \alpha$.

Góc xOt gọi là sự biểu diễn của góc α trên mặt phẳng toạ độ.

2. Các giá trị lượng giác của góc α ($0^o \leq \alpha \leq 180^o$)

– Cho góc α có biểu diễn trên mặt phẳng toạ độ là $\widehat{xOt}$. Giả sử Ot cắt nửa đường tròn đơn vị tại M(x ; y). Ta định nghĩa :

$$\begin{cases} \sin\alpha = y \\ \cos\alpha = x, \end{cases} \qquad \begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \ (\alpha \neq 90^o) \\ \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \ (\alpha \neq 0^o ; \alpha \neq 180^o). \end{cases}$$

– Trường hợp α là góc nhọn ($0^o < \alpha < 90^o$), định nghĩa trên đây trùng với định nghĩa các tỉ số lượng giác của góc nhọn ở lớp 9.

Hệ quả. Với $0^o \leq \alpha \leq 180^o$ ta có

- $\begin{cases} 0 \leq \sin\alpha \leq 1 \\ -1 \leq \cos\alpha \leq 1. \end{cases}$
- $\cos\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha$ nhọn ; $\cos\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha$ tù.

II – GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC

1. Bảng giá trị lượng giác của những góc đặc biệt

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\|$	0
$\cot\alpha$	$\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\|$

(kí hiệu $\|$ chỉ sự không xác định).

2. Sự biến thiên của các giá trị lượng giác

α	0°		90°		180°
$\sin\alpha$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$\cos\alpha$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
$\tan\alpha$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0
$\cot\alpha$	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|$

III – CÁC HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC

1. Các hệ thức cơ bản

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

$\tan\alpha.\cot\alpha = 1 (\alpha \neq 0^\circ; 90^\circ; 180^\circ)$;

$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} (\alpha \neq 90^\circ)$;

$$1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad (\alpha \neq 0^o; 180^o).$$

2. Giá trị lượng giác của hai góc phụ nhau

$$\begin{cases} \sin(90^o - \alpha) = \cos\alpha \ \ (0^o \leq \alpha \leq 90^o) \\ \cos(90^o - \alpha) = \sin\alpha \ \ (0^o \leq \alpha \leq 90^o) \\ \tan(90^o - \alpha) = \cot\alpha \ \ (0^o < \alpha \leq 90^o) \\ \cot(90^o - \alpha) = \tan\alpha \ \ (0^o \leq \alpha < 90^o). \end{cases}$$

3. Giá trị lượng giác của hai góc bù nhau

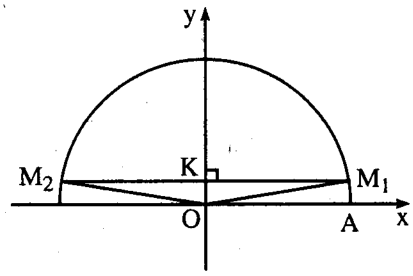
$$\begin{cases} \sin(180^o - \alpha) = \sin\alpha \\ \cos(180^o - \alpha) = -\cos\alpha \\ \tan(180^o - \alpha) = -\tan\alpha \qquad (\alpha \neq 90^o) \\ \cot(180^o - \alpha) = -\cot\alpha \qquad (\alpha \neq 0^o\ ;\ 180^o) \end{cases}$$

B - CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 4.1. Dựng điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{MOx} = \alpha$, biết

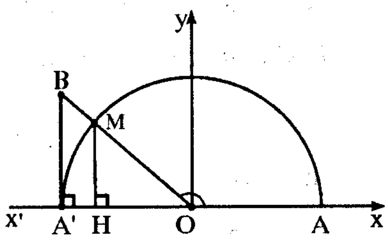
a) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$; b) $\tan\alpha = -\frac{3}{4}$.

Giải. a) (h.4-2). Lấy trên Oy điểm K sao cho $\overline{OK} = \frac{1}{4}$. Qua K, vẽ đường thẳng vuông góc với Oy cắt nửa đường tròn đơn vị tại M_1 và M_2. Ta có $\left[\begin{array}{l} \alpha = \widehat{AOM_1} \\ \alpha = \widehat{AOM_2}. \end{array}\right.$



Hình 4-2

b) (h.4-3). Vì $\tan\alpha < 0$ nên góc α tù. Trong góc $\widehat{x'Oy}$ lấy điểm B sao cho $BA' \perp x'x$ và $BA' = \frac{3}{4}$. Nối OB cắt nửa đường tròn đơn vị tại M, ta có $\widehat{AOM} = \alpha$ vì $\tan\widehat{AOM} = -\tan\widehat{A'OM} = -\frac{BA'}{OA'} = -\frac{3}{4}$.



Hình 4-3

Ví dụ 4.2. Biết $\tan\alpha = 2$. Tính giá trị của biểu thức

$$A = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha.$$

Giải. Ta có $\dfrac{A}{\cos^2\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 2.\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha} - 3$

$\Rightarrow A(1 + \tan^2\alpha) = \tan^2\alpha + 2\tan\alpha - 3$

$\Rightarrow A = \dfrac{\tan^2\alpha + 2\tan\alpha - 3}{1 + \tan^2\alpha}$

$\Rightarrow A = 1.$

Ví dụ 4.3. Không dùng bảng số, hãy tính các tổng sau đây :

a) $S_1 = \sin^2 22^o + \sin^2 68^o + \sin^2 31^o + \sin^2 59^o$.

b) $S_2 = \sin^2 54^o + \sin^2 36^o - 3\sin^2 126^o + \cos^3 126^o + \cos^3 54^o - 3\cos^2 54^o$.

Giải

a) $S_1 = (\sin^2 22^o + \cos^2 22^o) + (\sin^2 31^o + \cos^2 31^o) = 1 + 1 = 2.$

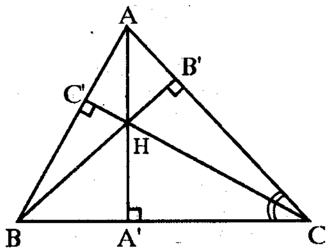
b) $S_2 = (\sin^2 54^o + \cos^2 54^o) - 3(\sin^2 126^o + \cos^2 126^o) + (\cos^3 126^o - \cos^3 126^o)$

$= 1 - 3 + 0 = -2.$

Ví dụ 4.4. Cho tam giác ABC nhọn, trực tâm H. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{S_{HBC}}{\tan A} = \dfrac{S_{HCA}}{\tan B} = \dfrac{S_{HAB}}{\tan C}$;

b) $(\tan A)\overrightarrow{HA} + (\tan B)\overrightarrow{HB} + (\tan C)\overrightarrow{HC} = \vec{0}.$



Hình 4-4

Giải (h.4-4). a) Ta có

$$\frac{S_{HBC}}{S_{HCA}} = \frac{BC'}{AC'} = \frac{\dfrac{CC'}{AC'}}{\dfrac{CC'}{BC'}} = \frac{\tan A}{\tan B}$$

$\Rightarrow \dfrac{S_{HBC}}{\tan A} = \dfrac{S_{HCA}}{\tan B}.$

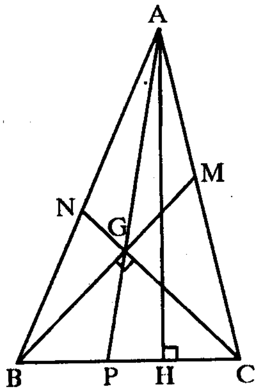
Tương tự ta có $\dfrac{S_{HBC}}{\tan A} = \dfrac{S_{HCA}}{\tan B} = \dfrac{S_{HAB}}{\tan C}.$

b) Theo VD 1.21 ta có $S_{HBC}\overrightarrow{HA} + S_{HCA}\overrightarrow{HB} + S_{HAB}\overrightarrow{HC} = \vec{0}.$

Kết hợp với a), suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 4.5. Cho tam giác nhọn ABC có các trung tuyến BM, CN vuông góc với nhau. Chứng minh rằng

$$\cot B + \cot C \geq \frac{2}{3}.$$



Hình 4-5

Giải (h.4-5). Vẽ đường cao AH (H thuộc đoạn BC).

Khi đó $\cot B + \cot C = \dfrac{BH}{AH} + \dfrac{CH}{AH}$

$$= \frac{BC}{AH} \geq \frac{BC}{AP} = \frac{2GP}{3GP} = \frac{2}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow AH = AP$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại A.

Ví dụ 4.6. Tam giác ABC có các góc thoả mãn

$$\begin{cases} \tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2} \leq 2\tan\dfrac{C}{2} & (1) \\ \cot\dfrac{A}{2} + \cot\dfrac{B}{2} \leq 2\cot\dfrac{C}{2}. & (2) \end{cases}$$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Giải. Nhân từng vế các bất đẳng thức (1) và (2) (lưu ý các vế đều dương), ta có

$$2 + \tan\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\cot\frac{A}{2} \leq 4$$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\cot\frac{A}{2} \leq 2. \qquad (3)$$

Lại có

$$\tan\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\cot\frac{A}{2} \geq 2\sqrt{\tan\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\tan\frac{B}{2}\cot\frac{A}{2}} = 2. \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $\tan\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{A}{2} = 2$

$$\Rightarrow \tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} = 2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\tan\frac{A}{2} - \tan\frac{B}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \tan\frac{A}{2} = \tan\frac{B}{2} \Rightarrow \frac{A}{2} = \frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow A = B. \qquad (5)$$

Thế (5) vào (1) và (2) ta có

$$\begin{cases} \tan\dfrac{A}{2} \le \tan\dfrac{C}{2} \\ \cot\dfrac{A}{2} \le \cot\dfrac{C}{2}. \end{cases}$$

Vì $\tan\alpha$ đồng biến khi $0^\circ < \alpha < 90^\circ$; $\cot\alpha$ nghịch biến khi $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ nên

$$\begin{cases} \dfrac{A}{2} \le \dfrac{C}{2} \\ \dfrac{A}{2} \ge \dfrac{C}{2} \end{cases} \Rightarrow A = C.$$

Vậy ΔABC đều.

Ví dụ 4.7. Cho ΔABC $(\hat{B} \ge \hat{C})$. Chứng minh rằng

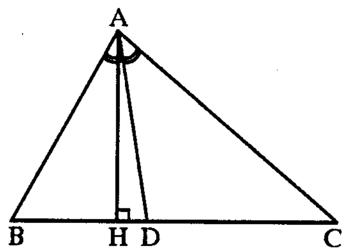
$$\frac{h_a}{l_a} = \cos\frac{B - C}{2}$$

trong đó h_a và l_a là đường cao và phân giác kẻ từ A.

Giải. Ta có $\dfrac{h_a}{l_a} = \dfrac{AH}{AD} = \cos\widehat{HAD}.$

• Trường hợp $B \le 90^\circ$ (h.4-6).

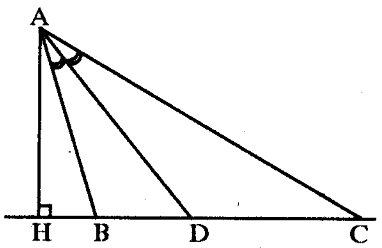
$$\widehat{HAD} = \widehat{BAD} - \widehat{BAH}$$
$$= \frac{A}{2} - (90^\circ - B)$$
$$= \frac{A}{2} - \left(\frac{A + B + C}{2} - B\right)$$
$$= \frac{B - C}{2}.$$



Hình 4-6

• Trường hợp $B > 90^\circ$ (h.4-7).

$$\widehat{HAD} = \widehat{BAD} + \widehat{BAH}$$
$$= \frac{A}{2} + (B - 90^\circ)$$
$$= \frac{A}{2} + \left(B - \frac{A + B + C}{2}\right)$$
$$= \frac{B - C}{2}.$$



Hình 4-7

Tóm lại, trong cả hai trường hợp đều có

$\widehat{HAD} = \frac{B-C}{2}$. Vậy $\frac{h_a}{l_a} = \cos\widehat{HAD} = \cos\frac{B-C}{2}$.

Ví dụ 4.8. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có

$$\cot A + \cot B + \cot C > 0.$$

Giải. – Nếu ΔABC nhọn thì bất đẳng thức cần chứng minh hiển nhiên đúng.

– Xét trường hợp ΔABC không nhọn. Giả sử, chẳng hạn $A \geq 90^o$

$\Rightarrow B + C \leq 90^o \Rightarrow 0^o < B < B + C \leq 90^o \Rightarrow \cot B > \cot(B + C)$

$\Rightarrow \cot B > -\cot A \Rightarrow \cot A + \cot B > 0 \Rightarrow \cot A + \cot B + \cot C > 0.$

Ví dụ 4.9. Cho tam giác ABC tù. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} < \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}.$$

Giải. Giả sử, chẳng hạn góc A tù, ta có $\cos A < 0 \Rightarrow \frac{1}{\cos A} < \frac{1}{\sin\frac{A}{2}}$.

Mặt khác, $A > 90^o \Rightarrow B + C < 90^o \Rightarrow \begin{cases} B < 90^o - C < 90^o - \frac{C}{2} \\ C < 90^o - B < 90^o - \frac{B}{2} \end{cases}$

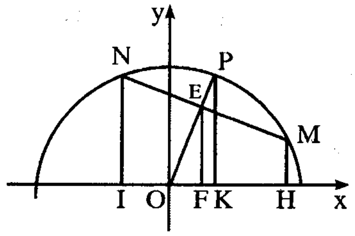
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos B > \cos\left(90^o - \frac{C}{2}\right) = \sin\frac{C}{2} \\ \cos C > \cos\left(90^o - \frac{B}{2}\right) = \sin\frac{B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\cos B} < \frac{1}{\sin\frac{C}{2}} \\ \frac{1}{\cos C} < \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} \end{cases}.$$

Vậy $\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} < \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$.

Ví dụ 4.10. Chứng minh rằng

a) $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{2} \leq \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ $(0^o \leq \alpha, \beta \leq 180^o)$;

b) $\dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{2} \le \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ $(0^o \le \alpha, \beta \le 90^o)$.



Hình 4-8

Giải. a) (h.4-8). Giả sử $\alpha = \widehat{xOM}$, $\beta = \widehat{xON}$.

Lấy P là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{MN}$ thì

$\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \widehat{xOP}$. Lấy E là trung điểm của MN,

hạ MH, NI, PK, EF vuông góc với Ox, ta có

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{2} = \frac{\overline{HM} + \overline{IN}}{2} = \overline{FE} \le \overline{KP} = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \alpha = \beta$.

b) $\dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{2} = \dfrac{\sin(90^o - \alpha) + \sin(90^o - \beta)}{2} \le \sin\dfrac{(90^o - \alpha) + (90^o - \beta)}{2}$

$$= \sin\left(90^o - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \alpha = \beta$.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

4.1. Hãy cho biết $0^o < \alpha < 90^o$ hay $90^o < \alpha < 180^o$ nếu :

a) $\sin\alpha.\cos\alpha < 0$;

b) $\tan\alpha + \cot\alpha > 0$;

c) $\dfrac{\tan\alpha}{\cos\alpha} > 0$?

4.2. Tính giá trị các biểu thức :

$A = \sin^2 1^o + \sin^2 2^o + ... + \sin^2 88^o + \sin^2 89^o + \sin^2 90^o$;

$B = \cos^3 1^o + \cos^3 2^o + ... + \cos^3 179^o + \cos^3 180^o$;

$C = \tan 1^o \tan 2^o ... \tan 88^o \tan 89^o$.

4.3. Biết $\tan\alpha = \sqrt{2} - 1$, tính $\tan^8\alpha + \cot^8\alpha$.

4.4. Biết $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{12}{25}$, tính $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$.

4.5. Tìm góc tù α, biết $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \dfrac{5}{8}$.

4.6. Không dùng bảng số và máy tính, hãy tính

$$\cos 15^{o}, \tan 15^{o}, \sin 105^{o}.$$

4.7*. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có

$$(b-c)\cot\frac{A}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}+(a-b)\cot\frac{C}{2}=0.$$

4.8. Cho tam giác ABC tù. Chứng minh rằng $\tan A\tan B<1$.

4.9. Chứng minh rằng nếu ABC là tam giác nhọn thì

$$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\geq\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}.$$

4.10. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{2}\geq\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ $(0^{o}\leq\alpha,\beta<90^{o})$;

b) $\dfrac{\cot\alpha+\cot\beta}{2}\geq\cot\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ $(0^{o}<\alpha,\beta\leq 90^{o})$.

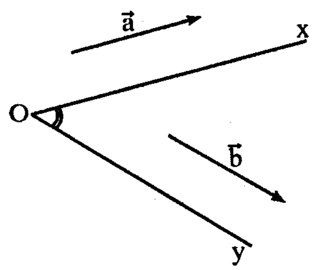
§5. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I – ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT

1. Định nghĩa

– Góc giữa hai vectơ (khác $\vec{0}$) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc giữa hai tia Ox, Oy song song và cùng hướng với hai vectơ ấy, kí hiệu là $(\vec{a},\vec{b})$ (h.5-1).



Hình 5-1

– Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ là một số thực, kí hiệu $\vec{a}.\vec{b}$, xác định như sau :

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b}).$$

2. Hệ quả

- $\vec{a}^2 = \vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^2$.
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$.
- Nếu $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ thì $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$.

3. Tính chất

- $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ (giao hoán).
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ (phân phối đối với phép cộng).
- $(k\vec{a}).\vec{b} = \vec{a}.(k\vec{b}) = k(\vec{a}.\vec{b})$.
- Công thức hình chiếu : $\vec{a}.\vec{b} = \vec{a'}.\vec{b}$ ($\vec{a'}$ là hình chiếu của $\vec{a}$ trên đường thẳng chứa $\vec{b}$).

4. Các hằng đẳng thức

$$(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \pm 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2;$$

$$(\vec{a} + \vec{b}).(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2.$$

II – BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

1. Định lí. Trong mặt phẳng toạ độ, cho $\vec{a} = (x_1 ; y_1)$, $\vec{b} = (x_2 ; y_2)$. Khi đó

$$\vec{a}.\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2.$$

2. Các hệ quả

- Nếu $\vec{a} = (x ; y)$ thì $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Nếu $\vec{a} = (x_1 ; y_1)$, $\vec{b} = (x_2 ; y_2)$ thì

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0;$$

- Nếu $\vec{a} = (x_1 ; y_1)$, $\vec{b} = (x_2 ; y_2)$ và $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ thì

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

B. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 5.1. Chứng minh rằng với bốn điểm bất kì A, B, C, D ta có

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0 \text{ (hệ thức Ơ-le).}$$

Giải. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} =$

$= \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) + \overrightarrow{AD}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$

$= \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}\right)$

$= 0$

Nhận xét. 1) Có thể dùng hệ thức Ơ-le để chứng minh : trong tam giác ba đường cao đồng quy.

Thật vậy, giả sử các đường cao kẻ từ B và C của ΔABC cắt nhau tại H. Áp dụng hệ thức Ơ-le cho bốn điểm H, A, B, C ta có :

$$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0.$$

Do HB $\perp$ CA, HC $\perp$ AB nên $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$, từ đó $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0$, tức HA $\perp$ BC (đpcm).

2) Kết quả vừa chứng minh là sự mở rộng đẳng thức

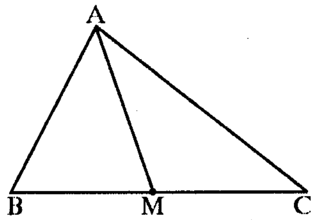
$$\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AC}.\overline{DB} + \overline{AD}.\overline{BC} = 0$$

khi A, B, C, D nằm trên một đường thẳng (xem VD 3.5).

Ví dụ 5.2. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AM^2 - \frac{1}{4}BC^2$;

b) $AM^2 = \dfrac{2\left(AB^2 + AC^2\right) - BC^2}{4}$.



Hình 5-2

Giải. (h.5-2)

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2 - \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)^2}{4}$

$= \dfrac{4AM^2 - BC^2}{4}$

$= AM^2 - \frac{1}{4}BC^2.$

b) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

$$\Rightarrow AM^2 = \frac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[2\left(AB^2 + AC^2\right) - \left(AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2\left(AB^2 + AC^2\right) - \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow AM^2 = \frac{2\left(AB^2 + AC^2\right) - BC^2}{4} \text{ (đpcm).}$$

• Đây chính là công thức tính độ dài trung tuyến của tam giác, sẽ được đề cập nhiều ở phần sau.

Ví dụ 5.3. Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Chứng minh rằng

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \quad \text{(hệ thức Lep-nit).}$$

Giải. Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})^2 = 0$$

$$\Rightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2(\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}) = 0$$

$$\Rightarrow 3(GA^2 + GB^2 + GC^2) - (GA^2 + GB^2 - 2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB})$$
$$- (GB^2 + GC^2 - 2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}) - (GC^2 + GA^2 - 2\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}) = 0$$

$$\Rightarrow 3(GA^2 + GB^2 + GC^2) = \left(\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA}\right)^2$$

$$\Rightarrow 3(GA^2 + GB^2 + GC^2) = AB^2 + BC^2 + CA^2$$

$$\Rightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \text{ (đpcm).}$$

Nhận xét

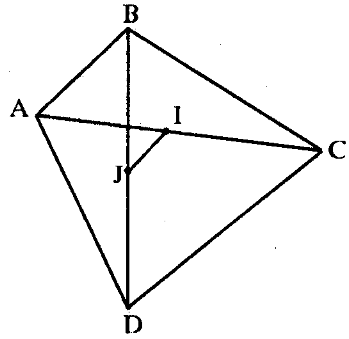
1) Có thể dùng trực tiếp công thức tính độ dài trung tuyến ở VD 5.3 để chứng minh.

2) Kết quả trên còn có thể phát biểu dưới hình thức khác

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Ví dụ 5.4. Cho tứ giác ABCD. Gọi J, J theo thứ tự là trung điểm của AC, BD. Chứng minh rằng

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2.$



Hình 5-3

Giải. (h.5-3)

Ta có $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$

$\Leftrightarrow AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(AD^2 - AC^2\right) - \left(BD^2 - BC^2\right) = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}\right) - \left(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}\right) = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}\right) - \overrightarrow{CD}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}\right) = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}\right) = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}.2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ (đúng).

Ví dụ 5.5. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$; (1)

b) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A.$ (2)

Giải

a) $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2$

$= \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right).$ (1)

b) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= AB^2 + AC^2 - 2\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos A$

$= AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos A.$ (2)

Chú ý. Các công thức (1) và (2) thường xuyên được sử dụng trong khi giải các bài tập khác. Đặc biệt, (2) được gọi là **định lí hàm số côsin**, trong chương sau ta sẽ đề cập nhiều đến định lí này.

Ví dụ 5.6. Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có $MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2$.

Giải. Ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$$

$$= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \text{ (đpcm).}$$

Nhận xét. 1) Điểm có tổng bình phương các khoảng cách từ đó đến các đỉnh của tam giác nhỏ nhất chính là trọng tâm của tam giác.

2) Nếu tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O ; R) thì

$$3(R^2 - OG^2) = GA^2 + GB^2 + GC^2 \text{ (lấy } M \equiv O).$$

Ví dụ 5.7. Cho ΔABC, điểm I thoả mãn

$$\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC} = \vec{0} \; (\alpha + \beta + \gamma \neq 0).$$

Chứng minh rằng với điểm M bất kì ta có

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = \alpha IA^2 + \beta IB^2 + \gamma IC^2 + (\alpha + \beta + \gamma)MI^2.$$

Giải.

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = \alpha\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \beta\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + \gamma\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC}\right) + \alpha IA^2 + \beta IB^2 + \gamma IC^2$$

$$= \alpha IA^2 + \beta IB^2 + \gamma IC^2 + (\alpha + \beta + \gamma)MI^2 \text{ (đpcm).}$$

Nhận xét. 1) Chứng minh hoàn toàn tương tự như trên, ta có kết quả sau (**công thức Gia-cô-bi**) : "Nếu I là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ ứng với các hệ số $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ thì $\forall M$:

$$\alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + ... + \alpha_n MA_n^2 =$$

$$= \alpha_1 IA_1^2 + \alpha_2 IA_2^2 + ... + \alpha_n IA_n^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)MI^2.$$

2) Với $n = 3$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, ta có kết quả ở VD 5.6.

Ví dụ 5.8. Cho đa giác đều n–cạnh nội tiếp đường tròn (O ; R). Chứng minh rằng tổng bình phương các khoảng cách từ một điểm bất kì trên đường tròn (O) đến các đỉnh của đa giác là một đại lượng không đổi.

Giải. Giả sử đa giác đều $A_1A_2... A_n$ nội tiếp đường tròn (O ; R). Với M bất kì thuộc đường tròn ta có

$$MA_1^2 + MA_2^2 + ... + MA_n^2$$
$$= \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_1}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_2}\right)^2 + ... + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_n}\right)^2$$
$$= n\overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n}\right) + \left(\overrightarrow{OA_1}^2 + \overrightarrow{OA_2}^2 + ... + \overrightarrow{OA_n}^2\right)$$
$$= nR^2 + 2\overrightarrow{MO}.\vec{0} + nR^2$$
$$= 2nR^2.$$

Nhận xét. Với M bất kì thuộc đường tròn (O ; r), (r là số thực dương tuỳ ý), ta có

$$MA_1^2 + MA_2^2 + ... + MA_n^2 = n(r^2 + R^2).$$

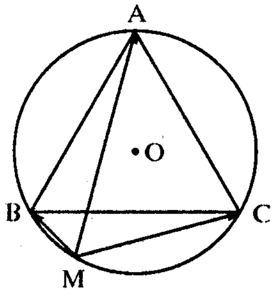
Ví dụ 5.9. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O ; R). M là điểm bất kì trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$. Chứng minh rằng

$$MA = MB + MC.$$

Giải. (h.5-4). Ta có $R^2 = OA^2 = \left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}\right)^2$

$$= R^2 + MA^2 + 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{MA}$$

$$\Rightarrow MA^2 + 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{MA} = 0 \Rightarrow MA + 2\overrightarrow{OM}.\frac{\overrightarrow{MA}}{MA} = 0.$$



Hình 5-4

Tương tự,

$$MB + 2\overrightarrow{OM}.\frac{\overrightarrow{MB}}{MB} = 0 ; MC + 2\overrightarrow{OM}.\frac{\overrightarrow{MC}}{MC} = 0.$$

Suy ra : $- MA + MB + MC + 2\overrightarrow{OM}.\left(-\frac{\overrightarrow{MA}}{MA} + \frac{\overrightarrow{MB}}{MB} + \frac{\overrightarrow{MC}}{MC}\right) = 0.$

Vì $-\frac{\overrightarrow{MA}}{MA}, \frac{\overrightarrow{MB}}{MB}, \frac{\overrightarrow{MC}}{MC}$ là các vectơ đơn vị và đôi một tạo với nhau góc 120^o nên tổng của chúng bằng $\vec{0}$. Do đó $-MA + MB + MC = 0$, tức là $MA = MB + MC$.

Nhận xét. Cách giải trên ngay lập tức cho phép ta giải bài toán tổng quát sau :

Cho đa giác đều $A_1A_2... A_{2n+1}$ nội tiếp đường tròn (O ; R). M là một điểm trên cung nhỏ $\overset{\frown}{A_1A_{2n+1}}$. Chứng minh rằng

$$MA_1 + MA_3 + ... + MA_{2n+1} = MA_2 + MA_4 + ... + MA_{2n}.$$

Ví dụ 5.10. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc.$$

Giải. Cách 1

Ta đã biết

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow (a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC})^2 = 0$$

$$\Rightarrow a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + 2ab\,\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} + 2bc\,\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} + 2ca\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA} = 0$$

$$\Rightarrow a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + ab(IA^2 + IB^2 - AB^2) +$$
$$+ bc(IB^2 + IC^2 - BC^2) + ca(IC^2 + IA^2 - CA^2) = 0$$

$$\Rightarrow (a^2 + ab + ca)IA^2 + (b^2 + ba + bc)IB^2 +$$
$$+ (c^2 + ca + cb)IC^2 - (abc^2 + ab^2c + a^2bc) = 0$$

$$\Rightarrow (a + b + c)(aIA^2 + bIB^2 + cIC^2) = (a + b + c)abc$$

$$\Rightarrow aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc.$$

Cách 2. Gọi H và K là hình chiếu của I trên AB, AC. Từ hệ thức $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, ta có

$$aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = \left(-b\overrightarrow{IB} - c\overrightarrow{IC}\right).\overrightarrow{IA} + bIB^2 + cIC^2$$

$$= b\overrightarrow{IB}\left(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IA}\right) + c\overrightarrow{IC}\left(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}\right)$$

$$= b\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{AB} + c.\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{AC}$$

$= b\overline{HB}.\overline{AB} + c\overline{KC}.\overline{AC}$ (công thức hình chiếu). (1)

Mặt khác, vì $\overrightarrow{HB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{KC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC}$ nên

$\overline{HB}.\overline{AB} = HB.AB = (p - b)c$; $\overline{KC}.\overline{AC} = KC.AC = (p - c)b.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = b(p - b)c + c(p - c)b = (p - b + p - c)\,bc = abc.$$

Nhận xét

1) Bằng phương pháp của cách 1, ta có thể chứng minh được kết quả tổng quát hơn :

Cho tam giác ABC. Điểm I xác định bởi

$$\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC} = \vec{0} \ (\alpha + \beta + \gamma \neq 0).$$

Ta có $\alpha IA^2 + \beta IB^2 + \gamma IC^2 = \dfrac{1}{\alpha + \beta + \gamma}(\alpha\beta c^2 + \beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2).$

2) Kết hợp kết quả trên với kết quả ở VD 5.7 (với $\alpha + \beta + \gamma = 1$), ta có kết quả sau : Với điểm M bất kì,

$$MI^2 = \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 - (\alpha\beta AB^2 + \beta\gamma BC^2 + \gamma\alpha CA^2).$$

3) Hoàn toàn tương tự chứng minh ở trên, ta có kết quả :

Nếu I là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A_1, A_2,..., A_n\}$ với các hệ số $\{\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n\}$ $(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1)$ thì $\forall M$ ta có

$$\begin{aligned} MI^2 = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + ... + \alpha_n MA_n^2 \\ & - (\alpha_1\alpha_2 A_1A_2^2 + \alpha_1\alpha_3 A_1A_3^2 + ... + \alpha_1\alpha_n A_1A_n^2 \\ & + \alpha_2\alpha_3 A_2A_3^2 + \alpha_2\alpha_4 A_2A_4^2 + ... + \alpha_2\alpha_n A_2A_n^2 \\ & + ... \\ & + \alpha_{n-1}\alpha_n A_{n-1}A_n^2). \end{aligned}$$

Đây chính là công thức tính khoảng cách từ điểm M bất kì đến tâm tỉ cự của hệ điểm.

Ví dụ 5.11.

Cho tam giác ABC không cân và đường tròn nội tiếp (I); M là điểm chạy trên (I). Gọi H, K, L lần lượt là hình chiếu của M trên các đường thẳng BC, CA, AB. Tìm vị trí của M sao cho MH + MK + ML lớn nhất, nhỏ nhất.

Giải. (h.5-5)

Giả sử bán kính của (I) là r và (I) tiếp xúc với BC, CA, AB tại X, Y, Z. Gọi T là trọng tâm ΔXYZ. Ta có :

$MH + MK + ML$

$= \frac{1}{r}(MH.IX + MK.IY + ML.IZ)$

$= \frac{1}{r}\left(\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{IX} + \overrightarrow{MK}.\overrightarrow{IY} + \overrightarrow{ML}.\overrightarrow{IZ}\right)$

$= \frac{1}{r}\left(\overrightarrow{MX}.\overrightarrow{IX} + \overrightarrow{MY}.\overrightarrow{IY} + \overrightarrow{MZ}.\overrightarrow{IZ}\right)$

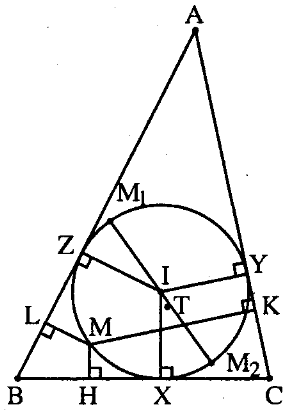
$= \frac{1}{r}\left((\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IX})\overrightarrow{IX} + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IY})\overrightarrow{IY} + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IZ})\overrightarrow{IZ}\right)$

$= \frac{1}{r}\left(\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IX} + \overrightarrow{IY} + \overrightarrow{IZ}) + 3r^2\right)$

$= -\frac{3}{r}\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IT} + 3r.$

Vậy : (MH + MK + ML)max (min)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IT}$ min (max)



Hình 5-5

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IT}$ ngược hướng (cùng hướng)

$\Leftrightarrow$ M trùng M_1 (M trùng M_2).

Trong đó M_1M_2 là đường kính của đường tròn (I) và các tia IM_2, IT cùng hướng ; IM_1, IT ngược hướng.

Ví dụ 5.12. Cho tam giác ABC không đều nội tiếp đường tròn (O ; R). Tìm trên đường tròn điểm có tổng bình phương các khoảng cách từ đó đến các đỉnh của tam giác là lớn nhất, nhỏ nhất.

Giải. (h.5-6)

Cách 1. Với mọi điểm M thuộc đường tròn ta có

$$MA^2+MB^2+MC^2=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)^2$$

$$=6R^2+2\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$$

$$=6R^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OH} \text{ (H là trực tâm } \Delta ABC\text{, xem VD 2.14)}$$

$$=6R^2+2R.OH.\cos\varphi \ (\varphi \text{ là góc giữa } \overrightarrow{MO} \text{ và } \overrightarrow{OH}).$$

Từ đó suy ra

– Tổng $(MA^2 + MB^2 + MC^2)$ lớn nhất khi và chỉ khi $\cos\varphi = 1$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OH}$

$\Leftrightarrow$ M là giao của tia HO với (O).

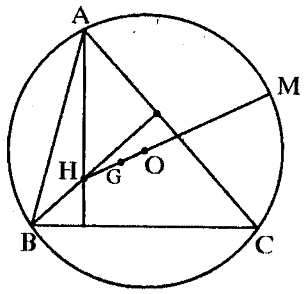
– Tổng $(MA^2 + MB^2 + MC^2)$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow \cos\varphi = -1$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OH}$

$\Leftrightarrow$ M là giao của tia OH với (O)

(lưu ý rằng ΔABC không đều nên O $\not\equiv$ H).



Hình 5-6

Cách 2. $MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2$

(G là trọng tâm ΔABC). Vậy :

– Tổng $(MA^2 + MB^2 + MC^2)$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ MG lớn nhất

$\Leftrightarrow$ M là giao của tia GO với (O).

– Tổng $(MA^2 + MB^2 + MC^2)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MG nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ M là giao của tia OG với (O).

Ví dụ 5.13. Tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). D là trung điểm của AB, E là trọng tâm tam giác ADC. Chứng minh rằng OE $\perp$ CD.

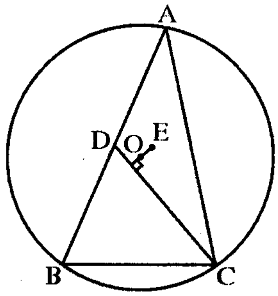
Giải (h.5-7). Ta có

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}\right)$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left[\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) + \overrightarrow{OC}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left(3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}\right).$$



Hình 5-7

Do đó : $2\overrightarrow{CD}.6\overrightarrow{OE} = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}\right)\left(3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}\right)$

$$= 3OA^2 + OB^2 - 4OC^2 + 4\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$$

$$= 4\overrightarrow{OA}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$$

$$= 4\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{CB} = 0.$$

Vậy $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{OE} = 0$, tức là OE $\perp$ CD (đpcm).

Ví dụ 5.14. Cho tam giác đều ABC. Lấy các điểm M, N thoả mãn $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Gọi I là giao điểm của AM và CN. Chứng minh rằng $\widehat{BIC} = 90^o$.

Giải (h.5-8). Gọi a là độ dài cạnh tam giác đều ABC.

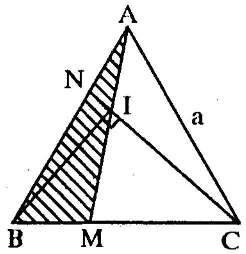
Vì $I \in CN$ nên tồn tại x, y sao cho $x + y = 1$ (1)

và $\overrightarrow{BI} = x\overrightarrow{BN} + y\overrightarrow{BC} = \frac{2x}{3}\overrightarrow{BA} + 3y\overrightarrow{BM}$.

Vì $I \in AM$ nên $\frac{2x}{3} + 3y = 1$. (2)

Từ (1) và (2) dễ dàng suy ra $x = \frac{6}{7}$, $y = \frac{1}{7}$. Vậy

$$\overrightarrow{BI} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{7}\overrightarrow{BC}. \quad (3)$$



Hình 5-8

Mặt khác, $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$. Do đó

$$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CN} = \left(\frac{4}{7}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{7}\overrightarrow{BC}\right)\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\right)$$

$$= \frac{8}{21}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA} + \frac{4}{21}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CB} + \frac{2}{21}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \frac{1}{21}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CB}$$

$$= a^2\left[\frac{8}{21}.\frac{1}{2}+\frac{4}{21}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{21}\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{21}\right]=0.$$

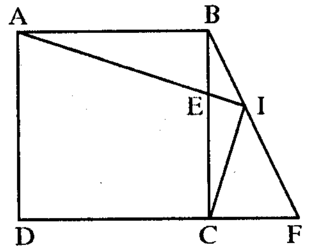
Vậy $BI \perp CN$.

Nhận xét. Có thể áp dụng định lí Mê-nê-la-uyt tính $\frac{IN}{IC}$ rồi biểu diễn $\overrightarrow{BI}$ qua $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{BC}$, sau đó biểu diễn $\overrightarrow{BI}$ qua $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ để được (3).

Ví dụ 5.15. Cho hình vuông ABCD ; E, F là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$, đường thẳng AE cắt BF tại I. Chứng minh rằng $\widehat{AIC}=90^\circ$.

Giải (h.5-9). Ta có

$$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}.$$



Hình 5-9

Lại có $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BF}$

$=\overrightarrow{AB}+k\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}\right)$

$=\overrightarrow{AB}+k\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$

$=\left(1+\frac{k}{2}\right)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AD}.$

Vì $\overrightarrow{AI}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AE}$ nên $\left(1+\frac{k}{2}\right):1=k:\frac{1}{3}\Rightarrow 1+\frac{k}{2}=3k\Rightarrow k=\frac{2}{5}$.

Vậy $\overrightarrow{AI}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}.$

Đồng thời cũng có

$$\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AC}=\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CI}=\left(\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}\right)\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{6}{25}a^2-\frac{6}{25}a^2=0$$

(a là độ dài cạnh hình vuông)

$\Rightarrow AI \perp CI$ (đpcm).

Ví dụ 5.16. Cho tứ giác ABCD, hai đường chéo cắt nhau tại O. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của tam giác AOB và COD ; I, J là trung điểm của AD, BC. Chứng minh rằng $HK \perp IJ$.

Giải (h.5-10)

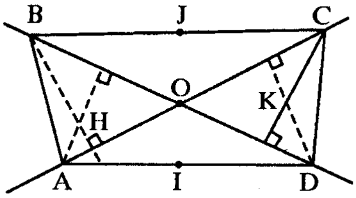
Theo công thức hình chiếu ta có

$2\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{HK} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}\right).\overrightarrow{HK}$

$= \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HK} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC}$

$= 0$

$\Rightarrow$ HK $\perp$ IJ.



Hình 5-10

(Lưu ý rằng $\overrightarrow{HK}$ và $\overrightarrow{AC}$ có cùng hình chiếu trên (BD), $\overrightarrow{HK}$ và $\overrightarrow{BD}$ có cùng hình chiếu trên (AC)).

Ví dụ 5.17. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). B' là điểm đối xứng của B qua O. (I) tiếp xúc với các cạnh BA, BC tại P, Q. Trên BA, BC lấy các điểm K, L sao cho BK = CQ, BL = AP. Chứng minh rằng B'I $\perp$ KL.

Giải (h.5-11). Ta có

$\overrightarrow{IB'}.\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{IB'}.\left(\overrightarrow{BL} - \overrightarrow{BK}\right)$

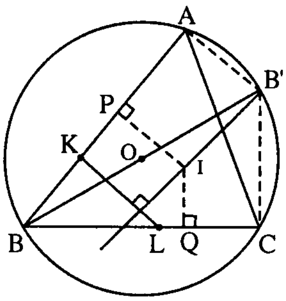
$= \overrightarrow{IB'}.\overrightarrow{BL} - \overrightarrow{IB'}.\overrightarrow{BK}$

$= \overline{QC}.\overline{BL} - \overline{PA}.\overline{BK}$

$= QC.BL - PA.BK$

$= QC.PA - PA.QC = 0.$

Vậy IB' $\perp$ KL (đpcm).



Hình 5-11

Ví dụ 5.18. Cho tam giác ABC. Gọi O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác. Trên các tia BA, CA lấy các điểm E, F sao cho EB = BC = CF. Chứng minh rằng OI $\perp$ EF.

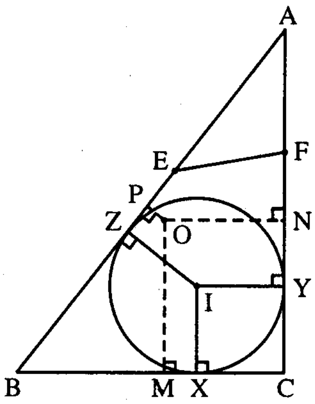
Giải (h.5-12). Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của O trên BC, CA, AB ; X, Y, Z là hình chiếu của I trên BC, CA, AB.

Ta có $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OI}.\left(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}\right)$

$= \overrightarrow{OI}.\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{OI}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OI}.\overrightarrow{CF}$

$= \overline{PZ}.\overline{EB} + \overline{MX}.\overline{BC} + \overline{NY}.\overline{CF}$

$= \left(\overline{BP} - \overline{BZ}\right)\overline{BE} + \left(\overline{BX} - \overline{BM}\right)\overline{BC} + \left(\overline{CY} - \overline{CN}\right)\overline{CF}$



Hình 5-12

$= \overline{BP}.\overline{BE} - \overline{BZ}.\overline{BE} + \overline{BX}.\overline{BC} - \overline{BM}.\overline{BC} + \overline{CY}.\overline{CF} - \overline{CN}.\overline{CF}$

$= \frac{c}{2}a - (p-b)a + (p-b)a - \frac{a}{2}a + (p-c)a - \frac{b}{2}a$

$= \left(\frac{c}{2} - p + b + p - b - \frac{a}{2} + p - c - \frac{b}{2}\right)a = 0.$

Suy ra OI $\perp$ EF.

Nhận xét. Kết hợp với BT 1.5 ta có kết luận : OI là đường thẳng Ơ-le của tam giác XYZ.

Ví dụ 5.19. Cho hai điểm A, B cố định ; vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ không đổi và số thực k. Tìm tập hợp các điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$;

b) $\overrightarrow{AM}.\vec{a} = k$.

Giải. a) Gọi I là trung điểm của AB. Ta có

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right) = k \Leftrightarrow MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = k$$

$$\Leftrightarrow IM^2 = k + \frac{1}{4}AB^2.$$

– Nếu $k < -\frac{1}{4}AB^2$: Tập các điểm M là $\varnothing$.

– Nếu $k = -\frac{1}{4}AB^2$: Tập các điểm M là $\{I\}$.

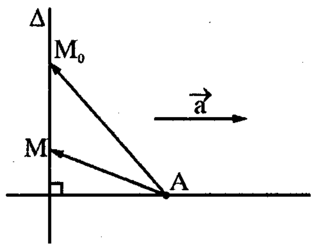
– Nếu $k > -\frac{1}{4}AB^2$: Tập các điểm M là đường tròn $\left(I ; \frac{1}{2}\sqrt{4k + AB^2}\right)$.

b) (h.5-13). Lấy điểm M_0 cố định sao cho $\overrightarrow{AM_0}.\vec{a} = k$.

Khi đó $\overrightarrow{AM}.\vec{a} = k \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM_0} - \overrightarrow{AM}\right).\vec{a} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MM_0}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_0} \perp \vec{a}$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng Δ đi qua M_0 và vuông góc với $\vec{a}$.



Hình 5-13

Ví dụ 5.20. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho :

$$\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right) = 0.$$

Giải. Gọi I là trung điểm của BC, D là điểm thoả mãn $\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} = \vec{0}$, E là trung điểm của DC. Ta có $(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}.6\overrightarrow{ME} = 0$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{ME} = 0 \Leftrightarrow MI \perp ME$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính IE.

Ví dụ 5.21. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho :

a) $MB^2 + MC^2 - MA^2 = 0$; (1)

b) $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 0$. (2)

Giải (h.5-14).

a) Dựng hình bình hành ABEC, ta có

$\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EA} = \vec{0}$

$$\Rightarrow MB^2 + MC^2 - MA^2 = (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB})^2 + (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EC})^2 - (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA})^2$$
$$= ME^2 + 2\overrightarrow{ME}(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EA}) + EB^2 + EC^2 - EA^2.$$

Do đó (1) $\Leftrightarrow ME^2 = EA^2 - (EB^2 + EC^2)$

$\Leftrightarrow ME^2 = (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC})^2 - (EB^2 + EC^2)$

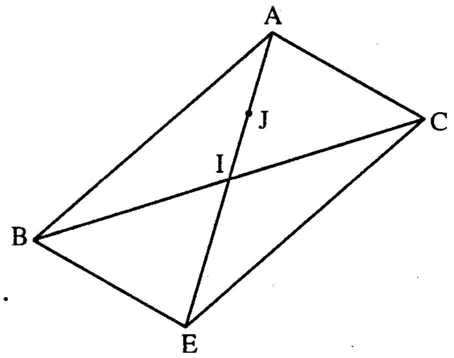
$\Leftrightarrow ME^2 = 2\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EC} \Leftrightarrow ME^2 = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow ME^2 = 2AB.AC.\cos A$.

– Nếu $\widehat{A}$ tù : Tập hợp các điểm M là $\varnothing$.

– Nếu $\widehat{A}$ vuông : Tập hợp các điểm M là $\{E\}$.

– Nếu $\widehat{A}$ nhọn : Tập hợp các điểm M là đường tròn $(E ; \sqrt{2AB.AC.\cos A})$.



Hình 5-14

b) *Cách 1*. Gọi I là trung điểm của BC, J là trung điểm AI.

Ta có $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2IM^2 + \dfrac{BC^2}{2} - 2MA^2 = 0$ (Xem VD 5.2)

$\Leftrightarrow MA^2 - MI^2 = \dfrac{BC^2}{4}$

$\Leftrightarrow$ M thuộc đường thẳng vuông góc với AI tại điểm H xác định bởi :

$$\overline{JH} = \frac{BC^2}{8\overline{AI}} \text{ (VD 3.7).}$$

Cách 2. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp, G là trọng tâm ΔABC.

Ta có (2) $\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})^2+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC})^2-2(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})^2=0$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=0$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OA})=0$

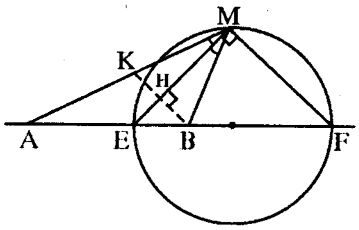
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}(3\overrightarrow{OG}-3\overrightarrow{OA})=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{AG}=0 \Leftrightarrow MO \perp AG$

$\Leftrightarrow$ M thuộc đường thẳng qua O, vuông góc với AG.

Ví dụ 5.22. Cho hai điểm A, B phân biệt và số dương $k \neq 1$. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\dfrac{MA}{MB}=k$.

Giải (h.5-15).



Hình 5-15

Cách 1. Lấy trên đường thẳng AB các điểm E, F sao cho $\overrightarrow{EA}=-k\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{FA}=k\overrightarrow{FB}$.

Ta có $\dfrac{MA}{MB}=k \Leftrightarrow MA^2-k^2.MB^2=0$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MB})=0$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}+k\overrightarrow{ME}+k\overrightarrow{EB})(\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FA}-k\overrightarrow{MF}-k\overrightarrow{FB})=0$

$\Leftrightarrow (1+k)\overrightarrow{ME}.(1-k)\overrightarrow{MF}=0$

$\Leftrightarrow (1-k^2)\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF}=0$ (vì $k>0, k\neq 1$)

$\Leftrightarrow ME \perp MF$.

Vậy tập các điểm M là đường tròn đường kính EF (đường tròn A-pô-lô-ni-ut).

Cách 2. Lấy E, F như cách 1.

Thuận. Nếu M thoả mãn $\dfrac{MA}{MB}=k$ thì $\begin{cases}\dfrac{MA}{MB}=-\dfrac{\overline{EA}}{\overline{EB}}\\[2mm] \dfrac{MA}{MB}=\dfrac{\overline{FA}}{\overline{FB}}\end{cases}$

$\Rightarrow$ ME là phân giác trong, MF là phân giác ngoài của tam giác MAB

$\Rightarrow \widehat{EMF}=1v \Rightarrow$ M thuộc đường tròn đường kính EF.

Đảo. Lấy M thuộc đường tròn đường kính EF, ta có ME $\perp$ MF. Qua B kẻ đường thẳng song song với MF, đường thẳng này theo thứ tự cắt ME, MA tại H, K. Vì (ABEF) = −1 nên HB = HK (VD 3.11). Vì BK // MF ; ME $\perp$ MF nên BK $\perp$ ME. Suy ra tam giác MBK cân tại M $\Rightarrow$ ME là phân giác của góc $\widehat{AMB} \Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = -\dfrac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = k$.

Vậy, tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính EF.

Ví dụ 5.23. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq MA.GA + MB.GB + MC.GC \geq GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Giải. Ta luôn có

$$MA.GA + MB.GB + MC.GC \geq \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{GC}$$

$$= \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right).\overrightarrow{GA} + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right).\overrightarrow{GB} + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right).\overrightarrow{GC}$$

$$= \overrightarrow{MG}.\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + GA^2 + GB^2 + GC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Vậy $\quad MA.GA + MB.GB + MC.GC \geq GA^2 + GB^2 + GC^2.$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} \uparrow\uparrow \overrightarrow{GA} \\ \overrightarrow{MB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{GB} \\ \overrightarrow{MC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{GC} \end{cases} \Rightarrow \quad M \equiv G.$

– Lại có $MA^2 + MB^2 + MC^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

$= (MA^2 + GA^2) + (MB^2 + GB^2) + (MC^2 + GC^2)$

$\geq 2MA.GA + 2MB.GB + 2MC.GC$

$\Rightarrow (MA^2 + MB^2 + MC^2) - (MA.GA + MB.GB + MC.GC) \geq$

$\geq (MA.GA + MB.GB + MC.GC) - (GA^2 + GB^2 + GC^2) \geq 0$

$\Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq MA.GA + MB.GB + MC.GC.$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv G$.

Nhận xét

1) Bất đẳng thức sau đây sẽ được sử dụng nhiều trong khi giải các bài toán :

$$|\vec{a}|.|\vec{b}| \geq \vec{a}.\vec{b}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

2) Từ bất đẳng thức ở VD 5.23, cho M trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ta dễ dàng chứng minh được các bất đẳng thức quen thuộc sau :

a) $m_a + m_b + m_c \le \dfrac{9}{2}R$.

b) $\dfrac{1}{m_a} + \dfrac{1}{m_b} + \dfrac{1}{m_c} \ge \dfrac{2}{R}$.

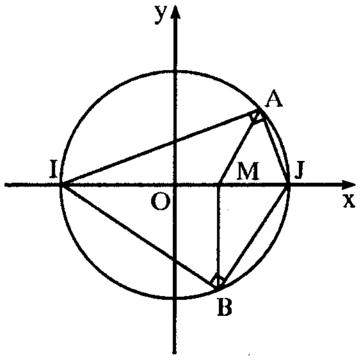
Ví dụ 5.24. Cho tứ giác IAJB có các góc A, B vuông, IA > IB. M là điểm bất kì trên đường thẳng IJ. Chứng minh rằng

$$\frac{JA}{JB} \le \frac{MA}{MB} \le \frac{IA}{IB}.$$

Giải. (h.5-16). *Cách 1.* Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \dfrac{\overline{MJ}}{\overline{IJ}}\overrightarrow{AI} - \dfrac{\overline{MI}}{\overline{IJ}}\overrightarrow{AJ} \\ \overrightarrow{BM} = \dfrac{\overline{MJ}}{\overline{IJ}}\overrightarrow{BI} - \dfrac{\overline{MI}}{\overline{IJ}}\overrightarrow{BJ} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AM^2 = \dfrac{MJ^2}{IJ^2}AI^2 + \dfrac{MI^2}{IJ^2}AJ^2 \\ BM^2 = \dfrac{MJ^2}{IJ^2}BI^2 + \dfrac{MI^2}{IJ^2}BJ^2. \end{cases}$$



Hình 5-16

Do đó

$$\frac{JA}{JB} \le \frac{MA}{MB} \Leftrightarrow \frac{JA^2}{JB^2} \le \frac{MA^2}{MB^2}$$

$$\Leftrightarrow JA^2.MB^2 \le JB^2.MA^2$$

$$\Leftrightarrow JA^2(MJ^2.BI^2 + MI^2.BJ^2) \le JB^2(MJ^2.AI^2 + MI^2.AJ^2)$$

$$\Leftrightarrow MJ^2(IA^2.JB^2 - JA^2.IB^2) \ge 0.$$

Vì IA > IB $\Rightarrow$ JB > JA nên bất đẳng thức cuối đúng, vậy $\dfrac{JA}{JB} \le \dfrac{MA}{MB}$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv J$.

Bất đẳng thức $\dfrac{MA}{MB} \le \dfrac{IA}{IB}$ được chứng minh một cách tương tự.

Cách 2.

Không mất tính tổng quát, giả sử IJ = 2. Lập hệ trục toạ độ Oxy sao cho $I = (-1\ ;\ 0)$, $J = (1\ ;\ 0)$.

Khi đó $M = (x_M ; 0)$ và $A = (x_A ; y_A)$, $B = (x_B ; y_B)$ với $x_A^2 + y_A^2 = x_B^2 + y_B^2 = 1$.

Như vậy, $\dfrac{IA}{IB} \geq \dfrac{MA}{MB}$ (1)

$\Leftrightarrow \dfrac{IA^2}{IB^2} \geq \dfrac{MA^2}{MB^2}$

$\Leftrightarrow IA^2 . MB^2 \geq IB^2.MA^2$

$\Leftrightarrow \left[(x_A+1)^2+y_A^2\right]\left[(x_B-x_M)^2+y_B^2\right] \geq \left[(x_B+1)^2+y_B^2\right]\left[(x_A-x_M)^2+y_A^2\right]$

$\Leftrightarrow (2x_A+2)(x_M^2 - 2x_Bx_M + 1) \geq (2x_B+2)(x_M^2 - 2x_Ax_M + 1)$

$\Leftrightarrow x_Ax_M^2 - 2x_Ax_Bx_M + x_A + x_M^2 - 2x_Bx_M + 1 \geq$

$\geq x_Bx_M^2 - 2x_Ax_Bx_M + x_B + x_M^2 - 2x_Ax_M + 1$

$\Leftrightarrow x_Ax_M^2 + x_A - 2x_Bx_M \geq x_Bx_M^2 + x_B - 2x_Ax_M$

$\Leftrightarrow (x_A - x_B)(x_M^2 + 2x_M + 1) \geq 0$

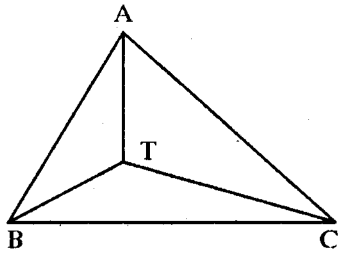
$\Leftrightarrow (x_A - x_B)(x_M + 1)^2 \geq 0.$ (2)

Vì $IA \geq IB$ nên $x_A \geq x_B$, suy ra (2) đúng, do đó (1) đúng.

Nhận xét. Cùng với BT 3.1, VD 5.24 là một ví dụ sinh động, minh hoạ cho ý tưởng đại số hoá hình học của Đề-các.

Ví dụ 5.25. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M cho (MA + MB + MC) nhỏ nhất.

Giải (h.5-17). Nếu $A < 120^\circ$, $B < 120^\circ$, $C < 120^\circ$ thì tồn tại điểm T trong tam giác sao cho $\widehat{BTC} = \widehat{CTA} = \widehat{ATB} = 120^\circ$.



Hình 5-17

Với điểm M bất kì ta có

$$MA + MB + MC = \frac{MA.TA}{TA} + \frac{MB.TB}{TB} + \frac{MC.TC}{TC}$$

$$\geq \frac{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{TA}}{TA} + \frac{\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{TB}}{TB} + \frac{\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{TC}}{TC}$$

$$= \frac{(\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{TA}).\overrightarrow{TA}}{TA} + \frac{(\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{TB}).\overrightarrow{TB}}{TB} + \frac{(\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{TC}).\overrightarrow{TC}}{TC}$$

$$= \overrightarrow{MT}\left(\frac{\overrightarrow{TA}}{TA} + \frac{\overrightarrow{TB}}{TB} + \frac{\overrightarrow{TC}}{TC}\right) + \frac{\overrightarrow{TA}^2}{TA} + \frac{\overrightarrow{TB}^2}{TB} + \frac{\overrightarrow{TC}^2}{TC}$$

$$= \overrightarrow{MT}.\vec{0} + TA + TB + TC$$

$$= TA + TB + TC.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} \uparrow\uparrow \overrightarrow{TA} \\ \overrightarrow{MB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{TB} \\ \overrightarrow{MC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{TC} \end{cases} \Leftrightarrow M \equiv T$ (điểm Toricelli).

– Nếu $A \geq 120^o$ thì $\left|\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right| \leq 1$. Với điểm M bất kì ta có

$$MA + MB + MC = MA + \frac{MB.AB}{AB} + \frac{MC.AC}{AC} \geq MA + \frac{\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AC}}{AC}$$

$$= MA + \overrightarrow{MA}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right) + \frac{\overrightarrow{AB}^2}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}^2}{AC}.$$

Vì $\left|\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right| \leq 1$ nên $MA + \overrightarrow{MA}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 $\Leftrightarrow M \equiv A$.

Nếu $B \geq 120^o$ hoặc $C \geq 120^o$ thì ta cũng nhận được các kết quả tương tự. Tóm lại :

+ Nếu A, B, C < 120^o thì (MA + MB + MC) nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv T$.

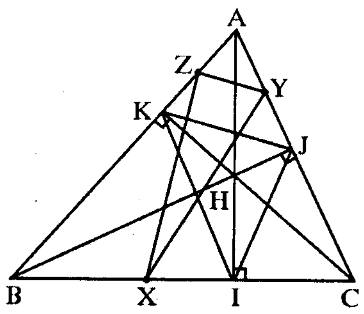
+ Nếu $A \geq 120^o$ thì (MA + MB + MC) nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv A$.

+ Nếu $B \geq 120^o$ thì (MA + MB + MC) nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv B$.

+ Nếu $C \geq 120^o$ thì (MA + MB + MC) nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv C$.

Ví dụ 5.26. Cho tam giác nhọn ABC. Hãy tìm trên các đường thẳng BC, CA, AB các điểm X, Y, Z sao cho chu vi tam giác XYZ nhỏ nhất.

Giải (h.5-18). Giả sử AI, BJ, CK là các đường cao của tam giác ABC ; X, Y, Z là ba điểm bất kì tương ứng trên các đường thẳng BC, CA, AB.



Hình 5-18

Ta có YZ + ZX + XY =

$$= \frac{YZ.JK}{JK} + \frac{ZX.KI}{KI} + \frac{XY.IJ}{IJ}$$

$$\geq \frac{\overrightarrow{YZ}.\overrightarrow{JK}}{JK} + \frac{\overrightarrow{ZX}.\overrightarrow{KI}}{KI} + \frac{\overrightarrow{XY}.\overrightarrow{IJ}}{IJ}$$

$$= \frac{(\overrightarrow{YJ} + \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KZ})\overrightarrow{JK}}{JK} + \frac{(\overrightarrow{ZK} + \overrightarrow{KI} + \overrightarrow{IX}).\overrightarrow{KI}}{KI} + \frac{(\overrightarrow{XI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JY}).\overrightarrow{IJ}}{IJ}$$

$$= JK + KI + IJ + \overrightarrow{XI}\left(\frac{\overrightarrow{IJ}}{IJ} + \frac{\overrightarrow{IK}}{IK}\right) + \overrightarrow{YJ}\left(\frac{\overrightarrow{JK}}{JK} + \frac{\overrightarrow{JI}}{JI}\right) + \overrightarrow{ZK}\left(\frac{\overrightarrow{KI}}{KI} + \frac{\overrightarrow{KJ}}{KJ}\right).$$

Trong hình học phẳng, ta biết một kết quả quan trọng : Trực tâm H của tam giác ABC là tâm đường tròn nội tiếp tam giác IJK. Do đó

$$\left(\frac{\overrightarrow{IJ}}{IJ} + \frac{\overrightarrow{IK}}{IK}\right) \uparrow\uparrow \overrightarrow{IA} \Rightarrow \overrightarrow{XI}\left(\frac{\overrightarrow{IJ}}{IJ} + \frac{\overrightarrow{IK}}{IK}\right) = 0.$$

Tương tự, $\overrightarrow{YJ}.\left(\frac{\overrightarrow{JK}}{JK} + \frac{\overrightarrow{JI}}{JI}\right) = 0$; $\overrightarrow{ZK}.\left(\frac{\overrightarrow{KI}}{KI} + \frac{\overrightarrow{KJ}}{KJ}\right) = 0$.

Vậy $YZ + ZX + XY \geq JK + KI + IJ$.

Nếu xảy ra dấu đẳng thức thì

$$\overrightarrow{YZ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{JK}\ ;\ \overrightarrow{ZX} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KI}\ ;\ \overrightarrow{XY} \uparrow\uparrow \overrightarrow{IJ}.$$

Nghĩa là $\exists\ \alpha, \beta, \gamma > 0 : \overrightarrow{YZ} = \alpha\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{ZX} = \beta\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{XY} = \gamma\overrightarrow{IJ}$.

Từ đó $\alpha\overrightarrow{JK} + \beta\overrightarrow{KI} + \gamma\overrightarrow{IJ} = \vec{0}$.

Mặt khác, $\overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KI} + \overrightarrow{IJ} = \vec{0}$ nên $\alpha = \beta = \gamma$. Từ đó suy ra $\overrightarrow{YZ} = \alpha\overrightarrow{JK}$; $\overrightarrow{ZX} = \alpha\overrightarrow{KI}$; $\overrightarrow{XY} = \alpha\overrightarrow{IJ}$

$\Rightarrow YZ = \alpha JK$; $ZX = \alpha KI$; $XY = \alpha IJ$

$\Rightarrow YZ + ZX + XY = \alpha(JK + KI + IJ)$.

Kết hợp với điều kiện khi đẳng thức xảy ra $YZ + ZX + XY = JK + KI + IJ$ ta có $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

Suy ra
$$\begin{cases} \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{JK} \\ \overrightarrow{ZX} = \overrightarrow{KI} \\ \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{IJ}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X \equiv I \\ Y \equiv J \\ Z \equiv K. \end{cases}$$

Ngược lại, nếu $X \equiv I$, $Y \equiv J$, $Z \equiv K$ thì hiển nhiên $YZ + ZX + XY = JK + KI + IJ$.

Tóm lại, chu vi tam giác XYZ nhỏ nhất khi X, Y, Z tương ứng trùng với chân các đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC.

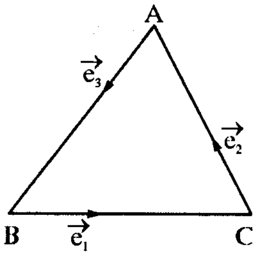
Ví dụ 5.27. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

a) $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$;

b) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \ge -\frac{3}{2}$ (A, B, C nhọn).

Giải (h.5-19). Lấy các vectơ đơn vị $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ sao cho

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{e_2} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CA} \\ \overrightarrow{e_3} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}. \end{cases}$$



Hình 5-19

Ta có $\left(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}\right)^2 \ge 0$.

$\Rightarrow \overrightarrow{e_1}^2 + \overrightarrow{e_2}^2 + \overrightarrow{e_3}^2 + 2\left(\overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_2}.\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_3}.\overrightarrow{e_1}\right) \ge 0$

$\Rightarrow 3 - 2(\cos C + \cos A + \cos B) \ge 0$

$\Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{BC}}{BC} + \frac{\overrightarrow{CA}}{CA} + \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \vec{0}$.

Chú ý rằng $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ nên điều kiện trên tương đương với $BC = CA = AB$ hay tam giác ABC đều.

b) Gọi O là tâm, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có

$\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)^2 \ge 0$

$\Rightarrow OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2\left(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}\right) \ge 0$

$\Rightarrow 3R^2 + 2R^2(\cos 2C + \cos 2A + \cos 2B) \ge 0$

$\Rightarrow \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \ge -\frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow$ O là trọng tâm $\Delta ABC \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Nhận xét. Với việc khai triển hai bất đẳng thức

$$\left(x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}\right)^2 \geq 0.$$

$$\left(x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}\right)^2 \geq 0$$

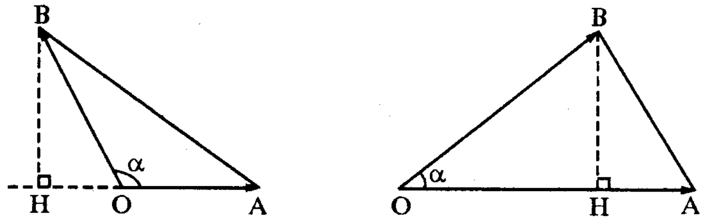
ta dễ dàng nhận được hai bất đẳng thức tổng quát

$$yz\cos A + zx\cos B + xy\cos C \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \qquad \forall x, y, z$$

$$yz\cos 2A + zx\cos 2B + xy\cos 2C \leq -\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \qquad \forall x, y, z.$$

Ví dụ 5.28. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(x_1 ; y_1)$; $B(x_2 ; y_2)$. Chứng minh rằng $S_{OAB} = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$.

Giải. (h.5-20)



Hình 5-20

Dễ dàng chứng minh được :

$S = S_{OAB} = \frac{1}{2}OA.OB\sin\alpha$, trong đó α là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$.

Suy ra $\quad 4S^2 = |\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2.\sin^2\alpha$

$$= |\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2(1 - \cos^2\alpha)$$

$$= |\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2 - \left(|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\alpha\right)^2$$

$$= |\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2 - \left(\vec{a}.\vec{b}\right)^2$$

$$= \left(x_1^2 + y_1^2\right)\left(x_2^2 + y_2^2\right) - \left(x_1x_2 + y_1y_2\right)^2$$

$$= (x_1y_2 - x_2y_1)^2.$$

Vậy $S = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$.

Ví dụ 5.29. Cho các số x_1, x_2, y_1, y_2. Chứng minh rằng

$$(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \geq (x_1x_2 + y_1y_2)^2 \qquad \text{(bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki).}$$

Giải. Trên mặt phẳng toạ độ xét hai vectơ $\vec{a} = (x_1 ; y_1), \vec{b} = (x_2 ; y_2)$.

Ta có $|\vec{a}|.|\vec{b}| \geq |\vec{a}.\vec{b}| \Rightarrow |\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2 \geq (\vec{a}.\vec{b})^2$

$$\Rightarrow (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \geq (x_1x_2 + y_1y_2)^2.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow x_1y_2 = x_2y_1$.

Ví dụ 5.30. Cho hình vuông ABCD ; E là trung điểm của AB, F là điểm sao cho $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. Xác định vị trí của điểm M trên đường thẳng BC sao cho $\widehat{EFM} = 1v$.

Giải (h.5-21). Gọi a là độ dài cạnh hình vuông.

Xét hệ toạ độ xOy sao cho $D \equiv O = (0 ; 0)$, $C = (a ; 0)$, $A = (0 ; a)$.

Dễ thấy $E = \left(\frac{a}{2} ; a\right)$; $F = \left(0 ; \frac{2a}{3}\right)$.

Giả sử $M = (a ; y)$ $(y \in \mathbb{R})$.

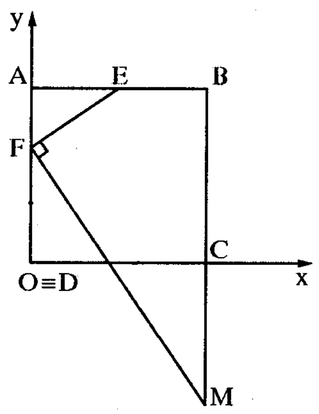
Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{FE} = \left(\frac{a}{2} ; \frac{a}{3}\right) \\ \overrightarrow{FM} = \left(a ; y - \frac{2a}{3}\right) \end{cases}$.

$EF \perp FM \Leftrightarrow \overrightarrow{FE}.\overrightarrow{FM} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{a^2}{2} + \frac{a}{3}\left(y - \frac{2a}{3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow y = \frac{-5a}{6}$

$\Leftrightarrow M = \left(a ; \frac{-5a}{6}\right)$.



Hình 5-21

Vậy M là điểm nằm trên phần kéo dài của BC về phía C sao cho $CM = \frac{5a}{6}$.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

5.1. Chứng minh rằng trong 5 vectơ bất kì luôn chọn ra được 2 vectơ sao cho độ dài vectơ tổng của chúng không vượt quá độ dài vectơ tổng của 3 vectơ còn lại.

5.2. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O ; R). Chứng minh rằng

$$AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = 4R^2.$$

5.3. Cho đường tròn (O ; R) và hai dây AB, CD của nó. Tìm $M \in (O)$ sao cho

$$MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2.$$

5.4. Tính tổng bình phương các cạnh và các đường chéo của n–giác đều nội tiếp đường tròn bán kính R.

5.5. Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ nội tiếp đường tròn (O), M là điểm bất kì thuộc (O). Chứng minh rằng

$$MA_1^2 + MA_3^2 + ... + MA_{2n-1}^2 = MA_2^2 + MA_4^2 + ... + MA_{2n}^2.$$

5.6. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O, R) ; H là trực tâm ΔABC. Chứng minh rằng

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Áp dụng : Trong các tam giác cùng nội tiếp đường tròn, tìm tam giác có tổng bình phương các khoảng cách từ tâm đường tròn đến các cạnh là nhỏ nhất.

5.7. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của C trên các đường thẳng AB, AD. Chứng minh rằng $\overline{AB}.\overline{AE} + \overline{AD}.\overline{AF} = AC^2$.

5.8. Cho tam giác ABC và điểm M bất kì. Các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt thuộc các đường thẳng BC, CA, AB sao cho $\widehat{AMM_1} = \widehat{BMB_1} = \widehat{CMC_1} = 90^o$. Chứng minh rằng A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.

5.9*. Cho hai đường thẳng x'Ox, y'Oy và hai số thực a, b. A và B là hai điểm chạy trên x'Ox và y'Oy sao cho $a.\overline{OA} + b.\overline{OB} = 1$.

Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB luôn đi qua một điểm cố định khác O.

5.10. Cho tam giác ABC cân tại A ; M là trung điểm của BC, H là hình chiếu của M trên AC ; E là trung điểm của MH. Chứng minh rằng $AE \perp BH$.

5.11. Cho góc vuông $\widehat{xOy}$. Trên Ox lấy hai điểm A, A' ; trên Oy lấy hai điểm B, B' sao cho $\overline{OA}.\overline{OA'} = \overline{OB}.\overline{OB'}$. Chứng minh rằng trung tuyến OM của tam giác AOB vuông góc với A'B'.

5.12. Cho tam giác ABC cân tại A. Hai đường thẳng d_1, d_2 bất kì qua A. Các đường thẳng qua B, C tương ứng vuông góc với d_1, d_2 cắt nhau tại D. Đường thẳng qua B vuông góc với AB cắt d_1 tại E, đường thẳng qua C vuông góc với AC cắt d_2 tại F. Chứng minh rằng $AD \perp EF$.

5.13. Cho hình vuông ABCD. Các điểm M, N thuộc các cạnh BA, BC sao cho BM = BN. H là hình chiếu của B trên CM. Chứng minh rằng $\widehat{DHN} = 90^o$.

5.14. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\left(MC^2 - MA^2 - MB^2\right).$$

5.15. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tìm tập hợp các điểm M sao cho

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 - 3MD^2 = -\frac{4a^2}{3}.$$

5.16. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Kẻ qua G đường thẳng Δ ; Δ' là đường thẳng bất kì song song với Δ. Chứng minh rằng tổng bình phương các khoảng cách từ các đỉnh của tam giác đến Δ không vượt quá tổng bình phương các khoảng cách từ các đỉnh của tam giác đến Δ'.

5.17. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O ; R). Chứng minh rằng :

$$a + b + c \le 3\sqrt{3}R.$$

5.18. Cho đa giác đều $A_1A_2...A_n$. Tìm điểm M sao cho tổng

$MA_1 + MA_2 + ... + MA_n$ nhỏ nhất.

5.19*. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M sao cho

$\left(2\cos\frac{A}{2}MA + MB + MC\right)$ nhỏ nhất.

5.20*. Cho tam giác ABC ; M là điểm trong tam giác, đặt $\alpha = \widehat{BMC}$, $\beta = \widehat{CMA}$, $\gamma = \widehat{AMB}$. Chứng minh rằng với mọi điểm N ta có

$$NA\sin\alpha + NB\sin\beta + NC\sin\gamma \ge MA\sin\alpha + MB\sin\beta + MC\sin\gamma.$$

5.21*. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$m_a\cos\frac{A}{2} + m_b\cos\frac{B}{2} + m_c\cos\frac{C}{2} \ge \frac{3}{4}(a + b + c).$$

5.22*. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng với mọi điểm M ta có

$$a^2MA^2 + b^2MB^2 + c^2MC^2 \geq \frac{3a^2b^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

5.23*. Cho tam giác ABC. Các điểm X, Y, Z theo thứ tự chạy trên các đường thẳng BC, CA, AB. Tìm vị trí của X, Y, Z sao cho $(YZ^2 + ZX^2 + XY^2)$ nhỏ nhất.

5.24. Trong mặt phẳng toạ độ cho ba điểm A(1 ; 4) ; B(–2 ; –2) ; C(4 ; 2). Xác định toạ độ điểm M sao cho tổng $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ nhỏ nhất.

5.25. Cho các điểm A(–3 ; 6) ; B(1 ; –2) ; C(6 ; 3).

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tìm toạ độ trực tâm tam giác ABC.

5.26. Cho các số a_1, a_2, b_1, b_2. Chứng minh rằng :

a) $\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$.

b) $\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} \geq \left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2} - \sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right|$.

5.27. Trên mặt phẳng toạ độ, cho hình bình hành với ba đỉnh có toạ độ là các số nguyên. Chứng minh rằng diện tích hình bình hành đó là một số nguyên.

§6. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I – HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

1. Các định lí

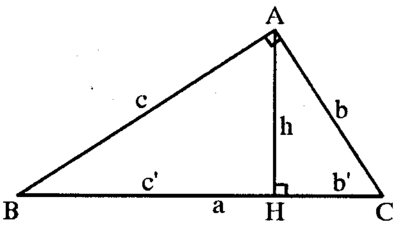
$b^2 = ab'$

$c^2 = ac'$

$a^2 = b^2 + c^2$ (định lí Py-ta-go).

2. Các hệ quả

$b'c' = h^2$



Hình 6-1

$$\frac{b'}{c'} = \frac{b^2}{c^2}$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

II – HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC THƯỜNG

1. Định lí côsin

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

2. Định lí sin

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

3. Các công thức tính diện tích

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (Hê-rông)}$$

$$S = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c.$$

4. Bán kính đường tròn nội tiếp, bàng tiếp

$$r = (p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-b)\tan\frac{B}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2}$$

$$r_a = p\tan\frac{A}{2}$$

$$r_b = p\tan\frac{B}{2}$$

$$r_c = p\tan\frac{C}{2}.$$

5. Công thức tính độ dài trung tuyến

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

$$m_b^2 = \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4}$$

$$m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}.$$

6. Công thức tính độ dài phân giác

$$l_a^2 = \frac{4bc}{(b + c)^2} p(p - a)$$

$$l_b^2 = \frac{4ca}{(c + a)^2} p(p - b)$$

$$l_c^2 = \frac{4ab}{(a + b)^2} p(p - c).$$

B. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 6.1. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.$$

Giải. Theo định lí côsin

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc \sin A} \Rightarrow \cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$$

Vậy $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} \text{ (đpcm).}$$

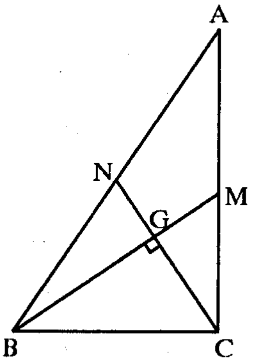
Nhận xét. Công thức $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$ còn được gọi là định lí côtang, có hiệu lực trong việc giải nhiều bài toán khác.

Ví dụ 6.2. Cho tam giác ABC. BM, CN là các trung tuyến. Chứng minh rằng các điều kiện sau là tương đương :

a) $BM \perp CN$;

b) $b^2 + c^2 = 5a^2$;

c) $\cot A = 2(\cot B + \cot C)$.



Hình 6-2

Giải

• a) $\Leftrightarrow$ b) Đặt $G = BM \cap CN$ (h.6-2), ta thấy

$BM \perp CN$

$\Leftrightarrow BG^2 + CG^2 = BC^2$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}m_b\right)^2 + \left(\dfrac{2}{3}m_c\right)^2 = a^2$

$\Leftrightarrow 4m_b^2 + 4m_c^2 = 9a^2$

$\Leftrightarrow 2(c^2 + a^2) - b^2 + 2(a^2 + b^2) - c^2 = 9a^2$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2$.

• c) $\Leftrightarrow$ b)

$$\cot A = 2(\cot B + \cot C) \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} = 2\left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}\right)$$

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = 4a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2$.

Ví dụ 6.3. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$\hat{B} = 60^o \text{ khi và chỉ khi } \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}.$$

Giải. $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} = \dfrac{3}{a+b+c} \Leftrightarrow \dfrac{a+b+c}{a+b} + \dfrac{a+b+c}{b+c} = 3$

$\Leftrightarrow 1 + \dfrac{c}{a+b} + 1 + \dfrac{a}{b+c} = 3 \Leftrightarrow \dfrac{c}{a+b} + \dfrac{a}{b+c} = 1$

$\Leftrightarrow c(b + c) + a(a + b) = (a + b)(b + c)$

$\Leftrightarrow cb + c^2 + a^2 + ab = ab + b^2 + ac + bc$

$\Leftrightarrow c^2 + a^2 - b^2 = ac \Leftrightarrow \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos B = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \hat{B} = 60^o$ (đpcm).

Ví dụ 6.4. Chứng minh rằng tam giác ABC cân tại A khi và chỉ khi $\dfrac{\sin A}{\sin B \cos C} = 2$.

Giải. Theo định lí sin và định lí côsin, ta có

$$\frac{\sin A}{\sin B\cos C} = 2 \Leftrightarrow \frac{\dfrac{a}{2R}}{\dfrac{b}{2R}.\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}} = 2 \Leftrightarrow 2a^2 = 2(a^2+b^2-c^2)$$

$\Leftrightarrow b^2 = c^2 \Leftrightarrow b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại A.

Ví dụ 6.5. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

Giải. Theo công thức Hê-rông và bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$4\sqrt{3}S = 4\sqrt{3}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\leq 4\sqrt{3}\sqrt{p\left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3} =$$

$$= 4\sqrt{3}\sqrt{p\left(\frac{3p-(a+b+c)}{3}\right)^3}$$

$$= 4\sqrt{3}\sqrt{\frac{p^4}{27}} = \frac{4}{3}p^2 = \frac{(a+b+c)^2}{3} \leq a^2+b^2+c^2.$$

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} p-a = p-b = p-c \\ a = b = c \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Nhận xét. $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S \Rightarrow \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S} \geq \sqrt{3} \Rightarrow \cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$.

Ví dụ 6.6. Cho tam giác ABC có $m_c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$. Chứng minh rằng :

$$m_a + m_b + m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c).$$

Giải. Ta có $m_c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c \Rightarrow m_c^2 = \dfrac{3}{4}c^2 \Rightarrow \dfrac{2(a^2+b^2)-c^2}{4} = \dfrac{3}{4}c^2$

$$\Rightarrow 2(a^2+b^2)-c^2 = 3c^2 \Rightarrow a^2+b^2 = 2c^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(b^2+c^2)-a^2 = 3b^2 \\ 2(a^2+c^2)-b^2 = 3a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4m_a^2 = 3b^2 \\ 4m_b^2 = 3a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}b \\ m_b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_a + m_b + m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c).$$

Ví dụ 6.7. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$b + c \geq \frac{a}{2} + \sqrt{3}l_a.$$

Giải. Theo công thức tính độ dài đường phân giác và bất đẳng thức Cô-si ta có :

$$\frac{a}{2} + \sqrt{3}l_a = \frac{a}{2} + \frac{2\sqrt{bc}\sqrt{3(p-a)p}}{b+c} \leq \frac{a}{2} + \frac{(b+c).\dfrac{3(p-a)+p}{2}}{b+c}$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{4p - 3a}{2} = \frac{a}{2} + \frac{2(b+c) - a}{2} = b + c.$$

Vậy $b + c \geq \frac{a}{2} + \sqrt{3}l_a$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ 3(p-a) = p \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Nhận xét. Nhờ VD 6.7, ta có ngay bất đẳng thức sau

$$l_a + l_b + l_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c).$$

Ví dụ 6.8. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$\frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}.$$

Giải. $$\frac{r}{R} = \frac{\dfrac{S}{p}}{\dfrac{abc}{4S}} = \frac{4S^2}{pabc} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{p.abc}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{abc}. \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có :

$$\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)} \leq \frac{c+a-b+a+b-c}{2} = a.$$

Tương tự, $\begin{cases} \sqrt{(a+b-c)(b+c-a)} \leq b \\ \sqrt{(b+c-a)(c+a-b)} \leq c. \end{cases}$

Suy ra (b + c − a)(a + b − c)(c + a − b) ≤ abc. (2)

Từ (1), (2) suy ra $\frac{r}{R} \le \frac{1}{2}$.

Đẳng thức xảy ra ⇔ b + c − a = c + a − b = a + b − c ⇔ a = b = c ⇔ ΔABC đều.

Ví dụ 6.9. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $r_a = r + r_b + r_c$.

Giải. $r_a = r + r_b + r_c \Leftrightarrow r_a - r = r_b + r_c$

$$\Leftrightarrow \frac{S}{p-a} - \frac{S}{p} = \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} \Leftrightarrow \frac{p-(p-a)}{(p-a)p} = \frac{(p-b)+(p-c)}{(p-b)(p-c)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{(p-a)p} = \frac{2p-(b+c)}{(p-b)(p-c)} \Leftrightarrow \frac{a}{(p-a)p} = \frac{a}{(p-b)(p-c)}$$

$$\Leftrightarrow (p-a)p = (p-b)(p-c) \Leftrightarrow (b+c-a)(b+c+a) = (a+b-c)(a+c-b)$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^2 - a^2 = a^2 - (b-c)^2 \Leftrightarrow (b+c)^2 + (b-c)^2 = 2a^2$$

$$\Leftrightarrow 2(b^2+c^2) = 2a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

⇔ ΔABC vuông tại A (định lí Py-ta-go).

Ví dụ 6.10. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

a) $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$;

b) $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$.

Giải. a) $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \Leftrightarrow \frac{2S}{r} = \frac{2S}{h_a} + \frac{2S}{h_b} + \frac{2S}{h_c}$

⇔ a + b + c = a + b + c (đúng).

b) $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \Leftrightarrow \frac{S}{r} = \frac{S}{r_a} + \frac{S}{r_b} + \frac{S}{r_c}$

⇔ p = (p − a) + (p − b) + (p − c) ⇔ p = 3p − (a + b + c)

⇔ p = p (đúng).

Ví dụ 6.11. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

a) $S^2 = r.r_a.r_b.r_c$;

b) $p^2 = r_ar_b + r_br_c + r_cr_a$.

Giải. a) $S^2 = r.r_a.r_b.r_c \Leftrightarrow S^2 = \frac{S}{p}.\frac{S}{p-a}.\frac{S}{p-b}.\frac{S}{p-c}$

$\Leftrightarrow S^2 = \frac{S^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Leftrightarrow S^2 = \frac{S^4}{S^2} \Leftrightarrow S^2 = S^2$ (đúng).

b) $p^2 = r_ar_b + r_br_c + r_cr_a$

$\Leftrightarrow p^2 = \frac{S}{p-a}.\frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-b}.\frac{S}{p-c} + \frac{S}{p-c}.\frac{S}{p-a}$

$\Leftrightarrow p^2 = S^2\left(\frac{1}{(p-a)(p-b)} + \frac{1}{(p-b)(p-c)} + \frac{1}{(p-c)(p-a)}\right)$

$\Leftrightarrow p^2 = S^2\frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}$

$\Leftrightarrow p(p-a)(p-b)(p-c) = S^2$ (đpcm).

Ví dụ 6.12. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$r_a + r_b + r_c \geq h_a + h_b + h_c.$$

Giải. $r_a + r_b + r_c \geq h_a + h_b + h_c$

$\Leftrightarrow \frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} \geq \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có :

$\frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} \geq \frac{2}{\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}}$

$\geq \frac{2}{\frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{2}} = \frac{2}{a}.$

Tương tự, $\begin{cases} \frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} \geq \frac{2}{b} \\ \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{2}{c}. \end{cases}$

Suy ra $\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ (đpcm).

$$r_a + r_b + r_c = h_a + h_b + h_c$$

$\Leftrightarrow b + c - a = c + a - b = a + b - c \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Ví dụ 6.13. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

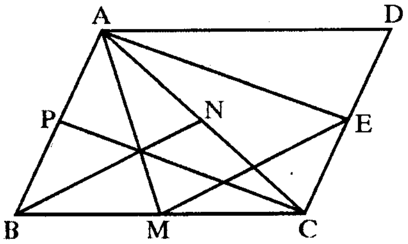
$$S = \frac{1}{3}\sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_b + m_c - m_a)(m_c + m_a - m_b)(m_a + m_b - m_c)}$$

Giải. Ta chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề. Ba trung tuyến m_a, m_b, m_c của tam giác ABC là độ dài ba cạnh của một tam giác với diện tích $S_m = \frac{3}{4}S$.

Chứng minh (h.6-3).

Gọi AM, BN, CP là các trung tuyến của tam giác ABC. Dựng hình bình hành ABCD. Gọi E là trung điểm của CD. Dễ thấy ME = BN, EA = CP. Vậy ΔAME có độ dài ba cạnh là m_a, m_b, m_c.



Hình 6-3

Mặt khác, $S_m = S_{AME}$

$$= S_{ABCD} - S_{ABM} - S_{ADE} - S_{CME}$$

$$= 2S - \frac{1}{2}S - \frac{1}{2}S - \frac{1}{4}S$$

$$= \frac{3}{4}S.$$

Nhận xét. 1) Bổ đề trên còn được dùng trong một số bài toán khác.

2) Không những có độ dài ba cạnh là m_a, m_b, m_c, tam giác AME còn có độ dài ba trung tuyến tương ứng là $\frac{3}{4}a, \frac{3}{4}b, \frac{3}{4}c$.

Trở lại bài toán đang xét. Áp dụng bổ đề trên và công thức Hê-rông ta có

$$S = \frac{4}{3}S_m = \frac{4}{3}.\frac{1}{4}\sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_b + m_c - m_a)(m_c + m_a - m_b)(m_a + m_b - m_c)}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_b + m_c - m_a)(m_c + m_a - m_b)(m_a + m_b - m_c)} \quad \text{(đpcm).}$$

Ví dụ 6.14. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Giải. Theo BT 5.17, ta có

$$a + b + c \le 3\sqrt{3}R$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Áp dụng định lí sin, ta có

$$\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Ví dụ 6.15. Hãy nội tiếp trong đường tròn cho trước một tam giác có diện tích lớn nhất.

Giải. Giả sử đường tròn cho trước có bán kính R và ABC là một tam giác nội tiếp nó. Theo bất đẳng thức Cô-si và theo BT 5.17, ta có

$$S = \frac{abc}{4R} \le \frac{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}{4R} \le \frac{\left(\sqrt{3}R\right)^3}{4R} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$$

Suy ra $S \le \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Vậy, trong các tam giác nội tiếp đường tròn cho trước, tam giác đều có diện tích lớn nhất.

Ví dụ 6.16. Hãy ngoại tiếp một đường tròn cho trước một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

Giải. Giả sử đường tròn cho trước có bán kính r và ABC là một tam giác ngoại tiếp nó. Ta có

$$pr = S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \le \sqrt{p\left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3}$$

$$= \sqrt{\frac{p^4}{27}} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

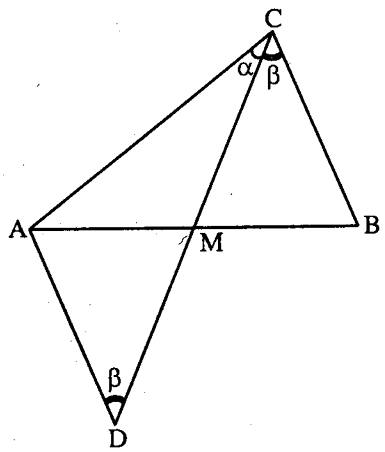
Suy ra $3\sqrt{3}r \le p \Rightarrow 3\sqrt{3}r^2 \le S$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow p - a = p - b = p - c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Vậy, trong các tam giác ngoại tiếp một đường tròn cho trước, tam giác đều có diện tích nhỏ nhất.

Ví dụ 6.17. Cho tam giác ABC, trung tuyến CM, $\widehat{ACM} = \alpha$, $\widehat{BCM} = \beta$. Chứng minh rằng :

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$



Hình 6-4

Giải. (h.6-4). *Cách 1.* Trên tia đối của tia MC lấy D sao cho MD = MC. Áp dụng định lí sin cho các tam giác CAB, CAD, ta có :

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{CB}{CA} = \frac{AD}{AC} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \text{ (đpcm).}$$

Cách 2. Theo giả thiết :

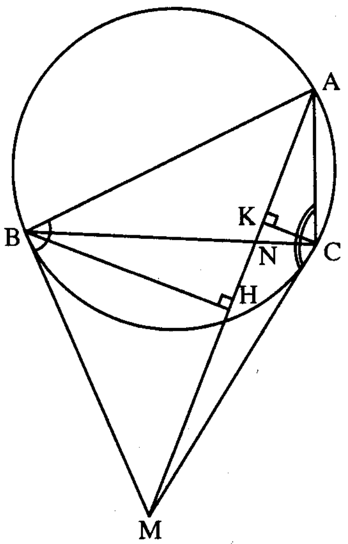
$MA = MB \Rightarrow S_{CAM} = S_{CBM}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}CA.CM\sin\alpha = \frac{1}{2}CB.\ CM\sin\beta$

$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{CB}{CA} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin A}{\sin B}$ (đpcm).

Ví dụ 6.18. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các tiếp tuyến với (O) tại B, C cắt nhau tại M ; AM cắt BC tại N. Chứng minh rằng

$$\frac{NB}{NC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$



Hình 6-5

Giải. (h.6-5) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B, C lên AM. Theo định lí Ta-lét, ta có

$$\frac{NB}{NC} = \frac{BH}{CK} = \frac{\frac{1}{2}BH.AM}{\frac{1}{2}CK.AM} = \frac{S_{ABM}}{S_{ACM}} = \frac{\frac{1}{2}BA.BM\sin\widehat{ABM}}{\frac{1}{2}CA.CM\sin\widehat{ACM}}.$$

Theo giả thiết : MB = MC ; $\sin\widehat{ABM} = \sin(B + A) = \sin C$;

$\sin\widehat{ACM} = \sin(C + A) = \sin B$. Vậy

$$\frac{NB}{NC} = \frac{BA}{CA}.\frac{\sin C}{\sin B} = \left(\frac{BA}{CA}\right)^2 \text{ (định lí sin).}$$

Ví dụ 6.19. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng AM, BN, CP đồng quy khi và chỉ khi

$$\frac{\sin\widehat{MAB}}{\sin\widehat{MAC}}\cdot\frac{\sin\widehat{NBC}}{\sin\widehat{NBA}}\cdot\frac{\sin\widehat{PCA}}{\sin\widehat{PCB}}=1.$$

Giải. Trước hết ta chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề. Cho bốn góc α, α', β, β' thoả mãn

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\alpha'+\beta'<180^\circ\\ \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\dfrac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}\end{cases}$$

Khi đó $\alpha=\alpha'$; $\beta=\beta'$.

Chứng minh. (h.6-6)

Vẽ ΔABC và $\Delta A'B'C'$ sao cho :

$$\widehat{A}=\alpha,\ \widehat{B}=\beta\ ;\ \widehat{A'}=\alpha',\ \widehat{B'}=\beta'.$$

Từ giả thiết và định lí sin ta có

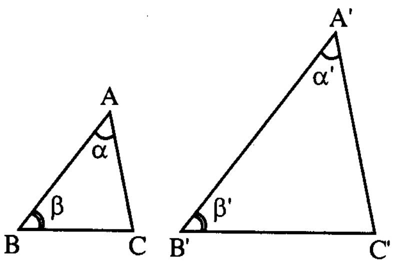
$$\frac{CB}{CA}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}=\frac{C'B'}{C'A'}.$$

Mặt khác, $\alpha+\beta=\alpha'+\beta'\Rightarrow\widehat{C}=\widehat{C'}$.

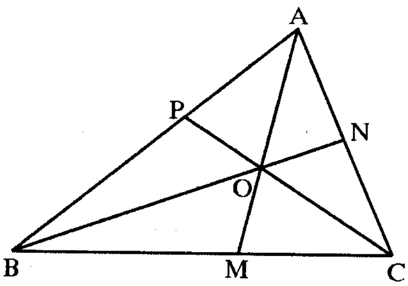
Suy ra $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$, vậy $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$.

Trở lại bài toán đang xét (h.6-7) :

Nếu AM, BN, CP đồng quy và giả sử điểm đồng quy đó là O.



Hình 6-6



Hình 6-7

Áp dụng định lí sin cho các tam giác OAB, OBC, OCA. Ta có

$$\frac{\sin\widehat{OAB}}{\sin\widehat{OBA}}=\frac{OB}{OA}\ ;\ \frac{\sin\widehat{OBC}}{\sin\widehat{OCB}}=\frac{OC}{OB}\ ;\ \frac{\sin\widehat{OCA}}{\sin\widehat{OAC}}=\frac{OA}{OC}.$$

Suy ra $\dfrac{\sin\widehat{OAB}}{\sin\widehat{OAC}}\cdot\dfrac{\sin\widehat{OBC}}{\sin\widehat{OBA}}\cdot\dfrac{\sin\widehat{OCA}}{\sin\widehat{OCB}}=\dfrac{OB}{OA}\cdot\dfrac{OC}{OB}\cdot\dfrac{OA}{OC}$.

$\Rightarrow \dfrac{\sin\widehat{MAB}}{\sin\widehat{MAC}}\cdot\dfrac{\sin\widehat{NBC}}{\sin\widehat{NBA}}\cdot\dfrac{\sin\widehat{PCA}}{\sin\widehat{PCB}}=1.$

Ngược lại, giả sử $\dfrac{\sin\widehat{MAB}}{\sin\widehat{MAC}}\cdot\dfrac{\sin\widehat{NBC}}{\sin\widehat{NBA}}\cdot\dfrac{\sin\widehat{PCA}}{\sin\widehat{PCB}}=1.$ (1)

Nếu BN, CP cắt nhau tại O thì theo phần thuận

$$\dfrac{\sin\widehat{OAB}}{\sin\widehat{OAC}}\cdot\dfrac{\sin\widehat{NBC}}{\sin\widehat{NBA}}\cdot\dfrac{\sin\widehat{PCA}}{\sin\widehat{PCB}}=1. \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra

$$\dfrac{\sin\widehat{MAB}}{\sin\widehat{MAC}}=\dfrac{\sin\widehat{OAB}}{\sin\widehat{OAC}}.$$

Theo bổ đề ta có $\begin{cases}\widehat{MAB}=\widehat{OAB}\\ \widehat{MAC}=\widehat{OAC}\end{cases}\Rightarrow$ O thuộc AM.

Vậy AM, BN, CP đồng quy.

Nhận xét. Kết quả trên được gọi là định lí Xê-va dạng sin, nó sẽ được mở rộng hơn nữa nếu ta có khái niệm góc định hướng giữa hai tia (xem chuyên đề §13).

Ví dụ 6.20. Cho tam giác ABC, AA', BB', CC' là các đường phân giác. M là một điểm trong tam giác. X, Y, Z là các điểm đối xứng của M qua AA', BB', CC'. Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy.

Giải. (h.6-8)

Vì AM, BM, CM đồng quy tại M nên

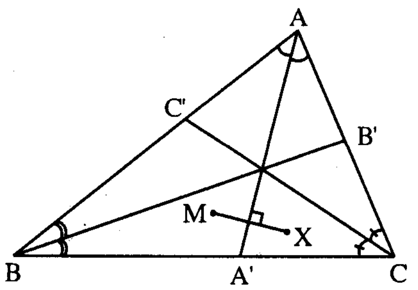
$\dfrac{\sin\widehat{MAB}}{\sin\widehat{MAC}}\cdot\dfrac{\sin\widehat{MBC}}{\sin\widehat{MBA}}\cdot\dfrac{\sin\widehat{MCA}}{\sin\widehat{MCB}}=1.$ (1)

Từ (1), theo giả thiết về sự đối xứng ta có

$\dfrac{\sin\widehat{XAC}}{\sin\widehat{XAB}}\cdot\dfrac{\sin\widehat{YBA}}{\sin\widehat{YBC}}\cdot\dfrac{\sin\widehat{ZCB}}{\sin\widehat{ZCA}}=1$

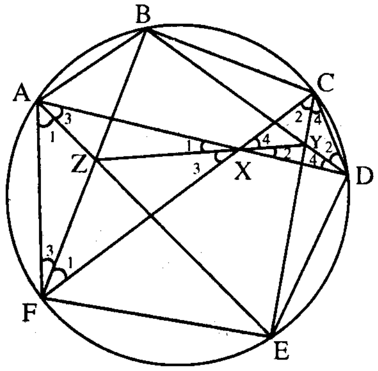
$\Rightarrow \dfrac{\sin\widehat{XAB}}{\sin\widehat{XAC}}\cdot\dfrac{\sin\widehat{YBC}}{\sin\widehat{YBA}}\cdot\dfrac{\sin\widehat{ZCA}}{\sin\widehat{ZCB}}=1$

$\Rightarrow$ AX, BY, CZ đồng quy (theo VD 6.19).



Hình 6-8

Ví dụ 6.21. Cho lục giác ABCDEF nội tiếp. AD $\cap$ CF = X, BD $\cap$ CE = Y ; BF $\cap$ AE = Z. Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng (định lí Pa-xcan).



Hình 6-9

Giải. (h.6-9) Áp dụng VD 6.19 cho các tam giác XAF, XCD,

ta có $\begin{cases} \dfrac{\sin X_1}{\sin X_3}\cdot\dfrac{\sin A_1}{\sin A_3}\cdot\dfrac{\sin F_1}{\sin F_3} = 1 \\ \dfrac{\sin X_2}{\sin X_4}\cdot\dfrac{\sin C_2}{\sin C_4}\cdot\dfrac{\sin D_2}{\sin D_4} = 1. \end{cases}$

Lại có $\begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{C_2}, \widehat{A_3} = \widehat{C_4} \\ \widehat{F_1} = \widehat{D_2}, \widehat{F_3} = \widehat{D_4} \end{cases}$ (các góc nội tiếp cùng chắn một cung). Suy ra $\dfrac{\sin X_1}{\sin X_3} = \dfrac{\sin X_2}{\sin X_4}$.

Theo bổ đề trong VD 6.19 ta có $\begin{cases} \widehat{X_1} = \widehat{X_2} \\ \widehat{X_3} = \widehat{X_4} \end{cases} \Rightarrow$ X, Y, Z thẳng hàng.

Ví dụ 6.22. Cho các tam giác ABC, A'B'C' có $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$. Chứng minh rằng $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \dfrac{AB.AC}{A'B'.A'C'}$.

Giải. $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \dfrac{\frac{1}{2}AB.AC\sin A}{\frac{1}{2}A'B'.A'C'\sin A'} = \dfrac{AB.AC}{A'B'.A'C'}$ (đpcm).

Nhận xét. Kết quả trên tuy đơn giản nhưng rất có lợi trong khi giải các bài toán liên quan đến diện tích.

Ví dụ 6.23. Cho tam giác ABC, các điểm M, N thuộc cạnh BC. Chứng minh rằng :

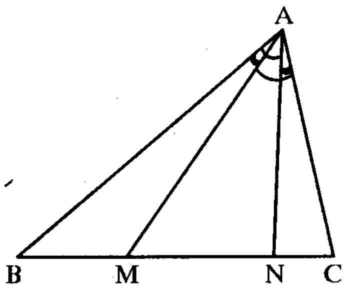
$$\widehat{BAM} = \widehat{CAN} \Leftrightarrow \frac{MB.NB}{MC.NC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

Giải. (h.6-10) Nếu $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$ thì $\widehat{BAN} = \widehat{CAM}$. Theo VD 6.22, ta có

$$\begin{cases} \dfrac{MB}{NC} = \dfrac{S_{AMB}}{S_{ANC}} = \dfrac{AM.AB}{AN.AC} \\ \dfrac{NB}{MC} = \dfrac{S_{ANB}}{S_{AMC}} = \dfrac{AN.AB}{AM.AC} \end{cases} \Rightarrow \frac{MB.NB}{MC.NC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

Ngược lại, nếu $\dfrac{MB.NB}{MC.NC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$ (1), ta lấy M' thuộc BC sao cho $\widehat{BAM'} = \widehat{CAN}$. Theo phần thuận

$$\frac{M'B.NB}{M'C.NC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2. \qquad (2)$$



Hình 6-10

Từ (1) và (2) suy ra : $\dfrac{M'B}{M'C} = \dfrac{MB}{MC} \Rightarrow M' \equiv M$.

Vậy $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$ (đpcm).

Ví dụ 6.24. Cho tam giác ABC có diện tích S ; M là một điểm trong tam giác. AM, BM, CM theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A', B', C'. Chứng minh rằng :

$$S_{A'B'C'} \le \frac{1}{4}S.$$

Giải. (h.6-11) Theo VD 2.11, tồn tại các số $\alpha, \beta, \gamma > 0$ sao cho

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0} \quad (*) \end{cases}$$

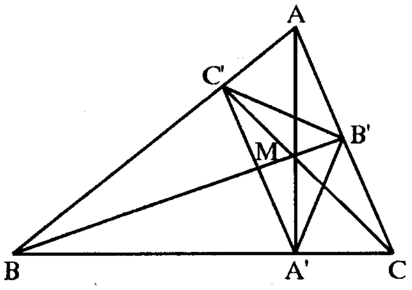
Theo VD 6.22 ta có

$$S_{MB'C'} = \frac{MB'}{MB}\cdot\frac{MC'}{MC}S_{MBC}.$$

Mặt khác $\dfrac{S_{MBC}}{S} = \dfrac{MA'}{AA'}$ (cùng chung đáy BC)

$$\Rightarrow S_{MBC} = \frac{MA'}{AA'}S.$$

Vậy $S_{MB'C'} = \dfrac{MB'}{MB}\cdot\dfrac{MC'}{MC}\cdot\dfrac{MA'}{AA'}S$



Hình 6-11

Từ (*), nhờ các phép chiếu vectơ ta có :

$$\frac{MA'}{MA} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma} \; ; \; \frac{MB'}{MB} = \frac{\beta}{\gamma + \alpha} \; ; \; \frac{MC'}{MC} = \frac{\gamma}{\alpha + \beta}.$$

Suy ra $S_{MB'C'} = \dfrac{\beta}{\gamma + \alpha} \cdot \dfrac{\gamma}{\alpha + \beta} \cdot \dfrac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} S$

$$= \frac{\alpha\beta\gamma}{(\gamma + \alpha)(\alpha + \beta)} S \qquad (1)$$

Tương tự như vậy ta có :

$$\begin{cases} S_{MC'A'} = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)} S & (2) \\ S_{MA'B'} = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)} S & (3) \end{cases}$$

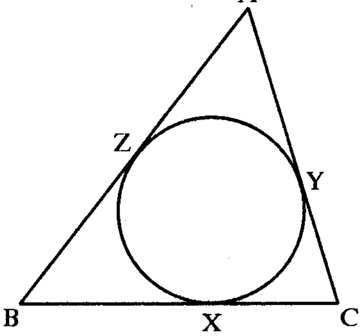
Từ (1), (2), (3) với chú ý $\alpha + \beta + \gamma = 1$, ta có

$$S_{A'B'C'} = 2S\frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)} \le 2S\frac{\alpha\beta\gamma}{2\sqrt{\alpha\beta}.2\sqrt{\beta\gamma}.2\sqrt{\gamma\alpha}} = \frac{1}{4}S.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma \Leftrightarrow$ M là trọng tâm ΔABC.

Ví dụ 6.25. Cho tam giác ABC, M thuộc cạnh BC. Đường tròn nội tiếp các tam giác ABM, ACM bằng nhau. Chứng minh rằng :

$AM^2 = S\cot\dfrac{A}{2}$ (S là diện tích ΔABC)

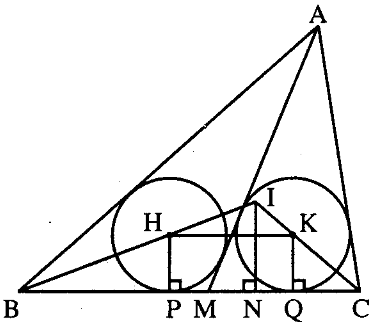


Hình 6-12

Giải. Trước hết xin nhắc lại, không chứng minh một kết quả quen thuộc mà ta sẽ sử dụng nhiều lần trong khi giải bài toán này là :

Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại X, Y, Z. Khi đó (h.6-12) :

$$\begin{cases} AY = AZ = \dfrac{b + c - a}{2} = p - a \\ BZ = BX = \dfrac{c + a - b}{2} = p - b \\ CX = CY = \dfrac{a + b - c}{2} = p - c \end{cases}$$



Hình 6-13

Trở lại bài toán đang xét. Gọi I, H, K theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ABM, ACM và N, P, Q là hình chiếu của chúng trên BC (h.6-13).

Đặt x = AM, r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC, r_1 là bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác ABM, ACM.

Ta có $S = S_{ABM} + S_{ACM}$

$\Rightarrow (a + b + c)r = (c + BM + x)r_1 + (b + CM + x)r_1$

$\Rightarrow (a + b + c)r = (a + b + c + 2x)r_1$

$\Rightarrow \dfrac{a + b + c}{a + b + c + 2x} = \dfrac{r_1}{r}$.

Mặt khác, theo định lí Ta-lét ta có :

$$\begin{cases} \dfrac{r_1}{r} = \dfrac{BP}{BN} = \dfrac{c + BM - x}{2BN} \\ \dfrac{r_1}{r} = \dfrac{CQ}{CN} = \dfrac{b + CM - x}{2CN}. \end{cases}$$

Từ đó, theo tính chất của tỉ lệ thức :

$$\frac{r_1}{r} = \frac{a + b + c - 2x}{2a}.$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$\frac{a + b + c}{a + b + c + 2x} = \frac{a + b + c - 2x}{2a}$$

$\Rightarrow 2a(a + b + c) = (a + b + c)^2 - 4x^2 \Rightarrow 4x^2 = (a + b + c)(-a + b + c)$

$\Rightarrow x^2 = p(p - a) \Rightarrow x^2 = pr.\dfrac{p - a}{r}$

$\Rightarrow x^2 = S.\cot\dfrac{A}{2}$.

Vậy $AM^2 = S.\cot\dfrac{A}{2}$ (đpcm).

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

6.1. Cho tam giác ABC có các trung tuyến xuất phát từ B và C vuông góc với nhau. Chứng minh rằng $\cos A \geq \dfrac{4}{5}$.

6.2. Cho tam giác ABC có $\dfrac{c}{b} = \dfrac{m_b}{m_c} \neq 1$.

Chứng minh rằng $\cot A = \dfrac{1}{2}(\cot B + \cot C)$.

6.3. Cho tam giác ABC. M là điểm trong tam giác sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCA} = \varphi$. Chứng minh rằng :

$$\cot A + \cot B + \cot C = \cot\varphi.$$

6.4*. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2.$$

6.5. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$\frac{h_a}{l_a} \geq \sqrt{\frac{2r}{R}}.$$

6.6. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$\frac{m_a}{l_a} \geq \frac{b+c}{2\sqrt{bc}}.$$

6.7. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

a) $r_a + r_b + r_c = 4R + r$.

b) $\dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} + \dfrac{1}{ab} = \dfrac{1}{2Rr}$.

6.8*. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$R_m \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2(a+b+c)},$$

trong đó R_m là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác có ba cạnh là m_a, m_b, m_c.

6.9*. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$\frac{m_a m_b m_c}{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2} \geq r.$$

6.10. Cho tam giác ABC có $a + c = 2b$. Chứng minh rằng :

$$a - c = 3r\left(\tan\frac{A}{2} - \tan\frac{C}{2}\right).$$

6.11. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2Rr} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4r^2}.$$

6.12. Cho tam giác ABC có $m_a = c$. Chứng minh rằng :

$$\sin A = 2\sin(B - C).$$

6.13. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Các tiếp tuyến với (O) tại A, C và đường thẳng BD đồng quy tại S. Chứng minh rằng :

$$\frac{\sin\widehat{ASB}}{\sin\widehat{CSB}} = \left(\frac{AB}{CB}\right)^2 = \left(\frac{AD}{CD}\right)^2.$$

6.14. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). M là một điểm trong (O). Các đường thẳng MA, MB, MC theo thứ tự cắt (O) tại A', B', C'. Chứng minh rằng :

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{MA.MB.MC}{MA'.MB'.MC'}.$$

6.15. Cho tứ giác ABCD. Góc giữa AC và BD bằng α. Chứng minh rằng :

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD\sin\alpha.$$

6.16. Cho tứ giác với diện tích S, độ dài các cạnh là a, b, c, d. Chứng minh rằng :

$$S \le \frac{1}{2}(ab + cd).$$

6.17. Xét một lục giác lồi nội tiếp ABCDEF. Đường chéo BF cắt AE, AC lần lượt tại M, N. Đường chéo BD cắt CA, CE lần lượt tại P, Q. Đường chéo DF cắt EC, EA lần lượt tại R, S. Chứng minh rằng MQ, NR và PS đồng quy.

6.18. Cho tứ giác ABCD nội tiếp. Chứng minh rằng :

$$AC.BD = AB.CD + AD.BC.$$

6.19*. Cho tam giác ABC ($\widehat{A} = 90^o$) nội tiếp đường tròn (O). Trên tia đối của các tia BA, CA ta lấy các điểm E, F sao cho : BE = CF = BC. M là một điểm thuộc (O). Chứng minh rằng :

$$MA + MB + MC \le EF.$$

6.20*. Cho tam giác ABC, M là một điểm trong tam giác.

a) Chứng minh rằng $MA.S_{MBC}$; $MB.S_{MCA}$; $MC.S_{MAB}$ là độ dài ba cạnh của một tam giác mà ta kí hiệu là Δ(M).

b) Tìm vị trí của M sao cho diện tích tam giác Δ(M) lớn nhất.

6.21. Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$; A, B là các điểm trên Ox và OA = 1 ; OB = 3. Đường tròn qua A, B tiếp xúc với Oy tại C. Chứng minh rằng :

$$\widehat{xOy} \ge 30^o \Leftrightarrow \widehat{ACB} \le 90^o.$$

6.22*. Cho tam giác ABC, các điểm D, E thuộc cạnh BC. Đường tròn nội tiếp các tam giác ABD, ACE tiếp xúc với BC tại M, N. Chứng minh rằng :

$$\widehat{BAD} = \widehat{CAE} \Leftrightarrow \frac{1}{BM} + \frac{1}{DM} = \frac{1}{CN} + \frac{1}{EN}.$$

§7. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG ĐƯỜNG TRÒN

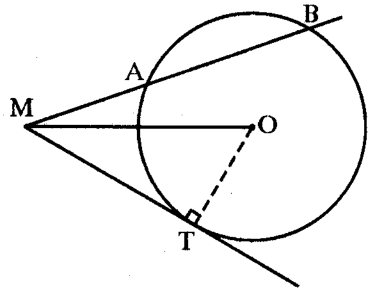
A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Định lí 7.1. Cho đường tròn (O ; R) và điểm M cố định. Một đường thẳng thay đổi đi qua M, cắt đường tròn tại A, B. Khi đó

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overline{MA}.\overline{MB} = MO^2 - R^2$.

Đại lượng không đổi $MO^2 - R^2$ gọi là *phương tích* của điểm M đối với đường tròn (O ; R), kí hiệu là $\mathcal{P}_{M/(O)}$.

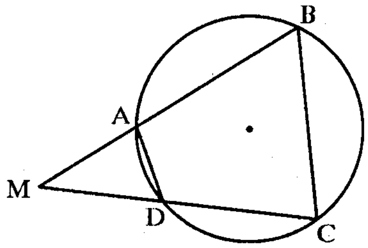
Khi M nằm ngoài đường tròn (O), ta vẽ được tiếp tuyến MT tới đường tròn (T là tiếp điểm). Khi đó $\mathcal{P}_{M/(O)} = MT^2$(h.7-1).



Hình 7-1

Định lí 7.2. Tứ giác ABCD có hai cạnh đối AB, CD cắt nhau tại M. Điều kiện cần và đủ để tứ giác ABCD nội tiếp được trong đường tròn là

$\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}$ (h.7-2).

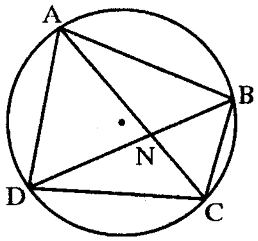


Hình 7-2

Định lí 7.3.

Tứ giác ABCD có hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại N. Điều kiện cần và đủ để tứ giác ABCD nội tiếp được trong đường tròn là

$\overline{NA}.\overline{NC} = \overline{NB}.\overline{ND}$ (h.7-3).

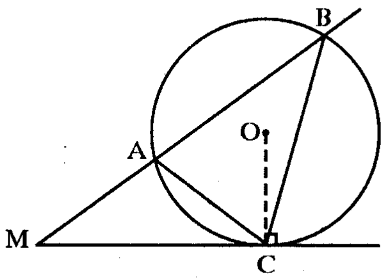


Hình 7-3

Định lí 7.4. (Điều kiện để đường tròn tiếp xúc với đường thẳng)

Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng, M là điểm thuộc tia đối của tia AB. Điều kiện cần và đủ để đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tiếp xúc với đường thẳng MC tại C là

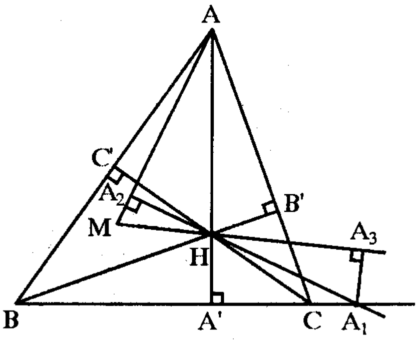
$\overline{MA}.\overline{MB} = MC^2$ (h.7-4).



Hình 7-4

B. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 7.1. Cho tam giác ABC không vuông, có các đường cao AA', BB', CC' ; H là trực tâm. Điểm M không thuộc các đường thẳng AH, BH, CH. Các đường thẳng qua H, vuông góc với MA, MB, MC lần lượt cắt các đường thẳng BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1.



Hình 7-5

a) Chứng minh rằng

$\overline{HA}.\overline{HA'} = \overline{HB}.\overline{HB'} = \overline{HC}.\overline{HC'}$.

b) Chứng minh ba điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.

Giải (h.7-5)

a) Các tứ giác ABA'B', ACA'C' nội tiếp đường tròn nên

$$\begin{cases} \overline{HA}.\overline{HA'} = \overline{HB}.\overline{HB'} \\ \overline{HA}.\overline{HA'} = \overline{HC}.\overline{HC'}, \end{cases}$$

suy ra $\overline{HA}.\overline{HA'} = \overline{HB}.\overline{HB'} = \overline{HC}.\overline{HC'}$.

b) Gọi A_2, B_2, C_2 tương ứng là các giao điểm của HA_1, HB_1, HC_1 với MA, MB, MC ; A_3, B_3, C_3 lần lượt là hình chiếu của A_1, B_1, C_1 trên đường thẳng MH. Ta có $\overline{HM}.\overline{HA_3} = \overline{HA_2}.\overline{HA_1}$ (vì M, A_1, A_2, A_3 cùng thuộc đường tròn đường kính MA_1).

Mặt khác, $\overline{HA_2}.\overline{HA_1} = \overline{HA}.\overline{HA'}$ (vì A, A', A_1, A_2 cùng thuộc đường tròn đường kính AA_1), do đó $\overline{HM}.\overline{HA_3} = \overline{HA}.\overline{HA'}$. (1)

Tương tự, $\overline{HM}.\overline{HB_3} = \overline{HB}.\overline{HB'}$; (2)

$\overline{HM}.\overline{HC_3} = \overline{HC}.\overline{HC'}$. (3)

Từ (1), (2), (3), kết hợp với câu a) suy ra

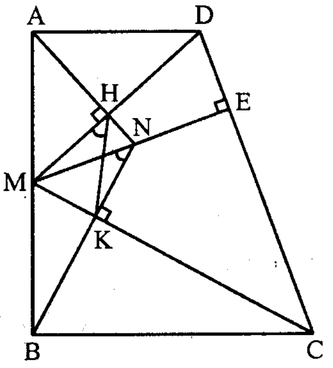
$$\overline{HM}.\overline{HA_3} = \overline{HM}.\overline{HB_3} = \overline{HM}.\overline{HC_3} \Rightarrow A_3 \equiv B_3 \equiv C_3.$$

Vậy A_1, B_1, C_1 thẳng hàng, vì chúng cùng nằm trên đường thẳng vuông góc với MH tại A_3.

Ví dụ 7.2. Cho hình thang ABCD vuông tại A và B. M là trung điểm của AB. Các đường cao AH, BK của các tam giác AMD, BMC cắt nhau tại N. Chứng minh rằng $MN \perp CD$.

Giải. (h.7-6) Đặt E = MN ∩ CD.

Ta có $\begin{cases}\widehat{MHN} = 90^o \\ \widehat{MKN} = 90^o\end{cases}$



Hình 7-6

⇒ MHNK nội tiếp ⇒ $\widehat{MNK} = \widehat{MHK}$. (1)

Lại có $\overline{MH}.\overline{MD} = MA^2 = MB^2 = \overline{MK}.\overline{MC}$

⇒ tứ giác HKCD nội tiếp ⇒ $\widehat{MHK} = \widehat{MCD}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác NKCE nội tiếp ⇒ $\widehat{NEC} = \widehat{NKC} = 90^o$ (đpcm).

Ví dụ 7.3. Cho tam giác ABC không cân tại A ; AM, AD là trung tuyến và phân giác của tam giác. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMD cắt AB, AC tại E, F.

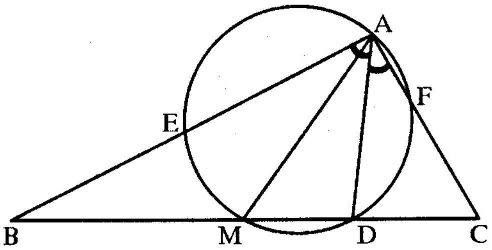
Chứng minh rằng BE = CF.

Giải. (h.7-7). Ta có

$\begin{cases}BE.BA = BM.BD \\ CF.CA = CM.CD\end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{BE}{CF}.\dfrac{BA}{CA} = \dfrac{BM}{CM}.\dfrac{BD}{CD}$

Vì $\dfrac{BA}{CA} = \dfrac{BD}{CD}$; $\dfrac{BM}{CM} = 1$



Hình 7-7

(tính chất của phân giác và trung tuyến)

nên $\dfrac{BE}{CF} = 1 \Rightarrow BE = CF$ (đpcm).

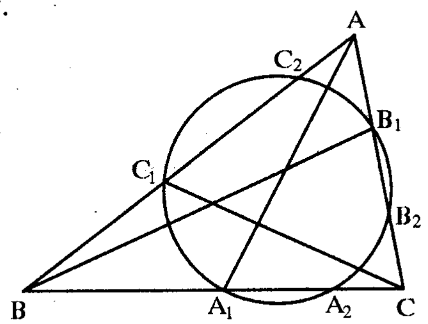
Ví dụ 7.4. Cho tam giác ABC. Một đường tròn cắt cạnh BC tại A_1, A_2 ; cắt cạnh CA tại B_1, B_2 ; cắt cạnh AB tại C_1, C_2. Chứng minh rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy khi và chỉ khi AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.

Giải. (h.7-8). Ta có

$\begin{cases}\overline{AC_1}.\overline{AC_2} = \overline{AB_1}.\overline{AB_2} \\ \overline{BA_1}.\overline{BA_2} = \overline{BC_1}.\overline{BC_2} \\ \overline{CB_1}.\overline{CB_2} = \overline{CA_1}.\overline{CA_2}\end{cases}$

$\Rightarrow \overline{A_1B}.\overline{B_1C}.\overline{C_1A}.\overline{A_2B}.\overline{B_2C}.\overline{C_2A}$

$= \overline{A_1C}.\overline{B_1A}.\overline{C_1B}.\overline{A_2C}.\overline{B_2A}.\overline{C_2B}$



Hình 7-8

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}.\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}.\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = \frac{\overline{A_2C}}{\overline{A_2B}}.\frac{\overline{B_2A}}{\overline{B_2C}}.\frac{\overline{C_2B}}{\overline{C_2A}}.$$

Vậy : AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy $\Leftrightarrow$ AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy (theo định lí Xê-va).

Ví dụ 7.5. Cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao BB', CC' cắt nhau tại H ; $B'C' \cap AH = K$; L là trung điểm của AH. Chứng minh rằng : K là trực tâm của tam giác LBC.

Giải. (h.7-9)

Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Đặt $A' = AH \cap BC$,

$E = AH \cap (O)$ $(E \neq A)$.

Ta có : $\overline{A'B}.\overline{A'C} = \overline{A'E}.\overline{A'A}$

$= \overline{A'H}.\overline{A'A}$ (1)

(vì A'E = A'H, kết quả quen thuộc).

Mặt khác, vì $(A'KHA) = -1$

nên theo hệ thức Mác-lô-ranh,

$\overline{A'H}.\overline{A'A} = \overline{A'K}.\overline{AL}$ (2) (vì LA = LH)

Từ (1), (2) suy ra : $A'B.A'C = A'K.A'L$

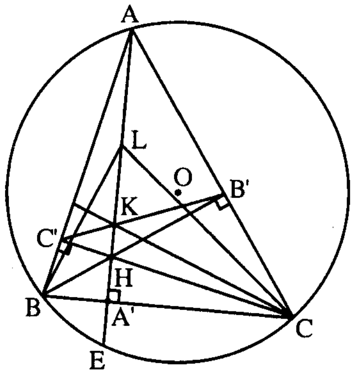
$\Rightarrow \dfrac{A'B}{A'L} = \dfrac{A'K}{A'C}$

$\Rightarrow \Delta A'BL \backsim \Delta A'KC$

$\Rightarrow \widehat{A'LB} = \widehat{A'CK}$

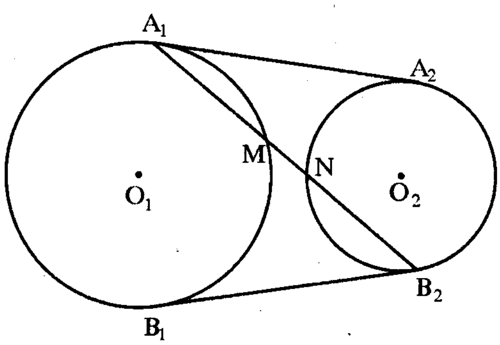
$\Rightarrow CK \perp LB$

$\Rightarrow$ K là trực tâm Δ LBC (vì $LA' \perp BC$).



Hình 7-9

Ví dụ 7.6. Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) ; A_1A_2, B_1B_2 là các tiếp tuyến chung ngoài của chúng. Đường thẳng A_1B_2 theo thứ tự cắt (O_1), (O_2) tại M, N. Chứng minh rằng $A_1M = B_2N$.



Hình 7-10

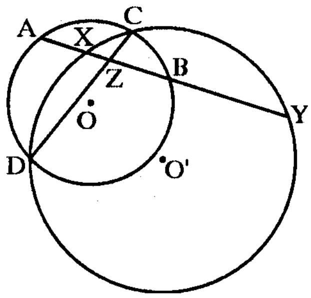
Giải (h.7-10). Vì A_1A_2 tiếp xúc với (O_2), B_2B_1 tiếp xúc với (O_1)

nên $\begin{cases} A_1N.A_1B_2 = A_1A_2^2 \\ B_2M.B_2A_1 = B_2B_1^2 \end{cases}$. Mặt khác, $A_1A_2 = B_1B_2$

nên $A_1N.A_1B_2 = B_2M.B_2A_1$. Vậy $A_1N = B_2M$

$\Rightarrow A_1M = B_2N$.

Ví dụ 7.7. Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B trên (O). X, Y là các điểm trên AB sao cho $\overrightarrow{AX} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AY} = 2\overrightarrow{AB}$. Đường tròn (O') qua X, Y cắt (O) tại C, D. Gọi Z là giao điểm của CD và AB. Chứng minh rằng ZA = ZB.



Hình 7-11

Giải. (h.7-11) Ta có $\overline{ZA}.\overline{ZB} = \overline{ZC}.\overline{ZD} = \overline{ZX}.\overline{ZY}$

$= \left(\overline{ZA} + \overline{AX}\right)\left(\overline{ZA} + \overline{AY}\right) = \left(\overline{ZA} + \frac{1}{3}\overline{AB}\right)\left(\overline{ZA} + 2\overline{AB}\right)$

$= \overline{ZA}^2 + \frac{7}{3}\overline{ZA}.\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AB}^2$.

Suy ra $\overline{ZA}\left(\overline{ZA} - \overline{ZB}\right) + \frac{7}{3}\overline{ZA}.\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AB^2} = 0$

$\Rightarrow -\overline{ZA}.\overline{AB} + \frac{7}{3}\overline{ZA}.\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AB^2} = 0$

$\Rightarrow \frac{4}{3}\overline{ZA}.\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AB}^2 = 0 \Rightarrow 2\overline{ZA}.\overline{AB} + \overline{AB}^2 = 0 \Rightarrow \left(2\overline{ZA} + \overline{AB}\right)\overline{AB} = 0$

$\Rightarrow 2\overline{ZA} + \overline{AB} = 0 \Rightarrow \overline{ZA} + \left(\overline{ZA} + \overline{AB}\right) = 0 \Rightarrow \overline{ZA} + \overline{ZB} = 0 \Rightarrow ZA = ZB.$

Ví dụ 7.8. Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) cắt nhau tại A, B. Một điểm M chuyển động trên (O_1). Qua M kẻ tiếp tuyến MT với (O_2). Chứng minh rằng $\frac{MT^2}{MA.MB}$ nhận giá trị không đổi.

Giải (h.7-12). Gọi C là giao của MA với (O_2), ta có

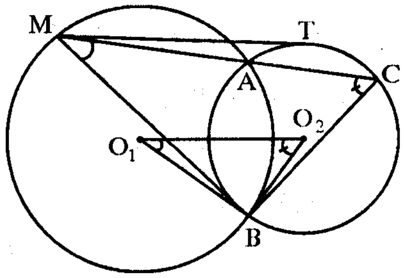
$\frac{MT^2}{MA.MB} = \frac{MA.MC}{MA.MB} = \frac{MC}{MB}$.

Mặt khác, $\Delta MBC \backsim \Delta O_1BO_2$

$$\Rightarrow \frac{MC}{MB} = \frac{O_1O_2}{O_1B} = \frac{O_1O_2}{R_1}$$

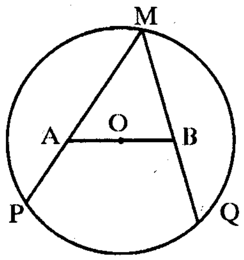
(R_1 là bán kính của (O_1)).

Vậy $\dfrac{MT^2}{MA.MB} = \dfrac{O_1O_2}{R_1}$ không đổi.



Hình 7-12

Ví dụ 7.9. Cho đường tròn (O). A, B là hai điểm cố định, đối xứng với nhau qua O ; M là điểm chuyển động trên (O) ; MA, MB giao với (O) tại P, Q. Chứng minh rằng $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AP}} + \dfrac{\overline{BM}}{\overline{BQ}}$ nhận giá trị không đổi.



Hình 7-13

Giải (h.7-13) Đặt $p = \mathcal{P}_{A/(O)} = \mathcal{P}_{B/(O)}$, ta có

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AP}} + \frac{\overline{BM}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{AM}^2}{\overline{AM}.\overline{AP}} + \frac{\overline{BM}^2}{\overline{BM}.\overline{BQ}}$$

$$= \frac{AM^2 + BM^2}{p} = \frac{2\left(AM^2 + BM^2\right)}{2p}$$

$$= \frac{4MO^2 + AB^2}{2p} \text{ không đổi.}$$

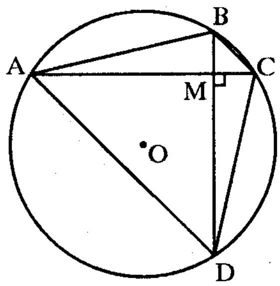
Ví dụ 7.10. Cho đường tròn (O ; R). M là một điểm nằm trong đường tròn và khác O. Hai dây AC, BD thay đổi, luôn đi qua M và vuông góc với nhau. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của S_{ABCD}.

Giải. Vì $AC \perp BD$ nên

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD$$

$$= \frac{1}{4}\left(AC^2 + BD^2 - (AC - BD)^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[4\left(2R^2 - OM^2\right) - (AC - BD)^2\right].$$



Hình 7-14

Theo trên : $S_{ABCD} \leq 2R^2 - OM^2$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow AC - BD = 0 \Leftrightarrow AC = BD$ (h.7-14)

Bạn đọc tự chứng minh kết quả $AC^2 + BD^2 = 4(2R^2 - OM^2)$, xem như một bài tập.

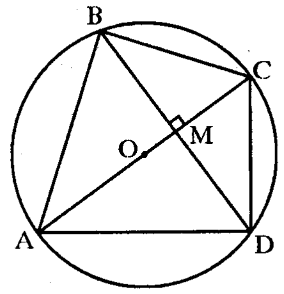
Vậy giá trị lớn nhất của S_{ABCD} bằng $2R^2 - OM^2$.

+ Nếu AC đi qua O thì AC lớn nhất, BD nhỏ nhất (h.7-15)

+ Nếu BD đi qua O thì BD lớn nhất, AC nhỏ nhất.

Vậy :

S_{ABCD} nhỏ nhất $\Leftrightarrow (AC - BD)^2_{max} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{AC đi qua O}\\ \text{BD đi qua O.}\end{array}\right.$



Hình 7-15

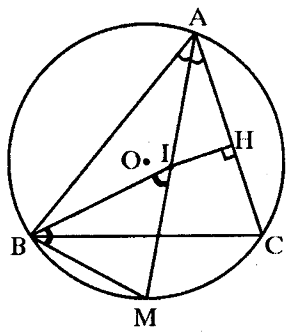
Từ đó, bằng cách tính toán cụ thể ta thấy giá trị nhỏ nhất của S_{ABCD} bằng $2R\sqrt{R^2 - OM^2}$.

Ví dụ 7.11. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O ; R), ngoại tiếp đường tròn (I ; r). Chứng minh rằng $OI^2 = R^2 - 2Rr$ (hệ thức Ơ-le).

Giải. Gọi M là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$ (h.7-16). Dễ thấy ΔIBM cân tại M

$\Rightarrow IM = BM.$ (1)

Gọi H là hình chiếu của I trên AC, ta thấy $\dfrac{IH}{IA} = \sin\dfrac{A}{2}$.



Hình 7-16

Theo định lí sin trong ΔABM, ta có $\dfrac{BM}{2R} = \sin\dfrac{A}{2}$.

Từ đó $\dfrac{IH}{IA} = \dfrac{BM}{2R} \Rightarrow 2R.IH = IA.BM \Rightarrow 2Rr = IA.IM$ (theo (1))

$$\Rightarrow 2Rr = R^2 - OI^2 \Rightarrow IO^2 = R^2 - 2Rr$$

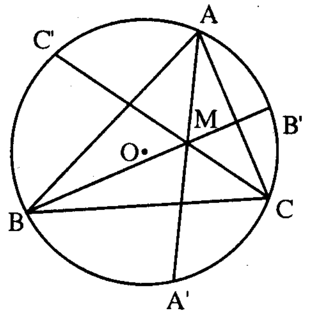
Nhận xét. Từ kết quả trên suy ra $R^2 - 2Rr \geq 0 \Rightarrow R \geq 2r$.

Ta lại nhận được kết quả trong VD 6.8.

Ví dụ 7.12. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) ; M là điểm thay đổi trong (O). AM, BM, CM cắt (O) tại A', B', C'. Tìm tập hợp các điểm M sao cho

$$\frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'} = 3.$$

Giải. Gọi R là bán kính của (O), G là trọng tâm tam giác ABC (h.7-17). Ta thấy :



Hình 7-17

$$\frac{MA}{MA'}+\frac{MB}{MB'}+\frac{MC}{MC'}=3$$

$$\Leftrightarrow \frac{MA^2}{MA.MA'}+\frac{MB^2}{MB.MB'}+\frac{MC^2}{MC.MC'}=3$$

$$\Leftrightarrow MA^2+MB^2+MC^2=3(R^2-MO^2).$$

Theo VD 5.9 đẳng thức trên tương đương với :

$$GA^2+GB^2+GC^2+3GM^2=GA^2+GB^2+GC^2+3GO^2-3MO^2$$

$$\Leftrightarrow GM^2+MO^2=GO^2$$

$\Leftrightarrow \widehat{GMO}=90^{\circ}$ (định lí Py-ta-go)

$\Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn đường kính GO.

Ví dụ 7.13. Cho tam giác ABC có trọng tâm G, nội tiếp đường tròn (O). M là điểm nằm trong hình tròn đường kính OG. AM, BM, CM cắt (O) lần lượt tại A', B', C'. Chứng minh rằng :

$$S_{ABC}\le S_{A'B'C'}.$$

Giải. Theo BT 6-14 ta có :

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\frac{MA.MB.MC}{MA'.MB'.MC'}\le\left(\frac{\frac{MA}{MA'}+\frac{MB}{MB'}+\frac{MC}{MC'}}{3}\right)^3$$

Vì M nằm trong đường tròn đường kính OG nên theo kết quả tương tự VD 7.12 ta có :

$$\frac{MA}{MA'}+\frac{MB}{MB'}+\frac{MC}{MC'}\le 3.$$

Vậy $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}\le 1\Rightarrow S_{ABC}\le S_{A'B'C'}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{MA}{MA'}=\frac{MB}{MB'}=\frac{MC}{MC'}$

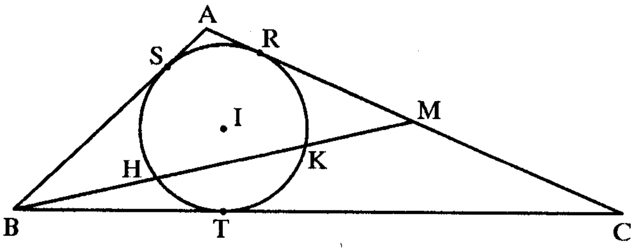
$$\Leftrightarrow \frac{MA^2}{MA'.MA}=\frac{MB^2}{MB'.MB}=\frac{MC^2}{MC'.MC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{MA^2}{R^2 - OM^2} = \frac{MB^2}{R^2 - OM^2} = \frac{MC^2}{R^2 - OM^2}$$

$$\Leftrightarrow MA^2 = MB^2 = MC^2 \Leftrightarrow MA = MB = MC \Leftrightarrow M \equiv O.$$

Ví dụ 7.14. Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) cắt trung tuyến BM tại H, K. Biết rằng BH = HK = KM. Chứng minh rằng $\frac{a}{13} = \frac{b}{10} = \frac{c}{5}$.

Giải. Giả sử (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại T, R, S (h.7-18), ta có :



Hình 7-18

$$BT^2 = BH.BK \Rightarrow \left(\frac{c + a - b}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}m_b.\frac{2}{3}m_b \Rightarrow \left(\frac{c + a - b}{2}\right)^2 = \frac{2}{9}m_b^2. \quad (1)$$

Mặt khác, $BS^2 = BH.BK = MK.MH = MR^2 \Rightarrow BS = MR$. Kết hợp với AS = AR, suy ra $AB = AM \Rightarrow AC = 2AB \Rightarrow b = 2c$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\left(\frac{a - c}{2}\right)^2 = \frac{2}{9}.\frac{2(c^2 + a^2) - 4c^2}{4}$

$$\Rightarrow \left(\frac{a - c}{2}\right)^2 = \frac{a^2 - c^2}{9} \Rightarrow (5a - 13c)(a - c) = 0.$$

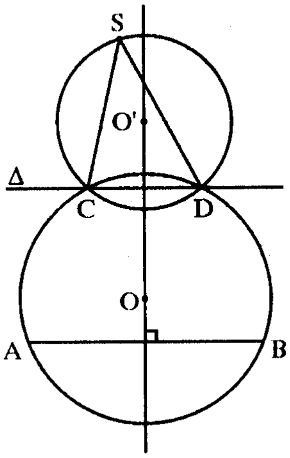
Nếu $a - c = 0$ thì $a + c = 2c \Rightarrow a + c = b$. Mâu thuẫn do a, b, c là ba cạnh của tam giác

Vậy $a - c \neq 0$. Do đó $5a - 13c = 0 \Rightarrow \frac{a}{13} = \frac{c}{5}$.

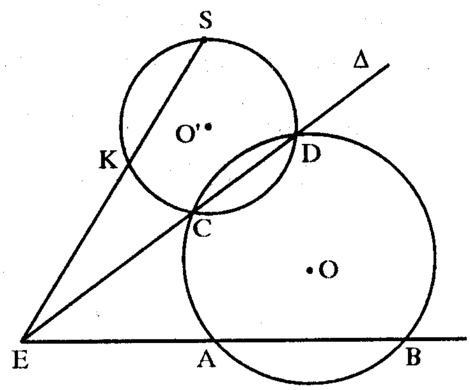
Suy ra $\frac{a}{13} = \frac{b}{10} = \frac{c}{5}$.

Ví dụ 7.15. Cho đường thẳng Δ và các điểm S, A, B không thuộc Δ. Đường tròn (O) thay đổi, đi qua A, B và cắt Δ tại C, D. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SCD luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Giải. Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SCD. Có hai trường hợp xảy ra.



Hình 7-19



Hình 7-20

Trường hợp 1 : Δ song song với AB (h.7-19).

Ta có O' thuộc trung trực của CD, mà CD // AB nên trung trực của CD chính là trung trực của AB. Vậy O' luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Trường hợp 2 : Δ không song song với AB (h.7-20).

Đặt $E = \Delta \cap (AB)$, $K = (O') \cap (ES)$, $K \neq S$. Ta có $\overline{EK}.\overline{ES} = \overline{EC}.\overline{ED} = \overline{EA}.\overline{EB}$

suy ra $\overline{EK} = \dfrac{\overline{EA}.\overline{EB}}{\overline{ES}}$ (không đổi). (1)

Vì E cố định nên từ (1) suy ra K cũng cố định. Vậy O' luôn thuộc một đường thẳng cố định là trung trực của KS.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

7.1. Cho tam giác ABC nhọn, AA', BB', CC' là các đường cao, H là trực tâm. Chứng minh rằng

$$AA'.AH + BB'.BH + CC'.CH = \frac{1}{2}(BC^2 + CA^2 + AB^2).$$

7.2.* Cho tam giác ABC cân tại A ; BD là phân giác, BD + DA = BC. Chứng minh rằng $\widehat{BAC} = 100^o$.

7.3. Cho đường tròn (O) đường kính AB và một điểm C thuộc (O) ; H là hình chiếu của C trên AB, đường tròn tâm C, bán kính CH cắt (O) tại E, F. Chứng minh rằng EF đi qua trung điểm của CH.

7.4. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Một đường tròn cắt cạnh AB tại H, F, cắt cạnh BC tại I, G, cắt cạnh CA tại K, E (AH < AF ; BI < BG ; CK < CE). Chứng minh rằng

$$AH + BI + CK = AE + BF + CG.$$

7.5. Cho đường tròn (O ; R) và điểm I cố định nằm trong đường tròn ($I \neq O$). Một đường thẳng quay quanh I, cắt (O) tại A và B. Các tiếp tuyến của (O) tại A và B cắt nhau tại M. Chứng minh rằng M chạy trên một đường thẳng cố định.

7.6. Cho ba điểm C, A, B thẳng hàng và được xắp xếp theo thứ tự đó. Một đường tròn (O) thay đổi luôn đi qua hai điểm A, B ; CM, CM' là các tiếp tuyến của (O). Chứng minh rằng :

a) M, M' luôn thuộc một đường tròn cố định.

b) Trung điểm H của MM' thuộc một đường tròn cố định.

7.7. Cho hai đường tròn (O), (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại T ; AB là tiếp tuyến chung của (O), (O') (A thuộc (O) ; B thuộc (O')). C là điểm xuyên tâm đối của A (nghĩa là AC là đường kính của (O)). Qua C, kẻ tiếp tuyến CD với (O'). Chứng minh rằng CD = CA.

7.8*. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) ; M là điểm thay đổi trên cung CD (không chứa A, B). MA, MB cắt CD tại X, Y. Chứng minh rằng $\dfrac{XD.YC}{XY}$ luôn nhận giá trị không đổi.

7.9. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Đường thẳng Δ qua (O) cắt các đoạn AB, DB, AC, DC tại H, I, J, K. Chứng minh rằng OH = OK khi và chỉ khi OI = OJ.

7.10*. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) $AC \cap BD = I$. Một đường thẳng qua I, cắt các đoạn AB, CD lần lượt tại M, N, cắt (O) tại E, F, (EM < EN < EF). Chứng minh rằng

$$\frac{1}{IE} + \frac{1}{IN} = \frac{1}{IF} + \frac{1}{IM}.$$

7.11. Cho đường tròn (O) ; A, B là hai điểm đối xứng với nhau qua O. Một đường thẳng quay quanh A cắt (O) tại C, D. Chứng minh rằng $CD^2 + DB^2 + BC^2$ nhận giá trị không đổi.

7.12. Cho tam giác ABC, trọng tâm G, nội tiếp đường tròn (O). Một đường thẳng qua G cắt (O) tại M, N. Chứng minh rằng

$$3MN^2 = (MA^2 + NA^2) + (MB^2 + NB^2) + (MC^2 + NC^2).$$

7.13*. Cho lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ tâm I, I nằm trong đường tròn (O). Các tia IA_i cắt (O) tại B_i $(1 \le i \le 6)$. Chứng minh rằng :

$$IB_1 + IB_3 + IB_5 = IB_2 + IB_4 + IB_6.$$

7.14*. Cho lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ tâm I, I nằm bên trong đường tròn (O ; R). Các tia IA_i $(1 \le i \le 6)$ cắt (O) tại B_i $(1 \le i \le 6)$. Chứng minh rằng :

$$IB_1^2 + IB_2^2 + IB_3^2 + IB_4^2 + IB_5^2 + IB_6^2 = 6R^2.$$

7.15*. Cho tam giác ABC trọng tâm G, nội tiếp đường tròn (O). GA, GB, GC theo thứ tự cắt (O) tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng :

$$GA_1 + GB_1 + GC_1 \ge GA + GB + GC.$$

7.16. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O ; R). M là một điểm không nằm trên (O). MA, MB, MC cắt (O) lần lượt tại A', B', C'. Chứng minh rằng :

$$\frac{MA.BC}{B'C'} = \frac{MB.CA}{C'A'} = \frac{MC.AB}{A'B'} = \frac{MA.MB.MC}{\left|MO^2 - R^2\right|}.$$

7.17. Cho đường tròn (O), hai điểm A, B cố định không thuộc (O). Đường thẳng Δ quay quanh A, cắt (O) tại M, N ; BM, BN cắt lại (O) tại M', N'.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN luôn đi qua một điểm cố định khác B.

b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác BM'N' luôn đi qua một điểm cố định khác B.

c) Chứng minh rằng đường thẳng M'N' luôn đi qua một điểm cố định.

Chương III

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

§8. ĐƯỜNG THẲNG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. *Phương trình tổng quát* của đường thẳng có dạng

$$ax + by + c = 0 \qquad (a^2 + b^2 \neq 0),$$

trong đó $\vec{n} = (a ; b)$ là một vectơ pháp tuyến, $\vec{n} = (b ; -a)$ là một vectơ chỉ phương.

Phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua $M_0(x_0 ; y_0)$, với vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a ; b)$ là

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

2. *Phương trình tham số* của đường thẳng đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ với vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a ; b)$ là

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

3. *Phương trình chính tắc* của đường thẳng đi qua điểm $M_0(x_0 ; y_0)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a ; b)$, $a \neq 0, b \neq 0$ là

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}.$$

4. Phương trình đường thẳng đi qua $M_0(x_0 ; y_0)$, có *hệ số góc* k là

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

5. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt $A(x_1 ; y_1)$, $B(x_2 ; y_2)$ (với $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$) là

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \text{ (VD 7.1)}$$

6. Phương trình đường thẳng đi qua $A(a ; 0)$ và $B(0 ; b)$ (với $a \neq 0, b \neq 0$) là

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ (phương trình theo đoạn chắn).}$$

7. *Vị trí tương đối của hai đường thẳng*

Cho hai đường thẳng $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

a) Hai đường thẳng cắt nhau khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 ;$$

b) Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ và

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{hoặc} \quad \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \neq 0 ;$$

c) Hai đường thẳng trùng nhau khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Đặc biệt, trong trường hợp a_2, b_2, c_2 đều khác 0, ta có

$$d_1, d_2 \text{ cắt nhau } \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} ;$$

$$d_1 // d_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} ;$$

$$d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Chú ý. Nếu hai đường thẳng có phương trình dưới dạng hệ số góc

$d_1 : y = a_1x + b_1$, $\qquad d_2 : y = a_2x + b_2$ thì

- d_1 và d_2 cắt nhau khi và chỉ khi $a_1 \neq a_2$.
- d_1 và d_2 song song khi và chỉ khi $a_1 = a_2$, $b_1 \neq b_2$.
- d_1 và d_2 vuông góc khi và chỉ khi $a_1a_2 = -1$.

8. Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0 ; y_0)$ đến đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ được tính bởi công thức

$$d(M_0 ; \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

9. Góc φ giữa hai đường thẳng $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$,

$$d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

được tính bởi công thức

$$\cos\varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

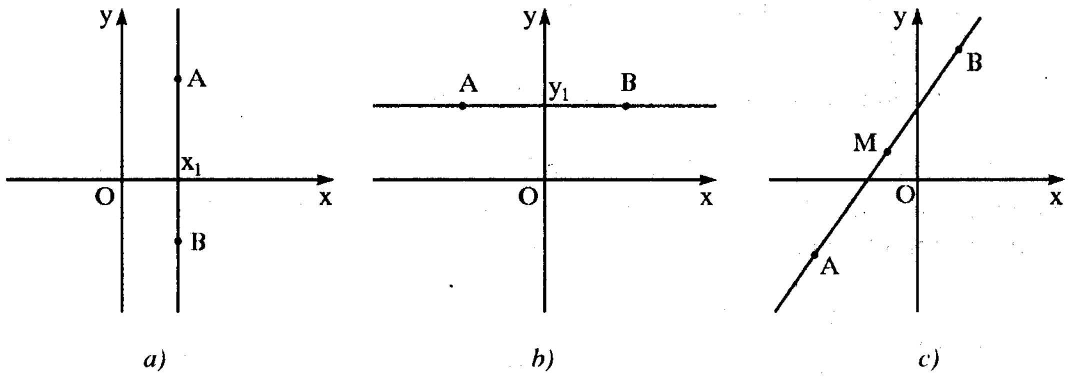
B. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 8.1. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt $A(x_1 ; y_1)$ và $B(x_2 ; y_2)$.

Giải

– Nếu $x_1 = x_2$ thì phương trình đường thẳng AB là $x - x_1 = 0$ (h.8-1a).

– Nếu $y_1 = y_2$ thì phương trình đường thẳng AB là $y - y_1 = 0$ (h.8-1b).



Hình 8-1

– Xét trường hợp $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$. Ta có $M(x ; y)$ thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi các vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương (h.8-1c).

$$\overrightarrow{AM} = (x - x_1 ; y - y_1),\ \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1 ; y_2 - y_1).$$

$$\overrightarrow{AM} \,//\, \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (*)$$

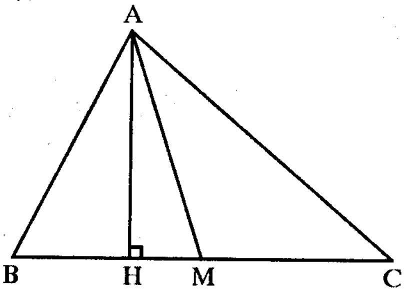
Đây chính là phương trình của đường thẳng AB.

Lưu ý. Phương trình dạng (*) thường xuyên được sử dụng trong các bài toán viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm. Dễ dàng biến đổi nó về dạng tổng quát.

Trong chương này, khi yêu cầu *viết phương trình đường thẳng*, ta hiểu là phương trình phải được viết dưới *dạng tổng quát*.

Ví dụ 8.2. Trong mặt phẳng toạ độ cho tam giác ABC với A = (1 ; –1), B = (–2 ; 1), C = (3 ; 5). Viết phương trình các đường thẳng chứa trung tuyến, đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC.

Giải. Gọi M là trung điểm đoạn thẳng BC (h.8-2), ta có $M = \left(\frac{1}{2} ; 3\right)$.



Hình 8-2

Phương trình đường thẳng AM là

$$\frac{x-1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{y+1}{3+1} \Leftrightarrow 8x + y - 7 = 0.$$

Đường thẳng chứa đường cao AH có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{BC} = (5 ; 4) \Rightarrow$ phương trình đường thẳng AH có dạng $5x + 4y + c = 0$. Vì $A \in AH$ nên $5.1 + 4(-1) + c = 0 \Rightarrow c = -1$.

Vậy phương trình đường thẳng AH là $5x + 4y - 1 = 0$.

Ví dụ 8.3. Viết phương trình các đường phân giác trong và phân giác ngoài của tam giác ABC, biết A = (2 ; 6), B = (–3 ; – 4), C = (5 ; 0). Tìm toạ độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Giải. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-5 ; -10) \\ \overrightarrow{AC} = (3 ; -6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \\ AC = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}. \end{cases}$

M(x ; y) thuộc phân giác trong của góc A khi và chỉ khi

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right) = \cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5(x-2) - 10(y-6)}{5\sqrt{5}} = \frac{3(x-2) - 6(y-6)}{3\sqrt{5}}$$

$\Leftrightarrow x = 2.$

Tương tự ta viết được phương trình đường phân giác trong của góc B là

$$x - y - 1 = 0.$$

Toạ độ tâm I của đường tròn nội tiếp ΔABC là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 2 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy I = (2 ; 1).

N thuộc phân giác ngoài của góc A khi và chỉ khi

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}\right) = -\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AN}\right).$$

Từ đó tìm được phương trình đường phân giác ngoài của góc A là y = 6.

Nhận xét

1. Các đường phân giác trong và ngoài kẻ từ một đỉnh của tam giác vuông góc với nhau. Dựa vào tính chất này, ta có thể viết ngay được phương trình đường phân giác ngoài của góc A là y = 6, phương trình đường phân giác ngoài của góc B là $x + y + 7 = 0$.

2. Ngoài cách giải trên đây, bạn đọc còn có thể giải bằng các cách khác như sau

Cách 2. Viết phương trình hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng AB và AC. Nếu B, C nằm về *hai phía* (một phía) của một trong hai đường phân giác đó thì đường này là *phân giác trong* (phân giác ngoài) của góc A, và tất nhiên đường phân giác còn lại là phân giác ngoài (phân giác trong) của góc A.

Cách 3. Dựa vào nhận xét : M thuộc phân giác trong của góc A khi và chỉ khi vectơ $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với vectơ $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$, M thuộc phân giác ngoài của góc A khi và chỉ khi vectơ $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với vectơ $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} - \dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$.

Ví dụ 8.4. Viết phương trình các cạnh(*) của tam giác ABC, biết A = (1 ; 2) và phương trình hai đường trung tuyến là $2x - y + 1 = 0$ và $x + 3y - 3 = 0$.

Giải

Dễ thấy đỉnh A không thuộc hai trung tuyến đã cho, vì toạ độ của nó không thoả mãn phương trình của hai trung tuyến. Gọi B', C' lần lượt là trung điểm của AC, AB.

Giả sử (BB') : $2x - y + 1 = 0$, (CC') : $x + 3y - 3 = 0$.

Đặt $C = (x_0 ; y_0)$. Vì $C \in$ (CC') nên $x_0 + 3y_0 - 3 = 0$. (1)

Ta lại có $x_{B'} = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{1 + x_0}{2}, y_{B'} = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{2 + y_0}{2}$. Vì $B' \in$ (BB') nên $1 + x_0 - \dfrac{2 + y_0}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x_0 - y_0 + 2 = 0$ (2). Giải hệ gồm (1) và (2) tìm được toạ độ $C = \left(-\dfrac{3}{7} ; \dfrac{8}{7}\right)$. Tương tự tìm được $B = \left(-\dfrac{4}{7} ; -\dfrac{1}{7}\right)$, từ đó áp dụng

(*) Để cho gọn, ta nói "phương trình cạnh AB" thay cho "phương trình đường thẳng chứa cạnh AB".

công thức phương trình đường thẳng đi qua hai điểm, ta viết được phương trình các cạnh của tam giác ABC :

$$BC : 9x - y + 5 = 0 ;$$

$$AB : 15x - 11y + 7 = 0 ;$$

$$AC : 3x - 5y + 7 = 0.$$

Ví dụ 8.5. Cho hai đường thẳng $(d_1) : a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $(d_2) : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ cắt nhau tại P và đường thẳng d. Chứng minh rằng d đi qua P khi và chỉ khi phương trình của d có dạng

$$\lambda(a_1x + b_1y + c_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \quad (\lambda^2 + \mu^2 \neq 0).$$

Giải. Giả sử $P = (x_0 ; y_0)$; $\vec{n}, \overrightarrow{n_1}(a_1 ; b_1), \overrightarrow{n_2}(a_2 ; b_2)$ theo thứ tự là các vectơ pháp tuyến của d, d_1, d_2. Vì d_1, d_2 cắt nhau nên $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ không cùng phương, suy ra tồn tại các số λ, μ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\vec{n} = \lambda\overrightarrow{n_1} + \mu\overrightarrow{n_2} = (\lambda a_1 + \mu a_2 ; \lambda b_1 + \mu b_2).$$

Vậy : d đi qua P khi và chỉ khi phương trình của d có dạng

$$(\lambda a_1 + \mu a_2)(x - x_0) + (\lambda b_1 + \mu b_2)(y - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda(a_1x + b_1y + c_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2)$$

$$-\lambda(a_1x_0 + b_1y_0 + c_1) - \mu(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda(a_1x + b_1y + c_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2) = 0.$$

Chú ý. Cho hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau tại P. Tập hợp các đường thẳng đi qua P được gọi là *chùm đường thẳng* tâm P, tạo bởi d_1 và d_2. Ví dụ 8.5 cho ta một cách mô tả đẹp mọi đường thẳng trong một chùm thông qua hai đường thẳng cho trước của chùm. Nếu đặt $d_1(x, y) = a_1x + b_1y + c_1$; $d_2(x, y) = a_2x + b_2y + c_2$ thì phương trình của d có dạng $\lambda d_1(x,y) + \mu d_2(x,y) = 0$.

Ví dụ 8.6. Tìm toạ độ trực tâm tam giác ABC, biết phương trình ba cạnh của tam giác là

$$(BC) : 3x - y - 3 = 0$$

$$(CA) : 3x - 2y - 6 = 0$$

$$(AB) : x + y - 3 = 0.$$

Giải. Đường cao AA' thuộc chùm đường thẳng tâm A, tạo bởi (AB) và (AC), phương trình của nó có dạng

$$\lambda(x + y - 3) + \mu(3x - 2y - 6) = 0$$

hay $\qquad (\lambda + 3\mu)x + (\lambda - 2\mu)y - 3\lambda - 6\mu = 0.$

Vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}(3\,;-1)$ của (BC) và vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}(\lambda+3\mu\,;\lambda-2\mu)$ của (AA') vuông góc nên

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow 3(\lambda + 3\mu) - (\lambda - 2\mu) = 0 \Leftrightarrow 2\lambda + 11\mu = 0.$$

Chọn $\lambda = 11$, $\mu = -2$ ta được phương trình đường cao (AA') là

$$5x + 15y - 21 = 0.$$

Tương tự ta tìm được phương trình của đường cao (BB') là $4x + 6y - 15 = 0$.

Toạ độ trực tâm H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 5x + 15y - 21 = 0 \\ 4x + 6y - 15 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ tìm được $x = \dfrac{33}{10}$, $y = \dfrac{3}{10}$. Vậy $H = \left(\dfrac{33}{10}\,;\,\dfrac{3}{10}\right)$.

Nhận xét. Bằng phương pháp chùm đường thẳng, ta có thể tìm được toạ độ trực tâm tam giác mà không cần thông qua việc tìm toạ độ các đỉnh của tam giác.

Ví dụ 8.7. Tam giác ABC có C = (4 ; 4), đường cao và trung tuyến kẻ từ đỉnh A có phương trình lần lượt là $2x - 3y + 12 = 0$, $2x + 3y = 0$. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC.

Giải

Toạ độ của A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x - 3y + 12 = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (-3\,;2).$

Phương trình cạnh AC là

$$\frac{x+3}{4+3} = \frac{y-2}{4-2} \Leftrightarrow 2x - 7y + 20 = 0.$$

Đường thẳng BC qua C, có vectơ pháp tuyến là vectơ chỉ phương $\vec{u}(3\,;2)$ của đường cao (AH). Phương trình đường thẳng BC là $3(x - 4) + 2(y - 4) = 0$ hay

$$3x + 2y - 20 = 0.$$

Toạ độ trung điểm M của cạnh BC là nghiệm của hệ gồm phương trình (AM) và (BC) :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x + 2y - 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow M = (12\,;-8).$$

Từ đó $x_B = 2x_M - x_C = 20$, $y_B = 2y_M - y_C = -20$.

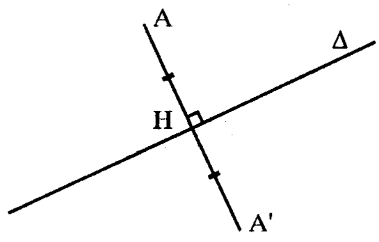
Vậy B = (20 ; – 20). Phương trình cạnh AB là

$$\frac{x+3}{23} = \frac{y-2}{-22} \Leftrightarrow 22x + 23y + 20 = 0.$$

Ví dụ 8.8. Cho đường thẳng Δ có phương trình $x-3y-6=0$ và điểm $A(2\,;-4)$. Tìm toạ độ điểm A' đối xứng với A qua Δ.

Giải (h.8-3). Đường thẳng Δ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1\,;-3)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A, vuông góc với Δ thì d nhận $\vec{n}$ là vectơ chỉ phương $\Rightarrow$ phương trình tham số của d là

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -4 - 3t. \end{cases}$$



Hình 8-3

Thay x, y từ phương trình tham số của d vào phương trình Δ ta được

$$2 + t + 3(4 + 3t) - 6 = 0 \Rightarrow t = -\frac{4}{5}$$

$\Rightarrow$ Toạ độ giao điểm H của d và Δ là

$$\begin{cases} x = 2 - \dfrac{4}{5} = \dfrac{6}{5} \\ y = -4 + \dfrac{12}{5} = \dfrac{-8}{5} \end{cases} \Rightarrow H = \left(\frac{6}{5}\,; \frac{-8}{5}\right).$$

Từ đó ta có toạ độ của A' là

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = \dfrac{2}{5} \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = \dfrac{4}{5} \end{cases}. \text{ Vậy } A' = \left(\frac{2}{5}\,; \frac{4}{5}\right).$$

Nhận xét. Có thể đặt $A' = (x_0\,; y_0)$. Ta có $H = \left(\dfrac{x_0+2}{2}\,; \dfrac{y_0-4}{2}\right)$. Từ đó, với chú ý rằng $\overrightarrow{AA'} \perp \Delta$ và $H \in \Delta$, ta tìm được toạ độ của A'.

Ví dụ 8.9. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC biết $A(2\,;-4)$ và phương trình các đường phân giác của các góc B, C lần lượt là $x + y - 2 = 0$ và $x - 3y - 6 = 0$.

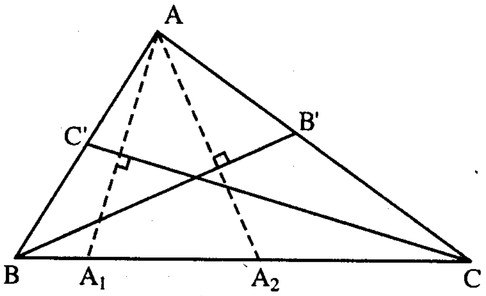
Giải

Gọi A_1, A_2 theo thứ tự là các điểm đối xứng của A qua các đường phân giác CC' và BB', khi đó A_1, A_2 đều thuộc đường thẳng BC (h.8-4).

Theo VD 8.8, ta có $A_1 = \left(\frac{2}{5}; \frac{4}{5}\right)$.

Bằng cách tương tự, ta tìm được $A_2 = (6\ ;\ 0)$. Vậy phương trình cạnh BC chính là phương trình đường thẳng A_1A_2 :

$$\frac{x - \frac{2}{5}}{6 - \frac{2}{5}} = \frac{y - \frac{4}{5}}{-\frac{4}{5}} \Leftrightarrow x + 7y - 6 = 0.$$



Hình 8-4

Đường thẳng BA thuộc chùm đường thẳng xác định bởi hai đường thẳng BC và BB', do đó phương trình (BA) có dạng

$$\alpha(x + 7y - 6) + \beta(x + y - 2) = 0 \quad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0).$$

$A \in (BA)$ nên

$$\alpha(2 - 7.4 - 6) + \beta(2 - 4 - 2) = 0 \Rightarrow 8\alpha + \beta = 0.$$

Chọn $\alpha = 1, \beta = -8$ ta được phương trình cạnh BA là

$$7x + y - 10 = 0.$$

Tương tự, ta có phương trình cạnh AC là $x - y - 6 = 0$.

Nhận xét. Sau khi viết được phương trình cạnh BC, ta có thể tìm toạ độ các đỉnh B, C, sau đó viết phương trình các cạnh AB, AC theo công thức phương trình đường thẳng đi qua hai điểm.

Ví dụ 8.10. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A(2 ; −1) và hợp với đường thẳng d : $5x - 2y + 3 = 0$ một góc 45^o.

Giải

Trước hết ta nhận thấy rằng đường thẳng Δ qua A, song song với trục tung không tạo với d góc 45^o, vì d có hệ số góc là $k_1 = \frac{5}{2} \neq \pm 1$. Do đó phương trình đường thẳng Δ cần tìm có dạng

$$y = k(x - 2) - 1 \Leftrightarrow kx - y - 2k - 1 = 0.$$

Ta có vectơ pháp tuyến của Δ và d lần lượt là $\overrightarrow{n_1} = (k; -1)$, $\overrightarrow{n_2} = (5; -2)$, do đó Δ tạo với d góc 45^o khi và chỉ khi

$$\left|\cos\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right)\right| = \cos 45^o = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{|5k + 2|}{\sqrt{29}.\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow\ 2(25k^2 + 20k + 4) = 29(k^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow\ 21k^2 + 40k - 21 = 0.$$

Giải phương trình tìm được $k_1 = \frac{3}{7}, k_2 = -\frac{7}{3}$.

Vậy có hai đường thẳng thoả mãn điều kiện bài toán là

$$y = \frac{3}{7}(x-2) - 1 \quad \text{hay} \quad 3x - 7y - 13 = 0$$

và $$y = -\frac{7}{3}(x-2) - 1 \quad \text{hay} \quad 7x + 3y - 11 = 0.$$

Nhận xét. Có thể tính khoảng cách AH từ A đến đường thẳng d, sau đó tìm $M \in d$ sao cho $MA = AH\sqrt{2}$, bằng cách giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 = 2AH^2 \\ 5x - 2y + 3 = 0. \end{cases}$$

Từ đó viết được phương trình đường thẳng cần tìm là AM.

Ví dụ 8.11. Cho các điểm A(1 ; 0), B(−2 ; 4), C(−1 ; 4), D(3 ; 5). Tìm tập hợp các điểm M sao cho diện tích hai tam giác MAB và MCD bằng nhau.

Giải

Ta có AB = 5, CD = $\sqrt{17}$. Phương trình đường thẳng AB là

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y}{4} \Leftrightarrow 4x + 3y - 4 = 0.$$

Phương trình đường thẳng CD là

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{1} \Leftrightarrow x - 4y + 17 = 0.$$

Giả sử $M = (x_0 ; y_0)$.

Đường cao kẻ từ M của tam giác MAB có độ dài là

$$d(M ; AB) = \frac{|4x_0 + 3y_0 - 4|}{5}.$$

Đường cao kẻ từ M của tam giác MCD có độ dài là

$$d(M ; CD) = \frac{|x_0 - 4y_0 + 17|}{\sqrt{17}}.$$

Do đó : $S_{MAB} = S_{MCD} \Leftrightarrow AB.d(M ; AB) = CD.d(M ; CD)$

$$\Leftrightarrow |4x_0 + 3y_0 - 4| = |x_0 - 4y_0 + 17|$$

$$\Leftrightarrow 4x_0 + 3y_0 - 4 = \pm (x_0 - 4y_0 + 17)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x_0+7y_0 - 21 = 0 \\ 5x_0 - y_0 + 13 = 0. \end{array}\right.$$

Vậy tập hợp các điểm M là hai đường thẳng có phương trình

$$3x + 7y - 21 = 0 \quad \text{và} \quad 5x - y + 13 = 0.$$

Ví dụ 8.12. Viết phương trình đường phân giác của góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng

$$d_1 : x - 2y - 5 = 0 \quad \text{và} \quad d_2 : 2x - y + 2 = 0.$$

Giải (h. 8-7)

Cách 1. Toạ độ giao điểm I của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow I = (-3 ; -4).$$

Lấy $A(5 ; 0) \in d_1$, $B(-1 ; 0) \in d_2$.

Ta có $\overrightarrow{IA} = (8 ; 4)$, $\overrightarrow{IB} = (2;4) \Rightarrow |\overrightarrow{IA}| = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$; $|\overrightarrow{IB}| = 2\sqrt{5}$.

Vì $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = 32 > 0$ nên góc AIB nhọn, do đó : $M(x ; y)$ thuộc phân giác của góc nhọn tạo bởi d_1 và d_2 khi và chỉ khi

$$\cos\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IM}\right) = \cos\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IM}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{8(x + 3) + 4(y + 4)}{4\sqrt{5}} = \frac{2(x + 3) + 4(y + 4)}{2\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow x - y - 1 = 0.$$

Đây chính là phương trình đường phân giác cần tìm.

Nhận xét. Có thể lấy A, B tuỳ ý lần lượt thuộc d_1 và d_2. Nếu góc AIB là góc tù thì : M thuộc phân giác của góc nhọn tạo bởi d_1 và d_2 khi và chỉ khi $\cos\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IM}\right) = -\cos\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IM}\right)$.

Từ đó cũng suy ra phương trình đường phân giác của góc nhọn.

Cách 2. Phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi d_1 và d_2 là

$$\frac{x - 2y - 5}{\sqrt{5}} = \pm\frac{2x - y + 2}{\sqrt{5}}$$

$\Leftrightarrow x + y + 7 = 0$ (1) hoặc $x - y - 1 = 0.$ (2)

Chọn điểm P(5 ; 0) $\in d_1$ ($P \neq I$). So sánh khoảng cách từ P đến các đường thẳng (1) và (2). Khoảng cách từ P đến đường thẳng nào *ngắn hơn* thì đường thẳng đó là phân giác của góc nhọn.

Ví dụ 8.13. Cho hai điểm A(2 ; 5), B(–4 ; 5) và đường thẳng $\Delta : x - 2y + 3 = 0$. Tìm toạ độ các điểm M, N trên Δ sao cho NA + NB nhỏ nhất.

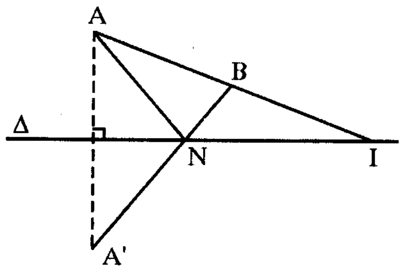
Giải

Trước hết ta xét xem A và B ở cùng phía hay khác phía đối với đường thẳng Δ. Phương trình đường thẳng AB là y = 5, suy ra giao điểm của (AB) và Δ là I(7 ; 5). Khi đó $\overrightarrow{IA} = (-5 ; 0)$, $\overrightarrow{IB} = (-11 ; 0)$. Hai vectơ $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}$ cùng hướng nên A, B ở cùng phía đối với I, tức là cùng phía đối với Δ (h.8-5).

Lấy A' đối xứng với A qua Δ, dễ dàng tìm được A' = (4 ; 1). Ta có

$NA + NB = NA' + NB \geq A'B.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow N \in A'B \Leftrightarrow N = A'B \cap \Delta$. Điểm N cần tìm là giao điểm của Δ và đường thẳng $A'B : -x - 2y + 6 = 0$.



Hình 8-5

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ -x - 2y + 6 = 0 \end{cases}$

tìm được $N = \left(\dfrac{3}{2} ; \dfrac{9}{4}\right)$.

Nhận xét. Ta có thể dùng dấu hiệu sau đây để kiểm tra xem hai điểm ở cùng phía hay khác phía đối với đường thẳng ax + by + c = 0. (*)

Đặt $f(x,y) = ax + by + c$. Khi đó hai điểm $M_1(x_1 ; y_1)$ và $M_2(x_2 ; y_2)$ ở cùng phía đối với (*) khi và chỉ khi $f(x_1,y_1).f(x_2,y_2) > 0$.

Ví dụ 8.14. Cho góc vuông xOy và hai điểm A, C chuyển động theo thứ tự trên Ox, Oy sao cho OA + OC = b (b là độ dài cho trước). Gọi B là đỉnh của hình chữ nhật OABC. Chứng minh rằng đường thẳng Δ qua B, vuông góc với đường thẳng AC luôn đi qua một điểm cố định.

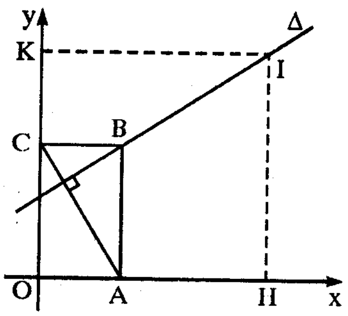
Giải (h.8-6)

Chọn hệ trục toạ độ Oxy, gọi A = (a ; 0), C = (0 ; c). Khi đó B = (a ; c) và a + c = b (a, c dương). Vectơ chỉ phương $\vec{u}(a ; -c)$ của (AC) chính là vectơ pháp tuyến của Δ, nên phương trình đường thẳng Δ có dạng

$$a(x-a) - c(y-c) = 0$$
$$\Leftrightarrow ax - cy + c^2 - a^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{c}x - y + b\left(1 - \frac{a}{c}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-b)\frac{a}{c} - (y-b) = 0.$$

Dễ thấy Δ đi qua điểm I(b ; b).

Vậy đường thẳng Δ luôn đi qua một điểm cố định I. Đó chính là đỉnh của hình vuông OHIK với $H \in Ox$, $K \in Oy$, OH = OK = b.



Hình 8-6

Ví dụ 8.15. Xác định m để khoảng cách từ điểm A(3 ; 1) đến đường thẳng

$$x + (m-1)y + m = 0 \qquad (1)$$

là lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Giải

Dễ thấy các đường thẳng đang xét luôn đi qua điểm P(−1 ; −1) với mọi m. Giả sử d là một đường thẳng đi qua P, hạ $AH \perp d$ ($H \in d$). Ta luôn có $AH \leq AP$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi H trùng P, tức là d vuông góc với AP. Khi đó vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1 ; m-1)$ của d cùng phương với $\overrightarrow{PA}(4 ; 2)$, nên $\frac{1}{4} = \frac{m-1}{2}$, suy ra $4(m-1) = 2$, từ đó $m = \frac{3}{2}$.

Thay giá trị này của m vào (1), ta được đường thẳng d' : $2x + y + 3 = 0$.

Khoảng cách từ A(3 ; 1) đến d' bằng

$$\frac{|2.3 + 1 + 3|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

Nhận xét. Có thể biểu thị khoảng cách từ A đến đường thẳng (1) như một hàm của m :

$$h(m) = \frac{|3 + 2m - 1|}{\sqrt{1 + (m-1)^2}} = \frac{2|m+1|}{\sqrt{m^2 - 2m + 2}},$$ rồi áp dụng phương pháp tam thức bậc hai để tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$h^2(m) = \frac{4(m^2 + 2m + 1)}{m^2 - 2m + 2}.$$

Ví dụ 8.16. Cho điểm A(1 ; 1). Hãy tìm toạ độ điểm B trên đường thẳng y = 3 và điểm C trên trục hoành sao cho tam giác ABC là tam giác đều.

Giải (h.8-7)

Giả sử đã tìm được các điểm B, C theo yêu cầu bài toán, trong đó C có hoành độ dương. Dựng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt trục Ox tại điểm E, ta có $\widehat{AEC} = 120^\circ$. Đường thẳng EA có hệ số góc là $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$, nên phương trình của EA là

$$y-1 = -\sqrt{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} + 1.$$

Vậy, $E = \left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} ; 0\right)$.

Đường thẳng EB tạo với Ox góc 60° nên phương trình của (EB) là

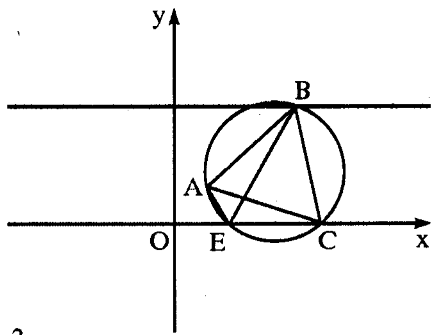
$$y = \sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow y = \sqrt{3}.x - \sqrt{3} - 1.$$

Hoành độ của B là nghiệm của phương trình

$\sqrt{3}x - \sqrt{3} - 1 = 3$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}x = 4 + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$

Vậy $B = \left(\dfrac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} ; 3\right)$.



Hình 8-7

Giả sử $C = (\alpha ; 0)$, ta có :

$$CA^2 = CB^2 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 + 1 = \left(\alpha - \frac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^2 + 9$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{5+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}. \text{ Vậy } C = \left(\frac{5+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} ; 0\right).$$

Gọi d là đường thẳng qua A, song song với Oy. Lấy B', C' đối xứng với B, C qua d, ta có tam giác AB'C' là tam giác đều.

Khi đó : $x_{B'} = 2x_A - x_B = \dfrac{\sqrt{3}-4}{\sqrt{3}} \Rightarrow B' = \left(\dfrac{\sqrt{3}-4}{\sqrt{3}} ; 3\right)$

$x_{C'} = 2x_A - x_C = \dfrac{\sqrt{3}-5}{\sqrt{3}} \Rightarrow C' = \left(\dfrac{\sqrt{3}-5}{\sqrt{3}} ; 0\right).$

Ví dụ 8.17. Cho hình vuông ABCD. E và F là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$, (AE) cắt (BF) tại I. Chứng minh rằng $\widehat{AIC} = 90^o$.

Giải (h.8-8)

Giả sử cạnh hình vuông có độ dài bằng 1. Gắn hệ trục toạ độ Đề-các Oxy sao cho D = (0 ; 0), C = (1 ; 0), A = (0 ; 1). (1)

Ta có : $E = \left(1; \frac{2}{3}\right)$, $F = \left(\frac{3}{2}; 0\right)$, $B = (1 ; 1)$.

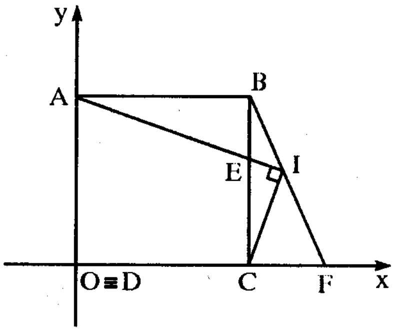
Phương trình đường thẳng AE là : $x + 3y - 3 = 0$

Phương trình đường thẳng BF là : $2x + y - 3 = 0$

Toạ độ của I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 3y - 3 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow I = \left(\frac{6}{5}; \frac{3}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AI} = \left(\frac{6}{5}; -\frac{2}{5}\right) ; \overrightarrow{CI} = \left(\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right).$$



Hình 8-8

Khi đó $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CI} = \frac{6}{25} - \frac{6}{25} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{CI}$.

Vậy $\widehat{AIC} = 90^o$.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

8.1. Cho hai đường thẳng

$$\Delta : x - 3y + 1 = 0 ; d : 2x + y - 4 = 0$$

và điểm A(2 ; 0).

a) Viết phương trình đường thẳng Δ' đối xứng với Δ qua A.

b) Viết phương trình đường thẳng d' đối xứng với d qua Δ.

8.2. Cho tam giác ABC có phương trình cạnh BC là $7x + 5y - 8 = 0$, phương trình các đường cao BB' : $9x - 3y - 4 = 0$; CC' : $x + y - 2 = 0$.
Viết phương trình các cạnh AB, AC và đường cao AA'.

8.3. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC, biết B = (2 ; −1), đường cao kẻ từ A và phân giác của góc C có phương trình lần lượt là

$$3x - 4y + 27 = 0 \text{ và } x + 2y - 5 = 0.$$

8.4. Viết phương trình các cạnh của tam giác đều ABC biết A = (2 ; 6), cạnh BC nằm trên đường thẳng d : $\sqrt{3}x - 3y + 6 = 0$.

8.5. Cho tam giác ABC có diện tích $S = \frac{3}{2}$, toạ độ các đỉnh $A = (2 ; -3)$, $B = (3 ; -2)$ và trọng tâm tam giác nằm trên đường thẳng $3x - y - 8 = 0$. Tìm toạ độ đỉnh C.

8.6. Cho đường thẳng Δ có phương trình

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha + 2\cos\alpha + 1 = 0.$$

Chứng minh rằng khi α thay đổi, Δ luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

8.7. Cho tam giác ABC vuông tại A, các đỉnh A, B nằm trên trục hoành, phương trình cạnh BC là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$. Tìm toạ độ trọng tâm tam giác, biết bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng 2.

8.8. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm A và B chuyển động lần lượt trên các tia Ox, Oy sao cho $OA + OB = k$ (không đổi). Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

8.9. Cho góc vuông xOy và hai điểm A, B cố định trên Ox, Oy. Các điểm M, N di chuyển lần lượt trên các cạnh Ox, Oy sao cho $\frac{OM}{OA} + \frac{ON}{OB} = 2$. Chứng minh rằng các giao điểm của (AN) và (BM) chạy trên một đường thẳng cố định. Viết phương trình đường thẳng đó.

8.10. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm A(a ; b) nằm trong góc xOy. Viết phương trình đường thẳng qua A, cắt các tia Ox, Oy tại M, N sao cho OM + ON nhỏ nhất.

8.11. Cho hai điểm A(2 ; − 5), B(− 4 ; 5) và đường thẳng $\Delta : x - 2y + 3 = 0$. Tìm trên Δ điểm M sao cho $|MA - MB|$ lớn nhất ;

§9. ĐƯỜNG TRÒN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Phương trình đường tròn tâm I(a ; b), bán kính R là

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

2. Phương trình

$$C(x,y) = x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \qquad (1)$$

với $a^2 + b^2 > c$, biểu diễn một đường tròn (C) có tâm $I(-a; -b)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

3. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đường tròn là

$$x_0x + y_0y + a(x + x_0) + b(y + y_0) + c = 0.$$

4. Phương tích của điểm $M(x_0 ; y_0)$ đối với đường tròn (C) là

$$\mathcal{P}_{M/(C)} = x_0^2 + y_0^2 + 2ax_0 + 2by_0 + c = C(x_0, y_0).$$

5. Trục đẳng phương của hai đường tròn không đồng tâm

$$(C_1) : x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0$$

$$(C_2) : x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0,$$

trong đó $(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 \neq 0$, có phương trình

$$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + \frac{c_1 - c_2}{2} = 0.$$

B. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 9.1. Viết phương trình đường tròn tâm $A(4; 3)$, tiếp xúc với đường thẳng $x - 3y - 5 = 0$.

Giải. Khoảng cách từ A đến đường thẳng là

$$d = \frac{|4 - 3.3 - 5|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}.$$

Khoảng cách này bằng bán kính của đường tròn nên phương trình của đường tròn là $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 10$, hay $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0$.

Ví dụ 9.2. Cho họ đường tròn (C_m) có phương trình

$$x^2 + y^2 - (m - 2)x + 2my - 1 = 0 \text{ (m là tham số)}.$$

Chứng minh rằng khi m thay đổi, các đường tròn (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định.

Giải

Ta có $(x_0; y_0) \in (C_m)\ \forall M$ khi và chỉ khi

$$(x_0 - 2y_0)m = x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 1, \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 2y_0 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x_0 ; y_0) = (-2 ; -1) \\ (x_0 ; y_0) = \left(\frac{2}{5} ; \frac{1}{5}\right) \end{array} \right.$$

Vậy họ đường tròn (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định là

$$A(-2 ; -1) \text{ và } B\left(\frac{2}{5} ; \frac{1}{5}\right).$$

Nhận xét. Tâm của các đường tròn (C_m) luôn thuộc đường trung trực của AB.

Ví dụ 9.3. Trên mặt phẳng toạ độ cho các điểm A(1 ; 2), B(0 ; 1), C(–2 ; 1).

a) Viết phương trình đường tròn (T) ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Giả sử M là điểm chuyển động trên đường tròn (T). Chứng minh rằng trọng tâm G của tam giác MBC thuộc một đường tròn cố định, viết phương trình đường tròn đó.

Giải

a) E(x ; y) là tâm đường tròn (T) khi và chỉ khi $EA^2 = EB^2 = EC^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = x^2 + (y-1)^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2.$

Giải hệ tìm được x = –1, y = 3. Vậy (T) có phương trình

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 5.$$

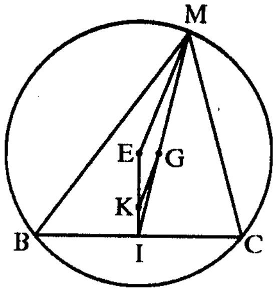
Đường tròn có tâm E(–1 ; 3), bán kính $R = \sqrt{5}$.

b) (h.9-1) Gọi I là trung điểm của BC, ta có I = (–1 ; 1).

Kẻ GK // ME (K ∈ EI), ta có

$$\overrightarrow{KE} = -2\overrightarrow{KI} \Rightarrow \overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{OE} + 2\overrightarrow{OI}}{1+2} = \left(-1 ; \frac{5}{3}\right)$$

$$\Rightarrow K = \left(-1 ; \frac{5}{3}\right).$$



Hình 9-1

Mặt khác, $KG = \frac{1}{3}EM = \frac{\sqrt{5}}{3}$, vậy trọng tâm G của tam giác MBC thuộc đường tròn tâm K, bán kính $\frac{\sqrt{5}}{3}$. Phương trình của đường tròn này là

$$(x+1)^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}.$$

Ví dụ 9.4. Cho đường tròn tâm $A(2 ; 3)$, bán kính $R = 1$.

a) Tìm điều kiện của k để đường thẳng $\Delta : y = kx$ cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm giá trị của k để đường thẳng Δ cắt đường tròn tạo thành dây cung có độ dài bằng $\sqrt{2}$.

Giải. a) Phương trình đường tròn tâm $A(2 ; 3)$ bán kính $R = 1$ là

$$(x-2)^2+(y-3)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0. \qquad (1)$$

Toạ độ giao điểm của đường thẳng Δ và đường tròn là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = kx \\ x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = kx \\ (1+k^2)x^2 - 2(2+3k)x + 12 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Đường thẳng Δ cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = (2+3k)^2 - 12(1+k^2) > 0$$

$$\Leftrightarrow 3k^2 - 12k + 8 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6-\sqrt{12}}{3} < k < \frac{6+\sqrt{12}}{3}.$$

b) Đường thẳng Δ cắt đường tròn tạo thành dây cung có độ dài bằng $\sqrt{2}$ khi và chỉ khi khoảng cách từ A đến đường thẳng Δ là $\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, mặt khác, khoảng cách từ $A(2;3)$ đến đường thẳng $\Delta : kx - y = 0$ là $\frac{|2k-3|}{\sqrt{k^2+1}}$ nên ta có

$$\frac{|2k-3|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2(2k-3)^2 = k^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 7k^2 - 24k + 17 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = \dfrac{17}{7}. \end{array}\right.$$

Ví dụ 9.5. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1 ; -1)$ và tiếp xúc với đường tròn $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$.

Giải

Đường tròn đã cho có tâm $I(3\ ;4)$ và bán kính $R = 2$. Phương trình đường thẳng đi qua $A(1\ ;-1)$ có dạng

$$\alpha(x-1) + \beta(y+1) = 0 \text{ (với } \alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha x + \beta y - \alpha + \beta = 0.$$

Đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn nên khoảng cách từ $I(3\ ;4)$ đến Δ bằng 2, tức là

$$\frac{|3\alpha + 4\beta - \alpha + \beta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = 2$$

$$\Leftrightarrow (2\alpha + 5\beta)^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2) \Leftrightarrow 20\alpha\beta + 21\beta^2 = 0.$$

Chọn $\alpha = 1$ ta có $\beta = 0$ hoặc $\beta = -\frac{20}{21}$.

Vậy có hai đường thẳng thoả mãn yêu cầu bài toán là

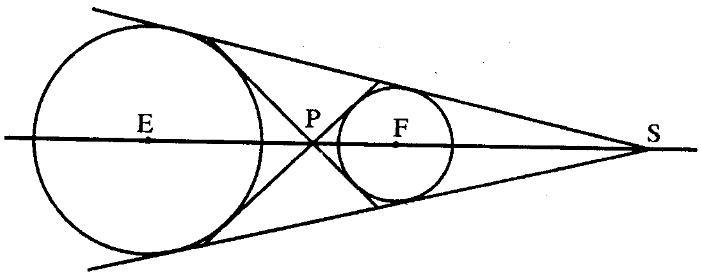
$$x - 1 = 0 \text{ và } 21x - 20y - 41 = 0.$$

Nhận xét. Nếu chỉ xét các tiếp tuyến có phương trình dạng $y = k(x-1) - 1$, sẽ bỏ sót tiếp tuyến $x - 1 = 0$.

Ví dụ 9.6. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn

$(C_1): x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0;$

$(C_2): x^2 + y^2 - 12x - 6y + 44 = 0.$



Hình 9-2

Giải

Đường tròn (C_1) có tâm $E(3\ ;0)$, bán kính $R_1 = 2$.

Đường tròn (C_2) có tâm $F(6\ ;3)$, bán kính $R_2 = 1$.

Để ý rằng $x_F - x_E = 3 = R_1 + R_2 < EF = 3\sqrt{2}$ nên hai đường tròn ngoài nhau. Dễ thấy đường thẳng $x = 5$ là một tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).

Ta tìm các tiếp tuyến d dạng $y = ax + b \Leftrightarrow ax - y + b = 0$.

Khoảng cách từ E, F đến d lần lượt là

$$\frac{|3a + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2 \ ; \ \frac{|6a - 3 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 1.$$

Ta có hệ (I) $\begin{cases}(3a + b)^2 = 4(a^2 + 1) \\ 3a + b = 2(6a - 3 + b)\end{cases}$ hoặc

(II) $\begin{cases}(3a + b)^2 = 4(a^2 + 1) \\ 3a + b = -2(6a - 3 + b)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{9 + \sqrt{17}}{8} \\ b = \dfrac{-33 - 9\sqrt{17}}{8}\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = \dfrac{9 - \sqrt{17}}{8} \\ b = \dfrac{-33 + 9\sqrt{17}}{8}\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 0 \\ b = 2.\end{cases}$$

Vậy có 4 tiếp tuyến chung của hai đường tròn với phương trình là

$$x=5\ ;\ y=2\ ;\ y=\frac{9+\sqrt{17}}{8}x-\frac{33+9\sqrt{17}}{8}\ ;\ y=\frac{9-\sqrt{17}}{8}x-\frac{33-9\sqrt{17}}{8}.$$

Nhận xét. Gọi S và P lần lượt là giao điểm của đường thẳng EF với tiếp tuyến chung ngoài và tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn (h.9-2). Áp dụng định lí Ta-lét ta có $\dfrac{\overline{SE}}{\overline{SF}} = -\dfrac{\overline{PE}}{\overline{PF}} = \dfrac{R_1}{R_2} = 2$. Như vậy ta có thể tìm được toạ độ các điểm S và P, sau đó viết phương trình các đường thẳng đi qua S hoặc P và tiếp xúc với một trong hai đường tròn. Đó chính là các tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

Ví dụ 9.7. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 1 = 0$ và họ đường tròn

$$(C_m): x^2 + y^2 - 2(m + 1)x + 4my - 5 = 0.$$

Chứng minh rằng có hai đường tròn của họ (C_m) tiếp xúc với (C). Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn đó.

Giải

Đường tròn (C) có tâm O, bán kính $R = 1$. (C_m) tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ $\begin{cases}x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2(m + 1)x + 4my - 5 = 0\end{cases}$ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 2(m+1)x - 4my + 4 = 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $\Delta_m : 2(m+1)x - 4my + 4 = 0$ tiếp xúc với đường tròn

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad d(O;\Delta_m) = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{4(m+1)^2 + 16m^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = \frac{3}{5}. \end{array}\right.$$

Vậy, có hai đường tròn của họ (C_m) tiếp xúc với (C) là

$(C_{-1}) : x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$, tâm $I_1(0\,;2)$, bán kính $R_1 = 3$;

$\left(C_{\frac{3}{5}}\right) : x^2 + y^2 - \frac{16}{5}x + \frac{12}{5}y - 5 = 0$, tâm $I_2\left(\frac{8}{5};-\frac{6}{5}\right)$, bán kính $R_2 = 3$.

Vì $I_1I_2 = \frac{8\sqrt{5}}{5} < R_1 + R_2$ và $R_1 = R_2$ nên hai đường tròn chỉ có hai tiếp tuyến chung ngoài song song với I_1I_2. Tiếp tuyến nhận vectơ $\overrightarrow{I_1I_2} = \left(\frac{8}{5};-\frac{16}{5}\right)$ làm vectơ chỉ phương hay vectơ $\vec{n} = (2\,;1)$ làm vectơ pháp tuyến $\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến có dạng $2x + y + c = 0$. Khoảng cách từ $I_1(0\,;2)$ đến tiếp tuyến bằng 3 nên $\frac{|2+c|}{\sqrt{5}} = 3 \Rightarrow c = -2 \pm 3\sqrt{5}$.

Vậy phương trình hai tiếp tuyến chung là

$$2x + y - 2 \pm 3\sqrt{5} = 0.$$

Ví dụ 9.8. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A(3 ; 6), B(7 ; 4) và tiếp xúc với đường thẳng $d : x - 3y - 5 = 0$.

Giải

Phương trình trung trực của đoạn thẳng AB là

$$(x-3)^2 + (y-6)^2 = (x-7)^2 + (y-4)^2$$
$$\Leftrightarrow 2x - y - 5 = 0.$$

Khoảng cách từ tâm I(x ; y) của đường tròn đến đường thẳng d là

$$\frac{|x - 3y - 5|}{\sqrt{10}} = IA = \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2}.$$

Toạ độ tâm I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ (x - 3y - 5)^2 = 10\left[(x-3)^2 + (y-6)^2\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 5 \\ 9x^2 + y^2 + 6xy - 50x - 150y + 425 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 5 \\ x^2 - 16x + 48 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 12 \\ y = 19. \end{cases}$$

Phương trình các đường tròn cần tìm là

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 10 \text{ và } (x-12)^2 + (y-19)^2 = 250.$$

Ví dụ 9.9. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm $A(1\,;1)$; $B(0\,;2)$ và tiếp xúc với đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 10x - 10y + 34 = 0$.

Giải

Đường tròn (C) có tâm $S(5\,;5)$, bán kính $R = 4$.

Giả sử đường tròn (C') cần tìm có tâm $I(a\,;b)$, bán kính r, phương trình của nó là

$$(C'): (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Vì $B(0\,;2) \in (C')$ nên $a^2 + b^2 - 4b + 4 = r^2$. (1)

Mặt khác, I thuộc đường trung trực của AB có phương trình $x - y + 1 = 0$ nên

$$a - b + 1 = 0. \quad (2)$$

– Nếu (C') tiếp xúc ngoài với (C) ta có

$$r + 4 = IS = \sqrt{(a-5)^2 + (b-5)^2}. \quad (3)$$

Giải hệ phương trình (1), (2), (3) để tìm a, b, r.

$$(3) \Leftrightarrow r^2 + 8r + 16 = a^2 + b^2 - 10a - 10b + 50$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 4b + 4 + 8r + 16 = a^2 + b^2 - 10a - 10b + 50$$

$$\Leftrightarrow 5a + 3b = 15 - 4r. \quad (4)$$

Từ (2), thay $b = a + 1$ vào (4) rút ra

$$\begin{cases} a = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}r = \dfrac{3-r}{2} \\ b = \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}r = \dfrac{5-r}{2}. \end{cases}$$

Thay lại vào (1) ta được (sau khi rút gọn)

$$r^2 + 4r - 5 = 0, \text{ suy ra } r = 1, \text{ từ đó } a = 1, b = 2.$$

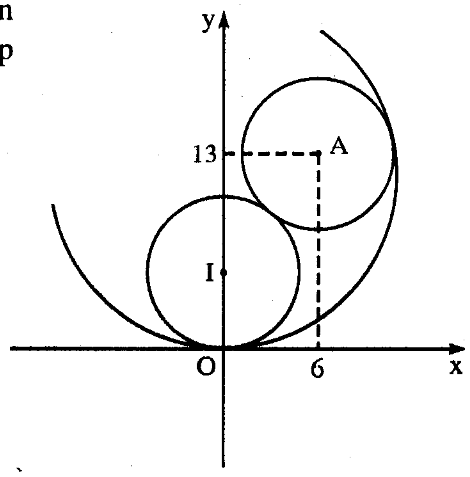
Vậy phương trình đường tròn tiếp xúc ngoài với (C) là

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1.$$

Nếu (C') tiếp xúc trong với (C), ta thay (3) bởi $|r-4| = \sqrt{(a-5)^2 + (b-5)^2}$ rồi giải tương tự, được phương trình (C') là $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$.

Ví dụ 9.10. Viết phương trình đường tròn (C') tiếp xúc với trục Ox tại gốc toạ độ và tiếp xúc với đường tròn

$$(C): (x-6)^2 + (y-13)^2 = 25.$$



Hình 9-3

Giải

Đường tròn (C') cần tìm có tâm I nằm trên trục Oy (h.9-3) nên I = (0 ; b) và bán kính của (C') là R' = |b|. Do đó, phương trình (C') có dạng

$$x^2 + (y-b)^2 = b^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2by = 0.$$

Trục đẳng phương của hai đường tròn (C) và (C') là đường thẳng có phương trình

$$(x-6)^2 + (y-13)^2 - 25 = x^2 + y^2 - 2by$$

$$\Leftrightarrow 12x + 2(13-b)y - 180 = 0.$$

(C) và (C') tiếp xúc nhau khi và chỉ khi chúng cùng tiếp xúc với trục đẳng phương, tức là khoảng cách từ tâm đường tròn (C) tới trục đẳng phương bằng bán kính của nó.

Đường tròn (C) có tâm A(6 ;13), bán kính R = 5, do đó ta có

$$\frac{|12.6 + 2(13-b).13 - 180|}{\sqrt{12^2 + 4(13-b)^2}} = 5 \Leftrightarrow |230 - 26b| = 10\sqrt{b^2 - 26b + 205}$$

$$\Leftrightarrow (230-26b)^2 = 100(b^2 - 26b + 205) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 5 \\ b = \dfrac{45}{4}. \end{array}\right.$$

Vậy có hai đường tròn cần tìm là

$$x^2 + (y-5)^2 = 25 \text{ và } x^2 + \left(y - \frac{45}{4}\right)^2 = \frac{2025}{16}.$$

Nhận xét. Có thể dùng điều kiện tiếp xúc của hai đường tròn để tìm b :

$IA = R + R' = 5 + |b|$ (tiếp xúc ngoài)

hoặc $IA = |R - R'| = |5 - |b||$ (tiếp xúc trong).

Ví dụ 9.11. Cho đường thẳng có phương trình $\Delta(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ và đường tròn $C(x,y) = x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ cùng đi qua hai điểm M, N.

Chứng minh rằng đường tròn $C'(x,y) = x^2 + y^2 + 2a'x + 2b'y + c' = 0$ đi qua M, N khi và chỉ khi $C'(x, y) = C(x, y) + \lambda\Delta(x, y)$, $(\lambda \in R)$.

Giải

Giả sử đường tròn $C'(x, y) = 0$ đi qua M, N.

– Nếu $C'(x ; y) = C(x ; y)$ thì $C'(x, y) = C(x, y) + 0.\Delta(x, y)$.

– Nếu $C'(x ; y) \neq C(x ; y)$, ta có

$$\begin{cases} C'(x_M, y_M) = 0 \\ C'(x_N, y_N) = 0. \end{cases}$$

Theo giả thiết, đường tròn $C(x, y) = 0$ đi qua M, N nên $\begin{cases} C(x_M, y_M) = 0 \\ C(x_N, y_N) = 0. \end{cases}$

Từ đó $\begin{cases} C'(x_M, y_M) - C(x_M, y_M) = 0 \\ C'(x_N, y_N) - C(x_N, y_N) = 0. \end{cases}$ Suy ra $C'(x, y) - C(x, y) = 0$ là phương trình đường thẳng (do $(a - a')^2 + (b - b')^2 \neq 0$), đường thẳng này đi qua hai điểm M, N, do đó nó phải trùng với đường thẳng $\Delta(x, y) = 0$, tức là ta có

$C'(x, y) - C(x, y) = \lambda\Delta(x, y)$ $(\lambda \neq 0)$ hay $C'(x, y) = C(x, y) + \lambda\Delta(x, y)$.

– Ngược lại, giả sử $C'(x, y) = C(x, y) + \lambda\Delta(x, y)$, $(\lambda \in R)$. Ta có

$$\begin{cases} C'(x_M, y_M) = C(x_M, y_M) + \lambda\Delta(x_M, y_M) = 0 \\ C'(x_N, y_N) = C(x_N, y_N) + \lambda\Delta(x_N, y_N) = 0 \end{cases}$$

(vì đường tròn $C(x, y) = 0$ và đường thẳng $\Delta(x, y) = 0$ cùng đi qua M, N). Vậy đường tròn $C'(x, y) = 0$ đi qua M, N.

Hệ quả. Cho đường thẳng $\Delta(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ và đường tròn $C(x,y) = x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ tiếp xúc với nhau tại điểm M. Khi đó đường tròn $C'(x,y) = x^2 + y^2 + 2a'x + 2b'y + c' = 0$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta(x,y) = 0$ tại M khi và chỉ khi $C'(x, y) = C(x, y) + \lambda\Delta(x, y)$, $(\lambda \in R)$.

Ví dụ 9.12. Viết phương trình đường tròn đi qua điểm $A(1 ; -2)$ và qua giao điểm của đường thẳng $x - 7y + 10 = 0$ với đường tròn $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.

Giải

Đường tròn cần tìm có phương trình dạng

$(x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20) + \lambda(x - 7y + 10) = 0$ (VD 9.11).

$A(1 ; -2)$ thuộc đường tròn nên $1 + 4 - 2 - 8 - 20 + \lambda(1 + 14 + 10) = 0$ $\Rightarrow \lambda = 1$. Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $x^2 + y^2 - x - 3y - 10 = 0$.

Ví dụ 9.13. Cho hai đường tròn phân biệt

$$C_1(x,y) = x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0 \qquad (1)$$

$$C_2(x,y) = x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0 \qquad (2)$$

cùng đi qua hai điểm M, N. Chứng minh rằng đường tròn

$$C(x,y) = x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

đi qua M, N khi và chỉ khi

$$C(x,y) = \lambda_1 C_1(x,y) + \lambda_2 C_2(x,y) \qquad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} ; \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0).$$

Giải

Vì các đường tròn $C_1(x, y) = 0$ và $C_2(x, y) = 0$ cùng đi qua M, N nên đường thẳng $C_1(x, y) - C_2(x, y) = 0$ đi qua M, N. Theo ví dụ 9.11, ta có : Đường tròn $C(x, y) = 0$ đi qua M, N khi và chỉ khi

$C(x, y) = C_1(x, y) + \lambda[C_1(x, y) - C_2(x, y)]$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow C(x, y) = (1 + \lambda)C_1(x, y) - \lambda C_2(x, y)$

$\Leftrightarrow C(x, y) = \lambda_1 C_1(x, y) + \lambda_2 C_2(x, y)$

(đặt $\lambda_1 = 1 + \lambda$, $\lambda_2 = -\lambda$ ta có $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ và $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$).

• Tập hợp các đường tròn đi qua hai điểm M, N được gọi là *chùm đường tròn* xác định bởi hai đường tròn cơ sở (1) và (2).

Ví dụ 9.14. Viết phương trình đường tròn đi qua giao điểm của hai đường tròn

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

$$(x-4)^2+y^2=1$$

và có tâm nằm trên đường thẳng $y = x + 2$.

Giải

Đường tròn (C) cần tìm thuộc chùm đường tròn xác định bởi hai đường tròn

$$x^2+y^2-6x-4y+9=0 \text{ và } x^2+y^2-8x+15=0,$$

do đó phương trình của nó có dạng

$$\lambda(x^2+y^2-6x-4y+9)+\mu(x^2+y^2-8x+15)=0 \quad (\lambda+\mu\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+\mu)\left(x^2+y^2\right)-2(3\lambda+4\mu)x-4\lambda y+9\lambda+15\mu=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+\mu}x-2\frac{2\lambda}{\lambda+\mu}y+\frac{9\lambda+15\mu}{\lambda+\mu}=0.$$

Tâm của (C) là $I\left(\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+\mu};\frac{2\lambda}{\lambda+\mu}\right)$. Vì I thuộc đường thẳng $y = x + 2$ nên

$$\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+\mu}+2=\frac{2\lambda}{\lambda+\mu}\Leftrightarrow \lambda+2\mu=0.$$

Chọn $\mu = 1$ ta có $\lambda = -2$. Vậy phương trình đường tròn (C) là

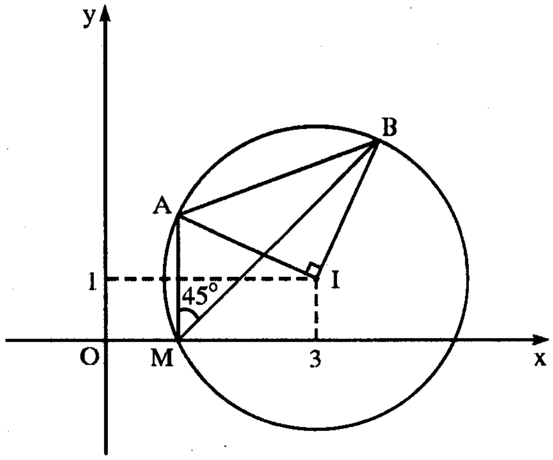
$$x^2+y^2-4x-8y+3=0.$$

Ví dụ 9.15. Cho hai điểm A(1 ; 2), B(4 ; 3). Tìm trên trục hoành điểm M sao cho $\widehat{AMB} = 45^o$.

Giải

Giả sử đã tìm được điểm $M \in Ox$ sao cho $\widehat{AMB} = 45^o$. (h.9-4)

Vẽ đường tròn tâm I(x ; y) qua A, B, M, ta có ΔABI vuông cân tại I, do đó



Hình 9-4

$$\begin{cases}|\overrightarrow{AI}|=|\overrightarrow{BI}|\\ \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BI}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=(x-4)^2+(y-3)^2\\ (x-1)(x-4)+(y-2)(y-3)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 10 \\ x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}. \text{ Vậy } \left[\begin{array}{l} I = (3\,;1) \\ I = (2\,;4). \end{array}\right.$$

Trong cả hai trường hợp này đều có $IA = \sqrt{5}$.

Đường tròn tâm (2 ; 4), bán kính $\sqrt{5}$ không cắt trục hoành. Đường tròn tâm I(3 ; 1), bán kính $\sqrt{5}$ có phương trình $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$, nó cắt trục hoành tại 2 điểm $M_1(1\,;0)$ và $M_2(5\,;0)$. Đó chính là hai điểm cần tìm.

Ví dụ 9.16. Cho đường thẳng $\Delta : 3x + 4y - 25 = 0$, điểm M chạy trên Δ. Trên tia OM lấy điểm N sao cho OM.ON = 1. Chứng minh rằng N chạy trên một đường tròn cố định, viết phương trình đường tròn đó.

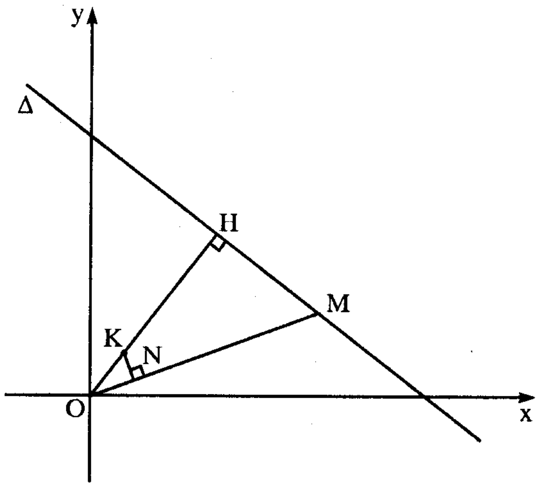
Giải

Cách 1 (h.9-5). Gọi H là hình chiếu của O trên Δ, K là điểm thuộc tia OH sao cho OH.OK = 1. Ta có OH.OK = OM.ON = 1, suy ra tứ giác MNKH nội tiếp, do đó $\widehat{ONK} = 90^\circ$.

Vậy N thuộc đường tròn (C) đường kính OK cố định.

Dễ dàng tìm được H = (3 ; 4) $\Rightarrow \overrightarrow{OH} = (3\,;4)$.

Vì $\overrightarrow{OK}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OH}$ nên $\overrightarrow{OK} = (3m\,;4m),\ m > 0$.



Hình 9-5

Ta có $1 = OH.OK = \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OK} = 9m + 16m = 25m$

$\Rightarrow m = \dfrac{1}{25}$. Vậy $K = \left(\dfrac{3}{25}\,;\dfrac{4}{25}\right)$.

Giả sử N = (x ; y). N thuộc đường tròn đường kính OK khi và chỉ khi $\overrightarrow{KN}.\overrightarrow{ON} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{3}{25}\right)x + \left(y - \dfrac{4}{25}\right)y = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \dfrac{3}{25}x - \dfrac{4}{25}y = 0.$

Đó chính là phương trình đường tròn (C).

Cách 2. Theo giả thiết, $\overrightarrow{ON}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OM}$ nên

$$\begin{cases} x_M = kx_N \\ y_M = ky_N \end{cases} \quad (k > 0).$$

Ta có $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = OM.ON = 1 \Rightarrow x_M x_N + y_M y_N = 1$

$$\Rightarrow kx_N.\, x_N + ky_N.y_N = 1 \Rightarrow x_N^2 + y_N^2 = \frac{1}{k}. \qquad (1)$$

Mặt khác, vì $M \in \Delta$ nên $3x_M + 4y_M = 25$

$$\Rightarrow 3.kx_N + 4.ky_N = 25 \Rightarrow \frac{3x_N + 4y_N}{25} = \frac{1}{k}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$x_N^2 + y_N^2 = \frac{3x_N + 4y_N}{25} \Leftrightarrow x_N^2 + y_N^2 - \frac{3}{25}x_N - \frac{4}{25}y_N = 0.$$

Vậy N thuộc đường tròn có phương trình

$$x^2 + y^2 - \frac{3}{25}x - \frac{4}{25}y = 0.$$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

9.1. Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A(3 ; 3) và tiếp xúc với đường thẳng $2x + y - 3 = 0$ tại điểm B(1 ; 1).

9.2. Cho họ đường tròn (C_m) phụ thuộc tham số m

$$x^2 + y^2 - 2(m + 1)x + 4my - 5 = 0.$$

Với giá trị nào của m thì đường tròn (C_m) tiếp xúc với đường thẳng $x + y - 1 = 0$?

9.3. Viết phương trình đường tròn đi qua điểm P(1 ; 1), tiếp xúc với hai đường thẳng $7x + y - 3 = 0$; $x + 7y - 3 = 0$.

9.4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai đường tròn

$(C_1) : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$; $(C_2): x^2 + y^2 + 4x - 4y - 56 = 0$.

Chứng minh rằng (C_1) tiếp xúc với (C_2). Viết phương trình các tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

9.5. Chứng minh rằng hai đường tròn

$x^2 + y^2 - 10x + 24y - 56 = 0$ và $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$

cắt nhau. Viết phương trình tiếp tuyến chung của chúng.

9.6. Cho họ đường tròn $(C_m): x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 5m^2 - 1 = 0$ (m là tham số) và đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$.

a) Chứng minh rằng họ (C_m) luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định.

b) Tìm m để (C_m) cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A và B.

9.7. Viết phương trình đường tròn đi qua giao điểm của hai đường tròn

$$(C_1): x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0,$$

$$(C_2): x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$$

và có bán kính bằng $\sqrt{13}$.

9.8. Viết phương trình đường tròn đi qua giao điểm của hai đường tròn

$$(C_1): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0,$$

$$(C_2): x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0$$

và tiếp xúc với đường thẳng $x + 5 = 0$.

9.9. Tìm các điểm có cùng phương tích đối với ba đường tròn

$$(C_1): (x-2)^2 + y^2 = 1,$$

$$(C_2): (x+2)^2 + (y+1)^2 = 3,$$

$$(C_3): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5.$$

9.10. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x + my - m = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - x = 0. & (2) \end{cases}$$

Biện luận số nghiệm của hệ theo m.

§10. ELIP

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I – ĐỊNH NGHĨA VÀ ĐỊNH LÍ CƠ BẢN

1. Định nghĩa

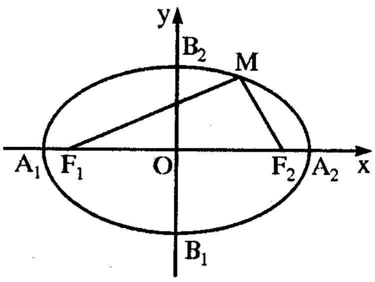
Cho hai điểm cố định F_1, F_2 với $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$ và số $a > c$. Tập hợp

$$(E) = \{M : MF_1 + MF_2 = 2a\}$$

được gọi là một *elip*.

F_1, F_2 là các *tiêu điểm*, 2c là *tiêu cự* của elip.

Giả sử (E) cắt đường thẳng F_1F_2 tại hai điểm A_1, A_2, cắt đường trung trực của F_1F_2 tại hai điểm B_1, B_2. Đoạn A_1A_2 được gọi là *trục lớn*, đoạn B_1B_2 được gọi là *trục bé* của elip. Độ dài $A_1A_2 = 2a$ được gọi là *độ dài trục lớn*, độ dài $B_1B_2 = 2b$ $\left(b = \sqrt{a^2 - c^2}\right)$ được gọi là *độ dài trục bé* của elip. Các điểm A_1, A_2, B_1, B_2 được gọi là *các đỉnh* của elip (h.10-1).



Hình 10-1

2. Định lí cơ bản

Cho elip (E) với các tiêu điểm F_1, F_2 ; tiêu cự bằng 2c, độ dài trục lớn bằng 2a, độ dài trục bé bằng 2b. Lập hệ trục toạ độ Oxy sao cho $F_1 = (-c ; 0)$, $F_2 = (c ; 0)$.

Khi đó

$$M(x;y) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

(1) được gọi là *phương trình chính tắc* của elip (E).

Hệ quả. Với mọi $M(x;y) \in (E)$, ta có $MF_1 = a + \frac{c}{a}x$, $MF_2 = a - \frac{c}{a}x$.

Các đoạn thẳng MF_1, MF_2 được gọi là *bán kính qua tiêu* của điểm M.

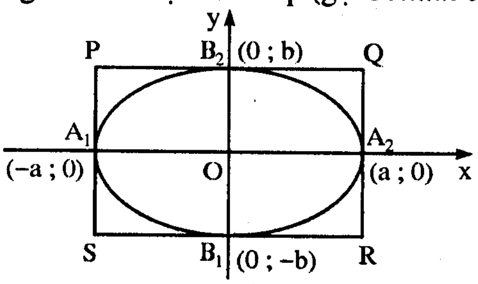
II – HÌNH DẠNG CỦA ELIP

1. Tính đối xứng

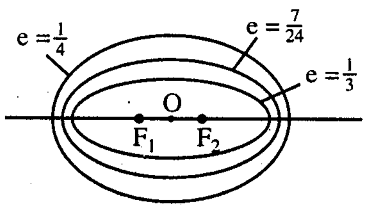
Elip nhận đường thẳng đi qua các tiêu điểm và đường trung trực của đoạn thẳng nối hai tiêu điểm làm các trục đối xứng. Elip có tâm đối xứng chính là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tiêu điểm.

2. Hình chữ nhật cơ sở

Elip nằm trong hình chữ nhật có các cạnh đi qua mỗi đỉnh của elip và song song với các trục của elip (gọi là *hình chữ nhật cơ sở*, h.10-2).



Hình 10-2



Hình 10-3

3. Tâm sai

Số $e = \dfrac{c}{a}$ được gọi là *tâm sai* của elip, ta luôn có $e < 1$.

Nếu tâm sai càng bé thì elip càng "béo", nếu tâm sai càng lớn thì elip càng "gầy" (h.10-3).

B. CÁC VÍ DỤ

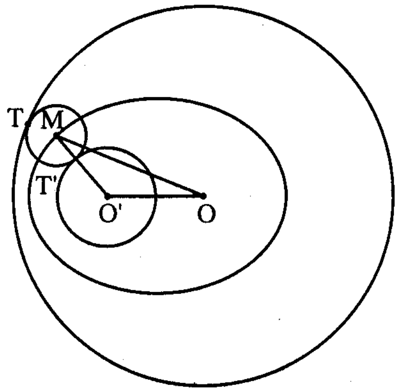
Ví dụ 10.1. Đường tròn (O' ; R') nằm bên trong đường tròn (O ; R). Một đường tròn tâm M thay đổi, luôn tiếp xúc ngoài với (O') và tiếp xúc trong với (O). Tìm tập hợp các điểm M.

Giải

Thuận : Giả sử đường tròn (M) thoả mãn điều kiện bài toán. Gọi T và T' lần lượt là tiếp điểm của (M) với (O) và (O') (h.10-4), ta có

$$\begin{aligned} MO + MO' &= (TO - TM) + (T'O' + T'M) \\ &= TO + T'O' \text{ (vì } TM = T'M) \\ &= R + R'. \end{aligned}$$

Suy ra M thuộc elip (E) có các tiêu điểm là O và O', độ dài trục lớn là R + R'.



Hình 10- 4

Đảo : Lấy $M \in (E)$. Ta có

$MO + MO' = R + R'$ suy ra

$MO' - R' = R - MO$. Đặt

$R_M = MO' - R' = R - MO$.

Nếu $R_M \leq 0$ thì $MO' - R' = R - MO \leq 0$, suy ra

$MO \geq R$ và $MO' \leq R'$, tức là M không nằm trong (O) và không nằm ngoài (O').

Điều đó mâu thuẫn với giả thiết (O') nằm trong (O). Vậy $R_M > 0$. Xét đường tròn $(M ; R_M)$, ta thấy

$$\begin{cases} R - R_M = R - (R - MO) = MO \\ R' + R_M = R' + (MO' - R') = MO', \end{cases}$$

suy ra $(M ; R_M)$ tiếp xúc trong với (O ; R) và tiếp xúc ngoài với (O' ; R').

Tóm lại, tập hợp các điểm M là elip (E) có các tiêu điểm là O và O', độ dài trục lớn là R + R'.

Ví dụ 10.2. Cho elip (E) có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a > b > 0)$, tiêu điểm $F_1(-c\ ;\ 0)$. Gọi (C_1) là đường tròn tâm F_1, bán kính $a - c$; (C_2) là đường tròn tâm F_1, bán kính $a + c$. Chứng minh rằng :

a) (C_1) nằm trong (E) ;

b) (E) nằm trong (C_2).

Giải (h.10-5)

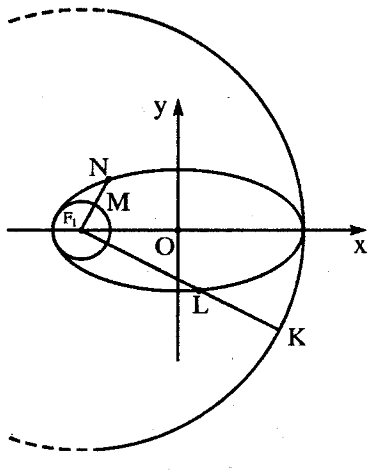
Lấy $M \in (C_1)$. Tia F_1M cắt (E) tại N, ta có $x_N \ge -a \Rightarrow a + \frac{cx_N}{a} \ge a - \frac{c}{a}a = a - c \Rightarrow F_1N \ge F_1M$.

Vậy (C_1) nằm trong (E).

Lấy $K \in (C_2)$. Tia F_1K cắt (E) tại L, ta có

$x_L \le a \Rightarrow a + \frac{c.x_L}{a} \le a + c \Rightarrow F_1L \le F_1K$.

Vậy (E) nằm trong (C_2).



Hình 10-5

Ví dụ 10.3. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a > b > 0)$, tiêu điểm $F(c\ ;\ 0)$. Một đường thẳng Δ quay quanh F, cắt (E) tại M, N. Chứng minh rằng $\frac{1}{FM}+\frac{1}{FN}$ không đổi.

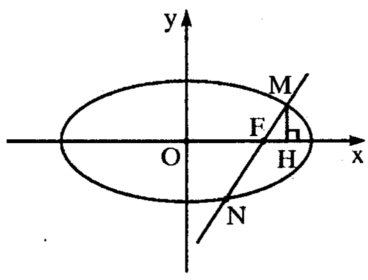
Giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $y_M \ge 0$, $y_N \le 0$. Đặt $(\vec{i}, \overrightarrow{FM}) = \varphi$ ($\vec{i}$ là vectơ đơn vị trên Ox). Gọi H là hình chiếu của M trên trục hoành (h.10-6), ta có

$$x_M = \overline{OH} = \overline{OF} + \overline{FH} = c + FM\cos\varphi. \quad (1)$$

Mặt khác, $FM = a - \frac{c}{a}x_M$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $FM = a - \frac{c}{a}(c + FM\cos\varphi)$



Hình 10-6

$\Rightarrow a.FM + c.FM\cos\varphi = a^2 - c^2$ hay $(a + c.\cos\varphi)FM = b^2$, do đó

$$\frac{1}{FM} = \frac{a + c.\cos\varphi}{b^2}.$$

Vì $(\vec{i}, \overrightarrow{FM}) = \varphi$ nên $(\vec{i}, \overrightarrow{FN}) = 180^\circ - \varphi$. Tương tự, ta có

$$\frac{1}{FN} = \frac{a + c.\cos(180^\circ - \varphi)}{b^2} = \frac{a - c.\cos\varphi}{b^2}.$$

Vậy $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FN} = \frac{2a}{b^2}$ không đổi.

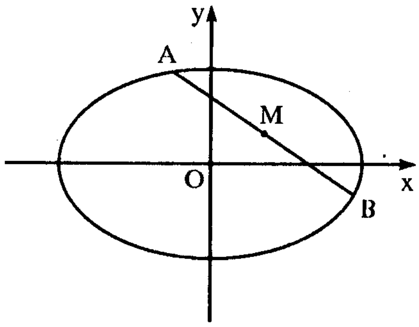
Ví dụ 10.4. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ và điểm M(2 ; 1). Gọi d là đường thẳng qua M, cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của AB. Hãy viết phương trình tổng quát của d.

Giải (h.10-7)

Dễ thấy đường thẳng đi qua M, song song với trục Oy không thoả mãn điều kiện của bài toán, vì M không nằm trên trục hoành.

Xét đường thẳng d qua M, có hệ số góc k. Phương trình của d là

$$y = k(x - 2) + 1.$$



Hình 10-7

Toạ độ của A, B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \\ y = k(x-2) + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{(k(x-2)+1)^2}{16} = 1 & (1) \\ y = k(x-2) + 1 & (2) \end{cases}$$

nói riêng, x_A, x_B là nghiệm của (1). Ta có

$$(1) \Leftrightarrow (16 + 25k^2)x^2 - (100k^2 - 50k)x + 100k^2 - 100k - 375 = 0. \quad (1')$$

Vì M là trung điểm của AB nên $x_A + x_B = 2x_M$. Theo định lí Vi-ét ta có

$\frac{100k^2 - 50k}{25k^2 + 16} = 4 \Leftrightarrow k = -\frac{32}{25}$. Vậy phương trình của d là

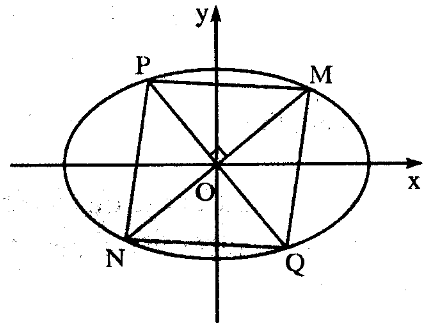
$$y = -\frac{32}{25}(x - 2) + 1 \quad \text{hay} \quad 32x + 25y - 64 = 0.$$

Ví dụ 10.5. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và các đường thẳng d : $ax - by = 0$, d' : $bx + ay = 0$.

Gọi M, N là giao điểm của (E) và d ; P, Q là giao điểm của (E) và d'.

a) Tính toạ độ của M, N, P, Q theo a và b.

b) Tìm điều kiện của a, b sao cho diện tích tứ giác MPNQ nhỏ nhất, lớn nhất.



Hình 10-8

Giải (h.10-8)

a) Vì M, N là giao điểm của (E) và d nên toạ độ của M, N là các nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ ax - by = 0 \end{cases}$$

Giải hệ tìm được

$$M = \left(\frac{6b}{\sqrt{9a^2 + 4b^2}}; \frac{6a}{\sqrt{9a^2 + 4b^2}}\right),\ N = \left(\frac{-6b}{\sqrt{9a^2 + 4b^2}}; \frac{-6a}{\sqrt{9a^2 + 4b^2}}\right).$$

Tương tự tìm được

$$P = \left(\frac{-6a}{\sqrt{4a^2 + 9b^2}}; \frac{6b}{\sqrt{4a^2 + 9b^2}}\right),\ Q = \left(\frac{6a}{\sqrt{4a^2 + 9b^2}}; \frac{-6b}{\sqrt{4a^2 + 9b^2}}\right).$$

b) Vì các đường thẳng d, d' đi qua O nên các điểm M và N, cũng như P và Q đối xứng nhau qua O (O là tâm đối xứng của elip). Mặt khác, dễ thấy các vectơ pháp tuyến của d và d' vuông góc với nhau nên d $\perp$ d'. Suy ra MPNQ là hình thoi, do đó

$$S_{MPNQ} = 2OM.OP = \frac{72(a^2 + b^2)}{\sqrt{(9a^2 + 4b^2)(4a^2 + 9b^2)}}.$$

* Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$S_{MPNQ} \geq \frac{2.72(a^2 + b^2)}{(9a^2 + 4b^2) + (4a^2 + 9b^2)} = \frac{144(a^2 + b^2)}{13(a^2 + b^2)} = \frac{144}{13}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $9a^2 + 4b^2 = 4a^2 + 9b^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b$. Khi đó d và d' là phân giác của các góc xOy và x'Oy, MPNQ là hình vuông.

Tóm lại, diện tích tứ giác MPNQ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{144}{13}$, khi $a = \pm b$.

* Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki, ta có

$$S_{MNPQ} \le \frac{72(a^2+b^2)}{\sqrt{(3a.2a+2b.3b)^2}} = \frac{72(a^2+b^2)}{6(a^2+b^2)} = 12.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $3a.3b = 2a.2b \Leftrightarrow ab = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right.$

Khi đó d, d' là các trục toạ độ.

Tóm lại, diện tích tứ giác MPNQ đạt giá trị lớn nhất bằng 12, khi hoặc a = 0 hoặc b = 0.

Ví dụ 10.6. Cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng $d_m : 4x + 5y - m = 0$ (m là tham số).

Hãy biện luận theo m số điểm chung của d_m và (E).

Trong trường hợp d_m cắt (E) tại hai điểm A và B, hãy tìm tập hợp các trung điểm I của AB.

Giải

a) Từ phương trình đường thẳng rút ra $y = \frac{m-4x}{5}$, thay vào phương trình của elip và rút gọn ta được $25x^2 - 8mx + m^2 - 225 = 0.$ (1)

Số điểm chung của d_m và (E) chính bằng số nghiệm của phương trình (1). Ta có

$\Delta' = 16m^2 - 25(m^2 - 225) = -9(m^2 - 25^2)$. Từ đó

* $m > 25$ hoặc $m < -25$: d_m và (E) không có điểm chung ;

* $m = \pm 25$: d_m và (E) có 1 điểm chung ;

* $|m| < 25$: d_m và (E) có 2 điểm chung phân biệt.

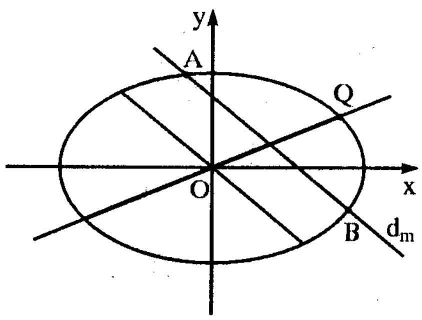
b) Khi $|m| \le 25$, d_m và (E) có hai điểm chung A và B (có thể trùng nhau), hoành độ của chúng là các nghiệm của (1). Gọi I là trung điểm của AB, theo định lí Vi-ét ta có

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4m}{25} \Rightarrow y_I = \frac{m - 4x_I}{5} = \frac{9m}{125} = \frac{9x_I}{20} \text{ hay } 9x_I - 20y_I = 0.$$

Điều kiện $|m| \le 25$ cho ta $\frac{25}{4}|x_I| \le 25.$

Vậy tập hợp các điểm I là đoạn thẳng PQ

$$\begin{cases} 9x - 20y = 0 \\ \frac{25}{4}|x| \le 25 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} 9x - 20y = 0 \\ -4 \le x \le 4. \end{cases}$$



Hình 10-10

Nhận xét. Bằng cách tương tự, ta chứng minh được kết quả tổng quát :

Tập hợp các trung điểm của các dây cung tạo bởi elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và đường thẳng $\alpha x + \beta y + m = 0$, khi m thay đổi, là đoạn thẳng giới hạn bởi elip đã cho và đường thẳng $\frac{\beta x}{a^2} - \frac{\alpha y}{b^2} = 0$. Đó chính là một *đường kính* của elip. Ta gọi đường kính này là *đường kính liên hợp* với đường kính giới hạn bởi elip và đường thẳng $\alpha x + \beta y = 0$ (h.10-9).

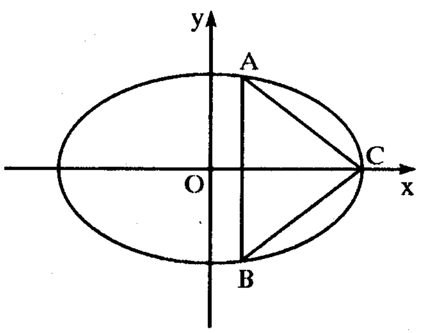
Từ kết quả vừa nêu ta suy ra hệ quả sau : Cho hai đường kính liên hợp với nhau của một elip. Khi đó, mọi dây cung của elip song song với đường kính này sẽ bị đường kính kia chia làm đôi.

Ví dụ 10.7. Cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và điểm C(2 ; 0). Tìm toạ độ các điểm A, B trên elip sao cho ABC là tam giác đều.

Giải (h.10-10)

Giả sử $A(x_0 ; y_0), B(x_1 ; y_1)$ thuộc (E) sao cho tam giác ABC đều. Ta có

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1 \\ \frac{x_1^2}{4} + y_1^2 = 1 \\ (x_0 - 2)^2 + y_0^2 = (x_1 - 2)^2 + y_1^2 \end{cases}$$



Hình 10-10

suy ra $\begin{cases} \frac{x_0^2 - x_1^2}{4} + y_0^2 - y_1^2 = 0 \\ (x_0 - 2)^2 - (x_1 - 2)^2 + y_0^2 - y_1^2 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{x_0^2 - x_1^2}{4} = (x_0 - 2)^2 - (x_1 - 2)^2 \Rightarrow (x_0 - x_1)[3(x_0 + x_1) - 16] = 0 \quad (1)$$

Vì $-2 \le x_1, x_2 \le 2$ nên $3(x_0 + x_1) - 16 \ne 0$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $x_0 - x_1 = 0$, do đó $y_0^2 = y_1^2 \Rightarrow y_0 = -y_1$ (vì $A \ne B$).

Vậy A, B đối xứng nhau qua trục hoành. Đặt $H(x_0 ; y_0)$ là giao điểm của AB với trục hoành. Vì ABC là tam giác đều nên

$$CH = \frac{\sqrt{3}}{2}AB \Rightarrow 2 - x_0 = \sqrt{3}|y_0| \Rightarrow |y_0| = \frac{2 - x_0}{\sqrt{3}}.$$

Mặt khác, vì $A \in (E)$ nên

$$\frac{x_0^2}{4} + \frac{(2-x_0)^2}{3} = 1 \Rightarrow 7x_0^2 - 16x_0 + 4 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{2}{7} \text{ (nghiệm } x_0 = 2 \text{ bị loại).}$$

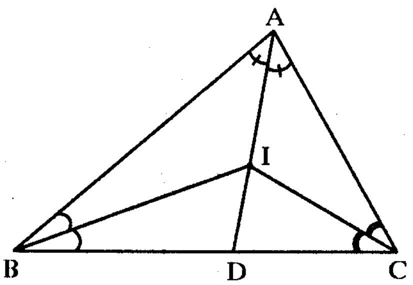
Từ đó suy ra $|y_0| = \frac{4\sqrt{3}}{7}$. Vậy $A = \left(\frac{2}{7} ; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B = \left(\frac{2}{7} ; \frac{-4\sqrt{3}}{7}\right)$

hoặc $A = \left(\frac{2}{7} ; \frac{-4\sqrt{3}}{7}\right), B = \left(\frac{2}{7} ; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$.

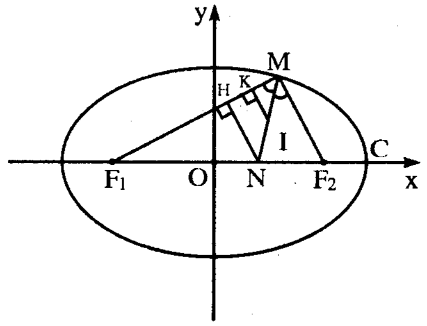
Dễ kiểm tra các điểm A, B có toạ độ như trên thoả mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 10.8. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, F_1, F_2 là các tiêu điểm. M chạy trên elip (E). Phân giác của góc F_1MF_2 cắt F_1F_2 tại N, H là hình chiếu của N trên MF_1. Chứng minh rằng MH không đổi.

Giải



Hình 10-11



Hình 10-12

Trước hết, ta chứng minh một kết quả quen thuộc :

Trong tam giác ABC (a, b, c là ba cạnh) với đường phân giác AD, I là tâm đường tròn nội tiếp, ta có

$\dfrac{AD}{AI}=\dfrac{a+b+c}{b+c}$ (h.10-11). Thật vậy, ta đã biết (xem VD 1-22)

$$a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}. \qquad (1)$$

Qua phép chiếu vectơ theo phương BC xuống đường thẳng AD, (1) trở thành

$$a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{ID}+c\overrightarrow{ID}=\vec{0}. \Rightarrow a\overrightarrow{IA}+(b+c)\overrightarrow{ID}=\vec{0}$$

suy ra $\dfrac{ID}{IA}=\dfrac{a}{b+c} \Rightarrow \dfrac{AD}{AI}=\dfrac{a+b+c}{b+c}$.

Trở lại bài toán (h.10-12), ta có $\dfrac{MN}{MI}=\dfrac{MF_1+MF_2+F_1F_2}{MF_1+MF_2}$ (theo kết quả trên),

$MK=\dfrac{MF_1+MF_2-F_1F_2}{2}$ (xem VD 6-34), từ đó

$$MH=\frac{MH}{MK}MK=\frac{MN}{MI}MK \text{ (định lí Ta-lét)}$$

$$=\frac{MF_1+MF_2+F_1F_2}{MF_1+MF_2}.\frac{MF_1+MF_2-F_1F_2}{2}$$

$$=\frac{2a+2c}{2a}.\frac{2a-2c}{2}=\frac{(a+c)(a-c)}{a}=\frac{a^2-c^2}{a}=\frac{b^2}{a} \text{ không đổi.}$$

Ví dụ 10.9. Chứng minh rằng mỗi đường cong có phương trình dưới đây là một elip. Tìm độ dài trục lớn, độ dài trục bé, tiêu cự, tâm sai và toạ độ các tiêu điểm của elip đó :

a) $(E_1): 3x^2+4y^2-6x-16y+7=0$;

b) $(E_2): 5x^2+3y^2-20x-24y+53=0$.

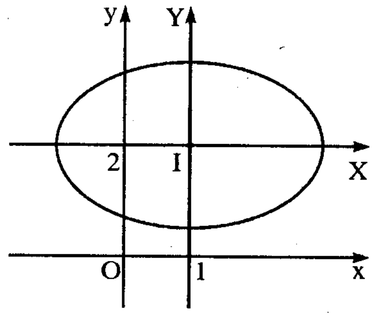
Giải

a) Ta thấy $M(x\,;y)\in(E_1)$ khi và chỉ khi

$$\frac{x^2-2x+1}{4}+\frac{y^2-4y+4}{3}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{3}=1. \qquad (1)$$

Đặt $\begin{cases} x=1+X \\ y=2+Y. \end{cases}$



Hình 10-13

Trong hệ toạ độ IXY với I = (1 ; 2) (h.10-13), (1) có dạng

$$\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{3}=1. \qquad (2)$$

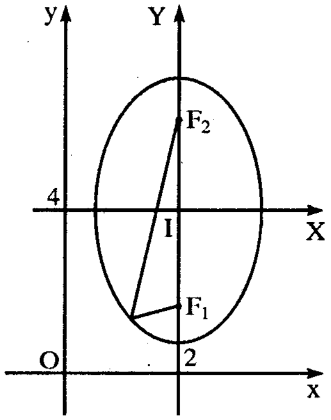
Rõ ràng (2) là phương trình chính tắc của một elip. Vậy (E_1) là một elip, có độ dài trục lớn $2a = 4$, độ dài trục bé $2b = 2\sqrt{3}$, tiêu cự $2c = 2\sqrt{a^2 - b^2} = 2$, tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$. Toạ độ các tiêu điểm trong hệ IXY là $(-1 ; 0)$ và $(1 ; 0)$, suy ra toạ độ các tiêu điểm trong hệ Oxy là $(0 ; 2)$ và $(2 ; 2)$.

b) Biến đổi phương trình (E_2) về dạng

$$\frac{(x-2)^2}{3} + \frac{(y-4)^2}{5} = 1. \qquad (3)$$

Đặt $\begin{cases} x = 2 + X \\ y = 4 + Y \end{cases}$ (3) trở thành

$$\frac{Y^2}{5} + \frac{X^2}{3} = 1. \qquad (4)$$



Hình 10-14

Bằng cách đổi vai trò của X và Y, trong hệ toạ độ IYX, với I = (2 ; 4), phương trình (4) là phương trình chính tắc của một elip (h.10-14). Vậy (E_2) là một elip có độ dài trục lớn bằng $2\sqrt{5}$, độ dài trục bé bằng $2\sqrt{3}$, tiêu cự bằng $2\sqrt{2}$, tâm sai bằng $\sqrt{\frac{2}{5}}$. Toạ độ các tiêu điểm trong hệ toạ độ IYX là $(-\sqrt{2} ; 0)$ và $(\sqrt{2} ; 0)$, suy ra toạ độ các tiêu điểm trong hệ toạ độ Oxy là $(2 ; 4 - \sqrt{2})$ và $(2 ; 4 + \sqrt{2})$.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

10.1. Cho đường tròn (O ; R) và điểm M nằm trong (O), N chạy trên (O).Trung trực của đoạn MN cắt đường thẳng ON tại K. Tìm tập hợp các điểm K.

10.2. Chứng minh rằng độ dài mỗi đường kính của elip bằng trung bình nhân của độ dài dây cung đi qua một tiêu điểm song song với đường kính đó, và độ dài trục lớn.

10.3. Cho elip $(E) : x^2 + 4y^2 = 25$ và đường thẳng $\Delta : 3x + 4y - 30 = 0$.

Tìm điểm M thuộc (E) sao cho khoảng cách từ M đến Δ lớn nhất, nhỏ nhất.

10.4. Cho elip (E) có phương trình : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$. $F_1(-c\,;0)$, $F_2(c\,;0)$ là các tiêu điểm, M chuyển động trên (E).Chứng minh rằng tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác MF_1F_2 chạy trên một elip. Hãy viết phương trình elip đó.

10.5. Cho elip (E) : $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, điểm $M\left(\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{2}{3}\right)$ nằm trong (E). Đường thẳng Δ qua M cắt (E) tại M_1, M_2 và thoả mãn điều kiện $MM_1 = 2MM_2$. Viết phương trình Δ.

10.6. Cho elip (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, có hai đỉnh trên trục hoành là A_1, A_2. M chạy trên (E). Chứng minh rằng trực tâm H của tam giác MA_1A_2 chạy trên một elip. Hãy viết phương trình chính tắc của elip đó.

10.7. Cho elip (E) : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ và các đường thẳng

$\Delta_1 : \alpha x + \beta y = 0$; $\Delta_2 : \dfrac{\beta x}{a^2} - \dfrac{\alpha y}{b^2} = 0$ $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$.

Δ_1 cắt (E) tại M, N ; Δ_2 cắt (E) tại P, Q. Chứng minh rằng $S_{(MPNQ)} = 2ab$.

10.8. Cho elip (E) : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $(a > b > 0)$.

Hai điểm A, B chuyển động trên (E) sao cho góc $\widehat{AOB} = 90^o$. Gọi H là hình chiếu của O trên đường thẳng AB. Chứng minh rằng H nằm trên một đường tròn cố định. Viết phương trình đường tròn đó.

10.9. Chứng minh rằng mỗi đường cong có phương trình xác định như sau là một elip. Tìm độ dài trục lớn, độ dài trục nhỏ, tiêu cự, tâm sai và các tiêu điểm của elip đó :

a) $(E_1) : 2x^2 + 7y^2 + 12x - 14y + 11 = 0$;

b) $(E_2) : 5x^2 + 3y^2 + 10x + 12y + 2 = 0$.

§11. HYPEBOL

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

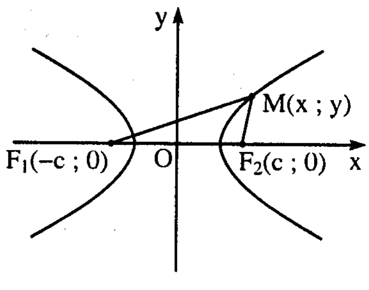
I – ĐỊNH NGHĨA VÀ ĐỊNH LÍ CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Cho hai điểm cố định F_1, F_2 với $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$ và số $a < c$.

Tập hợp $(H) = \{M : |MF_1 - MF_2| = 2a\}$ được gọi là một *hypebol* (h.11-1).

F_1, F_2 được gọi là các *tiêu điểm*, 2c được gọi là *tiêu cự* của hypebol (H).



Hình 11-1

(H) cắt đường thẳng F_1F_2 tại hai điểm A_1, A_2.

Đoạn A_1A_2 được gọi là *trục thực*, $A_1A_2 = 2a$ được gọi là *độ dài trục thực* của hypebol.

Trên đường trung trực của đoạn F_1F_2 lấy hai điểm B_1, B_2 đối xứng với nhau qua trung điểm của F_1F_2 và $B_1B_2 = 2b\left(b = \sqrt{c^2 - a^2}\right)$. Đoạn B_1B_2 được gọi là *trục ảo*, 2b được gọi là *độ dài trục ảo* của (H). Tỉ số $\dfrac{c}{a} = e$ được gọi là *tâm sai* của hypebol.

Các điểm A_1, A_2 được gọi là các *đỉnh* của hypebol.

2. Định lí cơ bản

Cho hypebol (H) với các tiêu điểm F_1, F_2, tiêu cự 2c, độ dài trục thực 2a, độ dài trục ảo 2b. Lập hệ toạ độ Oxy sao cho $F_1 = (-c ; 0)$, $F_2 = (c ; 0)$.

Khi đó :

$$M(x ; y) \in (H) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

Phương trình (1) được gọi là *phương trình chính tắc* của (H).

Hệ quả. Với mọi $M(x ; y) \in (H)$, ta có. $MF_1 = \left|a + \dfrac{c}{a}x\right|$; $MF_2 = \left|a - \dfrac{c}{a}x\right|$.

Các đoạn thẳng MF_1, MF_2 được gọi là *bán kính qua tiêu* của điểm M (h.11-1).

II – HÌNH DẠNG CỦA HYPEBOL

1. Tính đối xứng

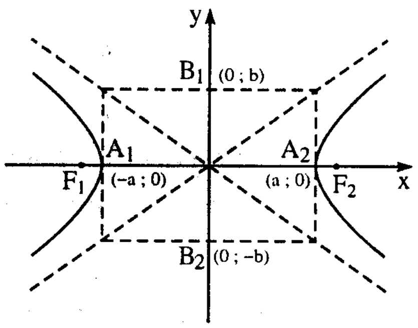
– Hypebol nhận đường thẳng đi qua các tiêu điểm và đường trung trực của đoạn thẳng nối các tiêu điểm làm *trục đối xứng*.

– Hypebol nhận trung điểm của đoạn thẳng nối các tiêu điểm làm *tâm đối xứng*.

2. Hình chữ nhật cơ sở và tiệm cận

– Hypebol nhận hình chữ nhật có các cạnh đi qua A_1, A_2, B_1, B_2 và song song với các trục đối xứng làm *hình chữ nhật cơ sở*.

– Hypebol nhận các đường chéo của hình chữ nhật cơ sở làm *các đường tiệm cận* (h.11-2).

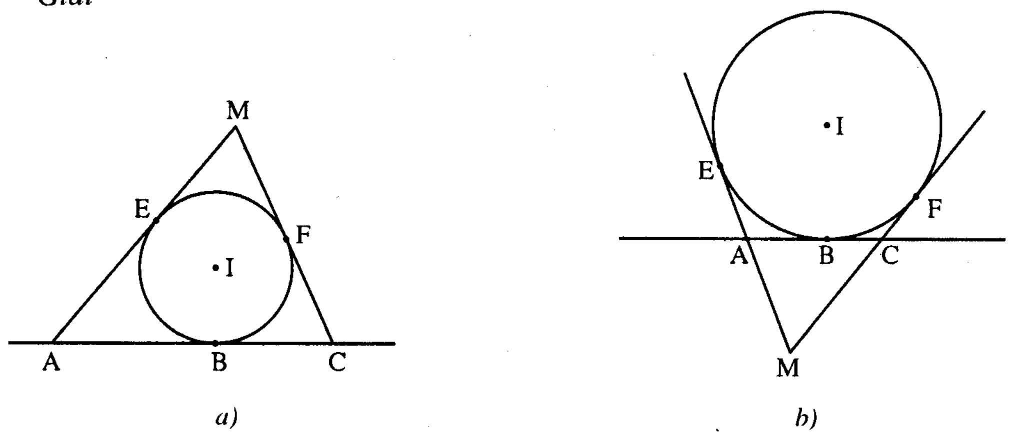


Hình 11-2

B. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 11.1. Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng và sắp xếp theo thứ tự đó, AB > BC. Đường tròn (I) thay đổi, tiếp xúc với AC tại B. Các tiếp tuyến kẻ từ A, C đến (I) cắt nhau tại M. Chứng minh rằng M thay đổi trên một hypebol cố định.

Giải



Hình 11-3

Giả sử AM, CM tiếp xúc với (I) tại E, F. Có hai trường hợp xảy ra :

TH_1 (h.11-3a) : (I) là đường tròn nội tiếp tam giác MAC. Ta có :

$$MA - MC = (ME + EA) - (MF + FC)$$
$$= EA - FC = BA - BC$$

TH_2 (h.11-3b) : (I) là đường tròn bàng tiếp tam giác MAC. Ta có :

$$MA - MC = (ME - EA) - (MF - FC)$$
$$= -EA + FC = -BA + BC$$

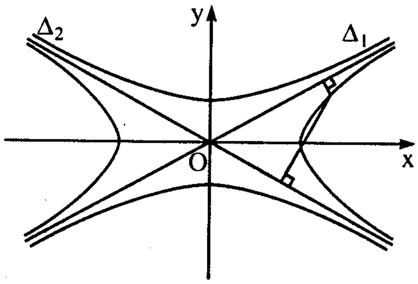
Vậy trong cả hai trường hợp ta đều có $|MA - MC| = BA - BC$.

Suy ra M thuộc hypebol (H) nhận A, C là các tiêu điểm và độ dài trục thực là BA – BC.

Ví dụ 11.2. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai đường thẳng $\Delta_1 : bx - ay = 0$ và $\Delta_2 : bx + ay = 0$ (a, b cùng dấu).

Tìm quỹ tích các điểm M sao cho

$$d(M ; \Delta_1).d(M ; \Delta_2) = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}.$$



Hình 11-4

Giải

Ta thấy : $d(M ; \Delta_1).d(M ; \Delta_2) = \dfrac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{|bx_M - ay_M|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \cdot \frac{|bx_M + ay_M|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|b^2x_M^2 - a^2y_M^2|}{a^2b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{b^2x_M^2 - a^2y_M^2}{a^2b^2} = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{x_M^2}{a^2} - \frac{y_M^2}{b^2} = \pm 1$$

$\Leftrightarrow$ M thuộc hypebol (H) có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ hoặc hypebol (H') có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ (h.11-4).

Nhận xét. Khi M chuyển động trên (H) sao cho $x_M > 0,\ y_M > 0$, ta thấy

x_M càng lớn $\Rightarrow y_M$ càng lớn $\left(\text{vì } \left| \dfrac{x_M^2}{a^2} - \dfrac{y_M^2}{b^2} \right| = 1 \right)$

$\Rightarrow \dfrac{|bx_M + ay_M|}{\sqrt{b^2 + a^2}}$ càng lớn (vì a, b cùng dấu) $\Rightarrow d(M ; \Delta_2)$ càng lớn

$\Rightarrow$ d(M ; Δ_1) càng nhỏ (vì d(M ; Δ_1).d(M ; Δ_2) = $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$) $\Rightarrow$ M càng gần Δ_1.

Chính vì lí do trên mà đường thẳng Δ_1 và tương tự, đường thẳng Δ_2 được gọi là các *tiệm cận* của hypebol (H), của hypebol (H')

Ví dụ 11.3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, chứng minh rằng đường cong (H) = $\{M(x\,;\,y) \setminus xy = 1\}$ là một đường hypebol. Tìm tiêu cự, độ dài trục thực, trục ảo, tâm sai, toạ độ các tiêu điểm của hypebol đó.

Giải

Lấy $F_1 = \left(-\sqrt{2}\,;-\sqrt{2}\right)$, $F_2 = \left(\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right)$, ta có $F_1F_2 = 4$, suy ra

$MF_1 + MF_2 \geq 4 > 2\sqrt{2}\ \ \forall M \Rightarrow \left(MF_1 + MF_2\right)^2 - 8 > 0\ \forall M.$

Do đó

$$\left|MF_1 - MF_2\right| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left(MF_1 - MF_2\right)^2 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(MF_1 - MF_2\right)^2 - 8\right)\left(\left(MF_1 + MF_2\right)^2 - 8\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(MF_1^2 - MF_2^2\right)^2 - 16\left(MF_1^2 + MF_2^2\right) + 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(x_M + \sqrt{2}\right)^2 + \left(y_M + \sqrt{2}\right)^2 - \left(x_M - \sqrt{2}\right)^2 - \left(y_M - \sqrt{2}\right)^2\right)^2$$

$$-16\left(\left(x_M + \sqrt{2}\right)^2 + \left(y_M + \sqrt{2}\right)^2 + \left(x_M - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y_M - \sqrt{2}\right)^2\right) + 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(4\sqrt{2}\,x_M + 4\sqrt{2}\,y_M\right)^2 - 16(2x_M^2 + 2y_M^2 + 8) + 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow 32x_M^2 + 32y_M^2 + 64x_My_M - 32x_M^2 - 32y_M^2 - 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_My_M = 1 \Leftrightarrow M \in (H).$$

Biến đổi trên khẳng định rằng (H) là một hypebol có các tiêu điểm $F_1 = \left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$, $F_2 = \left(\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right)$; tiêu cự $F_1F_2 = 2c = 4$, độ dài trục thực $2a = 2\sqrt{2}$, độ dài trục ảo $2b = 2\sqrt{2}$, tâm sai $e = \sqrt{2}$.

Nhận xét. Bằng phương pháp tương tự, ta chứng minh được rằng đường cong (H) = $\{M(x\,;\,y) : xy = k,\ k \neq 0\}$ cũng là một hypebol, có các tiêu điểm là $F_1 = \left(-\sqrt{2k}\,;-\sqrt{2k}\right)$, $F_2 = \left(\sqrt{2k}\,;\sqrt{2k}\right)$; độ dài trục thực và trục ảo bằng $2\sqrt{2k}$, tiêu cự bằng $4\sqrt{k}$, hai tiệm cận là các trục toạ độ.

Ví dụ 11.4. Cho hypebol (H) : $xy = k$. Các điểm A, B, C thuộc (H). Các đường thẳng BC, CA, AB cắt trục hoành lần lượt tại A', B', C'. Các đường thẳng Δ_A, Δ_B, Δ_C theo thứ tự qua A', B', C', vuông góc với BC, CA, AB.

Chứng minh rằng $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ đồng quy.

Giải. Giả sử $A = \left(a ; \frac{k}{a}\right)$; $B = \left(b ; \frac{k}{b}\right)$; $C = \left(c ; \frac{k}{c}\right)$.

Ta có BC : $\dfrac{x - c}{b - c} = \dfrac{y - \frac{k}{c}}{\frac{k}{b} - \frac{k}{c}}$

Vì $A' = BC \cap x'Ox$ nên $A' = (b + c ; 0)$.

Ta có $\overrightarrow{BC} = \left(c - b ; \frac{k}{c} - \frac{k}{b}\right) = \left(c - b ; -\frac{k(c - b)}{bc}\right)$, suy ra vectơ chỉ phương của đường thẳng BC là $(bc ; - k)$.

Chú ý rằng Δ_A qua A', vuông góc với đường thẳng BC nên ta có

$$\Delta_A : bc(x - (b + c)) - ky = 0.$$

Dễ thấy Δ_A đi qua điểm $L(a + b + c ; \frac{abc}{k})$.

Tương tự ta có Δ_B, Δ_C cũng đi qua L.Vậy $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ đồng quy (tại L).

Ví dụ 11.5. Cho elip (E) : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$. Đường thẳng Δ thay đổi vuông góc với x'Ox cắt (E) tại M, N. $A_1(-a ; 0)$, $A_2(a ; 0)$ là các đỉnh của (E), $K = A_1M \cap A_2N$.

Chứng minh rằng K thay đổi trên một hypebol. Viết phương trình hypebol đó.

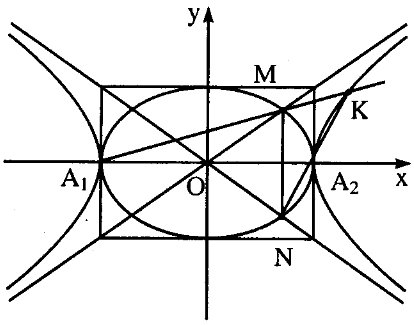
Giải (h.11-5)

Giả sử $M = (x_M ; y_M) \Rightarrow N = (x_M ; -y_M)$.

Các đường thẳng A_1M, A_2N có phương trình

$$A_1M : \frac{-a - x}{-a - x_M} = \frac{0 - y}{0 - y_M}$$

$$A_2N : \frac{a - x}{a - x_M} = \frac{0 - y}{0 - (-y_M)}$$



Hình 11-5

Từ đó với chú ý rằng $K = A_1M \cap A_2N$ ta có

$$\begin{cases} \dfrac{a + x_K}{a + x_M} = \dfrac{y_K}{y_M} \\ \dfrac{a - x_K}{a - x_M} = \dfrac{-y_K}{y_M} \end{cases} \Rightarrow \left\{ \dfrac{a^2 - x_K^2}{a^2 - x_M^2} = -\dfrac{y_K^2}{y_M^2} \right. \Rightarrow \dfrac{1 - \dfrac{x_K^2}{a^2}}{1 - \dfrac{x_M^2}{a^2}} = -\dfrac{y_K^2}{y_M^2}$$

$$\Rightarrow \dfrac{1 - \dfrac{x_K^2}{a^2}}{\dfrac{y_M^2}{b^2}} = -\dfrac{y_K^2}{y_M^2} \quad \left(\text{vì } \dfrac{x_M^2}{a^2} + \dfrac{y_M^2}{b^2} = 1\right)$$

$$\Rightarrow 1 - \dfrac{x_K^2}{a^2} = -\dfrac{y_K^2}{b^2} \Rightarrow \dfrac{x_K^2}{a^2} - \dfrac{y_K^2}{b^2} = 1$$

$\Rightarrow$ K thuộc hypebol (H) có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Ví dụ 11.6. Cho hypebol (H) : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với các tiêu điểm $F_1(-c ; 0)$, $F_2(c ; 0)$ và cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 = a^2$, Δ là một trong hai tiệm cận của (H), Δ cắt (C) tại E_1, E_2 ($x_{E_1} < 0, x_{E_2} > 0$). Một đường thẳng song song với trục tung cắt (H) tại M và cắt Δ tại N. Chứng minh rằng $NE_1 = MF_1$; $NE_2 = MF_2$.

Giải

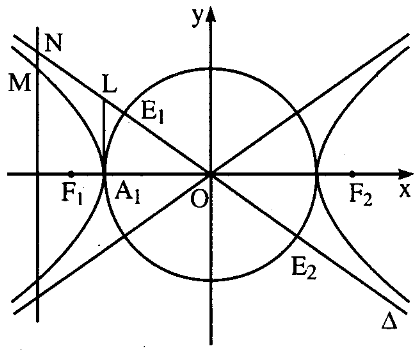
Không mất tính tổng quát, giả sử $\Delta : y = -\dfrac{b}{a}x$ và $x_N < 0$ (h.11-6). Xét $A_1(-a ; 0)$, $L \in \Delta$ và LA_1 // y'Oy. Ta có :

$L = (-a ; b) \Rightarrow OL = \sqrt{a^2 + b^2} = c.$

Đặt $\varphi = \left(\vec{i} ; \overrightarrow{ON}\right) = \left(\vec{i} ; \overrightarrow{OL}\right)$. Ta có

$$NE_1 = ON - OE_1 = \dfrac{x_N}{\cos\varphi} - a$$

$$= \dfrac{x_M}{\cos\left(\vec{i} ; \overrightarrow{OL}\right)} - a = \dfrac{x_M}{\dfrac{x_{A_1}}{OL}} - a$$



Hình 11-6

Mặt khác MA > MB nên điểm M(x ; y) phải thoả mãn $x \ge 0$.

Ta có $MB^2 = (x-2)^2 + y^2$, AB = 4, AO = 2.

Theo tính chất đường phân giác ta có :

$$\frac{MB}{AB} = \frac{IM}{IA} = \frac{x}{AO} \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4x^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x + \frac{4}{3} - y^2 = \frac{16}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{16}\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{3y^2}{16} = 1. \qquad (1)$$

Đặt $x + \frac{2}{3} = X, y = Y, J = \left(-\frac{2}{3} ; 0\right), \frac{16}{9} = a^2, \frac{16}{3} = b^2$ thì (1) có dạng

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1. \qquad (2)$$

Trong hệ toạ độ JXY, (2) là phương trình chính tắc của một hypebol (H). Vì X > 0 nên M thuộc nhánh phải của (H).

Ta có $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{64}{9} \Rightarrow c = \frac{8}{3}$.

Trong hệ toạ độ JXY, tiêu điểm phải của (H) có toạ độ $\left(\frac{8}{3} ; 0\right)$, do đó trong hệ toạ độ Oxy tiêu điểm phải của (H) là (2 ; 0), chính là điểm B.

Ví dụ 11.9. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, chứng minh rằng mỗi đường cong có phương trình xác định như sau là một hypebol. Tìm độ dài trục thực, trục ảo, tiêu cự, tâm sai, toạ độ các tiêu điểm và phương trình các tiệm cận của hypebol đó.

a) $(H_1) : 5x^2 - 3y^2 - 10x + 12y - 22 = 0$;

b) $(H_2) : xy - 5x - 2y + 9 = 0$.

Giải

a) $M(x;y) \in (H_1) \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{3} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$.

Đặt $\begin{cases} x = 1 + X \\ y = 2 + Y \end{cases}$, I = (1 ; 2). Trong hệ toạ độ IXY, (H_1) có phương trình

$$\frac{X^2}{3} - \frac{Y^2}{5} = 1.$$

Vậy (H_1) là một hypebol có độ dài trục thực bằng $2\sqrt{3}$, độ dài trục ảo bằng $2\sqrt{5}$, tiêu cự bằng $4\sqrt{2}$, tâm sai bằng $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, các tiêu điểm (trong hệ Oxy) là $(1-2\sqrt{2}\ ;2)$, $(1+2\sqrt{2}\ ;2)$, phương trình các tiệm cận $y-2=\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}(x-1)$ hay $y=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x+2-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$, $y=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x+2+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

b) $M(x\ ;y)\in(H_2)\Leftrightarrow(x-2)(y-5)=1$.

Đặt $\begin{cases}x=2+X\\y=5+Y\end{cases}$, $I=(2\ ;5)$. Trong hệ toạ độ IXY, (H_2) có phương trình $XY=1$, do đó (H_2) là một hypebol có độ dài trục thực bằng $2\sqrt{2}$, độ dài trục ảo bằng $2\sqrt{2}$, tiêu cự bằng 4, tâm sai bằng $\sqrt{2}$, các tiêu điểm (trong hệ toạ độ Oxy) là $\left(2-\sqrt{2}\ ;5-\sqrt{2}\right),\left(2+\sqrt{2}\ ;5+\sqrt{2}\right)$, phương trình các tiệm cận là $x=2$ và $y=5$.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

11.1. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường tròn (I) thay đổi và cắt x'Ox tại M, N ; cắt y'Oy tại P, Q sao cho MN = 2a, PQ = 2b (a, b là hai số dương cho trước, $a\neq b$). Tìm quỹ tích các điểm I.

11.2. Trên mặt phẳng Oxy cho điểm $A(a_1;\ a_2)$, $(a_1,\ a_2\neq 0)$.

Đường thẳng Δ quay xung quanh A, cắt x'Ox, y'Oy tương ứng tại X, Y.

Chứng minh rằng trung điểm M của XY chạy trên một hypebol. Hãy viết phương trình của hypebol đó.

11.3. Cho hypebol (H) : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $M\in(H)$. N, P thuộc các tiệm cận sao cho MNOP là hình bình hành. Chứng minh rằng $S_{MNOP}=\frac{ab}{2}$.

11.4. Cho hypebol (H) : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ và đường thẳng Δ không song song với các tiệm cận của (H). M chạy trên (H). Đường thẳng qua M, song song với Δ cắt các tiệm cận của (H) tại N, P. Chứng minh rằng MN.MP không đổi.

11.5. Cho hypebol (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, tiêu điểm F(c ; 0), đỉnh A(a ; 0), các tiệm cận $\Delta_1 : y = \frac{b}{a}x$; $\Delta_2 : y = -\frac{b}{a}x$. Đường thẳng qua A, vuông góc với x'Ox cắt Δ_1 ; Δ_2 tại P, Q. Đường thẳng qua F, vuông góc với x'Ox, cắt Δ_1 và (H) tại M, N ($y_N > 0$). Chứng minh rằng MN bằng bán kính đường tròn nội tiếp tam giác OPQ.

11.6. Cho tam giác ABC có ba đỉnh thuộc (H) : xy = 1. Chứng minh rằng trực tâm của tam giác ABC cũng thuộc (H).

11.7. Cho hypebol (H) : xy = 1. Tìm các điểm A, B trên hai nhánh của (H) sao cho độ dài AB nhỏ nhất.

11.8. Cho hypebol (H) : $x^2 - y^2 = 1$ và đường thẳng $\Delta : 5x - 3y - 1 = 0$.

Tìm $M \in (H)$ sao cho khoảng cách từ M đến Δ nhỏ nhất.

11.9. Chứng minh rằng, mỗi đường cong có phương trình xác định như sau là một hypebol. Tìm độ dài trục thực, trục ảo, tiêu cự, tâm sai, các tiêu điểm và phương trình các đường tiệm cận của mỗi hypebol đó :

a) $6x^2 - 4y^2 + 24x + 40y - 52 = 0$;

b) $xy + 4x - 3y - 11 = 0$.

§12. PARABOL

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I – ĐỊNH NGHĨA VÀ ĐỊNH LÍ CƠ BẢN

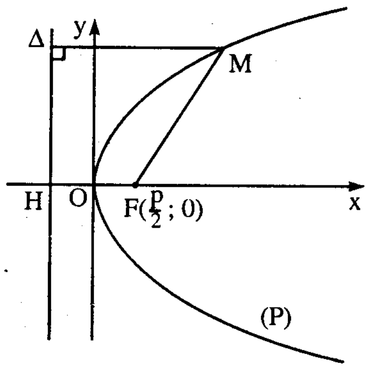
1. Định nghĩa

Cho điểm F cố định và đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Tập hợp

$(P) = \{M : MF = d(M ; \Delta)\}$

được gọi là một *parabol*. F được gọi là *tiêu điểm*, Δ được gọi là *đường chuẩn* của parabol (P).

Khoảng cách d(F ; Δ) = p được gọi là *tham số tiêu* của (P). Gọi H là hình chiếu của F trên Δ. Trung điểm O của HF được gọi là *đỉnh* của (P) (h.12-1).



Hình 12-1

2. Định lí cơ bản

Cho parabol (P) với tiêu điểm F, đường chuẩn Δ, tham số tiêu p. Lập hệ toạ độ Oxy sao cho $F=\left(\frac{p}{2};0\right)$. Khi đó

$$M(x\ ;\ y)\in(P)\Leftrightarrow y^2=2px. \qquad (1)$$

Phương trình (1) được gọi là *phương trình chính tắc* của (P).

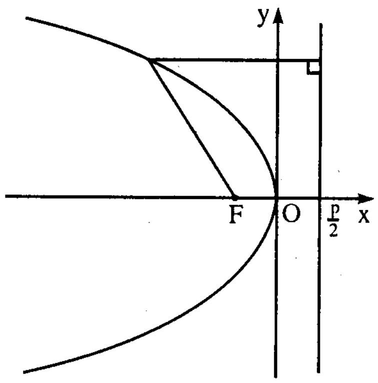
Nhận xét. Khi (P) có dạng chính tắc, với mọi M(x ; y) ∈ (P) ta có

$$MF=x+\frac{p}{2}.$$

Đoạn MF được gọi là bán kính qua tiêu của điểm M.

Chú ý. Ngoài dạng chính tắc, parabol còn có những phương trình dạng khác :

- $y^2 = -2px$ $(p > 0)$. Khi đó, tiêu điểm là $F=\left(-\frac{p}{2};0\right)$, đường chuẩn $\Delta:\ x=\frac{p}{2}$ (h.12-2)



Hình 12-2

- $x^2 = 2py$ $(p > 0)$. Khi đó, tiêu điểm $F=\left(0;\ \frac{p}{2}\right)$, đường chuẩn $y=-\frac{p}{2}$.
- $x^2 = -2py$ $(p > 0)$. Khi đó tiêu điểm là $F=\left(0;\ -\frac{p}{2}\right)$, đường chuẩn $y=\frac{p}{2}$.

II – HÌNH DẠNG CỦA PARABOL

1. Tính đối xứng

Parabol nhận đường thẳng đi qua tiêu điểm, vuông góc với đường chuẩn làm trục đối xứng.

2. Một tính chất khác

Parabol nằm trong nửa mặt phẳng không chứa đường chuẩn mà bờ là đường thẳng qua đỉnh, song song với đường chuẩn của parabol.

B. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 12.1. Cho đường tròn (I ; R) và điểm A thuộc (I), d là tiếp tuyến với (I) tại A, M là một điểm nằm ngoài (I). Gọi H là hình chiếu của M trên d. Từ M kẻ tới (I) tiếp tuyến MT. Khi M thay đổi sao cho MH = MT, hãy chứng minh rằng :

a) M chạy trên một parabol cố định ;

b) Các đường tròn (M ; MT) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Giải

a) Lập hệ trục toạ độ Oxy sao cho $O \equiv A$, $I = (R ; 0)$ (h.12-3)

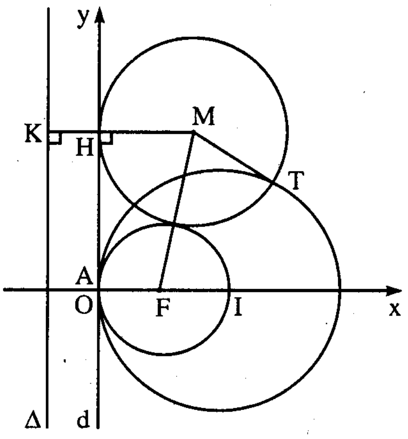
Ta có $IM^2 = MT^2 + IT^2 = MH^2 + IT^2$

$\Leftrightarrow (x_M - R)^2 + (y_M - 0)^2 = x_M^2 + R^2$

$\Leftrightarrow y_M^2 = 2Rx_M$.

Vậy M thuộc parabol (P) có phương trình

$$y^2 = 2Rx.$$



Hình 12-3

b) Parabol (P) có tham số tiêu là R, tiêu điểm $F\left(\frac{R}{2} ; 0\right)$, đường chuẩn $\Delta : x = -\frac{R}{2}$.

Gọi K là hình chiếu của M trên Δ, ta có

$MF - MT = MK - MH = KH = \frac{R}{2}$

$\Rightarrow MF = MT + \frac{R}{2}$, suy ra đường tròn (M ; MT) luôn tiếp xúc với đường tròn $\left(F ; \frac{R}{2}\right)$.

Ví dụ 12.2. Cho parabol (P) : $y^2 = 2x$ và điểm A(2 ; 1). Điểm M chạy trên (P), N là trung điểm của AM. Chứng minh rằng N chạy trên một parabol cố định. Hãy xác định tiêu điểm và đường chuẩn của parabol đó.

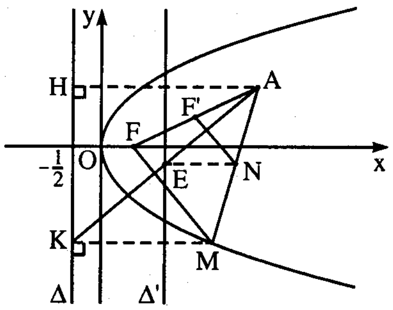
Giải

Cách 1 (h.12-4). Parabol (P) có tiêu điểm $F\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$, đường chuẩn $\Delta : x = -\frac{1}{2}$.

Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A và M trên Δ, $F'\left(\frac{5}{4};\frac{1}{2}\right)$ là trung điểm của AF.

Gọi E là trung điểm của AK, suy ra đường thẳng Δ' qua E, vuông góc với Ox là đường trung trực của HA, Δ' có phương trình $x=\frac{3}{4}$.

Vì $NF'=\frac{1}{2}MF$, $NE=\frac{1}{2}MK$, mà $MF=MK$ nên NF' = NE. Như vậy N cách đều điểm F' và đường thẳng Δ', do đó N thuộc parabol có tiêu điểm F' và đường chuẩn Δ'.



Hình 12-4

Cách 2. Ta có $x_N=\frac{x_A+x_M}{2}\Rightarrow x_M=2x_N-2$;

$$y_N=\frac{y_A+y_M}{2}\Rightarrow y_M=2y_N-1.$$

Vì $M\in(P)$ nên $y_M^2=2x_M \Leftrightarrow (2y_N-1)^2=4(x_N-1)$

Vậy N thuộc đường cong (P') có phương trình $(2y-1)^2=4(x-1)$

hay $\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=x-1$ (*)

Đặt $\begin{cases} y=\frac{1}{2}+Y \\ x=1+X, \end{cases}$; $I=\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Trong hệ toạ độ IXY, (*) có dạng $Y^2=X$, đó là một parabol có tiêu điểm $\left(\frac{1}{4};0\right)$, đường chuẩn $X=-\frac{1}{4}$. Vậy (P') là một parabol và trong hệ toạ độ Oxy có tiêu điểm $F'=\left(\frac{5}{4};\frac{1}{2}\right)$, đường chuẩn $\Delta': x=\frac{3}{4}$.

Lưu ý. Bằng phép đổi toạ độ

$$\begin{cases} x=x_0+X \\ y=y_0+Y, \end{cases}$$

trong hệ trục IXY với $I=(x_0;y_0)$, phương trình $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$ có dạng $Y^2=2pX$. Đó là phương trình chính tắc của một parabol.

Một cách tổng quát, các đường cong có phương trình dạng $(y+\alpha)^2=2p(x+\beta)$ hoặc $(x+\alpha)^2=2p(y+\beta)$ $(p\neq 0)$ đều là những parabol.

Ví dụ 12.3. Cho parabol (P) : $y^2 = 4x$ và đường thẳng $\Delta : 4x + 3y + 12 = 0$.

a) Chứng minh rằng Δ và (P) không có điểm chung.

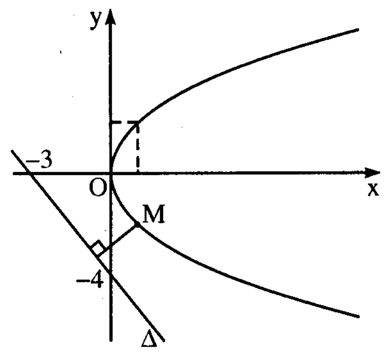
b) Tìm trên (P) điểm M sao cho khoảng cách từ M đến Δ là nhỏ nhất. Tính khoảng cách nhỏ nhất đó.

Giải (h.12-5)

a) Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ 4x + 3y + 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4x & (1) \\ y^2 + 3y + 12 = 0 & (2) \end{cases}$$



Hình 12-5

Dễ thấy phương trình (2) vô nghiệm, do đó hệ đang xét vô nghiệm.

Vậy Δ và (P) không có điểm chung.

b) Khoảng cách từ $M \in (P)$ đến Δ là

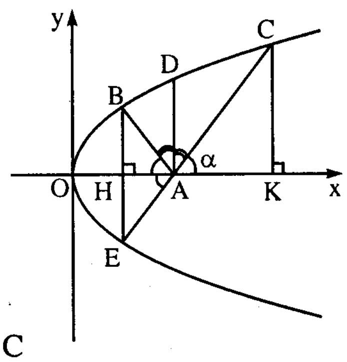
$$d(M\,;\Delta) = \frac{|4x_M + 3y_M + 12|}{5} = \frac{\left|4.\frac{y_M^2}{4} + 3y_M + 12\right|}{5}$$

$$= \frac{\left(y_M + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{39}{4}}{5} \geq \frac{39}{20}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y_M = -\frac{3}{2}$, tương ứng có $x_M = \frac{9}{16}$. Vậy điểm cần tìm là $M = \left(\frac{9}{16}\,;-\frac{3}{2}\right)$, khoảng cách nhỏ nhất từ $M \in (P)$ đến Δ bằng $\frac{39}{20}$.

Ví dụ 12.4. Cho parabol (P) : $y^2 = 2px$, A là điểm trên tia Ox. Đường thẳng qua A, vuông góc với Ox cắt (P) tại D ; B, C thuộc nhánh chứa D của (P) sao cho $\widehat{DAB} = \widehat{DAC}$ (h.12-6).

Biết rằng $4AD^2 = 3AB.AC$, tính góc BAC.



Hình 12-6

Giải

Gọi E là điểm đối xứng của B qua Ox, ta có E, A, C thẳng hàng. Gọi α là góc giữa đường thẳng EC và trục Ox, A = (a ; 0). Phương trình đường thẳng EC có dạng

$$y = k(x - a), k \neq 0.$$

Khi đó x_E, x_C là các nghiệm của phương trình

$$k^2(x - a)^2 = 2px$$

$$\Leftrightarrow k^2x^2 - (2ak^2 + 2p)x + k^2a^2 = 0.$$

Theo định lí Vi-ét ta có

$$x_E x_C = \frac{k^2a^2}{k^2} = a^2 = x_A^2 = x_D^2,$$

suy ra $\frac{y_E^2}{2p}.\frac{y_C^2}{2p} = \left(\frac{y_D^2}{2p}\right)^2 \Rightarrow HE.KC = AD^2$ (H, K lần lượt là hình chiếu của B, C trên Ox).

Từ đó, với chú ý rằng $4AD^2 = 3AB.AC$, suy ra

$$4HE.KC = 3.AB.AC \Rightarrow \frac{HE}{AE}.\frac{KC}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = 60^o.$$

Vậy $\widehat{BAC} = 180^o - 2\alpha = 60^o$.

Nhận xét. Khi cát tuyến EAC quay xung quanh A,

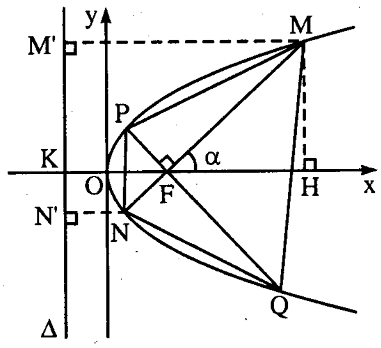
+ Tích các khoảng cách từ E và C đến trục tung là một đại lượng không đổi, bằng x_A^2.

+ Tích các khoảng cách từ E, C tới trục hoành là một đại lượng không đổi, bằng y_D^2.

Ví dụ 12.5. Cho parabol (P) : $y^2 = 2px$, tiêu điểm F. Các đường thẳng Δ_1, Δ_2 qua F, vuông góc với nhau. Δ_1 cắt (P) tại M, N ; Δ_2 cắt (P) tại P, Q. Chứng minh rằng

$$S_{MPNQ} \geq 8p^2.$$

Khi nào xảy ra đẳng thức ?



Hình 12-7

Giải (h.12-7)

Đặt $(\vec{i}, \overrightarrow{FM}) = \alpha$.

Gọi H là hình chiếu của M trên Ox ; M', K, N' lần lượt là hình chiếu của M, F, N trên đường chuẩn Δ.

Ta có MF = MM'

$$= \overline{KH} = \overline{KF} + \overline{FH} = p + FM\cos\alpha$$

$\Rightarrow FM = \dfrac{p}{1-\cos\alpha}$.

Tương tự, ta có $FN = \dfrac{p}{1-\cos(180^o-\alpha)} = \dfrac{p}{1+\cos\alpha}$.

Do đó $MN = MF + FN = \dfrac{p}{1-\cos\alpha} + \dfrac{p}{1+\cos\alpha} = \dfrac{2p}{\sin^2\alpha}$.

Ta lại có $\left(\vec{i}, \overrightarrow{FP}\right) = \alpha + 90^o$ (có thể xem như thế vì vai trò của P, Q như nhau).

Biến đổi tương tự, ta được

$$PQ = \frac{2p}{\sin^2(\alpha+90^o)} = \frac{2p}{\cos^2\alpha}.$$

Từ đó $S_{MPNQ} = \dfrac{1}{2}MN.PQ = \dfrac{2p^2}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} \geq \dfrac{2p^2}{\dfrac{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2}{4}} = 8p^2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sin^2\alpha = \cos^2\alpha \Leftrightarrow \text{tg}\alpha = \pm 1 \Leftrightarrow \alpha = 45^o$ hoặc $\alpha = 135^o$.

Nhận xét. Từ chứng minh trên ta còn có kết quả

$$\frac{1}{FM} + \frac{1}{FN} = \frac{2}{p} \text{ không đổi.}$$

Ví dụ 12.6. Cho parabol (P) : $y = x^2$ và đường thẳng $d_k : y = k(x-3)+5$.

a) Tìm k để d_k cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B.

b) Tìm k sao cho đường tròn đường kính AB đi qua điểm C(2 ; 1).

Giải

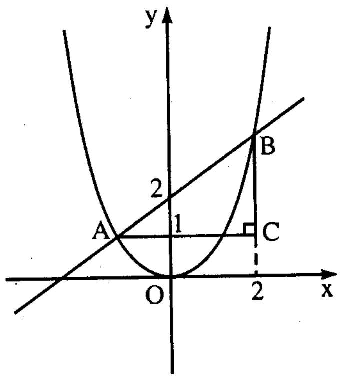
a) Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = k(x-3)+5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - kx + 3k - 5 = 0 & (1) \\ y = x^2 & (2). \end{cases}$$

Đường thẳng d_k cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow k^2 - 4(3k-5) > 0$



Hình 12-8

$\Leftrightarrow k^2 - 12k + 20 > 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k > 10 \\ k < 2. \end{array}\right.$

b) (h.12-8) Giả sử d_k cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B thì x_A, x_B là hai nghiệm của (1). Đường tròn đường kính AB đi qua C(2 ; 1) khi và chỉ khi

$\widehat{ACB} = 90^o \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 0.$

$\Leftrightarrow (x_A - 2)(x_B - 2) + (y_A - 1)(y_B - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x_Ax_B - 2(x_A + x_B) + 4 + y_Ay_B - (y_A + y_B) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x_Ax_B - 2(x_A + x_B) + 4 + x_A^2x_B^2 - \left(x_A^2 + x_B^2\right) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x_Ax_B - 2(x_A + x_B) + 4 + (x_Ax_B)^2 - (x_A + x_B)^2 + 2x_Ax_B + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (3k - 5)^2 - k^2 + 3(3k - 5) - 2k + 5 = 0$

$\Leftrightarrow 8k^2 - 23k + 15 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = \dfrac{15}{8}. \end{array}\right.$

Cả hai giá trị này thoả mãn điều kiện k < 2. Vậy có hai giá trị cần tìm của k là $k = 1$ và $k = \dfrac{15}{8}$.

Ví dụ 12.7. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 = 4$ và điểm A(2 ; 0). Điểm M chạy trên (C) và $y_M \neq 0$, H là hình chiếu của M trên trục Oy, K là giao điểm của OM và AH. Chứng minh rằng K luôn thuộc một parabol cố định. Hãy viết phương trình, tìm toạ độ tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của parabol đó.

Giải (h.12-9)

Vì Ox là trục đối xứng của (C) nên ta chỉ cần xét trường hợp $y_M > 0$.

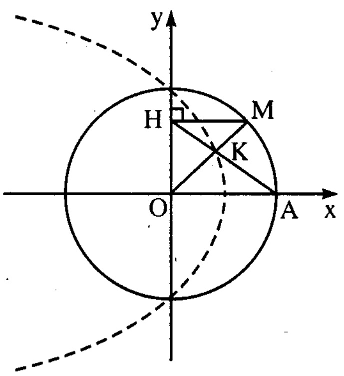
Đặt $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) = \alpha$, ta có

M = (2cosα ; 2sinα), H = (0 ; 2sinα).

Phương trình đường thẳng OM là y = (tanα)x hay xsinα – ycosα = 0.

Phương trình đường thẳng AH là

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2\sin\alpha} = 1 \Leftrightarrow x\sin\alpha + y - 2\sin\alpha = 0.$$



Hình 12-9

Tọa độ của K là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0 \\ x\sin\alpha + y - 2\sin\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \\ y = \dfrac{2\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \end{cases}$$

Ta có $y^2 = \dfrac{4\sin^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2} = \dfrac{4(1-\cos^2\alpha)}{(1+\cos\alpha)^2} = \dfrac{4(1-\cos\alpha)}{1+\cos\alpha}$

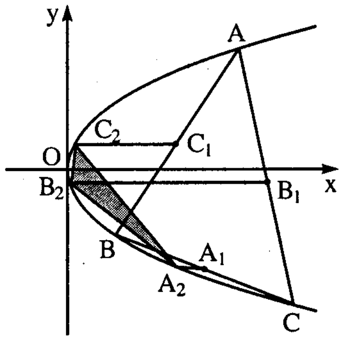
$$= 4 - \frac{8\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = 4 - 4x = -4(x-1).$$

Như vậy K chạy trên đường cong (P) có phương trình $y^2 = -4(x - 1)$.

Đặt $\begin{cases} x = 1 + X \\ y = Y \end{cases}$. Trong hệ toạ độ IXY, với I = (1 ; 0), (P) có phương trình $Y^2 = -4X$. Đó là phương trình của parabol (P) với tiêu điểm (–1 ; 0) và đường chuẩn X = 1 (trong hệ IXY). Tóm lại, K thuộc parabol (P) : $y^2 = -4(x - 1)$ có tiêu điểm trong hệ Oxy là O(0 ; 0) và đường chuẩn x = 2.

Ví dụ 12.8. Cho parabol (P) : $y^2 = 2px$.

Trên (P) lấy ba điểm A, B, C tuỳ ý. Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Qua A_1, B_1, C_1 kẻ các đường thẳng song song với Ox, chúng cắt (P) lần lượt tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng $S_{A_2B_2C_2} = \frac{1}{8}S_{ABC}$.



Hình 12-10

Giải (h.12-10). Ta có

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A ; y_B - y_A) = \left(\frac{y_B^2 - y_A^2}{2p} ; y_B - y_A\right)$$

$$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A ; y_C - y_A) = \left(\frac{y_C^2 - y_A^2}{2p} ; y_C - y_A\right).$$

Theo kết quả VD 5.28 ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\frac{(y_B^2 - y_A^2)(y_C - y_A)}{2p} - \frac{(y_C^2 - y_A^2)(y_B - y_A)}{2p}\right|$$

$$= \frac{1}{4p}\left|(y_B + y_A)(y_B - y_A)(y_C - y_A) - (y_C + y_A)(y_C - y_A)(y_B - y_A)\right|$$

$$= \frac{1}{4p}\left|(y_B - y_C)(y_C - y_A)(y_A - y_B)\right|. \qquad (*)$$

Theo giả thiết, $y_{A_2} = y_{A_1} = \frac{y_B + y_C}{2}$, $y_{B_2} = y_{B_1} = \frac{y_C + y_A}{2}$,

$y_{C_2} = y_{C_1} = \frac{y_A + y_B}{2}$, do đó, theo (*) có

$$S_{A_2B_2C_2} = \frac{1}{4p}\left|(y_{B_2} - y_{C_2})(y_{C_2} - y_{A_2})(y_{A_2} - y_{B_2})\right|$$

$$= \frac{1}{4p}\left|\frac{y_C - y_B}{2}.\frac{y_A - y_C}{2}.\frac{y_B - y_A}{2}\right|$$

$$= \frac{1}{8}.\frac{1}{4p}\left|(y_B - y_C)(y_C - y_A)(y_A - y_B)\right|$$

$$= \frac{1}{8}S_{ABC}.$$

Ví dụ 12.9. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường cong (P) có phương trình

$$16x^2 + 9y^2 + 24xy - 56x + 108y + 124 = 0.$$

Chứng minh rằng (P) là một parabol. Tìm toạ độ tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của parabol đó.

Giải

Ta có $M(x ; y) \in (P)$ khi và chỉ khi $16x^2 + 9y^2 + 24xy - 56x + 108y + 124 = 0$

$\Leftrightarrow 25(x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5) = 9x^2 + 16y^2 - 24xy + 6x - 8y + 1$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = \left(\frac{3x - 4y + 1}{5}\right)^2$

$\Leftrightarrow MF^2 = d^2(M ; \Delta)$

$\Leftrightarrow MF = d(M ; \Delta)$

trong đó $F = (1 ; -2)$, Δ là đường thẳng có phương trình $3x - 4y + 1 = 0$.

Vậy (P) là parabol với tiêu điểm $F(1 ; -2)$, đường chuẩn $\Delta : 3x - 4y + 1 = 0$.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

12.1. Cho đường tròn (S ; R) và điểm $A \in (S)$, d là tiếp tuyến với (S) tại A. Điểm M chạy trên d ($M \neq A$). Từ M kẻ tới (S) tiếp tuyến MT, (N) là đường tròn đi qua T, tiếp xúc với d tại M. Chứng minh rằng

Chương IV

CÁC CHUYÊN ĐỀ

§13. TÍCH NGOÀI CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

A. LÍ THUYẾT

I – ĐỊNH NGHĨA, QUY ƯỚC

1. Nhắc lại một số thuật ngữ và kí hiệu

Thuật ngữ góc (góc lượng giác) là cách nói ngắn gọn thay cho cách nói đầy đủ của thuật ngữ góc giữa hai tia (góc lượng giác giữa hai tia). Trong mục này, để tránh nhầm lẫn, ta không dùng cách nói ngắn gọn mà dùng cách nói đầy đủ : góc giữa hai tia, góc lượng giác giữa hai tia. Trước khi làm quen với khái niệm góc lượng giác giữa hai tia, ta đã biết khái niệm góc giữa hai tia. Trong mục này, ta sẽ xem xét kĩ hơn mối quan hệ giữa hai loại góc này.

– Có rất nhiều góc lượng giác giữa hai tia Ox, Oy (Ox là tia đầu, Oy là tia cuối) và chúng cùng được kí hiệu là (Ox, Oy). Trong các góc lượng giác giữa hai tia (Ox, Oy), có và chỉ có duy nhất một góc có số đo lớn hơn -180° và nhỏ hơn hoặc bằng 180°, và hơn thế, số đo này có giá trị tuyệt đối bằng số đo của góc giữa hai tia Ox, Oy : $\widehat{xOy}$.

– Với mỗi góc lượng giác giữa hai tia (Ox, Oy), có một và chỉ một số nguyên k sao cho $sđ(Ox, Oy) = sđ\,\widehat{xOy} + k360^\circ$ hoặc $sđ(Ox, Oy) = -sđ\,\widehat{xOy} + k360^\circ$. Nhờ nhận xét trên, người ta chứng minh được hệ thức Sa-lơ về số đo của các góc lượng giác giữa hai tia : $sđ(Ox, Oy) = sđ(Ox, Oz) + sđ\,(Oz, Oy) + k360^\circ$, trong hệ thức này số nguyên k hoàn toàn xác định nếu số đo của các góc lượng giác giữa hai tia (Ox, Oy), (Ox, Oz), (Oz, Oy) đã xác định.

2. Định nghĩa

Nhờ khái niệm góc giữa hai tia, khái niệm góc lượng giác giữa hai tia, khái niệm góc giữa hai vectơ, khái niệm góc lượng giác giữa hai vectơ được định nghĩa như sau :

– *Góc giữa hai vectơ* $\vec{a},\vec{b}$ là góc giữa hai tia Ox, Oy theo thứ tự cùng hướng với $\vec{a},\vec{b}$. Vì góc giữa hai tia Ox, Oy được kí hiệu bằng hai cách : $\widehat{xOy}$ hoặc $\widehat{yOx}$ nên góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cũng được kí hiệu bằng hai cách : $\widehat{(\vec{a},\vec{b})}$ hoặc $\widehat{(\vec{b},\vec{a})}$.

– *Góc lượng giác giữa hai vectơ* $\vec{a}, \vec{b}$ ($\vec{a}$ là vectơ đầu, $\vec{b}$ là vectơ cuối) là góc lượng giác giữa hai tia Ox, Oy (Ox là tia đầu, Oy là tia cuối) theo thứ tự cùng hướng với $\vec{a}, \vec{b}$. Vì góc lượng giác giữa hai tia Ox, Oy được kí hiệu chỉ bằng một cách : (Ox, Oy) nên góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cũng được kí hiệu chỉ bằng một cách : $(\vec{a}, \vec{b})$.

– Có một điều tế nhị cần lưu ý, trên mặt phẳng không định hướng, kí hiệu $(\vec{a}, \vec{b})$ chỉ góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$, còn trên mặt phẳng định hướng, kí hiệu $(\vec{a}, \vec{b})$ chỉ góc lượng giác giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Vì vậy, kí hiệu $(\vec{a}, \vec{b})$ luôn chỉ mang một ý nghĩa. Do đó, không bao giờ có sự nhầm lẫn.

– Từ hệ thức Sa-lơ về số đo của các góc lượng giác giữa hai tia, dễ dàng suy ra hệ thức Sa-lơ về số đo của các góc lượng giác giữa hai vectơ : $\text{sđ}(\vec{a}, \vec{b}) = \text{sđ}(\vec{a}, \vec{c}) + \text{sđ}(\vec{c}, \vec{b}) + k360^\circ$. Để cho đơn giản, hệ thức Sa-lơ về số đo của các góc lượng giác giữa hai vectơ thường được viết như sau :

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{b}) + k360^\circ.$$

3. Quy ước

Trong mục này, mặt phẳng luôn được coi là đã định hướng theo nghĩa thông thường, hướng dương là hướng ngược chiều với chiều quay của kim đồng hồ, hướng âm là hướng cùng chiều với chiều quay của kim đồng hồ. Đương nhiên, kí hiệu $(\vec{x}, \vec{y})$ chỉ góc lượng giác giữa hai vectơ $\vec{x}, \vec{y}$.

II – ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CỦA TÍCH NGOÀI

1. Định nghĩa

Tích ngoài của hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ kí hiệu là $\vec{a} \wedge \vec{b}$ là một số, được xác định như sau :

Nếu $\left[\begin{array}{l}\vec{a} = \vec{0}\\ \vec{b} = \vec{0}\end{array}\right.$ thì $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$.

Nếu $\begin{cases}\vec{a} \neq \vec{0}\\ \vec{b} \neq \vec{0}\end{cases}$ thì $\vec{a} \wedge \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b})$.

Từ định nghĩa trên ta có ngay hệ quả hiển nhiên :

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} = 0.$$

2. Tính chất

a) Biểu diễn toạ độ của tích ngoài

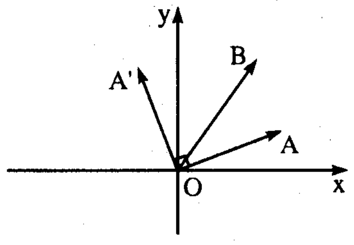
Để có thể chứng minh được các tính chất của tích ngoài, trước hết ta chứng minh định lí sau

Định lí 13.1. Trên mặt phẳng toạ độ cho hai vectơ $\vec{a}(x_1 ; y_1), \vec{b}(x_2 ; y_2)$. Khi đó

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Chứng minh. (h.13-1) Lấy hai điểm A, B sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Lấy điểm A' sao cho

$$\begin{cases} (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = 90^\circ \\ |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OA'}|. \end{cases}$$



Hình 13-1

Đặt $\vec{a'} = \overrightarrow{OA'}$. Ta có

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{a'}) + (\vec{a'}, \vec{b}) + k_1 360^\circ$$
$$= 90^\circ + (\vec{a'}, \vec{b}) + k_2 360^\circ$$

$$\Rightarrow \sin(\vec{a}, \vec{b}) = \cos(\vec{a'}, \vec{b}). \qquad (1)$$

Mặt khác,

$$(\vec{i}, \vec{a'}) = (\vec{i}, \vec{a}) + (\vec{a}, \vec{a'}) + k_3 360^\circ = (\vec{i}, \vec{a}) + 90^\circ + k_4 360^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\vec{a}|\cos(\vec{i}, \vec{a'}) = -|\vec{a}|\sin(\vec{i}, \vec{a}) = -y_1 \\ |\vec{a}|\sin(\vec{i}, \vec{a'}) = |\vec{a}|\cos(\vec{i}, \vec{a}) = x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{a'} = (-y_1 ; x_1). \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a'}||\vec{b}|\cos(\vec{a'}, \vec{b}) = \vec{a'}.\vec{b} = (-y_1 ; x_1)(x_2 ; y_2) = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Nhận xét. (2) sẽ được chứng minh đơn giản hơn nếu ta dùng phép quay vectơ.

b) Tính chất. Tích ngoài của hai vectơ có ba tính chất cơ bản sau đây :

i) $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$ (phản giao hoán) ;

ii) $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$ (phân phối) ;

iii) $(k\vec{a}) \wedge (l\vec{b}) = (kl)(\vec{a} \wedge \vec{b})$.

Chứng minh.

i) $\vec{a} \wedge \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b}) = -|\vec{b}||\vec{a}|\sin(\vec{b},\vec{a}) = -\vec{b} \wedge \vec{a}$.

ii) Giả sử $\vec{a}(x_1\ ;\ y_1), \vec{b}(x_2\ ;\ y_2), \vec{c}(x_3\ ;\ y_3)$, ta có

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = (x_1\ ; y_1) \wedge (x_2 + x_3\ ; y_2 + y_3) = x_1(y_2 + y_3) - (x_2 + x_3)y_1$$

$$= (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_1y_3 - x_3y_1) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}.$$

iii) Giả sử $\vec{a}(x_1\ ;\ y_1), \vec{b}(x_2\ ;\ y_2)$, ta có

$$(k\vec{a}) \wedge (l\vec{b}) = (kx_1, ky_1) \wedge (lx_2, ly_2) = klx_1y_2 - klx_2y_1$$

$$= kl(x_1y_2 - x_2y_1) = (kl)\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right).$$

III – HƯỚNG VÀ DIỆN TÍCH ĐẠI SỐ CỦA TAM GIÁC

1. Hướng của tam giác

Cho tam giác ABC, ta thấy các hướng $A \to B \to C$; $B \to C \to A$; $C \to A \to B$ trùng nhau.

Các hướng trùng nhau đó gọi là *hướng của tam giác* ABC.

Đương nhiên các tam giác ABC, BCA, CAB có cùng hướng.

Nếu hướng của tam giác ABC trùng với hướng của mặt phẳng thì ta nói tam giác có *hướng dương* (thuận). Nếu tam giác ABC có hướng ngược với hướng của mặt phẳng thì ta nói tam giác ABC có *hướng âm* (nghịch).

2. Diện tích đại số của tam giác

a) Tam giác suy biến

Theo định nghĩa thông thường, ba đỉnh của một tam giác phải là ba điểm không cùng nằm trên một đường thẳng. Nhìn chung, yêu cầu này là cần thiết. Tuy nhiên, trong một vài trường hợp, nhất là trong các bài toán về diện tích, yêu cầu này đôi khi trở nên không cần thiết, không những thế còn gây trở ngại cho việc làm toán. Chính vì vậy, ta đưa ra khái niệm *tam giác suy biến*, tức tam giác mà ba đỉnh của nó có thể nằm trên cùng một đường thẳng. Nếu không có gì nhầm lẫn, để cho thuận tiện, người ta thay thuật ngữ "tam giác suy biến" bởi thuật ngữ "tam giác".

b) Diện tích đại số của tam giác

Diện tích đại số của tam giác ABC là một số, kí hiệu S[ABC] và xác định như sau :

$$S[ABC] = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right).$$

Từ định nghĩa trên, ta có ngay hệ quả : S[ABC] = S[BCA] = S[CAB].

Hệ quả này được chứng minh rất đơn giản :

$$S[ABC] = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = S[BCA].$$

Tương tự ta có : S[BCA] = S[CAB].

c) Mối liên hệ giữa diện tích đại số và diện tích hình học của tam giác

Khái niệm diện tích hình học chính là khái niệm diện tích mà ta vẫn hiểu theo nghĩa thông thường. Tuy nhiên, khi cần phân biệt khái niệm diện tích và diện tích đại số thì người ta thường thay thuật ngữ "*diện tích*" bởi thuật ngữ "*diện tích hình học*".

Đối với một tam giác thì diện tích đại số và diện tích hình học của nó được liên hệ với nhau bởi định lí sau đây :

Định lí 13.2

i) Nếu tam giác ABC có hướng dương thì S[ABC] = S(ABC).

ii) Nếu tam giác ABC có hướng âm thì S[ABC] = –S(ABC).

Ở đây, S(ABC) chỉ diện tích hình học của tam giác ABC.

Chứng minh

i) $$S[ABC] = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC} = S(ABC).$$

ii) Chứng minh tương tự i).

Định lí trên cho ta hệ quả sau :

Hệ quả. Trên mặt phẳng toạ độ cho tam giác ABC. Biết rằng

$$\overrightarrow{AB} = (x_1, y_1)\ ;\ \overrightarrow{AC} = (x_2, y_2)$$

Khi đó $$S(ABC) = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 - x_2y_1\right|$$

Nhận xét : Hệ quả này chính là BT5.28

Cũng như kí hiệu S[.] chỉ diện tích đại số của tam giác, của đa giác lồi, trong toàn bộ bài viết này, kí hiệu S(.) dùng để chỉ diện tích hình học của tam giác, của đa giác lồi.

d) Tính chất : Với một tam giác ABC cho trước, diện tích đại số của tam giác có hai tính chất cơ bản sau :

i) Với mọi điểm M thuộc đường thẳng BC ta có

$$S[ABC] = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BC}.$$

ii) Với mọi điểm M ta có S[ABC] = S[MAB] + S[MBC] + S[MCA] (hệ thức Sa-lơ)

Chứng minh

i) $S[ABC] = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}\right)$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \wedge \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BC}.$

ii) $S[ABC] = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right) \wedge \left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MA}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA}\right)$

$= S[MAB] + S[MBC] + S[MCA].$

Nhận xét

– Tính chất i) chính là sự mở rộng kết quả cơ bản đối với diện tích hình học của tam giác :

$$S(ABC) = \frac{1}{2}a.h_a \ \left(\text{khi } \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BC}\right).$$

– Trong ii), nếu M thuộc đường thẳng BC thì ta có

$$S[ABC] = S[MAB] + S[MCA].$$

Đẳng thức trên cũng rất có hiệu lực trong khi làm toán.

Từ đẳng thức : S[ABC] = S[MAB] + S[MCA] suy ra

$$S[ABC] = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}\right) \wedge \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{MA}.$$

Như vậy, xét đến cùng, ii) chính là sự mở rộng của i).

IV – HƯỚNG VÀ DIỆN TÍCH ĐẠI SỐ CỦA ĐA GIÁC LỒI

1. Hướng của đa giác lồi

Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Ta thấy các hướng $A_1 \to A_2 \to ... \to A_{n-1} \to A_n$; $A_2 \to A_3 \to ... \to A_n \to A_1$; ... $A_n \to A_1 \to ... \to A_{n-2} \to A_{n-1}$ trùng nhau. Các hướng trùng nhau đó được gọi là hướng của đa giác $A_1A_2...A_n$.

Đương nhiên các đa giác $A_1A_2...A_{n-1}A_n$; $A_2A_3...A_nA_1$; ... ; $A_nA_1... A_{n-2}A_{n-1}$ có cùng hướng.

Nếu đa giác $A_1A_2... A_n$ có hướng trùng với hướng của mặt phẳng thì ta nói rằng nó có hướng dương (thuận). Nếu đa giác $A_1A_2... A_n$ có hướng ngược với hướng của mặt phẳng thì ta nói rằng nó có hướng âm (nghịch).

2. Diện tích đại số của đa giác lồi

a) Định nghĩa

Diện tích đại số của đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ là một số, kí hiệu là $S[A_1A_2...A_n]$ và xác định như sau :

Nếu $A_1A_2...A_n$ có hướng dương thì $S[A_1A_2...A_n] = S(A_1A_2...A_n)$;

Nếu $A_1A_2...A_n$ có hướng âm thì $S[A_1A_2...A_n] = -S(A_1A_2...A_n)$.

b) Tính chất. Định lí sau đây rất quan trọng. Nó cho phép ta khai triển diện tích đại số của một đa giác lồi thành tổng các diện tích đại số của các tam giác.

Định lí 13.3. Với mọi điểm M ta có

$$S[A_1A_2...A_n] = S[MA_1A_2] + S[MA_2A_3] + ... + S[MA_nA_1]. \quad (*)$$

Chứng minh. Định lí được chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Theo hệ thức Sa-lơ (III. 2d) ta thấy (*) đúng khi $n = 3$.

Giả sử (*) đã đúng với $n = k$ ($k \geq 4$). Xét đa giác lồi $A_1A_2...A_kA_{k+1}$.

Theo giả thiết quy nạp và theo hệ thức Sa-lơ (III. 2d) ta có :

$S[A_1A_2...A_k] = S[MA_1A_2] + S[MA_2A_3] + ... + S[MA_{k-1}A_k] + S[MA_kA_1]$;

$S[A_kA_{k+1}A_1] = S[MA_kA_{k+1}] + S[MA_{k+1}A_1] + S[MA_1A_k]$.

Chú ý rằng : $S[MA_kA_1] + S[MA_1A_k] = 0$. Ta thấy (*) đúng khi $n = k + 1$. Định lí đã được chứng minh.

Hệ thức (*) thường được gọi là *hệ thức Sa-lơ* về diện tích đại số.

V – MỐI LIÊN HỆ GIỮA ĐỘ DÀI ĐẠI SỐ VÀ DIỆN TÍCH ĐẠI SỐ

Mục này xin giới thiệu hai định lí quan trọng. Những định lí này cho ta thấy mối liên hệ giữa khái niệm độ dài đại số và khái niệm diện tích đại số đồng thời chúng cũng là sự mở rộng các kết quả quen biết về mối liên hệ giữa khái niệm độ dài hình học và khái niệm diện tích hình học.

Định lí 13.4. Cho tam giác ABC. Các điểm B', C' nằm trên đường thẳng BC. Ta có :

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{S[ABC]}{S[AB'C']}.$$

Chứng minh. Gọi $\vec{e}$ là vectơ chỉ phương của trục BC. Lấy M bất kì trên BC. Ta có :

$$\frac{S[ABC]}{S[AB'C']} = \frac{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{MA}}{\frac{1}{2}\overrightarrow{B'C'} \wedge \overrightarrow{MA}} = \frac{\overline{BC}\left(\vec{e} \wedge \overrightarrow{MA}\right)}{\overline{B'C'}\left(\vec{e} \wedge \overrightarrow{MA}\right)} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}.$$

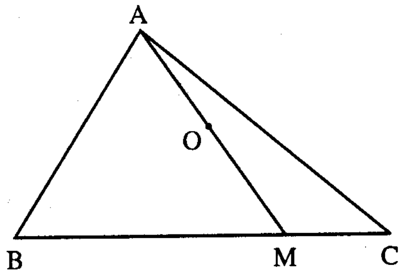
Định lí 13.5. Cho tam giác ABC và điểm O. Giả sử các đường thẳng AO và BC cắt nhau tại điểm M (khác B, C). Ta có :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{S[OBA]}{S[OCA]}.$$

Chứng minh (h.13-2). Gọi $\vec{e}$ là vectơ chỉ phương của trục BC. Ta có :

$$\frac{S[OBA]}{S[OCA]} = \frac{S[BAO]}{S[CAO]} = \frac{\frac{1}{2}\overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{MB}}{\frac{1}{2}\overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{MC}}$$

$$= \frac{\overline{MB}\left(\overrightarrow{AO} \wedge \vec{e}\right)}{\overline{MC}\left(\overrightarrow{AO} \wedge \vec{e}\right)} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.$$



Hình 13-2

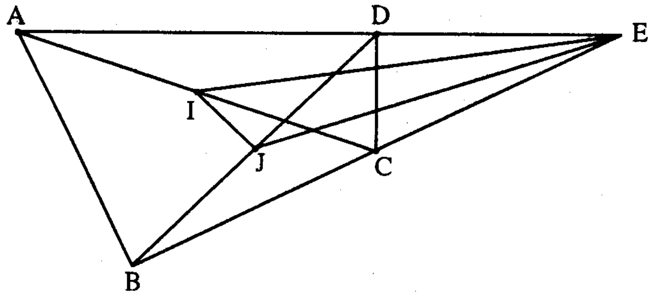
Kết quả sau có thể coi là hệ quả trực tiếp của định lí 4 và cũng có thể coi là hệ quả trực tiếp của định lí 5.

Hệ quả. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trên đường thẳng BC. Ta có

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{S[MBA]}{S[MCA]}.$$

B. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 13.1. Cho tứ giác lồi ABCD. I, J là trung điểm của AC, BD, $E = AD \cap BC$. Chứng minh rằng $S(EIJ) = \frac{1}{4}S(ABCD)$.



Hình 13-3

Giải (h.13-3)
Ta có

$$S[EIJ] = \frac{1}{2}\overrightarrow{EI} \wedge \overrightarrow{EJ} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC}\right)\right) \wedge \left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EA} \wedge \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} \wedge \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EA} \wedge \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EC} \wedge \overrightarrow{ED}\right)$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EA} \wedge \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{EC} \wedge \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{ED} \wedge \overrightarrow{EA}\right)$$

$$\left(\text{vì } \overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED} \wedge \overrightarrow{EA} = 0\right)$$

$$= \frac{1}{4}(S[EAB] + S[EBC] + S[ECD] + S[EDA])$$

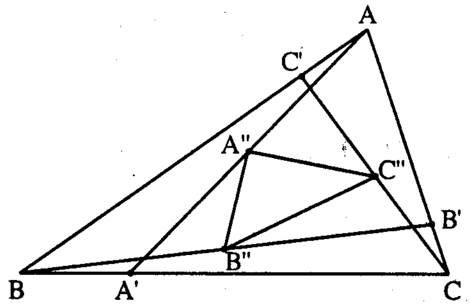
$$= \frac{1}{4}S[ABCD].$$

Từ đó suy ra $S(EIJ) = \frac{1}{4}S(ABCD)$.

Nhận xét. Lời giải bài trên không những cho ta biết $S(EIJ) = \frac{1}{4}S(ABCD)$ mà còn cho ta biết tam giác EIJ và tứ giác ABCD cùng hướng (một kết quả không dễ chứng minh). Nếu không biết sử dụng tích ngoài (một cách khéo léo) thì phép chứng minh rất dễ phụ thuộc vào hình vẽ.

Ví dụ 13.2. Cho tam giác ABC. Các điểm A', B', C' theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. A", B", C" theo thứ tự là trung điểm của các đoạn AA', BB', CC'. Chứng minh rằng

$$S(A''B''C'') = \frac{1}{4}S(A'B'C').$$



Hình 13-4

Giải (h.13-4)

Ta có $S[A''B''C''] = \frac{1}{2}\overrightarrow{A''B''} \wedge \overrightarrow{A''C''} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'}) \wedge \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{A'C'})\right)$

$= \frac{1}{4}.\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'})$

$= \frac{1}{4}(S[ABC] - S[A'CA] - S[A'AB] + S[A'B'C'])$

$= \frac{1}{4}S[A'B'C']$.

Từ đó suy ra $S(A''B''C'') = \frac{1}{4}S(A'B'C')$.

Ví dụ 13.3. Cho tam giác ABC. M là điểm bất kì, một đường thẳng Δ qua M cắt các đường thẳng BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng

$$\frac{S[MBC]}{\overline{MA_1}} + \frac{S[MCA]}{\overline{MB_1}} + \frac{S[MAB]}{\overline{MC_1}} = 0.$$

Giải (h.13-5)

Gọi $\vec{e}$ là vectơ chỉ phương của trục Δ. Ta có :

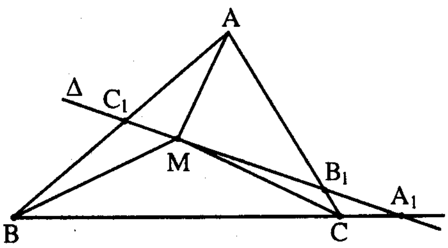
$$\frac{S[MBC]}{\overline{MA_1}} + \frac{S[MCA]}{\overline{MB_1}} + \frac{S[MAB]}{\overline{MC_1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\overrightarrow{MA_1} \wedge \overrightarrow{BC}}{\overline{MA_1}} + \frac{\frac{1}{2}\overrightarrow{MB_1} \wedge \overrightarrow{CA}}{\overline{MB_1}} + \frac{\frac{1}{2}\overrightarrow{MC_1} \wedge \overrightarrow{AB}}{\overline{MC_1}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\overrightarrow{MA_1}}{\overline{MA_1}} \wedge \overrightarrow{BC} + \frac{\overrightarrow{MB_1}}{\overline{MB_1}} \wedge \overrightarrow{CA} + \frac{\overrightarrow{MC_1}}{\overline{MC_1}} \wedge \overrightarrow{AB}\right)$$

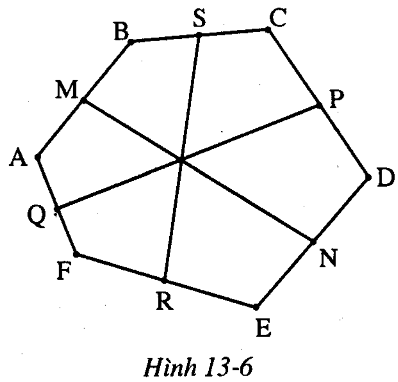
$$= \frac{1}{2}(\vec{e} \wedge \overrightarrow{BC} + \vec{e} \wedge \overrightarrow{CA} + \vec{e} \wedge \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{2}\vec{e} \wedge (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\vec{e} \wedge \vec{0} = 0 \text{ (đpcm).}$$



Hình 13-5

Ví dụ 13.4. Cho lục giác lồi ABCDEF. M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, DE, CD, FA, EF, BC. Chứng minh rằng : MN, PQ, RS đồng quy khi và chỉ khi S(AEC) = S(BFD).



Hình 13-6

Giải (h.13-6)

Lấy điểm O bất kì, ta thấy

$4\left(\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\wedge\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}\wedge\overrightarrow{OS}\right)$

$=\left((\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\wedge(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE})+(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})\wedge(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})\wedge(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\right)$

$=\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OA}$

$+\overrightarrow{OD}\wedge\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OD}\wedge\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}\wedge\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}\wedge\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OF}\wedge\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OF}\wedge\overrightarrow{OC}$

$=\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OE}\wedge\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OA}\right)-\left(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OF}\wedge\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OD}\wedge\overrightarrow{OB}\right)$

$= 2(S[OAE] + S[OEC] + S[OCA]) - 2(S[OBF] + S[OFD] + S[ODB])$

$= 2(S[AEC] - S[BFD])$.

Suy ra $2\left(\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\wedge\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}\wedge\overrightarrow{OS}\right) = S[AEC] - S[BFD]$ (*)

Nhờ (*), bài toán 3 được giải quyết đơn giản như sau : Đặt $O = MN \cap PQ$. Ta thấy

$$\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OP}\wedge\overrightarrow{OQ}=0$$

Vậy : MN, PQ, RS đồng quy $\Leftrightarrow$ O thuộc RS $\Leftrightarrow \overrightarrow{OR}\wedge\overrightarrow{OS}=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\wedge\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}\wedge\overrightarrow{OS}=0$

$\Leftrightarrow S[AEC] - S[BFD] = 0$

$\Leftrightarrow S(AEC) - S(BFD) = 0$ (do các tam giác AEC và BFD cùng hướng)

$\Leftrightarrow S(AEC) = S(BFD)$.

Ví dụ 13.5. Cho tam giác ABC và ba điểm M, N, P thoả mãn điều kiện : $M \notin (AB) \cup (AC)$, $N \notin (BC) \cup (BA)$, $P \notin (CA) \cup (CB)$. Chứng minh rằng : AM, BN, CP đồng quy hoặc đôi một song song khi và chỉ khi :

$$\frac{\sin\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BC}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BA}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CB}\right)}=-1.$$

Giải

Chứng minh điều kiện cần

Trường hợp 1 : AM, BN, CP đồng quy (tại O).

Ta có

$$\frac{S[AOB]}{S[AOC]}\cdot\frac{S[BOC]}{S[BOA]}\cdot\frac{S[COA]}{S[COB]}=-1.$$

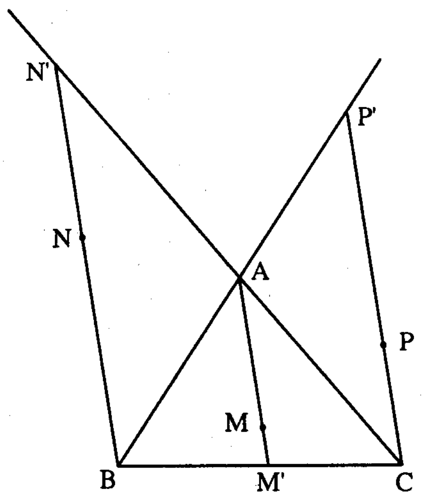
Từ đó, với chú ý O thuộc AM, BN, CP, sử dụng định lí 13.5 ta có

$$\frac{S[AMB]}{S[AMC]}\cdot\frac{S[BNC]}{S[BNA]}\cdot\frac{S[CPA]}{S[CPB]}=-1$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}AM.AB.\sin\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)\frac{1}{2}BN.BC.\sin\left(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BC}\right)\frac{1}{2}CP.CA.\sin\left(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CA}\right)}{\frac{1}{2}AM.AC.\sin\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right)\frac{1}{2}BN.BA.\sin\left(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BA}\right)\frac{1}{2}CP.CB.\sin\left(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CB}\right)}=-1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BC}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BA}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CB}\right)}=-1.$$

Trường hợp 2 : AM, BN, CP đôi một song song (h.13-7)



Hình 13-7

Khi đó, với chú ý rằng $M \notin (AB) \cup (AC)$, $N \notin (BC) \cup (BA)$, $P \notin (CA) \cup (CB)$, ta có AM, BN, CP theo thứ tự cắt BC, CA, AB. Đặt $M' = AM \cap BC$, $N' = BN \cap CA$, $P' = CP \cap AB$. Ta có

$$\frac{\overline{M'B}}{\overline{M'C}}\cdot\frac{\overline{N'C}}{\overline{N'A}}\cdot\frac{\overline{P'A}}{\overline{P'B}}=\frac{\overline{M'B}}{\overline{M'C}}\cdot\frac{\overline{BC}}{\overline{BM'}}\cdot\frac{\overline{CM'}}{\overline{CB}}=-1$$

$$\Rightarrow \frac{S[AM'B]}{S[AM'C]}\cdot\frac{S[BN'C]}{S[BN'A]}\cdot\frac{S[CP'A]}{S[CP'B]}=-1$$

Từ đó, với chú ý rằng $M \in AM'$, $N \in BN'$, $P \in CP'$, ta có

$$\frac{S[AMB]}{S[AMC]}\cdot\frac{S[BNC]}{S[BNA]}\cdot\frac{S[CPA]}{S[CPB]}=-1.$$

Tiếp tục khai triển tương tự như trường hợp 1, ta có

$$\frac{\sin\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BC}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BA}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CB}\right)}=-1.$$

Tóm lại, điều kiện cần đã được chứng minh.

Chứng minh điều kiện đủ

Trường hợp 1 : AM, BN, CP đôi một song song. Khi đó, ta có ngay điều cần chứng minh.

Trường hợp 2 : AM, BN, CP không đôi một song song. Khi đó, tồn tại hai trong ba đường thẳng AM, BN, CP cắt nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử BN, CP cắt nhau, gọi giao điểm của chúng là O. Khi đó, ta có AO, BN, CP đồng quy. Nhờ kết quả đạt được trong chứng minh điều kiện cần, ta có

$$\frac{\sin\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AC}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BC}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BA}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CB}\right)}=-1.$$

Theo giả thiết, ta có $\frac{\sin\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BC}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BA}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CB}\right)}=-1.$

Suy ra $\frac{\sin\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AC}\right)}=\frac{\sin\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right)}$

$\Rightarrow \sin\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}\right)\sin\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right)=\sin\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AC}\right)\sin\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)$

$\Rightarrow \cos\left(\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}\right)-\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AO}\right)-\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AC}\right)\right)-\cos\left(\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AO}\right)+\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AC}\right)\right)$

$= \cos\left(\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AC}\right)-\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AO}\right)-\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}\right)\right)-\cos\left(\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AO}\right)+\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}\right)\right)$

$\Rightarrow \cos\left(\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)-\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AO}\right)\right)=\cos\left(\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)-\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AO}\right)\right)$

$\Rightarrow \sin\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)\sin\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AO}\right)=\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\sin\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AO}\right)$

$\Rightarrow \sin\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AO}\right)=-\sin\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AO}\right)$

$\Rightarrow \sin\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AO}\right)=0$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AO}\right)=k180^\circ$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AO}$ hoặc $\overrightarrow{AM}\uparrow\downarrow\overrightarrow{AO}$

$\Rightarrow$ Đường thẳng AM trùng đường thẳng AO

$\Rightarrow O \in AM$.

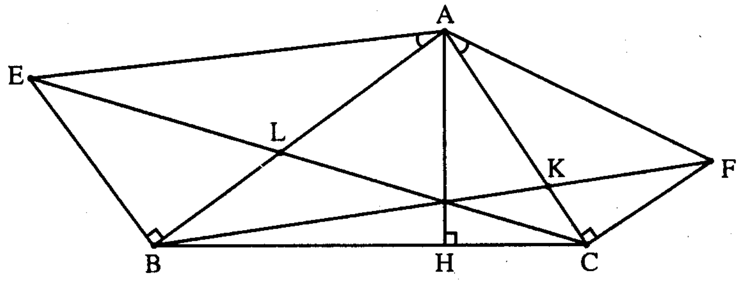
Vậy AM, BN, CP đồng quy (tại O).

Tóm lại, điều kiện đủ đã được chứng minh.

Nhận xét. Định lí trên được gọi là *định lí Xê-va dạng sin tổng quát*, rất có lợi trong việc giải quyết các bài toán chứng minh sự đồng quy của ba đường thẳng.

Ví dụ 13.6. Cho tam giác ABC, đường cao AH. Về phía ngoài nó ta dựng các tam giác đồng dạng ABE, ACF sao cho $\widehat{ABE}=\widehat{ACF}=90^\circ$. Chứng minh rằng AH, BF, CE đồng quy.

Giải (h.13-8)



Hình 13-8

Không mất tính tổng quát, giả sử tam giác ABC có hướng dương.

Đặt K = BF $\cap$ AC ; L = CE $\cap$ AB. Dễ thấy AH, BF, CE không thể đôi một song song (bạn đọc tự kiểm tra).

Do đó : AH, BF, CE đồng quy khi và chỉ khi $\dfrac{\overline{HB}}{\overline{HC}}.\dfrac{\overline{KC}}{\overline{KA}}.\dfrac{\overline{LA}}{\overline{LB}}=-1$

$$\Leftrightarrow \frac{S[HAB]}{S[HAC]}.\frac{S[FCB]}{S[FAB]}.\frac{S[EAC]}{S[EBC]}=-1 \Leftrightarrow \frac{S[AHB]}{S[AHC]}.\frac{S[CBF]}{S[ABF]}.\frac{S[ACE]}{S[BCE]}=-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}AH.AB.\sin\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AB}\right)\frac{1}{2}CB.CF.\sin\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CF}\right)\frac{1}{2}AC.AE.\sin\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right)}{\frac{1}{2}AH.AC.\sin\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AC}\right)\frac{1}{2}AB.AF.\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right)\frac{1}{2}BC.BE.\sin\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE}\right)}=-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{CF}{AF}.\frac{AE}{BE}.\frac{\sin\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AB}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AC}\right)}.\frac{\sin\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CF}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right)}.\frac{\sin\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE}\right)}=-1. \qquad (1)$$

Vì ΔABE đồng dạng với ΔACF nên $\dfrac{CF}{AF}.\dfrac{AE}{BE}=1.$ (2)

Mặt khác :

$$\begin{cases}\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AB}\right)+k_1.360^o=-90^o+\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AB}\right)+k_2.360^o\\ \left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AC}\right)+k_3.360^o=-90^o+\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AC}\right)+k_4.360^o\\ \left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CF}\right)=\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CF}\right)+k_5.360^o=90^o+\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AC}\right)\\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AF}\right)+k_6.360^o=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right)+k_7.360^o\\ \qquad =\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AC}\right)+k_8.360^o\\ \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE}\right)=\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BE}\right)+k_9.360^o=90^o+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)+k_{10}.360^o\\ \qquad =90^o+\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AB}\right)+k_{11}.360^o\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AB}\right) = -\cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AB}\right) \\ \sin\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AC}\right) = -\cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AC}\right) \\ \sin\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CF}\right) = \cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AC}\right) \\ \sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right) = -\sin\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right) \\ \sin\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE}\right) = \cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AB}\right) \end{cases} \qquad (3)$$

Từ (2), (3) suy ra (1) đúng (đpcm).

Ví dụ 13.7. Cho tam giác ABC và điểm M bất kì. Chứng minh rằng :

$$S[MBC]\overrightarrow{MA} + S[MCA]\overrightarrow{MB} + S[MAB]\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Giải

Đặt $\vec{u} = S[MBC]\overrightarrow{MA} + S[MCA]\overrightarrow{MB} + S[MAB]\overrightarrow{MC}$

Ta thấy : $\vec{u} \wedge \overrightarrow{MA} = S[MCA]\left(\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MA}\right) + S[MAB]\left(\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA}\right)$

$$= 2\left(S[MCA]S[MBA] + S[MAB]S[MCA]\right)$$

$$= 2\left(S[MCA]S[MBA] - S[MBA]S[MCA]\right) = 0$$

Tương tự như vậy $\vec{u} \wedge \overrightarrow{MB} = 0$; $\vec{u} \wedge \overrightarrow{MC} = 0$.

Suy ra $\vec{u}$ cùng phương với các vectơ $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$.

Chú ý rằng, trong ba vectơ $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$, ta luôn chọn được hai vectơ không cùng phương.

Vậy $\vec{u} = \vec{0}$ (đpcm).

Nhận xét. Kết quả trên đôi khi được phát biểu dưới dạng khác :

Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Chứng minh rằng :

$$(\vec{b} \wedge \vec{c})\vec{a} + (\vec{c} \wedge \vec{a})\vec{b} + (\vec{a} \wedge \vec{b})\vec{c} = \vec{0}.$$

Ví dụ 13.8. Cho tam giác ABC. M là một điểm nằm trong tam giác.

a) Chứng minh rằng : S(MBC)MA, S(MCA)MB, S(MAB)MC là độ dài ba cạnh của một tam giác mà ta kí hiệu là $\Delta(M)$.

b) Tìm M sao cho diện tích tam giác $\Delta(M)$ lớn nhất.

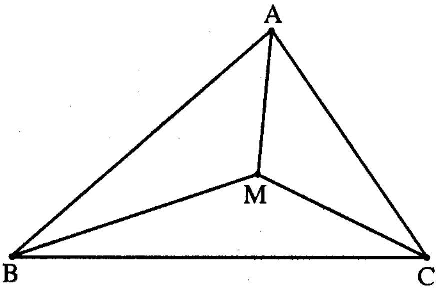
Giải (h.13-9)

a) Vì M nằm trong tam giác ABC nên các tam giác MBC, MCA, MAB cùng hướng. Theo VD 13.8 ta có

$$S[MBC]\overrightarrow{MA} + S[MCA]\overrightarrow{MB} + S[MAB]\overrightarrow{MC} = \vec{0} \qquad (1)$$

Cũng vì M nằm trong tam giác ABC nên các vectơ $S[MBC]\overrightarrow{MA}$, $S[MCA]\overrightarrow{MB}$, $S[MAB]\overrightarrow{MC}$ đôi một không cùng phương. (2)

Từ (1) và (2), theo định nghĩa phép cộng vectơ, cùng với chú ý rằng các tam giác MBC, MCA, MAB cùng hướng, ta thấy S(MBC)MA, S(MCA)MB, S(MAB)MC là độ dài ba cạnh của một tam giác.



Hình 13-9

b) Kí hiệu diện tích tam giác nói trên là $S_{\Delta(M)}$, ta thấy :

$$S_{\Delta(M)} = \left|\frac{1}{2}S[MCA]\overrightarrow{MB} \wedge S[MAB]\overrightarrow{MC}\right| = \left|S[MCA]S[MAB]\frac{1}{2}\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}\right|$$

$$= \left|S[MCA]S[MAB]S[MBC]\right|$$

$$= S(MCA).S(MAB).S(MBC)$$

$$\le \left(\frac{S(MCA) + S(MAB) + S(MBC)}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}S^3(ABC).$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ S(MCA) = S(MAB) = S(MBC) $\Leftrightarrow$ M là trọng tâm tam giác ABC.

Tóm lại $S_{\Delta(M)}$ lớn nhất khi M là trọng tâm tam giác ABC và giá trị lớn nhất đó bằng $\frac{1}{27}S^3(ABC)$.

Nhận xét. VD 13.8 chính là BT. 6.20

Ví dụ 13.9. Cho bốn vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$. Chứng minh rằng

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})(\vec{c} \wedge \vec{d}) + (\vec{a} \wedge \vec{c})(\vec{d} \wedge \vec{b}) + (\vec{a} \wedge \vec{d})(\vec{b} \wedge \vec{c}) = 0.$$

Giải

Ta có $(\vec{a} \wedge \vec{b})(\vec{c} \wedge \vec{d}) + (\vec{a} \wedge \vec{c})(\vec{d} \wedge \vec{b}) + (\vec{a} \wedge \vec{d})(\vec{b} \wedge \vec{c})$

$$= \vec{a} \wedge ((\vec{c} \wedge \vec{d})\vec{b}) + \vec{a} \wedge ((\vec{d} \wedge \vec{b})\vec{c}) + \vec{a} \wedge ((\vec{b} \wedge \vec{c})\vec{d})$$

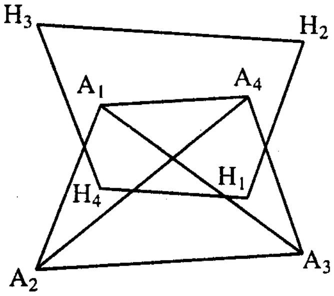
$$= \vec{a} \wedge ((\vec{c} \wedge \vec{d})\vec{b} + (\vec{d} \wedge \vec{b})\vec{c} + (\vec{b} \wedge \vec{c})\vec{d})$$

$= \vec{a} \wedge \vec{0}$ (theo nhận xét sau ví dụ 13.7)

$= 0$ (đpcm).

Ví dụ 13.10. Cho tứ giác $A_1A_2A_3A_4$; H_1, H_2, H_3, H_4 theo thứ tự là trực tâm của các tam giác $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$. Chứng minh rằng

$$S[A_1A_2A_3A_4] = S[H_1H_2H_3H_4].$$



Hình 13-10

Giải (h.13-10)

Lấy điểm O bất kì. Vì H_1, H_2 là trực tâm của các tam giác $A_2A_3A_4, A_3A_4A_1$ nên

$$\begin{cases} A_1H_2 \perp A_3A_4 \\ A_2H_1 \perp A_3A_4 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{A_1H_2} \,//\, \overrightarrow{A_2H_1}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A_1H_2} \wedge \overrightarrow{A_2H_1} = 0 \Rightarrow \left(\overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{OA_1}\right) \wedge \left(\overrightarrow{OH_1} - \overrightarrow{OA_2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OH_1} \wedge \overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{OH_1} - \overrightarrow{OA_2} \wedge \overrightarrow{OH_2} \quad (1)$$

$$\Rightarrow S[OA_1A_2] - S[OH_1H_2] = \overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{OH_1} - \overrightarrow{OA_2} \wedge \overrightarrow{OH_2}.$$

Tương tự ta có

$$S[OA_2A_3] - S[OH_2H_3] = \overrightarrow{OA_2} \wedge \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{OA_3} \wedge \overrightarrow{OH_3}, \quad (2)$$

$$S[OA_3A_1] - S[OH_3H_1] = \overrightarrow{OA_3} \wedge \overrightarrow{OH_3} - \overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{OH_1}. \quad (3)$$

Cộng từng vế của các đẳng thức (1), (2), (3), ta có

$$S[A_1A_2A_3] - S[H_1H_2H_3] = 0$$

$$\Rightarrow S[A_1A_2A_3] = S[H_1H_2H_3]. \quad (4)$$

Tương tự như vậy : $S[A_2A_3A_4] = S[H_2H_3H_4]$, (5)

$S[A_3A_4A_1] = S[H_3H_4H_1]$, (6)

$S[A_4A_1A_2] = S[H_4H_1H_2]$. (7)

Từ (4) và (6) với chú ý rằng A_2, A_4 nằm về hai phía của A_1A_3 suy ra H_2, H_4 nằm về hai phía của H_1H_3. (8)

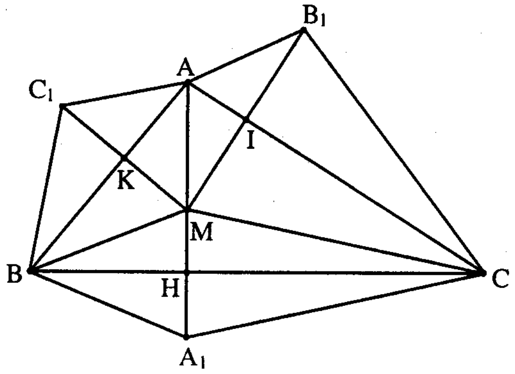
Từ (5) và (7) với chú ý rằng A_1, A_3 nằm về hai phía của A_2A_4, suy ra H_1, H_3 nằm về hai phía của H_2H_4. (9)

Từ (8) và (9) suy ra $H_1H_2H_3H_4$ là tứ giác lồi và đương nhiên, ta có

$$S[H_1H_2H_3H_4] = S[A_1A_2A_3A_4].$$

Ví dụ 13.11. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O ; R). M là một điểm bất kì, H, I, K là hình chiếu của M trên các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng :

$$S[HIK] = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{OM^2}{R^2}\right)S[ABC].$$



Hình 13-11

Giải (h.13-11)

Không mất tính tổng quát, giả sử tam giác ABC có hướng dương. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là điểm đối xứng của M qua BC, CA, AB. Ta có

$$S[AB_1C_1] + S[BC_1A_1] + S[CA_1B_1]$$

$$= S[MB_1C_1] + S[MC_1A] + S[MAB_1] + S[MC_1A_1] + S[MA_1B] + S[MBC_1] + S[MA_1B_1] + S[MB_1C] + S[MCA_1]$$

$$= \left(S[MB_1C_1] + S[MC_1A_1] + S[MA_1B_1]\right) + \left(S[MA_1B] + S[MCA_1]\right) + \left(S[MB_1C] + S[MAB_1]\right) + \left(S[MC_1A] + S[MBC_1]\right)$$

$$= S[A_1B_1C_1] - 2S[MBC] - 2S[MCA] - 2S[MAB] = S[A_1B_1C_1] - 2S[ABC]$$

Vậy $S[A_1B_1C_1] = 2S[ABC] + S[AB_1C_1] + S[BC_1A_1] + S[CA_1B_1]$.

Chú ý rằng

$$AB_1 = AM = AC_1$$

$$\left(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AC_1}\right) + k_1.360^\circ = \left(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AM}\right) + \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC_1}\right) + k_2.360^\circ =$$

$$= 2\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}\right) + 2\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right) + k_3.360^\circ = 2\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) + k_4.360^\circ,$$

suy ra $S[AB_1C_1] = \frac{1}{2}AB_1.AC_1.\sin\left(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AC_1}\right) = -\frac{1}{2}AM^2.\sin 2A$.

Tương tự ta có : $S[BC_1A_1] = -\frac{1}{2}BM^2 \sin 2B$; $S[CA_1B_1] = -\frac{1}{2}CM^2 \sin 2C$.

Vậy $S[A_1B_1C_1]=2S[ABC]-\frac{1}{2}\left(AM^2.\sin 2A+BM^2.\sin 2B+CM^2.\sin 2C\right)$ (1)

Từ đẳng thức $S[OBC]\overrightarrow{OA}+S[OCA]\overrightarrow{OB}+S[OAB]\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ suy ra

$$\frac{1}{2}OB.OC\sin\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}OC.OA\sin\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}\right)\overrightarrow{OB}$$

$$+\frac{1}{2}OA.OB\sin\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \sin 2A.\overrightarrow{OA}+\sin 2B.\overrightarrow{OB}+\sin 2C.\overrightarrow{OC}=\vec{0} \qquad (2)$$

Từ (2), chú ý đến VD 5.7, ta có

$$AM^2.\sin 2A+BM^2.\sin 2B+CM^2.\sin 2C=(R^2+OM^2)(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$$

$$=4(R^2+OM^2)\sin A\sin B\sin C$$

$$=2\left(1+\frac{OM^2}{R^2}\right)2R^2\sin A\sin B\sin C$$

$$=2\left(1+\frac{OM^2}{R^2}\right)S[ABC]. \qquad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra : $S[A_1B_1C_1]=\left(1-\frac{OM^2}{R^2}\right)S[ABC]$.

Từ đó với chú ý rằng

$S[A_1B_1C_1]=4S[HIK]$, ta có :

$$S[HIK]=\frac{1}{4}\left(1-\frac{OM^2}{R^2}\right).S[ABC] \ (*)$$

Nhận xét. Hệ thức (*) được tìm ra bởi Ơ-le. Từ (*) ta thấy :

H, I, K thẳng hàng $\Leftrightarrow S[HIK]=0 \Leftrightarrow 1-\frac{OM^2}{R^2}=0 \Leftrightarrow M\in(O;R)$.

Ta nhận được kết quả quen thuộc về đường thẳng Sim-sơn.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

13.1. Cho tứ giác ABCD có AD = BC. Về phía ngoài nó ta dựng các tam giác bằng nhau ADE, BCF. Chứng minh rằng trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD, EF thẳng hàng.

13.2. Trên ba đường thẳng a, b, c theo thứ tự cho các điểm A, B, C chuyển động đều theo một hướng xác định, với cùng một vận tốc và cùng một thời điểm ban đầu. Biết rằng, tại thời điểm ban đầu A, B, C không thẳng hàng. Chứng minh rằng, không tồn tại quá hai thời điểm mà tại đó A, B, C thẳng hàng.

13.3. Cho ngũ giác ABCDE. X, Y, Z, T, U theo thứ tự là trung điểm của các cạnh CD, DE, EA, AB, BC. Chứng minh rằng nếu bốn trong năm đường thẳng AX, BY, CZ, DT, EU đồng quy thì cả năm đường thẳng đó đồng quy.

13.4. Cho hình bình hành ABCD. Các điểm M, N theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC. Các điểm I, J, K theo thứ tự là trung điểm của các đoạn DM, MN, ND. Chứng minh rằng AI, BJ, CK đồng quy.

13.5. Cho tam giác ABC, các điểm A', B', C' theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB. Các điểm A", B", C" theo thứ tự là các điểm đối xứng của các điểm A, B, C qua các điểm A', B', C'. Chứng minh rằng :

$$S(A''B''C'') = 3S(ABC) + 4S(A'B'C').$$

13.6. Cho tam giác ABC. Về phía ngoài nó ta dựng các tam giác BA_1C, CB_1A, AC_1B cân tại A_1, B_1, C_1, đồng dạng với nhau. Chứng minh rằng các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

13.7. Cho lục giác ABCDEF. Gọi M,N,P theo thứ tự là trung điểm của AD, BE, CF. Chứng minh rằng : M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi

$$S(ABCDEF) = S(ACE) + S(BDF).$$

13.8. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P theo thứ tự chạy trên các đường thẳng BC, CA, AB sao cho :

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = k.$$

a) Chứng minh rằng AM, BN, CP là độ dài ba cạnh của một tam giác mà ta kí hiệu là $\Delta(k)$.

b) Tìm k sao cho diện tích tam giác $\Delta(k)$ nhỏ nhất.

13.9. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB. Các điểm X, Y, Z theo thứ tự là trọng tâm các tam giác ANP, BPM, CMN. Chứng minh rằng

$$S(ABC) < \frac{9}{2} S(XYZ).$$

13.10. Cho tứ giác ABCD có AC $\perp$ BD. Trung trực của các đoạn AB, CD cắt nhau tại điểm O nằm trong tứ giác. Giả sử S(OAB) = S(OCD).Chứng minh rằng tứ giác ABCD nội tiếp.

13.11. Cho bốn đường thẳng phân biệt OA, OB, OC, OD. Đường thẳng Δ không đi qua O, theo thứ tự cắt OA, OB, OC, OD tại X, Y, Z, T. Chứng minh rằng :

$$\frac{\overline{ZX}}{\overline{ZY}} : \frac{\overline{TX}}{\overline{TY}} = \frac{\sin\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}\right)} : \frac{\sin\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}\right)}.$$

§14. PHƯƠNG TÍCH CỦA ĐIỂM ĐỐI VỚI ĐƯỜNG TRÒN. TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG, TÂM ĐẲNG PHƯƠNG

A. LÍ THUYẾT

I – PHƯƠNG TÍCH CỦA ĐIỂM ĐỐI VỚI ĐƯỜNG TRÒN

1. Nhắc lại định nghĩa

Cho đường tròn (O ; R) và điểm M. Ta đã biết, nếu có một cát tuyến quay xung quanh M, cắt đường tròn tại A và B thì đại lượng $\overline{MA}.\overline{MB}$ không đổi, gọi là phương tích của điểm M đối với đường tròn (O ; R), kí hiệu là $\mathcal{P}_{M/(O)}$.

Ta có $$\boxed{\mathcal{P}_{M/(O)} = \overline{MA}.\overline{MB} = d^2 - R^2}$$

trong đó d = OM.

2. Chú ý

$\mathcal{P}_{M/(O)} > 0 \Leftrightarrow$ M nằm ngoài (O) ;

$\mathcal{P}_{M/(O)} = 0 \Leftrightarrow$ M thuộc (O) ;

$\mathcal{P}_{M/(O)} < 0 \Leftrightarrow$ M nằm trong (O).

II – TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG, TÂM ĐẲNG PHƯƠNG

Định lí 14.1

Tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn không đồng tâm là một đường thẳng, gọi là *trục đẳng phương* của hai đường tròn đã cho.

Chứng minh (h.14-1)

Xét hai đường tròn $(O_1 ; R_1)$ và $(O_2 ; R_2)$, $O_1 \neq O_2$. Ta có :

$\mathcal{P}_{M/(O_1)} = \mathcal{P}_{M/(O_2)}$

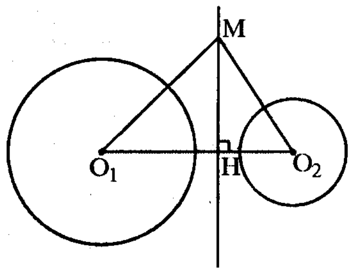
$\Leftrightarrow MO_1^2 - R_1^2 = MO_2^2 - R_2^2$

$\Leftrightarrow MO_1^2 - MO_2^2 = R_1^2 - R_2^2$

$\Leftrightarrow$ M thuộc đường thẳng vuông góc với (O_1O_2) tại H, điểm H được xác định bởi

$$\overline{IH} = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2\overline{O_1O_2}}$$

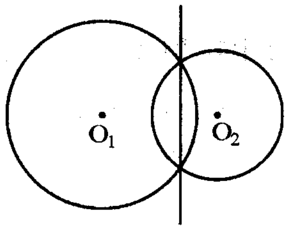
(I là trung điểm của O_1O_2, xem VD 3.7).



Hình 14-1

Hệ quả. Nếu ba điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn thì ba điểm đó thẳng hàng.

Định lí 14.2. Cho ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có các tâm không thẳng hàng. Giả sử Δ_1, Δ_2, Δ_3 lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn (O_2), (O_3) ; (O_3), (O_1) ; (O_1), (O_2). Khi đó Δ_1, Δ_2, Δ_3 đồng quy tại một điểm, gọi là *tâm đẳng phương* của ba đường tròn đã cho.

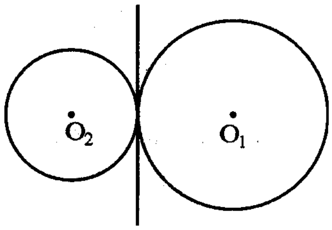


Hình 14-2

Cách xác định trục đẳng phương của hai đường tròn

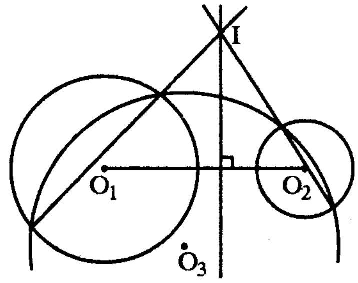
– Nếu (O_1), (O_2) cắt nhau thì trục đẳng phương là đường thẳng nối hai giao điểm (h.14-2).

– Nếu (O_1), (O_2) tiếp xúc nhau thì trục đẳng phương là đường thẳng đi qua tiếp điểm và vuông góc với O_1O_2 (h.14-3).

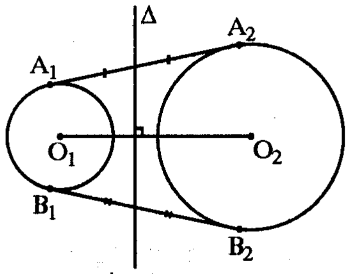


Hình 14-3

– Nếu (O_1), (O_2) không có điểm chung thì ta dựng đường tròn (O_3) cắt cả hai đường tròn đã cho (lưu ý lấy O_3 không nằm trên đường thẳng O_1O_2). Dựng trục đẳng phương của (O_3) và (O_1), (O_3) và (O_2), chúng cắt nhau tại I (chính là tâm đẳng phương của ba đường tròn). Khi đó trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) là đường thẳng qua I, vuông góc với đường thẳng O_1O_2 (h.14-4).



Hình 14-4



Hình 14-5

Nhận xét. Nếu có thể kẻ được hai tiếp tuyến chung A_1A_2, B_1B_2 của (O_1) và (O_2) thì đường thẳng nối trung điểm của các đoạn A_1A_2, B_1B_2 chính là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2).

(Hình 14-5 minh hoạ trường hợp kẻ được hai tiếp tuyến chung ngoài).

B. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 14.1. Cho đường tròn (O ; R) và ba điểm thẳng hàng A, B, C. Chứng minh rằng :

$$\mathcal{P}_{A/(O)} . \overline{BC} + \mathcal{P}_{B/(O)} . \overline{CA} + P_{C/(O)} . \overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB} = 0.$$

Giải

$$\mathcal{P}_{A/(O)}. \overline{BC} + P_{B/(O)}. \overline{CA} + \mathcal{P}_{C/(O)}. \overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB}$$

$= (OA^2 - R^2)\overline{BC} + (OB^2 - R^2).\overline{CA} + (OC^2 - R^2)\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB}$

$= OA^2.\overline{BC} + OB^2.\overline{CA} + OC^2.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB} - R^2(\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB})$

$= OA^2.\overline{BC} + OB^2.\overline{CA} + OC^2.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB}$

$= 0$ (Hệ thức Sti-oa).

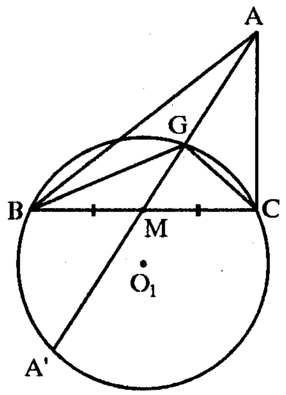
Ví dụ 14.2. Cho tam giác ABC trọng tâm G. Gọi (O_1), (O_2), (O_3) lần lượt là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác GBC, GCA, GAB. Chứng minh rằng

$$\mathcal{P}_{A/(O_1)} = \mathcal{P}_{B/(O_2)} = \mathcal{P}_{C/(O_3)}.$$

Giải (h.14-6)

Gọi M là trung điểm của BC, A' là giao điểm của đường thẳng AM với đường tròn (O_1), A' ≠ G. Ta có

$\mathcal{P}_{A/(O_1)} = AG.AA'$ (vì A nằm ngoài (O_1))



Hình 14-6

$= AG(AM + MA') = AG.AM + AG.MA'$

$= \dfrac{2}{3}AM^2 + 2MG.MA'$

$= \dfrac{2}{3}AM^2 + 2MB.MC$

$= \dfrac{2}{3}.\dfrac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} + 2.\dfrac{1}{4}a^2$

$= \dfrac{b^2 + c^2}{3} - \dfrac{a^2}{6} + \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$

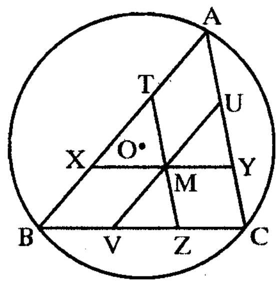
Tương tự tính được

$$\mathcal{P}_{B/(O_2)} = \mathcal{P}_{C/(O_3)} = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Vậy $\qquad \mathcal{P}_{A/(O_1)} = \mathcal{P}_{B/(O_2)} = \mathcal{P}_{C/(O_3)}.$

Ví dụ 14.3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm M. Đường thẳng qua M song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại X, Y. Đường thẳng qua M song song với CA cắt BC, BA lần lượt tại Z, T. Đường thẳng qua M song song với AB cắt CA, CB lần lượt tại U, V. Chứng minh rằng :

$$\mathcal{P}_{M/(O)} = \overline{MX}.\overline{MY} + \overline{MZ}.\overline{MT} + \overline{MU}.\overline{MV}$$



Hình 14-7

Giải. Theo VD 14.1 ta có :

$\mathcal{P}_{M/(O)}\overline{XY} + \mathcal{P}_{X/(O)}.\overline{YM} + \mathcal{P}_{Y/(O)}\overline{MX} + \overline{XY}.\overline{YM}.\overline{MX} = 0$ (h.14-7)

$\Rightarrow \mathcal{P}_{M/(O)} = \mathcal{P}_{X/(O)}\dfrac{\overline{MY}}{\overline{XY}} - \mathcal{P}_{Y/(O)}\dfrac{\overline{MX}}{\overline{XY}} + \overline{MX}.\overline{MY}$

$= \dfrac{\overline{XA}.\overline{XB}.\overline{MY}}{\overline{XY}} - \dfrac{\overline{YA}.\overline{YC}.\overline{MX}}{\overline{XY}} + \overline{MX}.\overline{MY}$

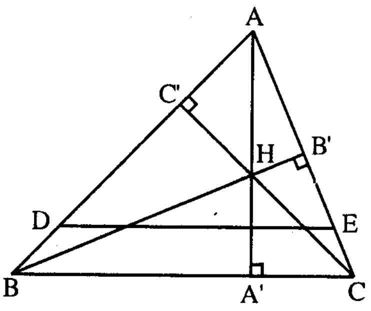
$= \dfrac{\overline{MU}.\overline{XB}.\overline{MY}}{\overline{MY}} + \dfrac{\overline{MT}.\overline{YC}.\overline{MX}}{\overline{MX}} + \overline{MX}.\overline{MY}$ (định lí Ta-lét)

$= \overline{MU}.\overline{MV} + \overline{MT}.\overline{MZ} + \overline{MX}.\overline{MY}$ (đpcm).

Ví dụ 14.4. Cho tam giác ABC, một đường thẳng song song với BC cắt AB, AC tại D, E. Tìm trục đẳng phương của các đường tròn đường kính BE, CD.

Giải. Gọi AA', BB', CC' là các đường cao của tam giác ABC, H là trực tâm của nó (h.14-8). Giả sử các đường tròn đường kính BE, CD là (C_1), (C_2). Ta có :

$$\begin{cases} \overline{AB'}.\overline{AC} = \overline{AH}.\overline{AA'} \text{ (vì HA'CB' nội tiếp)} \\ \overline{AC'}.\overline{AB} = \overline{AH}.\overline{AA'} \text{ (vì HA'BC' nội tiếp)} \end{cases}$$



Hình 14-8

$\Rightarrow \overline{AB'}.\overline{AC} = \overline{AC'}.\overline{AB}.$ (1)

Mặt khác, theo định lí Ta-lét :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}. \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra :

$\overline{AB'}.\overline{AE} = \overline{AC'}.\overline{AD}$

$\Rightarrow \mathcal{P}_{A/(C_1)} = \mathcal{P}_{A/(C_2)}$

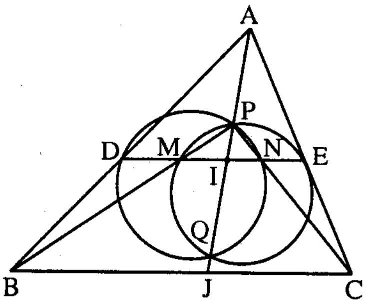
$\Rightarrow$ A thuộc trục đẳng phương của (C_1), (C_2)

Mặt khác, dễ thấy đường nối tâm của (C_1), (C_2) vuông góc với AA'. Vậy, AA' là trục đẳng phương của (C_1), (C_2).

Ví dụ 14.5. Cho tam giác ABC. Một đường thẳng song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại D, E ; P là một điểm nằm trong tam giác ADE ; PB, PC theo thứ tự cắt DE tại M, N. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác PDN, PEM cắt nhau tại Q. Chứng minh rằng A, P, Q thẳng hàng.

Giải (h.14-9). Gọi I, J lần lượt là giao điểm của AP với DE, BC. Vì BC // DE nên theo định lí Ta-lét ta có :

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{IM}}{\overline{IN}} = \dfrac{\overline{JB}}{\overline{JC}} \\ \dfrac{\overline{ID}}{\overline{IE}} = \dfrac{\overline{JB}}{\overline{JC}} \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{IM}}{\overline{IN}} = \frac{\overline{ID}}{\overline{IE}}$$



Hình 14-9

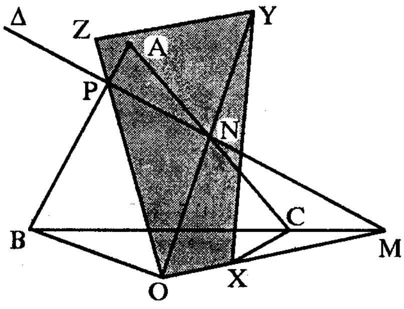
$\Rightarrow \overline{IN}.\overline{ID} = \overline{IM}.\overline{IE}.$ (1)

Gọi (C_1), (C_2) theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp các tam giác PDN, PEM. Theo (1) ta có : $\mathcal{P}_{I/(C_1)} = \mathcal{P}_{I/(C_2)}$

$\Rightarrow$ AP là trục đẳng phương của (C_1) và (C_2). Vậy AP đi qua Q.

Ví dụ 14.6. Cho tam giác ABC, đường thẳng Δ cắt BC, CA, AB tại M, N, P ; O là điểm không thuộc đường thẳng Δ. Các đường thẳng OM, ON, OP cắt đường tròn ngoại tiếp của tam giác OBC, OCA, OAB tại X, Y, Z (khác O). Chứng minh rằng bốn điểm O, X, Y, Z cùng thuộc một đường tròn.

Giải (h.14-10). Gọi (C_1), (C_2) là các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, OYZ. Giả sử (C_2) cắt OM tại X' (khác O). Theo giả thiết :



Hình 14-10

$$\begin{cases}\overline{NA}.\overline{NC} = \overline{NO}.\overline{NY}\\ \overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PO}.\overline{PZ}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\mathcal{P}_{N/(C_1)} = \mathcal{P}_{N/(C_2)}\\ \mathcal{P}_{P/(C_1)} = \mathcal{P}_{P/(C_2)}\end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta$ là trục đẳng phương của (C_1) và (C_2)

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{M/(C_1)} = \mathcal{P}_{M/(C_2)} \Rightarrow \overline{MB}.\overline{MC} = \overline{MO}.\overline{MX'} \qquad (1)$$

Theo giả thiết, $\overline{MB}.\overline{MC} = \overline{MO}.\overline{MX}$. (2)

Từ (1), (2) suy ra :

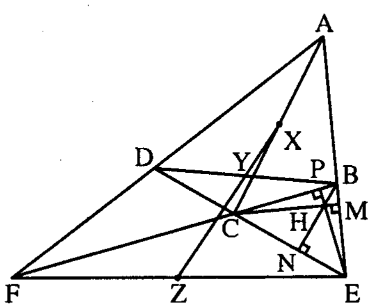
$$\overline{MX} = \overline{MX'} \Rightarrow X \equiv X' \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 14.7. Cho tứ giác ABCD ; AB ∩ CD = E, AD ∩ BC = F ; H, I, J, K theo thứ tự là trực tâm các tam giác EBC, FDC, EDA, FBA. Chứng minh rằng :

a) Mỗi một trong bốn điểm H, I, J, K có cùng phương tích đối với các đường tròn đường kính AC, BD, EF.

b) H, I, J, K thẳng hàng (đường thẳng Stai-nơ).

Giải (h.14-11). a) Gọi X, Y, Z là trung điểm của AC, BD, EF ; (X), (Y), (Z) là các đường tròn đường kính AC, BD, EF.



Hình 14-11

Giả sử CM, BN, EP là các đường cao của tam giác CBE. Theo VD 7.1 ta có :

$$\overline{HC}.\overline{HM} = \overline{HB}.\overline{HN} = \overline{HE}.\overline{HP}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{H/(X)} = \mathcal{P}_{H/(Y)} = \mathcal{P}_{H/(Z)}$$

$\Rightarrow$ H có cùng phương tích đối với (X), (Y), (Z).

Tương tự như vậy, mỗi một trong ba điểm I, J, K có cùng phương tích đối với (X), (Y), (Z).

b) Theo a) $\begin{cases} \mathcal{P}_{H/(X)} = \mathcal{P}_{H/(Y)} \\ \mathcal{P}_{I/(X)} = \mathcal{P}_{I/(Y)}. \end{cases}$

$\Rightarrow$ HI là trục đẳng phương của (X), (Y)

$\Rightarrow HI \perp XY$.

Tương tự như vậy ta có $HJ \perp XY$; $HK \perp XY$.

Suy ra, H, I, J, K thẳng hàng.

Nhận xét. 1) Tương tự như trên ta có $HI \perp XZ$. Suy ra X, Y, Z thẳng hàng. Ta nhận lại được BT 3.10

2) Vì (X), (Y), (Z) có trục đẳng phương chung là đường thẳng Δ đi qua H, I, J, K nên một trong ba khả năng sau xảy ra :

- (X), (Y), (Z) đôi một không có điểm chung.
- (X), (Y), (Z) đôi một tiếp xúc với nhau tại một điểm thuộc đường thẳng Δ.
- (X), (Y), (Z) cùng đi qua hai điểm thuộc đường thẳng Δ.

Ví dụ 14.8. Cho tam giác ABC, các điểm A_1, A_2 thuộc cạnh BC ; B_1, B_2 thuộc cạnh CA ; C_1, C_2 thuộc cạnh AB. Biết rằng B_1, B_2, C_1, C_2 thuộc một đường tròn ; C_1, C_2, A_1, A_2 thuộc một đường tròn ; A_1, A_2, B_1, B_2 thuộc một đường tròn. Chứng minh rằng sáu điểm A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 cùng thuộc một đường tròn.

Giải (h.14-12). Giả sử (C_a) là đường tròn đi qua bốn điểm B_1, B_2, C_1, C_2 ; (C_b) là đường tròn đi qua bốn điểm C_1, C_2, A_1, A_2 ; (C_c) là đường tròn đi qua bốn điểm A_1, A_2, B_1, B_2. Ta thấy :

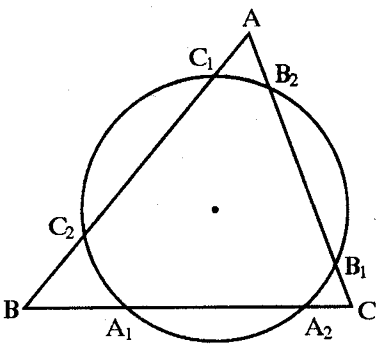
BC là trục đẳng phương của (C_b), (C_c) ;

CA là trục đẳng phương của (C_c), (C_a) ;

AB là trục đẳng phương của (C_a), (C_b).

Nếu (C_a), (C_b), (C_c) đôi một phân biệt thì BC, CA, AB hoặc đồng quy hoặc đôi một song song, mâu thuẫn.

Vậy, có hai trong ba đường tròn (C_a), (C_b), (C_c) trùng nhau, suy ra sáu điểm A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 cùng thuộc một đường tròn.

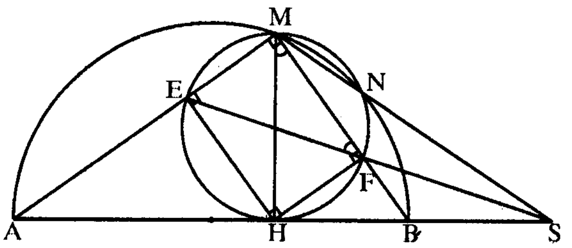


Hình 14-12

Ví dụ 14.9. Cho nửa đường tròn đường kính AB ; M là một điểm nằm trên nửa đường tròn đó. Hạ $MH \perp AB$. Đường tròn đường kính MH cắt nửa đường tròn tại N, cắt MA, MB tại E, F. Chứng minh rằng AB, MN, EF đồng quy.

Giải (h.14-13). Theo giả thiết : $\widehat{AMB} = \widehat{HEM} = \widehat{HFM} = 90^o$

$\Rightarrow$ MEHF là hình chữ nhật. $\Rightarrow \widehat{EFM} = \widehat{HMF}$.



Hình 14-13

Mặt khác, $\widehat{HMF} = \widehat{EAB}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc). Vậy $\widehat{EFM} = \widehat{EAB}$, suy ra AEFB là tứ giác nội tiếp.

Gọi (C_1), (C_2), (C_3) lần lượt là đường tròn đường kính AB, đường tròn đường kính MH, đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEFB. Ta thấy :

(EF) là trục đẳng phương của (C_2), (C_3) ;

(AB) là trục đẳng phương của (C_3), (C_1) ;

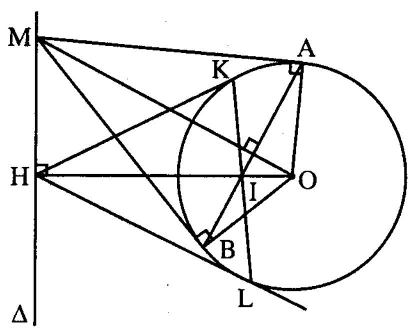
(MN) là trục đẳng phương của (C_1), (C_2).

Do đó EF, AB, MN đồng quy tại tâm đẳng phương của (C_1), (C_2), (C_3).

Ví dụ 14.10. Cho đường tròn (O) và đường thẳng Δ không cắt (O). M là một điểm chạy trên Δ. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB tới (O). Chứng minh rằng AB luôn đi qua một điểm cố định.

Giải (h.14-14)

Gọi H là hình chiếu của O trên Δ. Qua H kẻ các tiếp tuyến HK, HL tới đường tròn. Đặt $I = OH \cap KL$. (1)



Hình 14-14

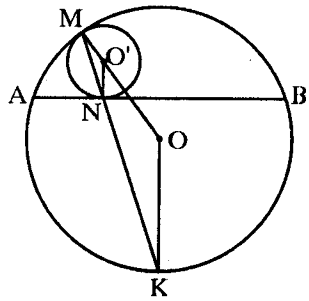
Dễ thấy các điểm O, A, M, H, B cùng thuộc một đường tròn (đường tròn đường kính OM, ta gọi nó là (O_1)). Các điểm O, K, H, L cũng thuộc một đường tròn (đường tròn đường kính OH, ta gọi nó là (O_2)). Dễ thấy trục đẳng phương của (O) và (O_1) là đường thẳng AB, trục đẳng phương của (O) và (O_2) là đường thẳng KL, trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) là đường thẳng OH. Do đó AB, KL, OH đồng quy. (2)

Từ (1) và (2) suy ra AB luôn đi qua điểm I cố định.

Nhận xét. Có thể chứng minh bài toán bằng phương pháp tương tự BT 7.5. Ngược lại, BT 7.5 cũng được chứng minh bằng phương pháp ngắn gọn, dựa vào kết luận : M thuộc trục đẳng phương của đường tròn (O) và đường tròn đường kính OI.

Ví dụ 14.11. Cho đường tròn (O) và dây AB. Các đường tròn (O_1), (O_2) nằm về một phía của (AB), tiếp xúc với (AB) và tiếp xúc trong với (O) ; (O_1) cắt (O_2) tại C, D. Chứng minh rằng đường thẳng CD đi qua điểm chính giữa K của cung AB.

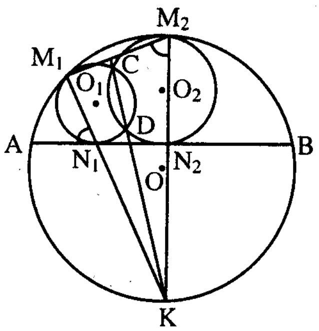
Giải. Trước hết ta chứng minh nhận xét sau đây (h.14-15). Giả sử (O') tiếp xúc trong với (O) tại M và tiếp xúc với AB tại N. Khi đó đường thẳng MN đi qua điểm chính giữa K của cung AB. Thật vậy, ta có M, O', O thẳng hàng.



Hình 14-15

O'N $\perp$ AB, OK $\perp$ AB, suy ra O'N // OK. Hai tam giác cân O'MN và OMK có các góc ở đỉnh bằng nhau, suy ra $\widehat{O'MN} = \widehat{OMK}$. Vậy M, N, K thẳng hàng.

Trở lại bài toán (h.14-16).



Hình 14-16

Giả sử (O_1), (O_2) tiếp xúc với AB tại N_1, N_2 ; tiếp xúc với (O) tại M_1, M_2. Theo nhận xét trên, các đường thẳng M_1N_1 và M_2N_2 đều đi qua điểm chính giữa K của cung AB. Ta có

$\widehat{M_1M_2K} = \widehat{M_1N_1A} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{M_1AK}$, suy ra

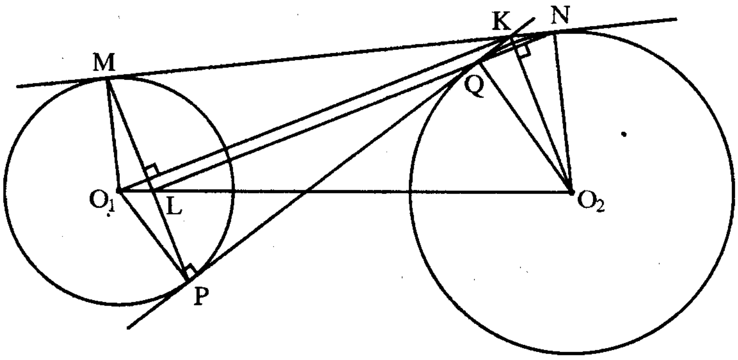
tứ giác $M_1M_2N_2N_1$ nội tiếp

$\Rightarrow \overline{KM_1}.\overline{KN_1} = \overline{KM_2}.\overline{KN_2}$

$\Rightarrow \mathcal{P}_{K/(O_1)} = \mathcal{P}_{K/(O_2)} \Rightarrow$ K thuộc trục đẳng phương của (O_1) và (O_2). Vậy C, D, K thẳng hàng (đpcm).

Ví dụ 14.12. Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) nằm ngoài nhau, MN là một tiếp tuyến chung ngoài, PQ là một tiếp tuyến chung trong (h.14-17). Chứng minh rằng MP, NQ, O_1O_2 đồng quy.

Giải



Hình 14-17

Đặt K = (MN) $\cap$ (PQ), L = (MP) $\cap$ (NQ). Ta có $KO_1 \perp KO_2$ (phân giác của hai góc kề bù), suy ra $MP \perp NQ$ hay $\widehat{MLN} = \widehat{PLQ} = 90^o$. (1)

Gọi $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$ là các đường tròn đường kính MN, PQ. Theo (1) thì $L \in (\mathscr{C}_1)$; $L \in (\mathscr{C}_2)$, do đó $\mathscr{P}_{L/(\mathscr{C}_1)} = \mathscr{P}_{L/(\mathscr{C}_2)} = 0$. (2)

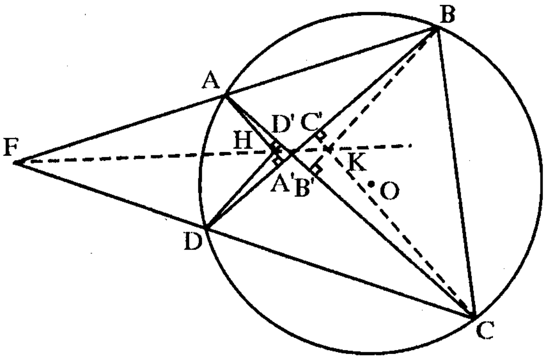
Mặt khác, O_1M, O_1P theo thứ tự tiếp xúc với $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$ suy ra

$$\mathscr{P}_{O_1/(\mathscr{C}_1)} = O_1M^2 = O_1P^2 = \mathscr{P}_{O_1/(\mathscr{C}_2)}. \quad (3)$$

Tương tự, $\mathscr{P}_{O_2/(\mathscr{C}_1)} = \mathscr{P}_{O_2/(\mathscr{C}_2)}$. (4)

Từ (2), (3), (4) suy ra L, O_1, O_2 thẳng hàng, tức là MP, NQ, O_1O_2 đồng quy.

Ví dụ 14.13. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) ; (AC) $\cap$ (BD) = E, (AB) $\cap$ (CD) = F ; H, K theo thứ tự là trực tâm các tam giác ADE, BCE. Chứng minh rằng F, H, K thẳng hàng.



Hình 14-18

Giải (h.14-18). Gọi (O_1), (O_2) là các đường tròn đường kính AB, CD. Ta có :

$$\mathscr{P}_{F/(O_1)} = \overline{FA}.\overline{FB} = \overline{FC}.\overline{FD} = \mathscr{P}_{F/(O_2)}. \quad (1)$$

$$\mathscr{P}_{H/(O_1)} = \overline{HA}.\overline{HA'} = \overline{HD}.\overline{HD'} = \mathscr{P}_{H/(O_2)}. \quad (2)$$

$$\mathscr{P}_{K/(O_1)} = \overline{KB}.\overline{KB'} = \overline{KC}.\overline{KC'} = \mathscr{P}_{K/(O_2)}. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra F, H, K thẳng hàng (cùng thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (O_1) và (O_2)).

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

14.1. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O ; R) ; $(AB) \cap (CD) = E$, $(AD) \cap (BC) = F$; M là trung điểm của EF. Chứng minh rằng

a) $\mathcal{P}_{E/(O)} + \mathcal{P}_{F/(O)} = EF^2$; b) $\mathcal{P}_{M/(O)} = \dfrac{1}{4}EF^2$.

14.2. Cho tam giác ABC ($AB \neq AC$). Các đường cao AA', BB', CC' cắt nhau tại H, BC cắt B'C' tại K, M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $AM \perp HK$.

14.3. Cho đường tròn (O) và dây AB. Các đường tròn (O_1), (O_2) nằm về một phía của AB tiếp xúc với AB, tiếp xúc trong với (O) và tiếp xúc với nhau tại T. Tiếp tuyến chung của (O_1), (O_2) cắt (O) tại C (C thuộc nửa mặt phẳng bờ AB, chứa (O_1) và (O_2)). Chứng minh rằng T là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

14.4. Cho tam giác ABC và điểm M không thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Các đường thẳng AM, BM, CM theo thứ tự cắt các đường thẳng BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Đặt $A_2 = BC \cap B_1C_1$, $B_2 = CA \cap C_1A_1$, $C_2 = AB \cap A_1B_1$. Giả sử A_3, B_3, C_3 theo thứ tự là trung điểm các đoạn A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. Chứng minh rằng A_3, B_3, C_3 cùng thuộc một đường thẳng và đường thẳng đó vuông góc với đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và trực tâm tam giác $A_1B_1C_1$.

14.5. Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) cắt nhau tại A, B. Đường tròn (O) tiếp xúc ngoài với (O_1) tại T_1, tiếp xúc trong với (O_2) tại T_2. Chứng minh rằng

$$\frac{AT_1}{BT_1} = \frac{AT_2}{BT_2}.$$

14.6. Cho tam giác ABC ; AA_1, BB_1, CC_1 là các đường cao. A_2, A_3 là hình chiếu của C_1, B_1 trên BC ; B_2, B_3 là hình chiếu của A_1, C_1 trên CA ; C_2, C_3 là hình chiếu của B_1, A_1 trên AB. Chứng minh rằng sáu điểm A_2, A_3, B_2, B_3, C_2, C_3 cùng thuộc một đường tròn.

14.7. Cho tam giác ABC. Lấy các điểm B', C' thuộc các cạnh AC, AB sao cho AB. AC' = AC.AB'. Gọi H và H' lần lượt là trực tâm các tam giác ABC, AB'C'. Chứng minh rằng BB', CC', HH' đồng quy.

14.8. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng tâm đẳng phương của ba đường tròn bàng tiếp tam giác chính là tâm đường tròn nội tiếp tam giác có ba đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC.

14.9. Cho hình bình hành ABCD. Đường tròn (O) nằm trong hình bình hành, tiếp xúc với AB, AD tại M, N và cắt BD tại E, F. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn đi qua E, F và tiếp xúc với các đường thẳng CB, CD.

14.10. Cho đường tròn (O) ; AB, CD là các đường kính. Tiếp tuyến của (O) tại B cắt AC tại E, DE cắt (O) tại F ($F \neq D$). Chứng minh rằng BC, AF, OE đồng quy.

14.11. Cho tam giác ABC không cân tại A, nội tiếp đường tròn (O). $(O_1\ ;\ R_1)$ là đường tròn đi qua B, C và cắt AB, AC theo thứ tự tại K, L. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AKL cắt đường tròn (O) tại $M \neq A$. Chứng minh rằng $\widehat{AMO_1} = 90^o$.

14.12. Cho đường tròn (O ; R) nằm trong đường tròn (O'), điểm M chạy trên (O). Tiếp tuyến của (O) tại M cắt (O') tại A và B. Chứng minh rằng tâm đường tròn (OAB) chạy trên một đường tròn cố định.

§15. TIẾP TUYẾN CỦA BA ĐƯỜNG CÔNIC

A. LÍ THUYẾT

I – TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG ELIP

1. Định nghĩa

Cho elip (E) và đường thẳng Δ. Đường thẳng Δ được gọi là *tiếp tuyến* của elip (E) nếu Δ và (E) có một điểm chung duy nhất.

Khi đó ta cũng nói Δ *tiếp xúc* với (E) hay Δ và (E) tiếp xúc với nhau. Điểm chung duy nhất của Δ và (E) gọi là *tiếp điểm*.

2. Điều kiện để đường thẳng là tiếp tuyến của elip

Định lí 15.1

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho elip (E) : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ và đường thẳng $\Delta : \alpha x + \beta y + \gamma = 0$. Điều kiện cần và đủ để đường thẳng Δ tiếp xúc với elip (E) là

$$\boxed{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 = \gamma^2.}$$

Chứng minh

Theo định nghĩa, ta thấy :

Đường thẳng Δ tiếp xúc với (E) khi và chỉ khi hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ \alpha x+\beta y+\gamma=0 \end{cases} \quad \text{có nghiệm duy nhất}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\alpha\left(\dfrac{x}{a}\right)+b\beta\left(\dfrac{y}{b}\right)+\gamma=0 \\ \left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2=1 \end{cases} \quad \text{có nghiệm duy nhất}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\alpha X+b\beta Y+\gamma=0 \\ X^2+Y^2=1 \end{cases} \quad \text{có nghiệm duy nhất (với } X=\frac{x}{a}, Y=\frac{y}{b}\text{)}$$

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng Δ' : $a\alpha X + b\beta Y + \gamma = 0$ tiếp xúc với đường tròn (T) : $X^2 + Y^2 = 1$

$\Leftrightarrow$ Khoảng cách từ điểm O(0 ; 0) đến đường thẳng Δ' bằng 1

$$\Leftrightarrow \frac{|\gamma|}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}}=1 \Leftrightarrow a^2\alpha^2+b^2\beta^2=\gamma^2.$$

Hệ quả. Phương trình tiếp tuyến của elip

(E) : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ tại điểm $M(x_0 ; y_0)$ thuộc elip có dạng

$$\boxed{\Delta_0 : \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.}$$

Chứng minh

Hiển nhiên đường thẳng Δ_0 đi qua điểm $M(x_0 ; y_0)$. Mặt khác,

$a^2\left(\dfrac{x_0}{a^2}\right)^2+b^2\left(\dfrac{y_0}{b^2}\right)^2=\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$. Theo định lí 15.1, đường thẳng

$\dfrac{x_0}{a^2}x+\dfrac{y_0}{b^2}y-1=0$, tức Δ_0, là tiếp tuyến của elip (E). Vậy Δ_0 là tiếp tuyến của elip (E) tại điểm $M(x_0 ; y_0)$ thuộc (E).

II – TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG HYPEBOL

1. Định nghĩa

Cho hypebol (H) và đường thẳng Δ. Đường thẳng Δ được gọi là tiếp tuyến của (H) nếu Δ không song song với các tiệm cận của (H) và Δ có một điểm chung duy nhất với (H).

Khi Δ là tiếp tuyến của (H), ta cũng nói Δ tiếp xúc với (H) hay Δ và (H) tiếp xúc với nhau. Điểm chung duy nhất của Δ và (H) gọi là tiếp điểm.

2. Điều kiện để một đường thẳng tiếp xúc với hypebol

Định lí 15.2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hypebol

$$(H): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

và đường thẳng $\Delta : \alpha x + \beta y + \gamma = 0$. Điều kiện cần và đủ để đường thẳng Δ tiếp xúc với hypebol (H) là

$$\boxed{a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 = \gamma^2 \neq 0.}$$

Chứng minh

Điều kiện Δ không song song với các tiệm cận $bx \pm ay = 0$ có thể viết thành $\frac{\alpha}{b} \neq \pm\frac{\beta}{a}$ hay $a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 \neq 0$.

Theo định nghĩa, đường thẳng Δ tiếp xúc với (H) khi và chỉ khi hệ phương trình

$$\begin{cases}\alpha x+\beta y+\gamma=0\\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\end{cases} \quad \text{có nghiệm duy nhất và } a^2\alpha^2-b^2\beta^2\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha x+\beta y+\gamma=0\\ \dfrac{x^2}{a^2}=1+\dfrac{y^2}{b^2}\end{cases} \quad \text{có nghiệm duy nhất và } a^2\alpha^2-b^2\beta^2\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+\left(\dfrac{b}{a}\beta\right)\left(\dfrac{ay}{bx}\right)+\dfrac{\gamma}{a}\left(\dfrac{a}{x}\right)=0\\ 1=\left(\dfrac{a}{x}\right)^2+\left(\dfrac{ay}{bx}\right)^2\end{cases} \quad \text{có nghiệm duy nhất và } a^2\alpha^2-b^2\beta^2\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{\gamma}{a}X+\dfrac{b}{a}\beta Y+\alpha=0\\ X^2+Y^2=1\end{cases} \quad \text{có nghiệm duy nhất và } a^2\alpha^2-b^2\beta^2\neq 0 \ \left(\text{đặt } X=\dfrac{a}{x};\ Y=\dfrac{ay}{bx}\right)$$

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $\frac{\gamma}{a}X+\frac{b}{a}\beta Y+\alpha=0$ tiếp xúc với đường tròn $X^2 + Y^2 = 1$ và $a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 \neq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{|\alpha|}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}\beta^2}}=1 \text{ và } a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 = \gamma^2 \neq 0.$$

Hệ quả. Phương trình tiếp tuyến của hypebol

$$(H) : \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

tại điểm $M(x_0 ; y_0)$ thuộc hypebol, có dạng

$$\boxed{\Delta_0 : \frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1.}$$

Chứng minh. Hiển nhiên đường thẳng Δ_0 đi qua $M(x_0 ; y_0)$.

Mặt khác,

$$a^2\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2-b^2\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2=\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1.$$

Theo định lí 15.2, đường thẳng $\frac{x_0}{a^2}x-\frac{y_0}{b^2}y-1=0$, tức Δ_0, là tiếp tuyến của hypebol (H). Vậy Δ_0 tiếp xúc với (H) tại $M(x_0 ; y_0)$.

III – TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG PARABOL

1. Định nghĩa

Cho parabol (P) và đường thẳng Δ. Đường thẳng Δ được gọi là tiếp tuyến của parabol (P) nếu Δ không song song với trục của (P) và Δ có một điểm chung duy nhất với (P).

Khi Δ là tiếp tuyến của (P), ta cũng nói Δ tiếp xúc với (P) hay Δ và (P) tiếp xúc với nhau. Điểm chung duy nhất của Δ và (P) gọi là tiếp điểm.

2. Điều kiện để một đường thẳng tiếp xúc với parabol

Định lí 15.3

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho parabol (P) : $y^2 = 2px$ và đường thẳng

$$\Delta : \alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

Đường thẳng Δ tiếp xúc với parabol (P) khi và chỉ khi

$$\boxed{p\beta^2 = 2\alpha\gamma.}$$

Chứng minh

Dễ thấy Δ không song song với Ox (trục của parabol) khi và chỉ khi $\alpha \neq 0$. Theo định nghĩa, Δ tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi hệ phương trình

$\begin{cases} y^2 = 2px \\ \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất và $\alpha \neq 0$

$\Leftrightarrow$ hệ $\begin{cases} y^2 = 2p\left(-\dfrac{\beta y + \gamma}{\alpha}\right) \\ \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất và $\alpha \neq 0$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $y^2 + 2p\dfrac{\beta}{\alpha}y + \dfrac{2p\gamma}{\alpha} = 0$ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{p\beta}{\alpha}\right)^2 - \dfrac{2p\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow p\beta^2 = 2\alpha\gamma.$

Hệ quả. Phương trình tiếp tuyến của parabol (P) : $y^2 = 2px$ tại điểm $M(x_0 ; y_0)$ thuộc (P), có dạng

$$\boxed{\Delta_0 : y_0 y = p(x_0 + x).}$$

Chứng minh. Viết lại phương trình $\Delta_0 : px - y_0 y + px_0 = 0$.

Dễ thấy Δ_0 đi qua $M(x_0 ; y_0)$. Mặt khác,

$$p(-y_0)^2 = py_0^2 = p(2px_0) = 2p(px_0).$$

Theo định lí 15.3, Δ_0 là tiếp tuyến của (P). Vậy Δ_0 tiếp xúc với (P) tại $M(x_0 ; y_0)$.

Nhận xét. Nếu parabol (P) có phương trình dạng $x^2 = 2py$ thì phương trình tiếp tuyến của (P) tại điểm $M(x_0 ; y_0)$ thuộc (P) có dạng $x_0 x = p(y_0 + y)$.

B. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 15.1. Viết phương trình chính tắc của elip, biết rằng elip tiếp xúc với hai đường thẳng

$$d_1 : x + y - 5 = 0,$$
$$d_2 : x - 4y - 10 = 0.$$

Giải. Phương trình chính tắc của elip có dạng

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Theo định lí 15.1 ta có :

Đường thẳng d_1 tiếp xúc với (E) $\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 25$ (1)

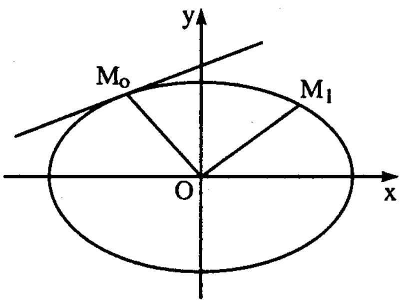
Đường thẳng d_2 tiếp xúc với (E) $\Leftrightarrow a^2 + 16b^2 = 100$ (2)

Từ (1) và (2) tìm được $a^2 = 20$, $b^2 = 5$.

Vậy phương trình chính tắc của (E) là

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

Ví dụ 15.2. Cho elip (E), và đường thẳng Δ tiếp xúc với (E) tại $M_0(x_0\ ;\ y_0)$. Chứng minh rằng mọi điểm thuộc (E), trừ M_0, đều nằm cùng một phía đối với Δ.



Hình 15-1

Giải. (h.15-1) Phương trình đường thẳng Δ có dạng

$$f(x, y) = \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - 1 = 0.$$

Ta có $f(0,0) = -1 < 0$. (1)

Với $M(x_1\ ;\ y_1)$ bất kì thuộc (E) ta có

$$\left(\frac{x_0}{a}.\frac{x_1}{a} + \frac{y_0}{b}.\frac{y_1}{b}\right)^2 \le \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right)\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right) = 1. \quad (2)$$

Vì $M_1 \neq M_0$ nên $\overrightarrow{OM_0}$ và $\overrightarrow{OM_1}$ không cùng phương $\Rightarrow x_0y_1 - x_1y_0 \neq 0$. Dấu đẳng thức trong (2) không xảy ra, do đó

$$f(x_1, y_1) = \frac{x_0x_1}{a^2} + \frac{y_0y_1}{b^2} - 1 < 0. \quad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra O và M_1 ở cùng phía đối với Δ. Vậy mọi điểm thuộc (E) (trừ M_0) đều nằm cùng một phía đối với Δ.

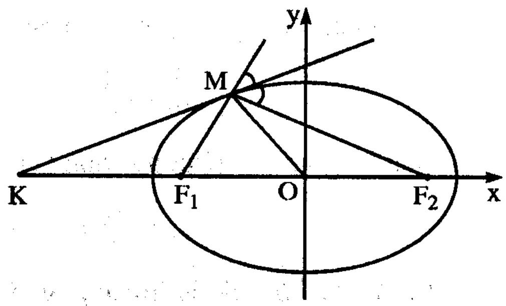
Ví dụ 15.3. Chứng minh rằng tiếp tuyến của elip tại điểm $M(x_0\ ;\ y_0)$ thuộc elip là phân giác của góc ngoài tại đỉnh M của tam giác MF_1F_2 (F_1, F_2 là các tiêu điểm của elip).

Giải. (h.15-2) Giả sử trong hệ toạ độ Oxy, elip có phương trình chính tắc

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Phương trình tiếp tuyến d của (E) tại điểm $M(x_0 ; y_0)$ có dạng

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1.$$



Hình 15-2

– Nếu d // Ox ($y_0 = b$), tam giác MF_1F_2 cân, kết luận là hiển nhiên.

– Xét trường hợp d cắt Ox tại K, ta có $K=\left(\frac{a^2}{x_0};0\right)$. Khi đó

$$\overline{KF_1}=-c-\frac{a^2}{x_0},\ \overline{KF_2}=c-\frac{a^2}{x_0}, \text{ suy ra}$$

$$\frac{\overline{KF_1}}{\overline{KF_2}}=\frac{a^2+cx_0}{a^2-cx_0}=\frac{a+\frac{c}{a}x_0}{a-\frac{c}{a}x_0}=\frac{MF_1}{MF_2},$$

chứng tỏ MK là phân giác của góc ngoài tại đỉnh M của tam giác MF_1F_2.

Nhận xét. Có thể xét vectơ pháp tuyến của d : $\vec{n}=\left(\frac{x_0}{a^2};\frac{y_0}{b^2}\right)$. Ta chứng minh giá của $\vec{n}$ là phân giác của góc F_1MF_2, bằng cách chứng minh

$$\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{MF_1}\right)=\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{MF_2}\right).$$

Từ đó cũng suy ra d là phân giác của góc kề bù với góc $\widehat{F_1MF_2}$.

Ví dụ 15.4. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A(1 ; 4) và tiếp xúc với hypebol $(H): \frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}=1$. Tìm toạ độ tiếp điểm.

Giải. Gọi $M(x_0 ; y_0)$ là tiếp điểm của Δ và (H). Phương trình của tiếp tuyến Δ có dạng

$$x_0x-\frac{y_0y}{4}=1.$$

Vì Δ đi qua A(1 ; 4) nên $\qquad x_0-y_0=1. \qquad (1)$

Mặt khác, $M(x_0 ; y_0) \in (H)$ nên

$$x_0^2 - \frac{y_0^2}{4} = 1. \qquad (2)$$

Giải hệ gồm các phương trình (1), (2) tìm được $(x_0 ; y_0) = (1 ; 0)$ hoặc

$$(x_0 ; y_0) = \left(-\frac{5}{3} ; -\frac{8}{3}\right).$$

Từ đó ta có hai đường thẳng đi qua A, tiếp xúc với (H) là $x - 1 = 0$ và $5x - 2y + 3 = 0$.

Ví dụ 15.5. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{12} = 1$. Xét hình vuông ngoại tiếp elip (các cạnh hình vuông tiếp xúc với elip). Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của hình vuông đó.

Giải. Dễ thấy các cạnh của hình vuông ngoại tiếp elip không song song với các trục toạ độ (tứ giác có các cạnh song song với các trục toạ độ, ngoại tiếp elip, là hình chữ nhật cơ sở của elip). Giả sử một cạnh của hình vuông có phương trình $d : mx + y + n = 0$, khi đó cạnh kề bên của d có phương trình

$$d' : x - my + p = 0 \qquad (\text{vì } d' \perp d).$$

Do d và d' tiếp xúc với (E) nên ta có

$$\begin{cases} 24m^2 + 12 = n^2 & (1) \\ 24 + 12m^2 = p^2. & (2) \end{cases}$$

Khoảng cách từ O(0 ; 0) đến d và d' bằng nhau, nên

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{|p|}{\sqrt{m^2+1}}. \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$|n| = |p| = 6 \text{ và } |m| = 1.$$

Vậy phương trình các đường thẳng chứa bốn cạnh của hình vuông là

$$x + y + 6 = 0,\ x + y - 6 = 0,$$
$$x - y + 6 = 0,\ x - y - 6 = 0.$$

Ví dụ 15.6. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ hai tiêu điểm của elip đến một tiếp tuyến bất kì của elip là một đại lượng không đổi.

Giải

Giả sử trong hệ trục toạ độ Oxy, elip đã cho có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, các tiêu điểm $F_1(-c ; 0)$, $F_2(c ; 0)$.

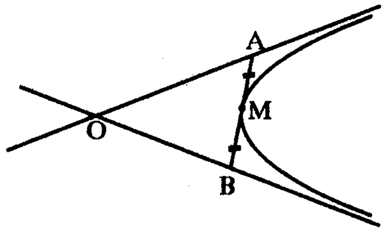
Xét tiếp tuyến $\Delta : \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ của elip. Ta có

$$d(F_1 ; \Delta).d(F_2 ; \Delta) = \frac{|-\alpha c + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.\frac{|\alpha c + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

$$= \frac{|\alpha^2 c^2 - \gamma^2|}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{|\alpha^2(a^2 - b^2) - (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2)|}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)b^2}{\alpha^2 + \beta^2} = b^2 \text{ (không đổi).}$$

Ví dụ 15.7

Tiếp tuyến của hypebol tại $M(x_0 ; y_0)$ thuộc hypebol cắt hai đường tiệm cận tại A và B. Chứng minh rằng MA = MB.



Hình 15-3

Giải (h.15-3)

Giả sử phương trình hypebol trong hệ trục Oxy là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Tiếp tuyến tại $M(x_0 ; y_0)$ có phương trình

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Giả sử A và B theo thứ tự thuộc các tiệm cận $y = \frac{b}{a}x$ và $y = -\frac{b}{a}x$. Khi đó toạ độ của A và B tương ứng là nghiệm của các hệ

$$\begin{cases} \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \\ y = \frac{b}{a}x \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \\ y = -\frac{b}{a}x. \end{cases}$$

Giải các hệ tìm được $A = \left(\frac{a^2 b}{bx_0 - ay_0} ; \frac{ab^2}{bx_0 - ay_0}\right)$,

$$B = \left(\frac{a^2 b}{bx_0 + ay_0} ; \frac{-ab^2}{bx_0 + ay_0}\right).$$

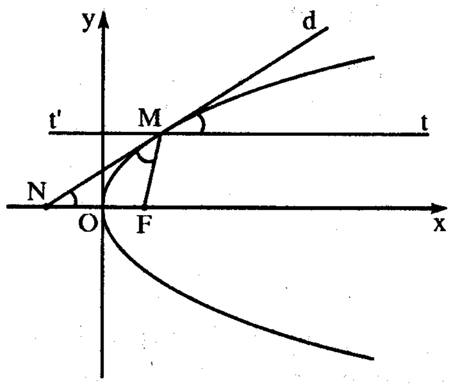
Do đó $x_A + x_B = \frac{a^2 b(bx_0 + ay_0 + bx_0 - ay_0)}{b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2} = \frac{2a^2 b^2 x_0}{a^2 b^2} = 2x_0 = 2x_M$.

Vậy M là trung điểm của AB.

Ví dụ 15.8. Cho parabol

$$(P) : y^2 = 2px$$

có tiêu điểm F ; M là điểm thuộc parabol ($M \neq 0$). Vẽ tiếp tuyến d của (P) tại M và tia Mt song song, cùng hướng với Ox. Chứng minh rằng d là phân giác của góc kề bù với góc FMt.



Hình 15-4

Giải (h.15-4)

Giả sử $M(x_0 ; y_0) \in (P)$. Tiếp tuyến của (P) tại M có phương trình $y_0y = p(x + x_0)$. Gọi N là giao điểm của d và trục hoành, ta có toạ độ của N là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y_0y = p(x + x_0) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow N = (-x_0 ; 0).$$

Từ đó $NF = \sqrt{\left(\frac{p}{2} + x_0\right)^2} = \frac{p}{2} + x_0$.

Mặt khác, $MF = \frac{p}{2} + x_0$ (bán kính qua tiêu của M), suy ra $MF = NF \Rightarrow$ ΔMNF cân tại $F \Rightarrow \widehat{MNF} = \widehat{NMF}$. (1)

Gọi Mt' là tia đối của tia Mt. Vì Mt' // NF nên $\widehat{MNF} = \widehat{NMt'}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra MN là phân giác của góc FMt', kề bù với góc FMt (đpcm).

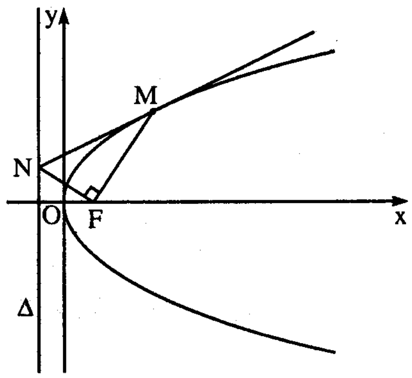
Nhận xét

1) Có thể xét vectơ pháp tuyến của d : $\vec{n} = (p ; -y_0)$ và các vectơ $\overrightarrow{MF} = \left(\frac{p}{2} - x_0 ; -y_0\right), \vec{i} = (1 ; 0)$.

Bằng cách chứng minh $\cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{MF}\right) = \cos\left(\vec{n}, \vec{i}\right)$, ta cũng đi đến kết luận d là phân giác của góc kề bù với góc FMt.

2) Tính chất trên đây của parabol được ứng dụng nhiều trong thực tế. Một tia sáng xuất phát từ F, đi tới điểm $M \in (P)$, phản xạ lại thành tia Mt song song hoặc trùng với Ox. Nhờ đặc điểm này người ta đã chế tạo ra các đèn pha dùng cho ôtô, xe máy, đèn pin hoặc dùng trong kĩ thuật hàng không. Bề mặt của pha đèn là một mặt tròn xoay, sinh bởi parabol quay quanh trục của nó. Bóng đèn được đặt ở tiêu điểm F của parabol, sẽ tạo ra một chùm tia sáng song song, giúp ta soi thấy những vật ở rất xa.

Ví dụ 15.9. Tiếp tuyến tại M của parabol cắt đường chuẩn của nó tại N ; F là tiêu điểm của parabol. Chứng minh rằng $\widehat{MFN} = 90^o$.



Hình 15-5

Giải (h.15-5). Xét parabol (P) : $y^2 = 2px$ với tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2} ; 0\right)$. Giả sử $M(x_0 ; y_0) \in (P)$. Tiếp tuyến của (P) tại M có phương trình $y_0y = p(x + x_0)$, đường chuẩn có phương trình $x = -\frac{p}{2}$, suy ra toạ độ của N là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y_0y = p(x + x_0) \\ x = -\frac{p}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{p}{2} \\ y = \frac{p\left(x_0 - \frac{p}{2}\right)}{y_0}. \end{cases}$$

Ta có $\overrightarrow{FM} = \left(x_0 - \frac{p}{2} ; y_0\right)$; $\overrightarrow{FN} = \left(-\frac{p}{2} - \frac{p}{2} ; \frac{p\left(x_0 - \frac{p}{2}\right)}{y_0}\right)$

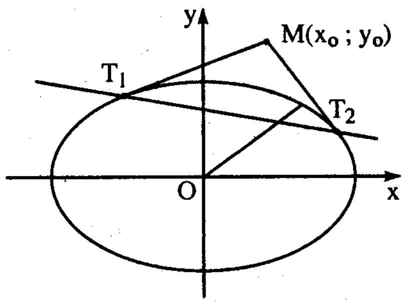
$$\Rightarrow \overrightarrow{FM}.\overrightarrow{FN} = -p\left(x_0 - \frac{p}{2}\right) + p\left(x_0 - \frac{p}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{FM} \perp \overrightarrow{FN}, \text{ vậy } \widehat{MFN} = 90^o.$$

Ví dụ 15.10. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và điểm $M(x_0 ; y_0)$ nằm ngoài elip. Qua M kẻ các tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới elip (T_1, T_2 là các tiếp điểm).

a) Viết phương trình đường thẳng T_1T_2.

b) Chứng minh rằng đường thẳng T_1T_2 đi qua một điểm cố định khi M chạy trên đường thẳng Δ cố định, không cắt elip.



Hình 15-6

Giải (h.15-6)

a) Giả sử $T_1 = (x_1 ; y_1)$, $T_2 = (x_2 ; y_2)$. Ta có phương trình các tiếp tuyến

$MT_1 : \dfrac{x_1x}{a^2} + \dfrac{y_1y}{b^2} = 1$

$MT_2 : \dfrac{x_2x}{a^2} + \dfrac{y_2y}{b^2} = 1.$

$M(x_0 ; y_0) \in MT_1 \Rightarrow \dfrac{x_1x_0}{a^2} + \dfrac{y_1y_0}{b^2} = 1$;

$M(x_0 ; y_0) \in MT_2 \Leftrightarrow \dfrac{x_2x_0}{a^2} + \dfrac{y_2y_0}{b^2} = 1.$

Như vậy toạ độ các điểm T_1, T_2 đều thoả mãn phương trình

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1.$$

Hơn nữa, $\dfrac{x_0}{a^2}$ và $\dfrac{y_0}{b^2}$ không đồng thời bằng 0 (do $M \neq O$). Vậy phương trình đường thẳng T_1T_2 là

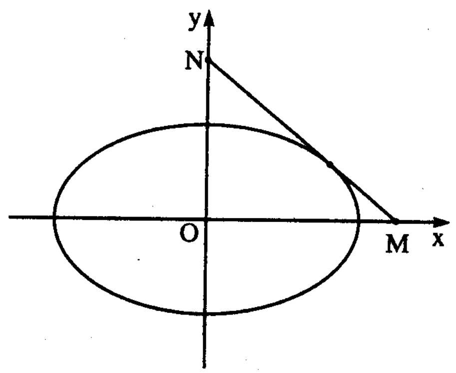
$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1. \qquad (1)$$

b) Giả sử Δ có phương trình $\alpha x + \beta y = \gamma$ ($\gamma \neq 0$).

$M \in \Delta$ nên $\alpha x_0 + \beta y_0 = \gamma \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\gamma}x_0 + \dfrac{\beta}{\gamma}y_0 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x_0}{a^2}.\dfrac{a^2\alpha}{\gamma} + \dfrac{y_0}{b^2}.\dfrac{b^2\beta}{\gamma} = 1.$ (2)

Từ (1) và (2) ta thấy điểm $P\left(\dfrac{a^2\alpha}{\gamma} ; \dfrac{b^2\beta}{\gamma}\right)$ thuộc đường thẳng T_1T_2. Vậy T_1T_2 đi qua điểm P cố định.

Ví dụ 15.11. Cho elip (E) : $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Các điểm M và N chuyển động lần lượt trên các tia Ox, Oy sao cho MN luôn tiếp xúc với (E). Xác định toạ độ của M và N để đoạn MN có độ dài nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.



Hình 15-7

Giải (h.15-7)

Cách 1. Gọi M(m ; 0) và N(0 ; n) với m > 0 ; n > 0 là hai điểm chuyển động trên 2 tia Ox và Oy.

Đường thẳng MN có phương trình : $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}-1=0$.

Đường thẳng này tiếp xúc với (E) khi và chỉ khi :

$$16\left(\frac{1}{m}\right)^2+9\left(\frac{1}{n}\right)^2=1.$$

Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta có :

$$MN^2=m^2+n^2=\left(m^2+n^2\right)\left(\frac{16}{m^2}+\frac{9}{n^2}\right)\geq\left(m.\frac{4}{m}+n.\frac{3}{n}\right)^2=49$$

$\Rightarrow MN\geq 7$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} m:\frac{4}{m}=n:\frac{3}{n} \\ \frac{16}{m^2}+\frac{9}{n^2}=1 \\ m>0\,;n>0. \end{cases} \Leftrightarrow m=2\sqrt{7}$ và $n=\sqrt{21}$.

Vậy với $M\left(2\sqrt{7}\,;0\right)$; $N\left(0\,;\sqrt{21}\right)$ thì MN đạt GTNN và GTNN của MN là 7.

Cách 2. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $(x_0\,;y_0)$ thuộc (E) là :

$$\frac{xx_0}{16}+\frac{yy_0}{9}=1,$$

suy ra toạ độ của M và N là $M\left(\frac{16}{x_0}\,;0\right)$ và $N\left(0\,;\frac{9}{y_0}\right)$

$$\Rightarrow MN^2=\frac{16^2}{x_0^2}+\frac{9^2}{y_0^2}=\left(\frac{x_0^2}{16}+\frac{y_0^2}{9}\right)\left(\frac{16^2}{x_0^2}+\frac{9^2}{y_0^2}\right)\geq(4+3)^2=49$$

(theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki) $\Rightarrow MN\geq 7$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_0=\frac{8\sqrt{7}}{7}\,;\,y_0=\frac{3\sqrt{21}}{7}$.

Khi đó $M=\left(2\sqrt{7}\,;0\right)$; $N=\left(0\,;\sqrt{21}\right)$ và GTNN của MN là 7.

Ví dụ 15.12. Cho parabol (P) : $y^2=2x$ và điểm A(0 ; 6). Tìm điểm M thuộc (P) sao cho độ dài AM là nhỏ nhất. Chứng minh rằng với vị trí đó của M, AM vuông góc với tiếp tuyến của (P) tại M.

Giải (h.15-8)

Ta có

$AM^2 = \left(x_M - x_A\right)^2 + \left(y_M - y_A\right)^2$

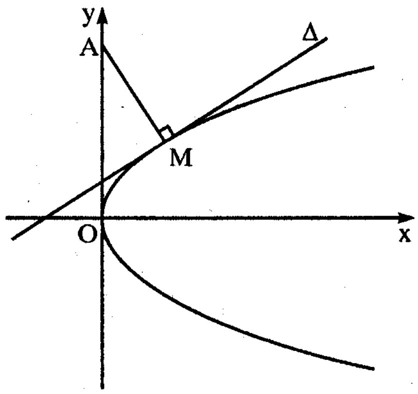
$= \left(x_M - 0\right)^2 + (y_M - 6)^2$

$= x_M^2 + y_M^2 - 12y_M + 36$

$= \frac{1}{4}y_M^4 + y_M^2 - 12y_M + 36$

$= \frac{1}{4}\left(y_M^4 - 8y_M^2 + 16\right) + 3\left(y_M^2 - 4y_M + 4\right) + 20$

$= \frac{1}{4}\left(y_M^2 - 4\right)^2 + 3(y_M - 2)^2 + 20 \geq 20.$



Hình 15-8

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y_M^2 - 4 = 0 \\ y_M - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y_M = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = 2 \\ x_M = 2. \end{cases}$$

Vậy điểm cần tìm là M(2 ; 2).

Khi đó, $\overrightarrow{AM} = (2 ; -4)$. Phương trình tiếp tuyến của (P) tại M(2 ; 2) là $\Delta : 2y = 2 + x$ hay $x - 2y + 2 = 0$.

Vectơ pháp tuyến của Δ là $\vec{n} = (1 ; -2)$.

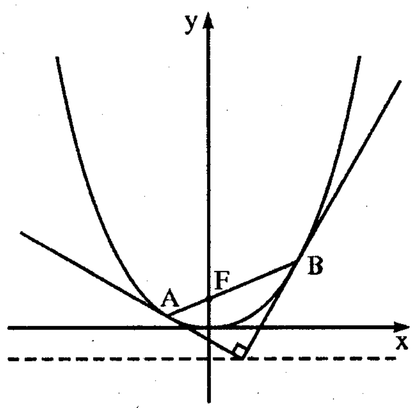
Ta có $\overrightarrow{AM} = 2\vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{AM} // \vec{n}$.

Vậy $AM \perp \Delta$.

Ví dụ 15.13. Cho parabol (P) : $y = \frac{1}{2}x^2$ với tiêu điểm F. Đường thẳng d quay xung quanh F, cắt (P) tại hai điểm A, B. Vẽ các tiếp tuyến của (P) tại A và B. Chứng minh rằng

a) Các tiếp tuyến Δ_A, Δ_B vuông góc với nhau ;

b) Giao điểm của Δ_A, Δ_B chạy trên một đường thẳng cố định.



Hình 15-9

Giải (h.15-9) a) Viết lại phương trình của (P) :

$$x^2 = 2y = 2py \Rightarrow p = 1, \text{ tiêu điểm } F\left(0\,;\frac{1}{2}\right).$$

Đường thẳng d qua F, cắt (P) tại hai điểm nên d có phương trình dạng $y = kx + \frac{1}{2}$. Toạ độ của A và B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = kx + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2kx - 1 = 0 & (1) \\ y = \frac{1}{2}x^2. & (2) \end{cases}$$

Tiếp tuyến của (P) tại A và B có phương trình tương ứng là

$$\Delta_A : x_Ax = y_A + y \Leftrightarrow y = x_Ax - y_A\,; \qquad (3)$$

$$\Delta_B : x_Bx = y_B + y \Leftrightarrow y = x_Bx - y_B. \qquad (4)$$

Vì x_A, x_B là các nghiệm của (1) nên theo định lí Vi-ét, $x_Ax_B = -1 \Rightarrow \Delta_A \perp \Delta_B$.

b) Toạ độ giao điểm I của Δ_A và Δ_B là nghiệm của hệ (3), (4). Giải hệ này tìm được $y_I = \frac{1}{2}x_Ax_B = -\frac{1}{2}$. Vậy I chạy trên đường thẳng cố định $y = -\frac{1}{2}$, chính là đường chuẩn của parabol.

III – BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

15.1. Cho elip (E) có hai tiêu điểm F_1, F_2, đường thẳng Δ tiếp xúc với (E) tại M_0. Chứng minh rằng với mọi M thuộc Δ, ta có $MF_1 + MF_2 \geq M_0F_1 + M_0F_2$.

15.2. Cho parabol (P) và đường thẳng Δ tiếp xúc với (P) tại M_0. Chứng minh rằng mọi điểm thuộc (P), trừ M_0, đều nằm cùng một phía đối với Δ.

15.3. Cho hypebol có hai tiêu điểm F_1, F_2. Từ điểm M, kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới hypebol (T_1, T_2 là các tiếp điểm thuộc hai nhánh của hypebol). Chứng minh rằng $\widehat{F_1MT_1} = \widehat{F_2MT_2}$.

15.4. Cho elip (E) có tâm đối xứng là O. Từ điểm M nằm ngoài elip kẻ hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 tới (E) (T_1, T_2 là các tiếp điểm). Chứng minh rằng OM đi qua trung điểm của T_1T_2.

15.5. Cho parabol (P) : $y^2 = 2px$ và điểm $A\left(\frac{27}{8}\,;\frac{15}{8}\right)$. Tìm tất cả các điểm M trên (P) sao cho AM vuông góc với tiếp tuyến của (P) tại M.

15.6. Cho hypebol (H) có các tiêu điểm là F_1, F_2 ; Δ là tiếp tuyến thay đổi của (H). Chứng minh rằng hình chiếu của F_1, F_2 trên Δ thuộc một đường tròn cố định.

15.7. Cho parabol (P) : $y^2 = 4x$ có đường chuẩn Δ ; điểm M thuộc (P). Tiếp tuyến của (P) tại M cắt Δ tại N. Tìm vị trí của M sao cho đoạn MN ngắn nhất.

15.8. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với hai tiêu điểm F_1, F_2.Δ là tiếp tuyến thay đổi của (E) và cắt các đường thẳng $x = -a$, $x = a$ lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng $\widehat{MF_1N} = \widehat{MF_2N} = 90^o$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác MF_2N.

15.9. Cho parabol (P) : $y^2 = 2px$ và đường thẳng Δ, điểm M chạy trên Δ. Từ M kẻ tới (P) hai tiếp tuyến MT_1, MT_2 (T_1, T_2 là các tiếp điểm). Chứng minh rằng đường thẳng T_1T_2 hoặc luôn đi qua một điểm cố định hoặc có phương không đổi.

15.10. Một tiếp tuyến thay đổi của hypebol cắt các đường tiệm cận của nó tại A và B. Chứng minh rằng diện tích tam giác OAB luôn không đổi.

15.11. Cho hypebol (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$. M là điểm thay đổi sao cho từ đó kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc với nhau tới (H). Chứng minh rằng M thuộc một đường tròn cố định.

15.12. Tam giác ABC thay đổi sao cho các cạnh của nó luôn tiếp xúc với parabol (P). Chứng minh rằng trực tâm của tam giác ABC chạy trên một đường thẳng cố định.

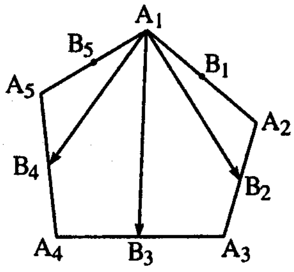
HƯỚNG DẪN - LỜI GIẢI

§1. VECTƠ. CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

1.1. (h.1-19) Xét ngũ giác $A_1A_2A_3A_4A_5$. Gọi B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 lần lượt là trung điểm các cạnh A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1.

Đặt $\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{a_i}$; $\overrightarrow{OB_j} = \overrightarrow{b_j}$. Với điểm O tuỳ ý, ta có

$\overrightarrow{A_iB_j} = \overrightarrow{OB_j} - \overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{b_j} - \overrightarrow{a_i}$ (i, j = 1, 2,..., 5).



Hình 1-19

Từ đó

$$\left(\overrightarrow{A_1B_2} + \overrightarrow{A_1B_3} + \overrightarrow{A_1B_4}\right) + \ldots + \left(\overrightarrow{A_5B_1} + \overrightarrow{A_5B_2} + \overrightarrow{A_5B_3}\right)$$

$$= 3\left(\overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{b_2} + \overrightarrow{b_3} + \overrightarrow{b_4} + \overrightarrow{b_5}\right) - 3\left(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4} + \overrightarrow{a_5}\right)$$

$$= 3\left(\frac{\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}}{2} + \frac{\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3}}{2} + \frac{\overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4}}{2} + \frac{\overrightarrow{a_4} + \overrightarrow{a_5}}{2} + \frac{\overrightarrow{a_5} + \overrightarrow{a_1}}{2}\right) - 3\left(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4} + \overrightarrow{a_5}\right)$$

$$= 3\left(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4} + \overrightarrow{a_5}\right) - 3\left(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4} + \overrightarrow{a_5}\right)$$

$$= \vec{0}.$$

Nhận xét. Có thể mở rộng bài toán cho trường hợp đa giác n cạnh.

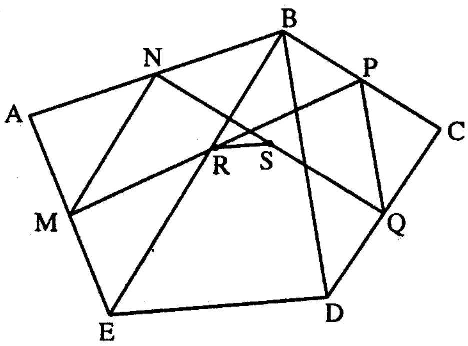
1.2. (h.1-20)

Theo VD 1.11 ta có

$$\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ})$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{EB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD})$$



Hình 1-20

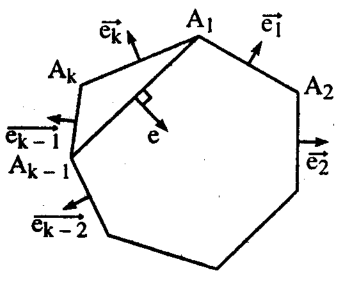
$= \frac{1}{4}\overrightarrow{ED}$.

Vậy RS // ED và $RS = \frac{1}{4}ED$.

1.3. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n. Nếu n = 3 thì theo VD 1.20, mệnh đề cần chứng minh đúng.

Giả sử mệnh đề cần chứng minh đúng với $n = k - 1$ $(k \geq 4)$. Xét trường hợp $n = k$ (h.1-21).

Gọi $\vec{e}$ là vectơ đơn vị, vuông góc với $\overrightarrow{A_{k-1}A_1}$, hướng ra phía ngoài tam giác $A_{k-1}A_kA_1$. Theo VD 1.20 ta có



Hình 1-21

$$A_{k-1}A_k\overrightarrow{e_{k-1}} + A_kA_1\overrightarrow{e_k} + A_1A_{k-1}\vec{e} = \vec{0}. \quad (1)$$

Áp dụng giả thiết quy nạp cho đa giác $A_1A_2 \ldots A_{k-1}$ ta có

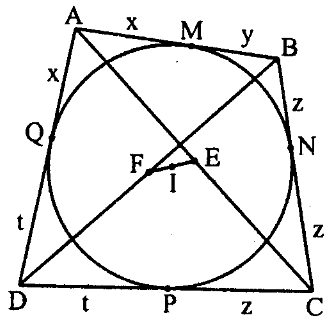
$$A_1A_2\overrightarrow{e_1} + A_2A_3\overrightarrow{e_2} + \ldots + A_{k-1}A_1(-\vec{e}) = \vec{0}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$A_1A_2\overrightarrow{e_1} + A_2A_3\overrightarrow{e_2} + \ldots + A_{k-1}A_k\overrightarrow{e_{k-1}} + A_kA_1\overrightarrow{e_k} = \vec{0} \text{ (đpcm).}$$

Nhận xét. Kết quả trên còn có thể được chứng minh nhờ phép quay vectơ.

1.4. (h.1-22) Gọi M, N, P, Q lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn (I) với các cạnh AB, BC, CD, DA ; x, y, z, t là khoảng cách từ A, B, C, D đến các tiếp điểm tương ứng. Theo định lí Con nhím ta có



Hình 1-22

$$(x + y)\overrightarrow{IM} + (y + z)\,\overrightarrow{IN} +$$

$$+ (z + t)\,\overrightarrow{IP} + (t + x)\,\overrightarrow{IQ} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \left(y\overrightarrow{IA} + x\overrightarrow{IB}\right) + \left(z\overrightarrow{IB} + y\overrightarrow{IC}\right)$$

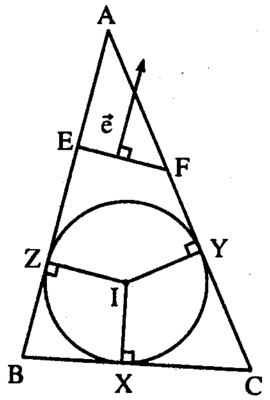
$$+ \left(t\overrightarrow{IC} + z\overrightarrow{ID}\right) + \left(x\overrightarrow{ID} + t\overrightarrow{IA}\right) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (y + t)\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}\right) + (x + z)\left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID}\right) = \vec{0}$$

$\Rightarrow (y + t)\overrightarrow{IE} + (x + z)\overrightarrow{IF} = \vec{0}.$

$\Rightarrow \overrightarrow{IE} // \overrightarrow{IF} \Rightarrow$ I, E, F thẳng hàng.

1.5. Không mất tính tổng quát, giả sử bán kính đường tròn (I) bằng 1. Dựng vectơ đơn vị $\vec{e}$ vuông góc với EF (h.1-23).



Hình 1-23

Áp dụng định lí Con nhím cho tứ giác EBCF, ta có

$EB\overrightarrow{IZ} + BC\overrightarrow{IX} + CF\overrightarrow{IY} + EF\vec{e} = \vec{0}.$

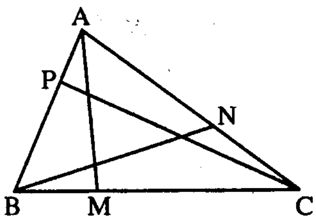
Từ đó, với giả thiết EB = BC = CF, ta có

$BC\left(\overrightarrow{IZ} + \overrightarrow{IX} + \overrightarrow{IY}\right) + EF\vec{e} = \vec{0}$

$\Rightarrow 3BC\overrightarrow{IG} + EF\vec{e} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{IG}$ cùng phương với $\vec{e}$. Vậy $IG \perp EF$.

1.6. (h.1-24) Đặt $\dfrac{BM}{BC} = \dfrac{CN}{CA} = \dfrac{AP}{AB} = k.$



Hình 1-24

Ta có $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} =$

$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}) + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP})$

$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP})$

$= \vec{0} + k(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$

$= \vec{0}.$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = -(\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP})$

$\Rightarrow |\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}| \le |\overrightarrow{BN}| + |\overrightarrow{CP}|.$

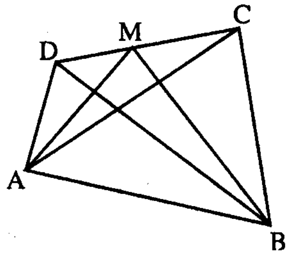
Vì $\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$ không cùng phương nên không thể xảy ra dấu đẳng thức. Tương tự, ta có :

$$\begin{cases} |\overrightarrow{AM}| < |\overrightarrow{BN}| + |\overrightarrow{CP}| \\ |\overrightarrow{BN}| < |\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{CP}| \\ |\overrightarrow{CP}| < |\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{BN}| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM < BN + CP \\ BN < AM + CP \\ CP < AM + BN. \end{cases}$$

Vậy các đoạn thẳng AM, BN, CP là độ dài ba cạnh của một tam giác nào đó.

1.7. (h.1-25) Theo VD 1.9 ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \dfrac{MD}{CD}\overrightarrow{AC} + \dfrac{MC}{CD}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{BM} = \dfrac{MD}{CD}\overrightarrow{BC} + \dfrac{MC}{CD}\overrightarrow{BD}. \end{cases}$$



Hình 1-25

Từ đó suy ra

$$\begin{cases} AM < \dfrac{MD}{CD}AC + \dfrac{MC}{CD}AD \\ BM < \dfrac{MD}{CD}BC + \dfrac{MC}{CD}BD \end{cases}$$

$$\Rightarrow AM + BM < \frac{MD}{CD}(AC + BC) + \frac{MC}{CD}(AD + BD)$$

$$\Rightarrow AM + BM < \left(\frac{MD}{CD} + \frac{MC}{CD}\right).\ \max\{AC + BC, AD + BD\}$$

$$\Rightarrow AM + BM < \max\{AC + BC, AD + BD\}$$

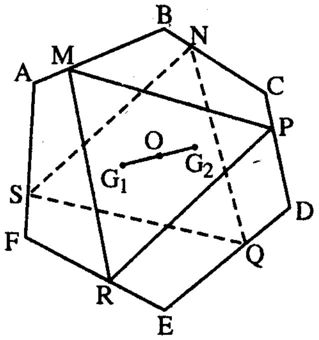
$$\Rightarrow AM + BM + AB < \max\{AC + BC + AB, AD + BD + AB\}$$

$$\Rightarrow p < \max\{p_1, p_2\}.$$

Nhận xét. Kĩ thuật đánh giá trên có thể được mở rộng, từ đó sẽ nhận được nhiều kết quả hấp dẫn.

1.8. (h.1-26) Đặt

$$\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{CP}{CD} = \frac{DQ}{DE} = \frac{ER}{EF} = \frac{FS}{FA} = k.$$



Hình 1-26

Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác MPR, NQS và O là điểm sao cho

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}.$$

Ta có $3\overrightarrow{OG_1} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR}$

$$= \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}\right) + \left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}\right) + \left(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ER}\right)$$

$$= \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}\right) + \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{ER}\right)$$

$$= -\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF}\right) + k\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}\right)$$

$$= -\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF}\right) + k\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) + k\left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}\right) + k\left(\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE}\right)$$

$= \left[(k-1)\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OC}\right] + \left[(k-1)\overrightarrow{OD} - k\overrightarrow{OE}\right] + \left[(k-1)\overrightarrow{OF} - k\overrightarrow{OA}\right]$

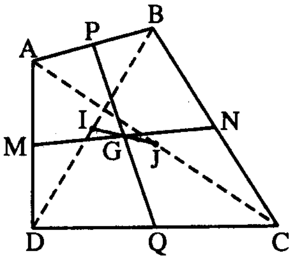
$= -\left(\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OS}\right)$

$= -3\overrightarrow{OG_2}.$

Suy ra $\overrightarrow{OG_1} = -\overrightarrow{OG_2}.$

Vậy G_1 và G_2 luôn đối xứng nhau qua điểm O cố định.

1.9. (h.1-27) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Ta có :



Hình 1-27

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD}) + (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ G là trung điểm của MN.

Biến đổi trên đây cho ta cách dựng điểm G đồng thời cũng chỉ ra sự duy nhất của nó.

Nhận xét. Gọi P, Q là trung điểm của AB, CD ; I, J là trung điểm của BD, AC. Bằng cách viết

$\vec{0} = \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD}\right) + \left(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GB}\right) = 2\left(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}\right)$

$= \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}\right) + \left(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}\right) = 2\left(\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ}\right)$

$= \left(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD}\right) + \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}\right) = 2\left(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ}\right),$

ta kết luận được : Trong tứ giác, hai đoạn thẳng nối trung điểm các cặp cạnh đối diện và đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo đồng quy tại trung điểm mỗi đoạn (chính là trọng tâm của tứ giác).

b) Với M là điểm tuỳ ý, ta có :

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} =$

$= \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right) + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right) + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right) + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD}\right)$

$= 4\overrightarrow{MG} + \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}\right)$

$= 4\overrightarrow{MG}.$

Suy ra $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right).$

1.10. (h.1-28) Gọi G là trọng tâm tứ giác ABCD.

Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

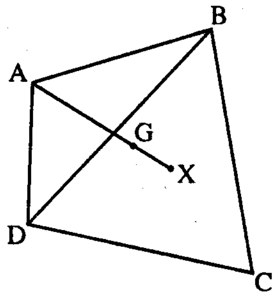
$\Rightarrow \overrightarrow{GA} + \left(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}\right) = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GX} = \vec{0}$ (vì X là trọng tâm ΔBCD)

$\Rightarrow$ AX đi qua G và $\dfrac{GA}{GX} = 3$.

Tương tự như vậy, ta thấy AX, BY, CZ, DT đồng quy tại G và

$$\frac{GA}{GX} = \frac{GB}{GY} = \frac{GC}{GZ} = \frac{GD}{GT} = 3.$$



Hình 1-28

1.11. (h.1-29) Lấy điểm E sao cho

$4\overrightarrow{EA} - 3\overrightarrow{EB} = \vec{0}$.

Lấy điểm F sao cho $\overrightarrow{FC} - 2\overrightarrow{FD} = \vec{0}$.

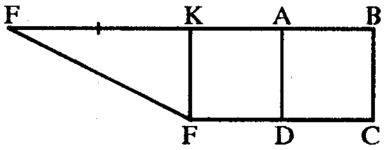
Ta có $\vec{u}(M) = \left(4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right) + \left(\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}\right)$

$= \overrightarrow{ME} - \overrightarrow{MF}$ (công thức thu gọn)

$= \overrightarrow{FE}$, không phụ thuộc vị trí điểm M.

Hạ FK $\perp$ AB (K thuộc đường thẳng AB). Ta có

$$\left|\vec{u}(M)\right| = \left|\overrightarrow{FE}\right| = \sqrt{FK^2 + KE^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}.$$



Hình 1-29

1.12. (h.1-30) Gọi I là điểm xác định bởi

$$4\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

(Trước hết lấy E sao cho $4\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$,

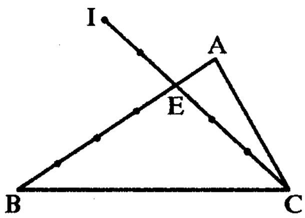
rồi lấy I sao cho $5\overrightarrow{IE} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$).

Theo công thức thu gọn, ta có

$\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MI}$

$\Rightarrow$ M, N, I thẳng hàng.

Vậy đường thẳng MN luôn đi qua điểm I cố định.



Hình 1-30

1.13. Gọi G là trọng tâm tứ giác ABCD, E là trung điểm của AB, ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}\ ;$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CE}.$$

Do đó : $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}|$

$$\Leftrightarrow |4\overrightarrow{MG}| = |2\overrightarrow{CE}| \Leftrightarrow MG = \frac{1}{2}CE.$$

Tập hợp các điểm M là đường tròn $\left(G ; \frac{1}{2}CE\right)$.

1.14. (h.1-31) Gọi I là đỉnh thứ tư của hình bình hành ACBI, ta có

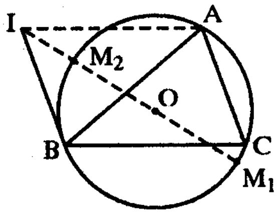
$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$, suy ra

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MI} \quad \forall M.$

Vậy $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ lớn nhất

$\Leftrightarrow |\overrightarrow{MI}|$ lớn nhất $\Leftrightarrow M \equiv M_1$;

$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow |\overrightarrow{MI}|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv M_2$.



Hình 1-31

Trong đó M_1, M_2 là giao điểm của đường thẳng IO với đường tròn, M_1 khác phía với I, M_2 cùng phía với I đối với O (lưu ý rằng tam giác ABC nhọn nên I luôn nằm ngoài đường tròn).

1.15. (h.1-32)

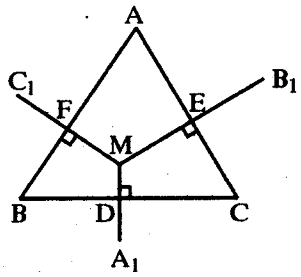
Gọi D, E, F tương ứng là giao điểm của MA_1, MB_1, MC_1 với các cạnh BC, CA, AB ; O là trọng tâm ΔABC. Ta có

$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1}$

$= 2\left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}\right)$

$= 2.\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$ (xem VD 1.22)

$= 3\overrightarrow{MO}.$



Hình 1-32

Điều này chứng tỏ O cũng là trọng tâm của tam giác $A_1B_1C_1$ (đpcm).

1.16. Ta có $\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_2} = \frac{OA_2}{OA_1}\overrightarrow{OA_1} + \frac{OB_2}{OB_1}\overrightarrow{OB_1} + \frac{OC_2}{OC_1}\overrightarrow{OC_1}$

$= \frac{a}{OA_1}\overrightarrow{OA_1} + \frac{b}{OB_1}OB_1 + \frac{c}{OC_1}\overrightarrow{OC_1}$

$= \vec{0}$ (định lí Con nhím, lưu ý rằng vectơ $\frac{\overrightarrow{OX}}{OX}$ là vectơ đơn vị).

Vậy O là trọng tâm của tam giác $A_2B_2C_2$.

§2. SỰ BIỂU THỊ VECTƠ. PHÉP CHIẾU VECTƠ

2.1. a) Rõ ràng $\vec{v} = x\vec{a} + \vec{b} \neq \vec{0}$. Theo định lí 2.1, $\vec{u} // \vec{v} \Leftrightarrow \exists\, k : \vec{u} = k\vec{v}$.

$\Leftrightarrow \vec{a} + (2x-1)\vec{b} = k(x\vec{a} + \vec{b})$

$\Leftrightarrow (kx-1)\vec{a} + (k-2x+1)\vec{b} = \vec{0}$

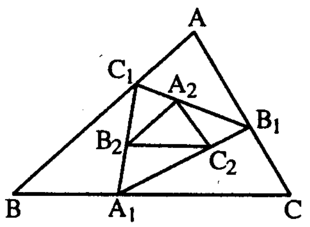
$$\Leftrightarrow \begin{cases} kx = 1 \\ 2x - 1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, k = 1 \\ x = -\dfrac{1}{2}, k = -2. \end{array}\right.$$

b) Dễ thấy $\vec{u} \neq \vec{0}$. Để $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng, cần và đủ là $\exists\, k > 0 : \vec{v} = k\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)\vec{a} - \dfrac{2}{3}\vec{b} = k(3\vec{a} + x\vec{b}) \\ k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)\vec{a} - \dfrac{2}{3}\vec{b} = 3k\vec{a} + kx\vec{b} \\ k > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x = 3k \\ kx = -\dfrac{2}{3} \\ k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ k = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

2.2. (h.2-14) Lấy điểm O tuỳ ý làm gốc, hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OB_2}, \overrightarrow{OC_2}$ qua $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OC_1}$ (xem VD 1.10), sau đó lại biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OC_1}$ qua $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$; cuối cùng ta được



Hình 2-14

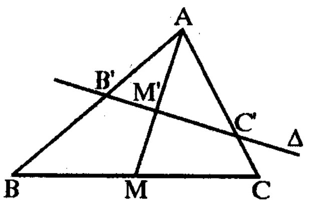
$\overrightarrow{A_2C_2} = \overrightarrow{OC_2} - \overrightarrow{OA_2} =$

$$= \frac{k^2 - k + 1}{(k+1)^2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \frac{k^2 - k + 1}{(k+1)^2}\overrightarrow{AC}.$$

Vì $k^2 - k + 1 > 0$ và $A_2 \notin AC$ nên $A_2C_2 // AC$. Tương tự, ta chứng minh được $C_2B_2 // CB$, $B_2A_2 // BA$.

2.3. (h.2-15) Ta có $\overrightarrow{AM} = \dfrac{MC}{BC}\overrightarrow{AB} + \dfrac{MB}{BC}\overrightarrow{AC}$ (VD 1.19)

$$\Rightarrow \frac{AM}{AM'}\overrightarrow{AM'} = \frac{MC}{BC}\cdot\frac{AB}{AB'}\overrightarrow{AB'} + \frac{MB}{BC}\cdot\frac{AC}{AC'}\overrightarrow{AC'}.$$



Hình 2-15

Vì M', B', C' thẳng hàng nên theo hệ quả ở VD 2.3 ta có

$$\frac{AM}{AM'} = \frac{MC}{BC}\cdot\frac{AB}{AB'} + \frac{MB}{BC}\cdot\frac{AC}{AC'}$$

$$\Rightarrow BC\frac{AM}{AM'} = MC\frac{AB}{AB'} + MB\frac{AC}{AC'}.$$

2.4. (h.2-16) Trên Ox, Oy lấy A_1, B_1 sao cho $a.OA_1 = b.OB_1 = \frac{1}{2}$.

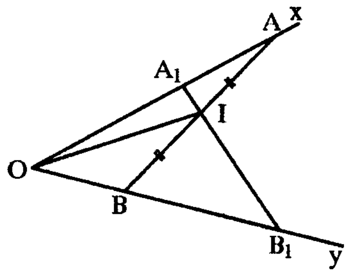
Vì I là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{OA}{OA_1}\overrightarrow{OA_1} + \frac{OB}{OB_1}\overrightarrow{OB_1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a.OA}{a.OA_1}\overrightarrow{OA_1} + \frac{b.OB}{b.OB_1}\overrightarrow{OB_1}\right)$$

$$= a.OA.\overrightarrow{OA_1} + b.OB.\overrightarrow{OB_1}$$

(vì $a.OA_1 = b.OB_1 = \frac{1}{2}$).



Hình 2-16

Vì $a.OA + b.OB = 1 \Rightarrow$ I, A_1, B_1 thẳng hàng.

Vậy I thuộc đường thẳng A_1B_1 cố định.

2.5. (h.2-17) Ta có

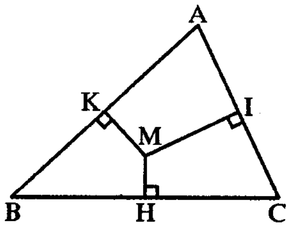
$$\begin{cases} \frac{a}{MH}\overrightarrow{MH} + \frac{b}{MI}\overrightarrow{MI} + \frac{c}{MK}\overrightarrow{MK} = \vec{0} & \text{(VD 1.20)} \\ S_a\overrightarrow{MA} + S_b\overrightarrow{MB} + S_c\overrightarrow{MC} = \vec{0} & \text{(VD 1.21)} \end{cases}$$

Vậy : $a^2\overrightarrow{MA} + b^2\overrightarrow{MB} + c^2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{S_a} = \frac{b^2}{S_b} = \frac{c^2}{S_c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a^2}{a.MH} = \frac{2b^2}{b.MI} = \frac{2c^2}{c.MK}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{MH} = \frac{b}{MI} = \frac{c}{MK}$$



Hình 2-17

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MK} = \vec{0} \Leftrightarrow$ M là trọng tâm ΔHIK.

Chú ý. Điểm M xác định trong bài được gọi là điểm Lơ-moan của tam giác ABC. Nó có nhiều đặc điểm hình học thú vị.

2.6. Ta đã biết $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ (VD 1.19)

$$\Rightarrow [(p-b)+(p-c)].\overrightarrow{IA} + [(p-c)+(p-a)].\overrightarrow{IB} + [(p-a)+(p-b)].\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (p-a).\left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right) + (p-b).\left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA}\right) + (p-c).\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 2(p-a).\overrightarrow{IA_1} + 2(p-b).\overrightarrow{IB_1} + 2(p-c).\overrightarrow{IC_1} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (b+c-a)\overrightarrow{IA_1} + (c+a-b).\overrightarrow{IB_1} + (a+b-c).\overrightarrow{IC_1} = \vec{0}. \qquad (1)$$

Vì $\begin{cases} b+c-a>0 \\ c+a-b>0 \\ a+b-c>0 \end{cases}$ nên I nằm trong $\Delta A_1B_1C_1$ (VD 2.11).

Mặt khác, ta có

$$S_{IB_1C_1}\overrightarrow{IA_1} + S_{IC_1A_1}\overrightarrow{IB_1} + S_{IA_1B_1}\overrightarrow{IC_1} = \vec{0}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) rút ra

$$\frac{S_{IB_1C_1}}{b+c-a} = \frac{S_{IC_1A_1.}}{c+a-b} = \frac{S_{IA_1B_1}}{a+b-c}.$$

2.7. (h.2-18) Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QP} = \vec{0} \\ \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \\ \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{C_1A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \vec{0} \end{cases}$$

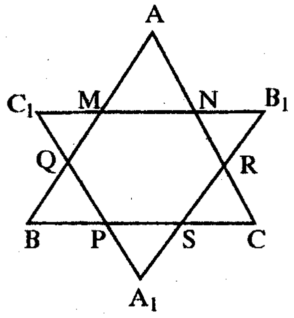
$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{MQ}\right) + \left(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{SR}\right) = \vec{0} & (1) \\ \dfrac{BC}{PS}\overrightarrow{PS} + \dfrac{CA}{RN}\overrightarrow{RN} + \dfrac{AB}{MQ}\overrightarrow{MQ} = \vec{0} & (2) \\ \dfrac{B_1C_1}{NM}\overrightarrow{NM} + \dfrac{C_1A_1}{QP}\overrightarrow{QP} + \dfrac{A_1B_1}{SR}\overrightarrow{SR} = \vec{0} & (3) \end{cases}$$

Vậy : $\dfrac{BC}{PS} = \dfrac{CA}{RN} = \dfrac{AB}{MQ}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{MQ} = \vec{0}$ (theo (2))

$\Leftrightarrow \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{SR} = \vec{0}$ (theo (1))

$\Leftrightarrow \dfrac{B_1C_1}{NM} = \dfrac{C_1A_1}{QP} = \dfrac{A_1B_1}{SR}$ (theo (3)).



Hình 2-18

2.8. (h.2-19)

Theo VD 2.14 ta có

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) = 4\overrightarrow{OG}$

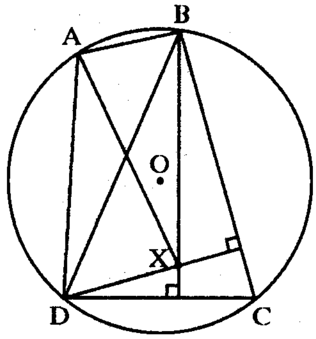
(G là trọng tâm tứ giác ABCD, xem BT 1.19).
Tương tự, ta có

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OT} = 4\overrightarrow{OG}.$

Như vậy, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OY}$

$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OT}.$

Chứng tỏ bốn đoạn thẳng AX, BY, CZ, DT có cùng trung điểm, tức là chúng đồng quy tại trung điểm của mỗi đoạn.

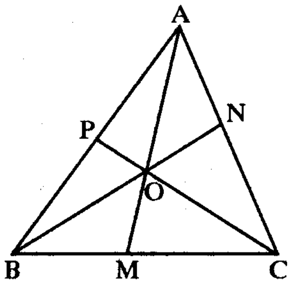


Hình 2-19

2.9. (h.2-20) • Nếu AM, BN, CP đồng quy tại O và $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ thì $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ (định nghĩa tâm tỉ cự). Xét phép chiếu vectơ phương (AM) lên đường thẳng BC, ta có

$\beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$

Tương tự, $\begin{cases} \gamma\overrightarrow{NC} + \alpha\overrightarrow{NA} = \vec{0} \\ \alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} = \vec{0}. \end{cases}$



Hình 2-20

• Ngược lại, giả sử $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ và

$\beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \gamma\overrightarrow{NC} + \alpha\overrightarrow{NA} = \alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} = \vec{0}.$

Gọi O là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A, B, C\}$ ứng với các hệ số $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Ta có

$$\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

$\Rightarrow \alpha\overrightarrow{OA} + \beta(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}) + \gamma(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC}) = \vec{0}$

$\Rightarrow \alpha\overrightarrow{OA} + (\beta + \gamma)\overrightarrow{OM} + (\beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}) = \vec{0}$

$\Rightarrow \alpha\overrightarrow{OA} + (\beta + \gamma)\overrightarrow{OM} = \vec{0}$

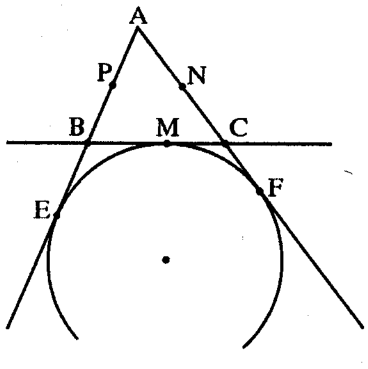
$\Rightarrow$ M, O, A thẳng hàng.

Tương tự, các bộ ba điểm (N, O, B) ; (P, O, C) thẳng hàng.

Vậy AM, BN, CP đồng quy tại O (đpcm).

Nhận xét. Đây là dạng vectơ của định lí Xê-va. Trong §3 ta sẽ gặp lại nó dưới dạng thông thường.

2.10. (h.2-21). Gọi E, F là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A với các tia AB, AC.



Hình 2-21

Ta có : $2AE = AE + AF$

$= AB + BE + AC + CF$

$= AB + AC + (BE + CF)$

$= AB + AC + (BM + CM)$

$= AB + AC + BC = 2p$

$\Rightarrow AE = p$ (p là nửa chu vi ΔABC).

Từ đó, $BM = BE = AE - AB = p - c$.

Lập luận tương tự, ta có

$$\begin{cases} BM = AN = p - c \\ CN = BP = p - a \\ AP = CM = p - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (p-b)\overrightarrow{MB} + (p-c)\overrightarrow{MC} = \vec{0} \\ (p-c)\overrightarrow{NC} + (p-a)\overrightarrow{NA} = \vec{0} \\ (p-a)\overrightarrow{PA} + (p-b)\overrightarrow{PB} = \vec{0}. \end{cases}$$

Vì $(p - a) + (p - b) + (p - c) = p \neq 0$ nên theo BT 2.9, AM, BN, CP đồng quy tại K thoả mãn

$(p-a)\overrightarrow{KA} + (p-b)\overrightarrow{KB} + (p-c)\overrightarrow{KC} = \vec{0}.$

$\Rightarrow p(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}) - (a\overrightarrow{KA} + b\overrightarrow{KB} + c\overrightarrow{KC}) = \vec{0}$

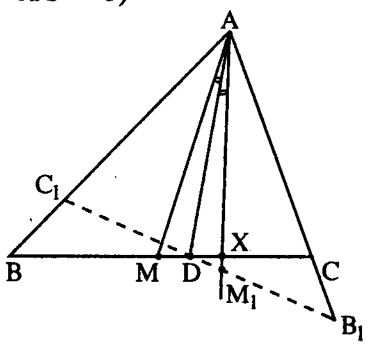
$\Rightarrow 3p\overrightarrow{KG} - (a+b+c)\overrightarrow{KI} = \vec{0}$ (vì có $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$)

$\Rightarrow 3p\overrightarrow{KG} - 2p\overrightarrow{KI} = \vec{0}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{KG} - 2\overrightarrow{KI} = \vec{0}$ (G : trọng tâm, I : tâm đường tròn nội tiếp ΔABC).

Vậy K, G, I thẳng hàng. (đpcm)

2.11. (h.2-22). Lấy C_1, B_1 tương ứng thuộc AB, AC sao cho $AC_1 = AC$, $AB_1 = AB$. Dễ thấy $D \in B_1C_1$.



Hình 2-22

Gọi $M_1 = AX \cap B_1C_1$, dễ thấy M_1 là trung điểm của B_1C_1.

Ta có $\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{AB_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{AC_1}{AB}.\overrightarrow{AB} + \frac{AB_1}{AC}.\overrightarrow{AC}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{b}{c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b}\overrightarrow{AC}\right).$$

Nhờ phép chiếu vectơ phương (AM_1) lên đường thẳng BC, ta có $\vec{0} = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{c}\overrightarrow{XB} + \frac{c}{b}\overrightarrow{XC}\right) \Rightarrow b^2\overrightarrow{XB} + c^2\overrightarrow{XC} = \vec{0}$.

Tương tự ta có :

$$c^2.\overrightarrow{YC} + a^2\overrightarrow{YA} = a^2\overrightarrow{ZA} + b^2\overrightarrow{ZB} = \vec{0}$$

suy ra AX, BY, CZ đồng quy tại điểm L, thoả mãn :

$$a^2\overrightarrow{LA} + b^2\overrightarrow{LB} + c^2\overrightarrow{LC} = \vec{0} \text{ (đpcm).}$$

Nhận xét

1) AX, BY, CZ được gọi là các *đường đối trung* của tam giác ABC.

2) Theo BT 2.5, L chính là điểm Lơ-moan của tam giác ABC. Kết quả trên là sự mô tả điểm Lơ-moan về phương diện hình học.

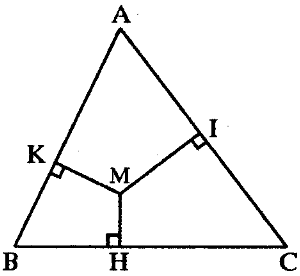
2.12. (h. 2-23) Theo bất đẳng thức Bu-nhia-côp-xki, ta có

$(a^2 + b^2 + c^2)(MH^2 + MI^2 + MK^2)$

$\geq (aMH + bMI + cMK)^2$

$= (2S_{MBC} + 2S_{MCA} + 2S_{MAB})^2 = 4S^2_{ABC}$.

Suy ra : $MH^2 + MI^2 + MK^2 \geq \dfrac{4S^2_{ABC}}{a^2 + b^2 + c^2}$.



Hình 2-23

Đẳng thức xảy ra

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{M nằm trong tam giác ABC} \\ \dfrac{MH}{a} = \dfrac{MI}{b} = \dfrac{MK}{c} \end{cases}$

$\Leftrightarrow a^2\overrightarrow{MA} + b^2\overrightarrow{MB} + c^2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ M là tâm tỉ cự của hệ ba điểm $\{A, B, C\}$ với các hệ số $\{a^2, b^2, c^2\}$

$\Leftrightarrow$ M là điểm Lơ-moan của tam giác ABC.

Tóm lại, $MH^2 + MI^2 + MK^2$ nhỏ nhất khi M là điểm Lơ-moan của tam giác ABC, còn giá trị nhỏ nhất đó bằng $\dfrac{4S^2_{ABC}}{a^2 + b^2 + c^2}$.

§3. TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ TRÊN TRỤC VÀ TRÊN MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

3.1. *Cách 1.* Ta có

$$\begin{cases}\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \\ \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overline{MC}.\overrightarrow{AM} = \overline{MC}.\overrightarrow{AB} = \overline{MC}.\overrightarrow{BM} \\ \overline{MB}.\overrightarrow{AM} = \overline{MB}.\overrightarrow{AC} + \overline{MB}.\overrightarrow{CM}.\end{cases}$$

Trừ từng vế hai đẳng thức trên ta được

$$\left(\overline{MC} - \overline{MB}\right)\overrightarrow{AM} = \overline{MC}.\overrightarrow{AB} - \overline{MB}.\overrightarrow{AC} + \overline{MC}.\overrightarrow{BM} - \overline{MB}.\overrightarrow{CM}$$

$$\Rightarrow \overline{BC}.\overrightarrow{AM} = \overline{MC}.\overrightarrow{AB} - \overline{MB}.\overrightarrow{AC} + \overline{MC}\left(\overline{BM}.\vec{i}\right) - \overline{MB}\left(\overline{CM}.\vec{i}\right)$$

$$\Rightarrow \overline{BC}.\overrightarrow{AM} = \overline{MC}.\overrightarrow{AB} - \overline{MB}.\overrightarrow{AC} + \overline{MC}.\overline{BM}.\vec{i} - \overline{MB}.\overline{CM}.\vec{i}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{\overline{MC}}{\overline{BC}}\overrightarrow{AB} - \frac{\overline{MB}}{\overline{BC}}\overrightarrow{AC} \ \left(\text{vì } \overline{MC}.\overline{BM} = \overline{MB}.\overline{CM}\right).$$

Cách 2. Lập hệ trục toạ độ Oxy sao cho trục BC là trục hoành. Giả sử $A = (a_1 ; a_2)$, $B = (b ; 0)$, $C = (c ; 0)$, $M = (m ; 0)$. Ta thấy

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overline{MC}}{\overline{BC}}\overrightarrow{AB} - \frac{\overline{MB}}{\overline{BC}}\overrightarrow{AC} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC}.\overrightarrow{AM} = \overline{MC}.\overrightarrow{AB} - \overline{MB}.\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(c - b)(m - a_1) = (c - m)(b - a_1) - (b - m)(c - a_1) & (2) \\ (c - b)(-a_2) = (c - m)(-a_2) - (b - m)(-a_2). & (3)\end{cases}$$

Dễ thấy các đẳng thức (2), (3) đúng.

Vậy (1) đúng.

3.2. Giả sử $A = (a)$, $B = (b)$, $C = (c)$, $N = (n)$, $M = (x)$, khi đó

$$f(x) = \frac{\overline{AM}.\overline{AN}}{\overline{AB}.\overline{AC}} + \frac{\overline{BM}.\overline{BN}}{\overline{BC}.\overline{BA}} + \frac{\overline{CM}.\overline{CN}}{\overline{CA}.\overline{CB}}$$

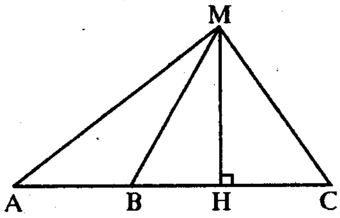
$$= \frac{(x - a)(n - a)}{(b - a)(c - a)} + \frac{(x - b)(n - b)}{(c - b)(a - b)} + \frac{(x - c)(n - c)}{(a - c)(b - c)}$$

là một đa thức bậc không quá 1 đối với x. Cho x = a ta có :

$$f(x) = \frac{(a - b)(n - b)}{(c - b)(a - b)} + \frac{(a - c)(n - c)}{(a - c)(b - c)} =$$

$$= \frac{n-b}{c-b} + \frac{n-c}{b-c} = \frac{b-c}{b-c} = 1.$$

Tương tự, f(b) = 1. Theo giả thiết, a ≠ b để f(x) có nghĩa. Vậy f(x) = 1 ∀x và đẳng thức được chứng minh.



Hình 3-18

3.3. (h.3-18). Gọi H là hình chiếu của M trên đường thẳng chứa A, B, C, ta có

$$MA^2.\overline{BC} + MB^2.\overline{CA} + MC^2.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB}$$

$$= (MH^2 + HA^2).\overline{BC} + (MH^2 + HB^2).\overline{CA} + (MH^2 + HC^2).\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB}$$

$$= MH^2(\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB}) + (HA^2.\overline{BC} + HB^2.\overline{CA} + HC^2.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB})$$

= 0 + 0 = 0 (theo hệ thức Sti-oa với 4 điểm thẳng hàng).

3.4. (h.3-19).Giả sử Δ_x, Δ_y, Δ_z cắt B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 lần lượt tại M, N, P.

Ta có

$$(MB_1^2 - MC_1^2) + (NC_1^2 - NA_1^2) + (PA_1^2 - PB_1^2)$$

$$= (XB_1^2 - XC_1^2) + (YC_1^2 - YA_1^2) + (ZA_1^2 - ZB_1^2)$$

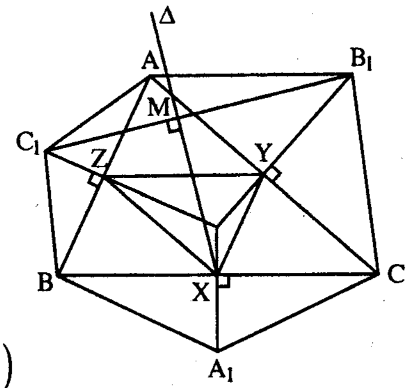
(xem hệ quả VD 3.7)

$$= (A_1Z^2 - A_1Y^2) + (C_1Y^2 - C_1X^2) + (B_1X^2 - B_1Z^2)$$

$$= (XZ^2 - XY^2) + (ZY^2 - ZX^2) + (YX^2 - YZ^2)$$

(vì $A_1X \perp YZ$, $B_1Y \perp ZX$, $C_1Z \perp XY$)

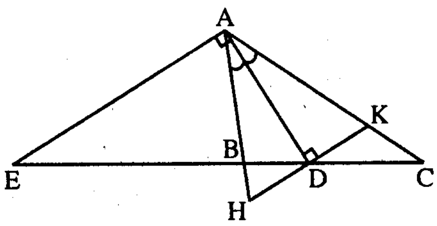
= 0.



Hình 3-19

Theo định lí Các-nô, ta có Δ_x, Δ_y, Δ_z đồng quy.

3.5. (h.3-20). *Cách 1.* Theo tính chất các phân giác, ta có AD ⊥ AE. Qua D vẽ đường thẳng song song với AE, cắt (AB), (AC) lần lượt tại H, K. Dễ thấy DH = DK. Theo VD 3.11, ta có B, C, D, E lập thành hàng điểm điều hoà.



Hình 3-20

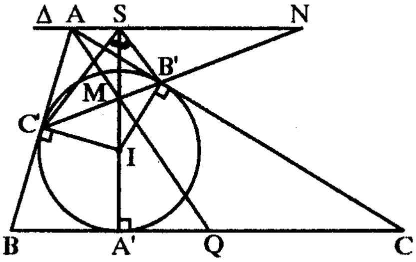
Cách 2.

Theo tính chất của các đường phân giác trong tam giác ta có

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=-\frac{AB}{AC},\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=-\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}}\Rightarrow(BCDE)=-1.$$

3.6. (h.3-21). Qua A kẻ đường thẳng Δ song song với BC. Đặt $N = B'C' \cap \Delta$, $S = IA' \cap \Delta$, $Q = AM \cap BC$.

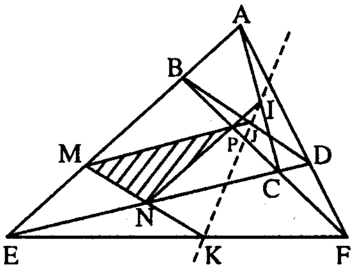
Ta thấy S, B', C' nằm trên đường tròn đường kính AI. Vì $\widehat{IAC'} = \widehat{IAB'}$ nên SI là phân giác trong của tam giác SB'C' ; $SN \perp SI \Rightarrow$ SN là phân giác ngoài của góc $\widehat{B'SC'} \Rightarrow (C', B', M, N) = -1$ (BT 3.5).



Hình 3-21

Theo VD 3.11, đường thẳng BC song song với tia AN bị các tia AC', AM, AB' chắn thành 2 đoạn bằng nhau, tức là QB = QC. Vậy AM là trung tuyến của ΔABC.

3.7. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BE, EC, CB. Dễ thấy I, J, K theo thứ tự thuộc các đường thẳng NP, PM, MN (h.3-22).



Hình 3-22

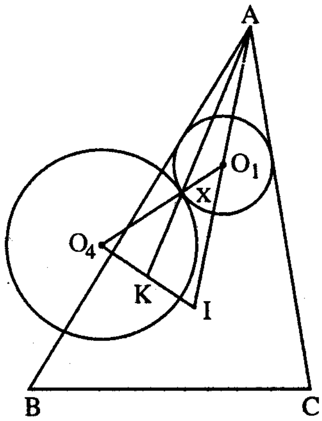
Áp dụng định lí Mê-nê-la-uyt cho tam giác BEC với sự thẳng hàng của A, D, F ta có :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}\cdot\frac{\overline{DE}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{FC}}{\overline{FB}}=1\Rightarrow\frac{2\overline{IP}}{2\overline{IN}}\cdot\frac{2\overline{JM}}{2\overline{JP}}\cdot\frac{2\overline{KN}}{2\overline{KM}}=1$$

$$\Rightarrow\frac{\overline{IP}}{\overline{IN}}\cdot\frac{\overline{KN}}{\overline{KM}}\cdot\frac{\overline{JM}}{\overline{JP}}=1.$$

Áp dụng định lí Mê-nê-la-uyt cho tam giác MNP, ta có I, J, K thẳng hàng.

3.8. (h. 3-23). Gọi (I ; r) là đường tròn nội tiếp ΔABC ; r_1, r_2, r_3, r_4 lần lượt là bán kính các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3), (O_4). Đặt $K = AX \cap IO_4$.



Hình 3-23

Áp dụng định lí Mê-nê-la-uyt cho tam giác IO_1O_4 với ba điểm thẳng hàng A, X, K ta có :

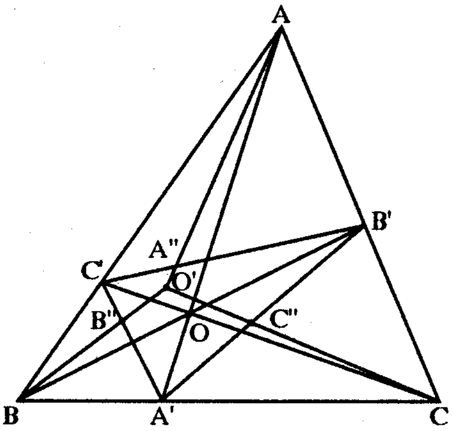
$$\frac{\overline{KI}}{\overline{KO_4}}.\frac{\overline{XO_4}}{\overline{XO_1}}.\frac{\overline{AO_1}}{\overline{AI}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{KI}}{\overline{KO_4}}\left(-\frac{r_4}{r_1}\right).\frac{r_1}{r} = 1 \text{ (định lí Ta-lét)}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{KI}}{\overline{KO_4}} = -\frac{r}{r_4}.$$

Tương tự như vậy ta chứng minh được BY, CZ cùng đi qua K. Vậy AX, BY, CZ đồng quy tại K.

3.9. (h.3-24). Ta có



Hình 3-24

$$\frac{\overline{A"B'}}{\overline{A"C'}}.\frac{\overline{B"C'}}{\overline{B"A'}}.\frac{\overline{C"A'}}{\overline{C"B'}}$$

$$= \left(-\frac{A"B'}{A"C'}\right).\left(-\frac{B"C'}{B"A'}\right).\left(-\frac{C"A'}{C"B'}\right)$$

$$= -\frac{A"B'}{A"C'}.\frac{B"C'}{B"A'}.\frac{C"A'}{C"B'}$$

$$= -\frac{S_{O'AB'}}{S_{O'AC'}}.\frac{S_{O'BC'}}{S_{O'BA'}}.\frac{S_{O'CA'}}{S_{O'CB'}}$$

$$= -\frac{S_{O'CA'}}{S_{O'BA'}}.\frac{S_{O'AB'}}{S_{O'CB'}}.\frac{S_{O'BC'}}{S_{O'AC'}} = -\frac{CA'}{BA'}.\frac{AB'}{CB'}.\frac{BC'}{AC'}$$

$$= -\left(-\frac{\overline{CA'}}{\overline{BA'}}\right).\left(-\frac{\overline{AB'}}{\overline{CB'}}\right).\left(-\frac{\overline{BC'}}{\overline{AC'}}\right) = \frac{\overline{CA'}}{\overline{BA'}}.\frac{\overline{AB'}}{\overline{CB'}}.\frac{\overline{BC'}}{\overline{AC'}}.$$

Vì AA', BB', CC' đồng quy nên $\frac{\overline{CA'}}{\overline{BA'}}.\frac{\overline{AB'}}{\overline{CB'}}.\frac{\overline{BC'}}{\overline{AC'}} = -1$ (định lí Xê-va), suy ra $\frac{\overline{A"B'}}{\overline{A"C'}}.\frac{\overline{B"C'}}{\overline{B"A'}}.\frac{\overline{C"A'}}{\overline{C"B'}} = -1$. Vậy A'A", B'B", C'C" đồng quy (định lí Xê-va trong tam giác A'B'C').

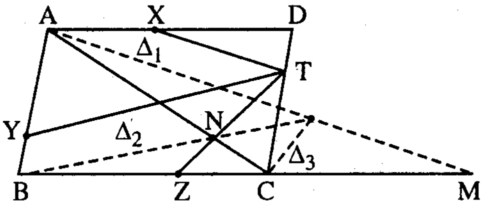
3.10. Giả sử Δ_1, Δ_2, Δ_3 theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại M, N, P (h.3-25). Ta có :

- $\overrightarrow{XT} = \overrightarrow{XD} + \overrightarrow{DT}$

$= (1-k)\,\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{DC}$

$= (1-k)\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) + k\overrightarrow{AB}$

$= (2k-1)\overrightarrow{AB} + (1-k)\overrightarrow{AC}.$



Hình 3-25

Vì $\overrightarrow{AM} // \overrightarrow{XT}$ nên

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -\frac{1-k}{2k-1} = \frac{k-1}{2k-1} \qquad (1)$$

(bổ đề VD 3.18)

• $\overrightarrow{YT} = \overrightarrow{YA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DT}$

$= (1-k)\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{DC}$

$= (1-k)\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} - k\overrightarrow{BA}$

$= (1-2k)\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}.$

Vì $\overrightarrow{BN} // \overrightarrow{YT}$ nên

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = -\frac{1-2k}{1} = \frac{2k-1}{1}. \qquad (2)$$

• $\overrightarrow{ZT} = \overrightarrow{ZC} + \overrightarrow{CT} = -k\overrightarrow{CB} + (1-k)\overrightarrow{CD} = -k\overrightarrow{CB} + (1-k)\left(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}\right)$

$= (1-k)\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}.$

Vì $\overrightarrow{CP} // \overrightarrow{ZT}$ nên $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -\dfrac{-1}{1-k} = \dfrac{1}{1-k}$. $\qquad$ (3)

Từ (1), (2), (3) thu được

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{k-1}{2k-1} \cdot \frac{2k-1}{1} \cdot \frac{1}{1-k} = -1.$$

Áp dụng định lí Xê-va cho ΔABC ta có AM, BN, CP đồng quy, tức là Δ_1, Δ_2, Δ_3 đồng quy.

3.11. (h.3-26)

Giả sử AA_3, BB_3, CC_3 lần lượt cắt BC, CA, AB tại M, N, P.

Ta có $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{S_{AA_3B}}{S_{AA_3C}}$

$= \dfrac{S_{AA_2B}}{S_{AA_1C}}$ (vì $A_2A_3 // AB, A_1A_3 // AC$)

$$= \frac{A_2B}{A_1C} = \frac{A_2B}{CB}.\frac{BC}{A_1C}$$

$$= \frac{A_2C_1}{CA}.\frac{BA}{A_1B_2} = \frac{AB}{AC}.\frac{A_2C_1}{A_1B_2}.$$

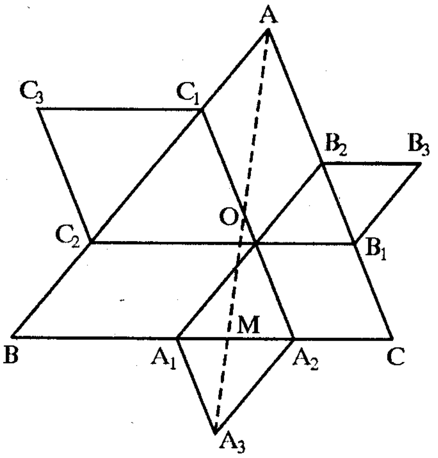
Tương tự ta có

$$\frac{NC}{NA} = \frac{BC}{BA}.\frac{B_2A_1}{B_1C_2}, \frac{PA}{PB} = \frac{CA}{CB}.\frac{C_2B_1}{C_1A_2}.$$

Từ các đẳng thức trên ta có

$$\frac{MB}{MC}.\frac{NC}{NA}.\frac{PA}{PB} = 1.$$

Theo định lí Xê-va ta có AM, BN, CP đồng quy hay AA_3, BB_3, CC_3 đồng quy.



Hình 3-26

3.12. a) $\overrightarrow{AB} = (2\ ;\ 2)\ ;\ \overrightarrow{AC} = (-1\ ;\ -1)$. Nhận thấy $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$ nên A, B, C thẳng hàng.

b) Theo câu a) ta có $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = -2 \Rightarrow \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \dfrac{1}{3}$.

Điểm D thoả mãn $(ABCD) = -1 \Leftrightarrow \dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\dfrac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD} = \left(-\frac{3}{4}\ ;\ \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\ ;\ \frac{3}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OD} = \left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\right). \text{ Vậy } D = \left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\right).$$

3.13. Gọi O là gốc toạ độ. Từ giả thiết ta có

- $\overrightarrow{MB} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}}{1 + \frac{1}{3}} = \dfrac{3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{4}$.
- $\overrightarrow{NC} = -\overrightarrow{NA} \Rightarrow \overrightarrow{ON} = \dfrac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}}{2}$.
- $\overrightarrow{PA} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{PB} \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}}{2}$.

Ta có hệ $\begin{cases} 3\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{ON} \\ 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OP} \end{cases}$

Giải hệ ta được $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OM} - \frac{1}{4}\overrightarrow{ON} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OP} = (-2\,;5) \\ \overrightarrow{OB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OM} - \frac{3}{4}\overrightarrow{ON} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OP} = (2\,;-1) \\ \overrightarrow{OC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OM} + \frac{9}{4}\overrightarrow{ON} - \frac{3}{4}\overrightarrow{OP} = (6\,;3). \end{cases}$

Vậy A = (–2 ; 5), B = (2 ; –1), C = (6 ; 3).

§4. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC α ($0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$)

4.1. a) Ta có

a) $\begin{cases} \sin\alpha\cos\alpha < 0 \\ \sin\alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow \cos\alpha < 0 \Rightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ.$

b) $\begin{cases} \tan\alpha\cot\alpha = 1 > 0 \\ \tan\alpha + \cot\alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan\alpha > 0 \\ \cot\alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ.$

c) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{\tan\alpha}{\cos\alpha} > 0 \Rightarrow \sin\alpha > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0^\circ < \alpha \le 90^\circ \\ 90^\circ < \alpha < 180^\circ. \end{array}\right.$

4.2. $A = (\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) + \ldots +$

$+ (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ) + \sin^2 45^\circ + \sin^2 90^\circ$

$= (\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + \ldots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) + \frac{1}{2} + 1$

$= 44 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{91}{2}.$

$B = (\cos^3 1^\circ + \cos^3 179^\circ) + (\cos^3 2^\circ + \cos^3 178^\circ) + \ldots$

$\ldots + (\cos^3 89^\circ + \cos^3 91^\circ) + \cos^3 90^\circ + \cos^3 180^\circ$

$= (\cos^3 1^\circ - \cos^3 1^\circ) + (\cos^3 2^\circ - \cos^3 2^\circ) + \ldots +$

$+ (\cos^3 89^\circ - \cos^3 89^\circ) + 0 - 1 = -1.$

$C = (\tan 1^o.\tan 89^o)(\tan 2^o.\tan 88^o)\ldots(\tan 44^o.\tan 46^o).\tan 45^o$

$= (\tan 1^o.\cot 1^o)(\tan 2^o.\cot 2^o)\ldots(\tan 44^o.\cot 44^o).\tan 45^o$

$= 1.$

4.3. $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$

$\Rightarrow \tan\alpha + \cot\alpha = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \tan^2\alpha + \cot^2\alpha = (\tan\alpha + \cot\alpha)^2 - 2 = 6$

$\Rightarrow \tan^4\alpha + \cot^4\alpha = (\tan^2\alpha + \cot^2\alpha)^2 - 2 = 34$

$\Rightarrow \tan^8\alpha + \cot^8\alpha = (\tan^4\alpha + \cot^4\alpha)^2 - 2 = 1154.$

4.4. Ta có $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 + \dfrac{24}{25} = \dfrac{49}{25}.$

Mặt khác, $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{12}{25} > 0 \Rightarrow \cos\alpha > 0.$

Suy ra $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{7}{5}$. Do đó

$\sin^3\alpha + \cos^3\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) = \dfrac{7}{5}\left(1 - \dfrac{12}{25}\right) = \dfrac{91}{125}.$

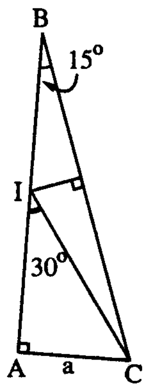
4.5. $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \dfrac{5}{8} \Leftrightarrow (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \dfrac{5}{8}$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2\alpha(1 - \sin^2\alpha) = \dfrac{5}{8}$

$\Leftrightarrow 2\sin^4\alpha - 2\sin^2\alpha + \dfrac{3}{8} = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2\alpha = \dfrac{1}{4} \\ \sin^2\alpha = \dfrac{3}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = 150^o \\ \alpha = 120^o \end{array}\right.$ (vì $90^o < \alpha < 180^o$).



Hình 4-9

4.6. Xét ΔABC vuông tại A có $\hat{B} = 15^o$ (h.4-9)

Kẻ trung trực của BC cắt AB tại I.

Ta có $\widehat{AIC} = 30^o$. Đặt AC = a thì $\begin{cases} IB = IC = 2a \\ AI = a\cot 30^o = a\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow AB = 2a + a\sqrt{3}.$

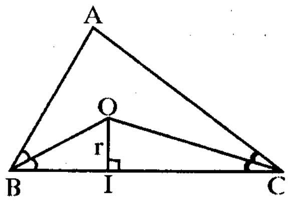
Suy ra $\tan 15^o = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{a}{2a + a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$

Từ đó $\cos^2 15^o = \dfrac{1}{1 + \tan^2 15^o} = \dfrac{1}{8 - 4\sqrt{3}} = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow \cos 15^o = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$

• $\sin 105^o = \sin 75^o = \cos 15^o = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$

4.7. (h.4-10). Giả sử đường tròn (O ; r) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC tại I, ta có



Hình 4-10

$a = BI + IC = r\left(\cot\dfrac{B}{2} + \cot\dfrac{C}{2}\right).$

Tương tự ta có

$b = r\left(\cot\dfrac{C}{2} + \cot\dfrac{A}{2}\right)$

$\Rightarrow (a - b)\cot\dfrac{C}{2} = r\left(\cot\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2} - \cot\dfrac{C}{2}\cot\dfrac{A}{2}\right).$

Tương tự

$$\begin{cases} (b - c)\cot\dfrac{A}{2} = r\left(\cot\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{A}{2} - \cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}\right) \\ (c - a)\cot\dfrac{B}{2} = r\left(\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2} - \cot\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2}\right). \end{cases}$$

Cộng từng vế ba đẳng thức trên suy ra đpcm.

4.8. Nếu $\left[\begin{array}{l} A > 90^o \\ B > 90^o \end{array}\right.$ thì $\tan A \tan B < 0 < 1.$

– Nếu $C > 90^o$ thì $A + B < 90^o$

$\Rightarrow 0^o < A < 90^o - B < 90^o$

$$\Rightarrow \tan A < \tan(90^o - B) = \cot B = \frac{1}{\tan B}$$

$$\Rightarrow \tan A \tan B < 1 \text{ (đpcm).}$$

4.9. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si và kết quả VD 4.10 ta có

$$\frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} \geq \frac{4}{\cos B + \cos C} \geq \frac{4}{2\cos\frac{B+C}{2}} = \frac{2}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Tương tự, $\begin{cases} \dfrac{1}{\cos C} + \dfrac{1}{\cos A} \geq \dfrac{2}{\sin\frac{B}{2}} \\ \dfrac{1}{\cos A} + \dfrac{1}{\cos B} \geq \dfrac{2}{\sin\frac{C}{2}}. \end{cases}$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên, ta thu được

$$\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} \geq \frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}.$$

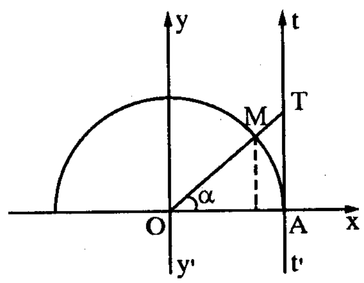
Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \cos A = \cos B = \cos C \Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

4.10. Trên nửa đường tròn đơn vị, lấy điểm M sao cho $\widehat{MOx} = \alpha$.

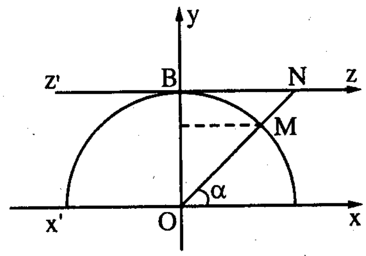
Qua A(1 ; 0) dựng trục t'At song song và cùng hướng với y'Oy.

Qua B(0 ; 1) dựng trục z'Bz song song và cùng hướng với x'Ox.

Tia OM cắt z'Bz tại N, cắt t'At tại T. Dễ dàng chứng minh được :



Hình 4-11

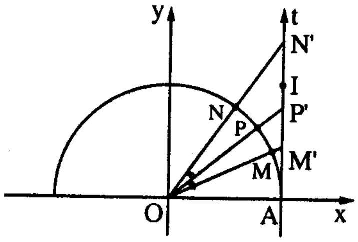


Hình 4-12

$$\begin{cases} \tan\alpha = \overline{AT} \quad \text{(h.4-11)} \\ \cot\alpha = \overline{BN} \quad \text{(h.4-12)} \end{cases}$$

a) Bây giờ giả sử $\alpha = \widehat{xOM}$, $\beta = \widehat{xON}$ $(\alpha \le \beta)$.

Lấy P là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{MN}$ thì $\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \widehat{xOP}$ (h.4-13). Gọi M', N', P' theo thứ tự là giao điểm của các tia OM, ON, OP với At, I là trung điểm của M'N', ta có



Hình 4-13

$$\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{2} = \frac{\overline{AM'} + \overline{AN'}}{2} = \overline{AI}.$$

Vì $\dfrac{P'M'}{P'N'} = \dfrac{OM'}{ON'} \le 1$ nên $P'M' \le P'N' \Rightarrow \overline{AP'} \le \overline{AI}$, tức là

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2} \le \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M' \equiv N' \equiv P' \equiv I \Leftrightarrow M \equiv N \equiv P \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

b) $\dfrac{\cot\alpha + \cot\beta}{2} = \dfrac{\tan(90^\circ - \alpha) + \tan(90^\circ - \beta)}{2}$

$$\ge \tan\frac{(90^\circ - \alpha) + (90^\circ - \beta)}{2} = \tan\left(90^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \cot\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \alpha = \beta$.

§5. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

5.1. Xét 5 vectơ $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}, \overrightarrow{a_5}$. Giả sử độ dài tổng hai vectơ bất kì trong số đó lớn hơn độ dài tổng của ba vectơ còn lại, ta có : $\left|\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}\right|^2 > \left|\overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_4} + \overrightarrow{a_5}\right|^2$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{a_1}\right|^2 + 2\overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{a_2} + \left|\overrightarrow{a_2}\right|^2 > \left|\overrightarrow{a_3}\right|^2 + \left|\overrightarrow{a_4}\right|^2 + \left|\overrightarrow{a_5}\right|^2 + 2\left(\overrightarrow{a_3}.\overrightarrow{a_4} + \overrightarrow{a_4}.\overrightarrow{a_5} + \overrightarrow{a_3}.\overrightarrow{a_5}\right)$.

Cộng từng vế các bất đẳng thức như vậy đối với tất cả 10 cặp vectơ, ta được :

$4\left(\left|\overrightarrow{a_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{a_2}\right|^2 + ... + \left|\overrightarrow{a_5}\right|^2\right) + 2\left(\overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{a_2} + ... + \overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{a_5} + ... + \overrightarrow{a_4}.\overrightarrow{a_5}\right) >$

$> 6\left(\left|\overrightarrow{a_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{a_2}\right|^2 + ... + \left|\overrightarrow{a_5}\right|^2\right) + 6\left(\overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{a_2} + ... + \overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{a_5} + ... + \overrightarrow{a_4}.\overrightarrow{a_5}\right)$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{a_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{a_2}\right|^2 + ... + \left|\overrightarrow{a_5}\right|^2 + 2\left(\overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{a_2} + ... + \overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{a_5} + ... + \overrightarrow{a_4}.\overrightarrow{a_5}\right) < 0$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + ... + \overrightarrow{a_5}\right)^2 < 0$, mâu thuẫn !

5.2. (h.5-22) Ta luôn có :

$$AB^2 + CD^2 = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC})^2$$

$$= 4R^2 - 2(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD})$$

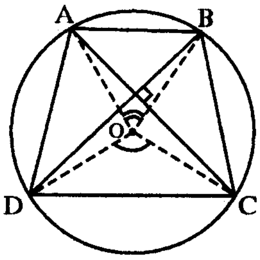
$$= 4R^2 - 2R^2(\cos\widehat{AOB} + \cos\widehat{COD}).$$

Do đó $AB^2 + CD^2 = 4R^2$

$\Leftrightarrow \cos\widehat{AOB} + \cos\widehat{COD} = 0$

$\Leftrightarrow \widehat{AOB} + \widehat{COD} = 180^o$

$\Leftrightarrow AC \perp BD$ (đpcm).



Hình 5-22

5.3. Gọi P và Q là trung điểm các dây AB, CD.

– Nếu $P \equiv Q$ thì ACBD là hình chữ nhật. Khi đó với mọi điểm M trên đường tròn (O), ta đều có

$$MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2 = 4R^2.$$

– Xét trường hợp $P \not\equiv Q$: $\forall M \in (O ; R)$ ta có

$MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD})^2$

$\Leftrightarrow 4R^2 + 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = 4R^2 + 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OP} = 4\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{QP} = 0$

$\Leftrightarrow MO \perp PQ.$

Vậy có 2 điểm thoả mãn bài toán, đó là 2 đầu mút của đường kính đường tròn (O) vuông góc với PQ.

5.4. Tổng bình phương các khoảng cách từ một đỉnh của đa giác đều đến tất cả các đỉnh còn lại bằng $2nR^2$ (VD 5.8) $\Rightarrow$ Tổng bình phương các khoảng cách từ tất cả các đỉnh của đa giác đều đến các đỉnh còn lại bằng $2n^2R^2$. Vì bình phương mỗi cạnh và mỗi đường chéo đều có mặt trong tổng đó hai lần, vậy tổng bình phương các cạnh và các đường chéo của đa giác đều bằng n^2R^2.

5.5. Dễ thấy $A_1A_3 \ldots A_{2n-1}$ và $A_2A_4 \ldots A_{2n}$ là các đa giác đều n–cạnh nội tiếp đường tròn (O). Gọi R là bán kính đường tròn (O), theo VD 5.8, với mọi $M \in (O)$ ta có :

$$\begin{cases} MA_1^2 + MA_3^2 + ... + MA_{2n-1}^2 = 2nR^2 \\ MA_2^2 + MA_4^2 + ... + MA_{2n}^2 = 2nR^2. \end{cases}$$

Suy ra đpcm.

5.6. Từ hệ thức $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (VD 2-14) suy ra

$$OH^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC})$$
$$= 3R^2 + (OA^2 + OB^2 - AB^2) + (OA^2 + OC^2 - AC^2) + (OB^2 + OC^2 - BC^2)$$
$$= 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Từ kết quả trên ta có : tổng bình phương các khoảng cách từ O đến các cạnh của tam giác là :

$$d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 = \left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) + \left(R^2 - \frac{b^2}{4}\right) + \left(R^2 - \frac{c^2}{4}\right)$$
$$= 3R^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = 3R^2 - \frac{1}{4}(9R^2 - OH^2)$$
$$= \frac{3}{4}R^2 + \frac{1}{4}OH^2 \geq \frac{3}{4}R^2.$$

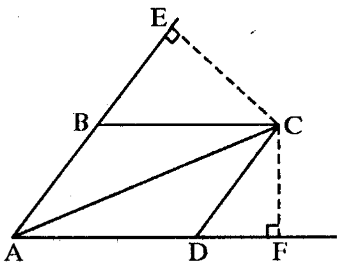
Vậy tổng $(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow OH^2 = 0 \Leftrightarrow O \equiv H \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Nhận xét. Giả sử G là trọng tâm tam giác ABC. Bằng phép chứng minh tương tự, ta nhận được kết quả

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

5.7. (h.5-23) $\overline{AB}.\overline{AE} + \overline{AD}.\overline{AF}$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}$$
$$= \overrightarrow{AC}^2 = AC^2.$$



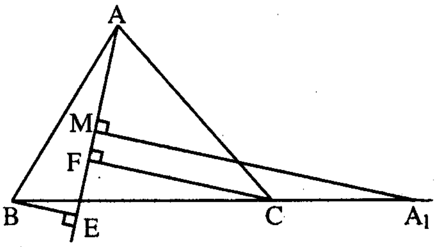
Hình 5-23

5.8. (h.5-24)

Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B, C trên (AM). Ta có

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = \frac{\overline{ME}}{\overline{MF}} \text{ (định lí Ta-lét)}$$

$$= \frac{\overline{ME}.\overline{MA}}{\overline{MF}.\overline{MA}} = \frac{\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}} \text{ (công thức hình chiếu).}$$



Hình 5-24

Tương tự, $\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} = \frac{\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}}$, $\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = \frac{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}}{\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}}$.

Từ đó, $\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = 1$.

Theo định lí Mê-nê-la-uyt, ta có A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.

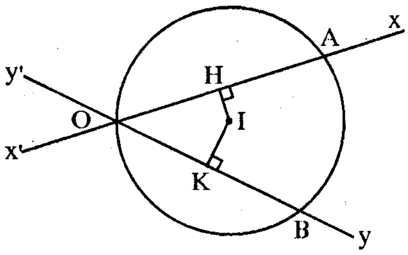
5.9. (h.5-25). Gọi I là tâm đường tròn (OAB) ; $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ là các vectơ đơn vị của x'Ox, y'Oy ; H và K là hình chiếu của I trên x'Ox và y'Oy.

Ta có $\overrightarrow{OI}.\left(a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2}\right)$

$= a.\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{e_1} + b.\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{e_2}$

$= a.\overline{OH} + b.\overline{OK}$

$= \frac{1}{2}\left(a.\overline{OA} + b.\overline{OB}\right) = \frac{1}{2}$.



Hình 5-25

Theo VD 5.19b, I thuộc đường thẳng Δ cố định. Gọi N là điểm đối xứng của O qua Δ thì đường tròn (OAB) luôn đi qua điểm N cố định (đpcm).

5.15. (h.5-26) $2\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BH} = \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AH}\right)\left(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MH}\right)$

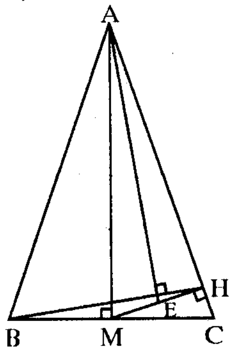
$= \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BM}$

$= \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MH} + \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MH}\right)\overrightarrow{BM}$

$= \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MC}$

$= \overline{HM}.\overline{MH} + \overline{MH}.\overline{MH} = -\overline{MH}^2 + \overline{MH}^2 = 0$

$\Rightarrow AE \perp BH$ (đpcm).



Hình 5-26

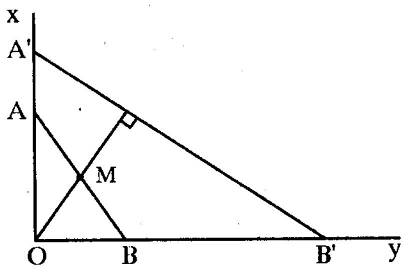
5.11. (h.5-27). Ta có

$2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{A'B'} = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)\left(\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'}\right)$

$= \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'}$

$= \overline{OB}.\overline{OB'} - \overline{OA}.\overline{OA'}$

$= 0 \Rightarrow OM \perp A'B'$.



Hình 5-27

5.12. (h.5-28)

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}\left(\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE}\right)$

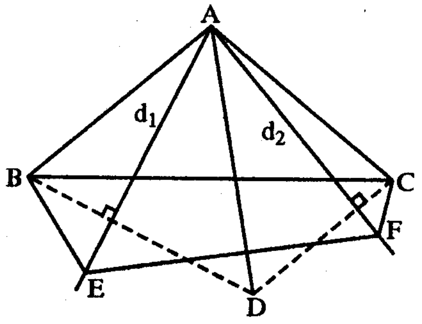
$= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}$

$= \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\right).\overrightarrow{AF} - \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right).\overrightarrow{AE}$

$= \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$

$= AC^2 - AB^2 = 0.$

Vậy $AD \perp EF$.



Hình 5-28

5.13. (h.5-29). Đặt a là độ dài các cạnh của hình vuông ; $\alpha = \widehat{MBH} = \widehat{BCH}$.

Ta có :

$\overrightarrow{HN}.\overrightarrow{HD} = \left(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BN}\right)\left(\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CD}\right)$

$= \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{HC}$

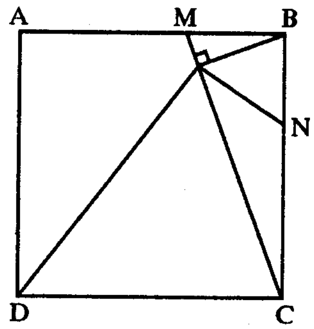
(vì $\overrightarrow{HB} \perp \overrightarrow{HC}$; $\overrightarrow{BN} \perp \overrightarrow{CD}$)

$= \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{HC}$

$= - HB.a\cos\varphi + BN.HC\cos\varphi$

$= - MB.a\cos^2\varphi + NB.a\cos^2\varphi$

$= 0$ (vì $MB = NB$).



Hình 5-29

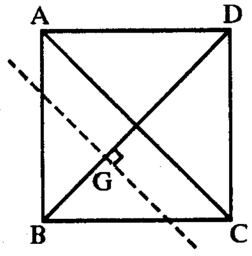
5.14. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \dfrac{1}{2}(MC^2 - MA^2 - MB^2) \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MC^2$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)^2 = \overrightarrow{MC}^2 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MC}\right|$

$\Leftrightarrow 2\left|\overrightarrow{MI}\right| = \left|\overrightarrow{MC}\right|$ (I là trung điểm của AB) $\Leftrightarrow \dfrac{MC}{MI} = 2$

$\Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn A-pô-lô-ni-ut đường kính GF, trong đó G là trọng tâm tam giác ABC, F là đỉnh hình bình hành ACBF.

5.15. (h.5-30)



Hình 5-30

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

$= 3MG^2 + \frac{1}{3}(BC^2 + CA^2 + AB^2)$

$= 3MG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + 2a^2 + a^2).$

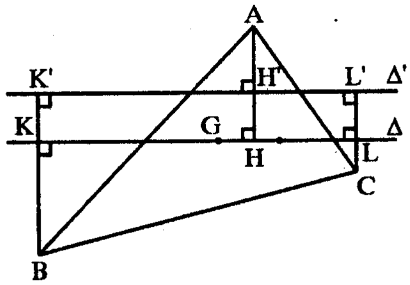
Do đó : $MA^2 + MB^2 + MC^2 - 3MD^2 = -\frac{4a^2}{3}$

$\Leftrightarrow 3MG^2 - 3MD^2 = -\frac{8a^2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad MD^2 - MG^2 = \frac{8a^2}{9}$

$\Leftrightarrow MD^2 - MG^2 = \left(\frac{2}{3}.a\sqrt{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad MD^2 - MG^2 = DG^2$

$\Leftrightarrow$ M thuộc đường thẳng vuông góc với BD tại G.

5.16. (h.5-31). Gọi H, H' ; K, K' ; L, L' tương ứng là hình chiếu của A, B, C trên Δ, Δ'.



Hình 5-31

Đặt $\vec{x} = \overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{KK'} = \overrightarrow{LL'}$.

Ta có $AH'^2 + BK'^2 + CL'^2 =$

$(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HH'})^2 + (\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KK'})^2 + (\overrightarrow{CL} + \overrightarrow{LL'})^2$

$= AH^2 + BK^2 + CL^2 + 2\vec{x}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{CL}) + 3\vec{x}^2.$

Do $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{CL} = (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) + (\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GK} + \overrightarrow{GL})$ mà $\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GK}, \overrightarrow{GL}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}$ trên Δ nên $\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GK} + \overrightarrow{GL} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{CL} = \vec{0}.$

Vậy $AH'^2 + BK'^2 + CL'^2 = AH^2 + BK^2 + CL^2 + 3\vec{x}^2$

$\geq AH^2 + BK^2 + CL^2.$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta' \equiv \Delta$.

5.17. Ta có $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})^2 \geq 0$

$\Rightarrow 3R^2 + 2(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}) \geq 0$

$$\Rightarrow 9R^2 \geq \left(OB^2 + OC^2 - 2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}\right) + \left(OC^2 + OA^2 - 2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}\right) +$$

$$+ \left(OA^2 + OB^2 - 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}\right)$$

$$\Rightarrow 9R^2 \geq \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right)^2$$

$$\Rightarrow 9R^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a + b + c)^2}{3}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{3}R \geq a + b + c.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow$ O là trọng tâm ΔABC.

$\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Hệ quả. Trong các tam giác cùng nội tiếp đường tròn, tam giác đều có chu vi lớn nhất.

Nhận xét. Có thể chứng minh bất đẳng thức nhờ kết quả của BT 5.6 hoặc các kết quả :

$$\begin{cases} MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2 (\text{cho } M \equiv O) \\ m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \dfrac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2). \end{cases}$$

5.18. Gọi O là tâm của đa giác đều. Với mọi điểm M ta có

$$MA_1 + MA_2 + ... + MA_n =$$

$$= \frac{MA_1.OA_1}{OA_1} + \frac{MA_2.OA_2}{OA_2} + ... + \frac{MA_n.OA_n}{OA_n}$$

$$\geq \frac{\overrightarrow{MA_1}.\overrightarrow{OA_1}}{OA_1} + \frac{\overrightarrow{MA_2}.\overrightarrow{OA_2}}{OA_2} + ... + \frac{\overrightarrow{MA_n}.\overrightarrow{OA_n}}{OA_n}$$

$$= \frac{\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_1}\right).\overrightarrow{OA_1}}{OA_1} + \frac{\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_2}\right).\overrightarrow{OA_2}}{OA_2} + ... + \frac{\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_n}\right).\overrightarrow{OA_n}}{OA_n}$$

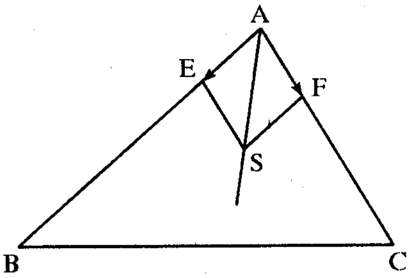
$$= \overrightarrow{MO}\left(\frac{\overrightarrow{OA_1}}{OA_1} + \frac{\overrightarrow{OA_2}}{OA_2} + ... + \frac{\overrightarrow{OA_n}}{OA_n}\right) + (OA_1 + OA_2 + ... + OA_n)$$

$$= OA_1 + OA_2 + ... + OA_n.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA_i} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OA_i}$ $(i = 1, 2, ..., n) \Leftrightarrow M \equiv O$.

Vậy $(MA_1 + MA_2 + ... + MA_n)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv O$.

5.19. (h.5-32) Với mọi điểm M ta có



Hình 5-32

$$2\cos\frac{A}{2}.MA + MB + MC$$

$$= 2\cos\frac{A}{2}MA + \frac{MB.AB}{AB} + \frac{MC.AC}{AC}$$

$$\geq 2\cos\frac{A}{2}.MA + \frac{\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AC}}{AC}$$

$$= 2\cos\frac{A}{2}MA + \frac{(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}).\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AC}}{AC}$$

$$= 2\cos\frac{A}{2}.MA + \overrightarrow{MA}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right) + AB + AC.$$

Lấy E, F trên AB, AC sao cho AE = AF = 1. Dựng hình thoi AESF ta có $AS = 2\cos\frac{A}{2}$

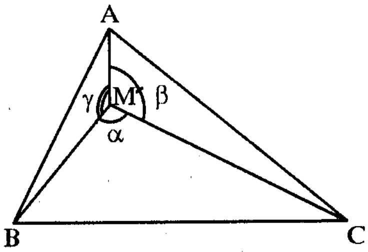
$$\Rightarrow \left|\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}\right| = \left|\overrightarrow{AS}\right| = 2\cos\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow 2\cos\frac{A}{2}.MA + \overrightarrow{MA}.\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right) \geq 0.$$

Tóm lại, $2\cos\frac{A}{2}.MA + MB + MC \geq AB + AC.$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{MC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC} \\ (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AS}) = 180^o \end{cases} \Leftrightarrow M \equiv A.$

5.20. (h.5-33) Với mọi điểm N ta có :



Hình 5-33

$NA\sin\alpha + NB\sin\beta + NC\sin\gamma =$

$$= \frac{NA.MA}{MA}\sin\alpha + \frac{NB.MB}{MB}\sin\beta + \frac{NC.MC}{MC}\sin\gamma$$

$$\geq \frac{\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{MA}}{MA}\sin\alpha + \frac{\overrightarrow{NB}.\overrightarrow{MB}}{MB}\sin\beta + \frac{\overrightarrow{NC}.\overrightarrow{MC}}{MC}\sin\gamma$$

$$= \frac{(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MA}).\overrightarrow{MA}}{MA}\sin\alpha + \frac{(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MB}).\overrightarrow{MB}}{MB}\sin\beta + \frac{(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MC}).\overrightarrow{MC}}{MC}\sin\gamma$$

$$= \overrightarrow{NM}\left(\frac{\overrightarrow{MA}}{MA}\sin\alpha + \frac{\overrightarrow{MB}}{MB}\sin\beta + \frac{\overrightarrow{MC}}{MC}\sin\gamma\right) + (MA\sin\alpha + MB\sin\beta + MC\sin\gamma)$$

$$= \frac{2\overrightarrow{NM}}{MA.MB.MC}\left[S_{MBC}\overrightarrow{MA} + S_{MCA}\overrightarrow{MB} + S_{MAB}\overrightarrow{MC}\right] +$$

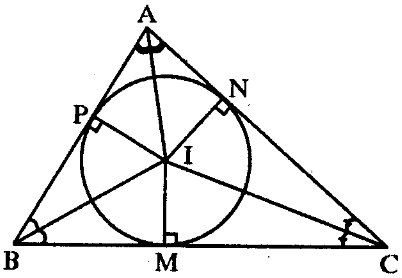
$$+ (MA\sin\alpha + MB\sin\beta + MC\sin\gamma)$$

$$= MA\sin\alpha + MB\sin\beta + MC\sin\gamma \ \left(\text{vì } S_{MBC}\overrightarrow{MA} + S_{MCA}\overrightarrow{MB} + S_{MAB}\overrightarrow{MC} = \vec{0}\right).$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow N \equiv M$.

5.21. (h.5-34). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, ta có :

$$\begin{cases} \sin\widehat{BIC} = \sin\left(90^\circ + \frac{A}{2}\right) = \cos\frac{A}{2} \\ \sin\widehat{CIA} = \sin\left(90^\circ + \frac{B}{2}\right) = \cos\frac{B}{2} \\ \sin\widehat{AIB} = \sin\left(90^\circ + \frac{C}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}. \end{cases}$$



Hình 5-34

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Theo kết quả BT 5.20, ta có

$$\cos\frac{A}{2}\cdot GA + \cos\frac{B}{2}\cdot GB + \cos\frac{C}{2}\cdot GC \geq \cos\frac{A}{2}.IA + \cos\frac{B}{2}.IB + \cos\frac{C}{2}.IC$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\left(\cos\frac{A}{2}.m_a + \cos\frac{B}{2}.m_b + \cos\frac{C}{2}.m_c\right) \geq AN + BP + CM$$

$$\Rightarrow \cos\frac{A}{2}.m_a + \cos\frac{B}{2}.m_b + \cos\frac{C}{2}.m_c \geq \frac{3}{2}[(p-a) + (p-b) + (p-c)]$$

$$= \frac{3}{2}p = \frac{3}{4}(a+b+c).$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow G \equiv I \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

5.22. Ta có $\left(a^2\overrightarrow{MA} + b^2\overrightarrow{MB} + c^2\overrightarrow{MC}\right)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow a^4MA^2 + b^4MB^2 + c^4MC^2 + 2(b^2c^2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + c^2a^2\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} + a^2b^2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}) \geq 0$$

$$\Rightarrow a^4MA^2 + b^4MB^2 + c^4MC^2 + b^2c^2(MB^2 + MC^2 - a^2) +$$

$$+ c^2a^2(MC^2 + MA^2 - b^2) + a^2b^2(MA^2 + MB^2 - c^2) \geq 0$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)(a^2MA^2 + b^2MB^2 + c^2MC^2) \geq 3a^2b^2c^2$$

$$\Rightarrow a^2MA^2 + b^2MB^2 + c^2MC^2 \geq \frac{3a^2b^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a^2\overrightarrow{MA} + b^2\overrightarrow{MB} + c^2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ M là điểm Lơ-moan của ΔABC.

5.23. (h.5-35). Gọi G là trọng tâm ΔXYZ ; H, I, K lần lượt là hình chiếu của G trên BC, CA, AB.

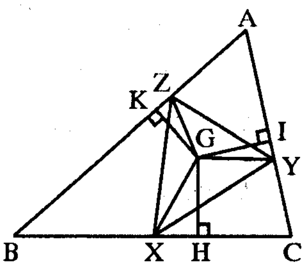
Ta có $YZ^2 + ZX^2 + XY^2 = 3(GX^2 + GY^2 + GZ^2) \geq 3(GH^2 + GI^2 + GK^2)$ (1)

Theo bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki ta có

$(GH^2 + GI^2 + GK^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (aGH + bGI + cGK)^2 = 4S^2_{ABC}.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$YZ^2 + ZX^2 + XY^2 \geq \frac{12S^2_{ABC}}{a^2 + b^2 + c^2}.$$



Hình 5-35

– Nếu đẳng thức xảy ra thì $GX \perp BC$; $GY \perp CA$; $GZ \perp AB$

G là điểm Lơ-moan của tam giác ABC

$\Rightarrow$ X, Y, Z là hình chiếu của điểm Lơ-moan của tam giác ABC trên BC, CA, AB.

– Ngược lại, nếu X, Y, Z là hình chiếu của điểm Lơ-moan L của ΔABC thì L là trọng tâm ΔXYZ (BT 2.5).

$\Rightarrow YZ^2 + ZX^2 + XY^2 = 3(LX^2 + LY^2 + LZ^2).$

Cũng vì L là điểm Lơ-moan của ΔABC nên

$$LX^2 + LY^2 + LZ^2 = \frac{4S^2_{ABC}}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \text{(BT 2.12)}$$

Suy ra $YZ^2 + ZX^2 + XY^2 = \dfrac{12S^2_{ABC}}{a^2 + b^2 + c^2}.$

Tóm lại, $(YZ^2 + ZX^2 + XY^2)$ nhỏ nhất khi và chỉ khi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu của điểm Lơ-moan của ΔABC trên các đường thẳng BC, CA, AB.

5.24. Giả sử I là điểm thoả mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. (*)

Khi đó $\forall M$ ta có

$$MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2$$
$$= 6MI^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}) + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2$$
$$= 6MI^2 + (IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2).$$

Vậy $(MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv I$.

Bây giờ ta hãy tìm toạ độ I từ hệ thức (*). Giả sử I = (x ; y).

$(*) \Leftrightarrow (1 - x, 4 - y) + 2(-2 - x, -2 - y) + 3(4 - x, 2 - y) = (0, 0)$

$\Leftrightarrow (9 - 6x, 6 - 6y) = (0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 6x = 0 \\ 6 - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy điểm thoả mãn điều kiện bài toán là $M = \left(\dfrac{3}{2} ; 1\right)$.

Nhận xét. Có thể giải bài toán bằng phương pháp đại số. Giả sử M = (x, y). Khi đó

$MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 = (x - 1)^2 + (y - 4)^2 + 2(x + 2)^2 + 2(y + 2)^2 + 3(x - 4)^2$
$+ 3(y - 2)^2 = 6x^2 + 6y^2 - 18x - 12y + 93$

$$= 6\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + 6(y^2 - 2y + 1) + \frac{147}{2}$$

$$= 6\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 6(y - 1)^2 + \frac{147}{2}.$$

Suy ra $(MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2)$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = 1. \end{cases}$

5.25. a) $\overrightarrow{AB} = (4, -8)$; $\overrightarrow{AC} = (9, -3)$.

Theo VD 5.28, ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|-12 + 72| = 30.$$

b) H(x ; y) là trực tâm tam giác ABC khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5(x+3)+5(y-6)=0\\ -9(x-1)+3(y+2)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=1.\end{cases}$$

Vậy H = (2 ; 1).

5.26. a) Trên mặt phẳng toạ độ lấy các vectơ $\vec{u}=(a_1;b_1), \vec{v}=(a_2;b_2)$. Ta có

$$|\vec{u}+\vec{v}| \le |\vec{u}|+|\vec{v}| \Rightarrow \sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2} \le \sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{u} // \vec{v}\\ \vec{u}.\vec{v} \ge 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\\ a_1a_2+b_1b_2 \ge 0\end{cases}$$ (quy ước mẫu bằng 0 thì tử bằng 0).

b) Ta có $|\vec{u}-\vec{v}| \ge \big||\vec{u}|-|\vec{v}|\big|$, suy ra

$$\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2} \ge \left|\sqrt{a_1^2+b_1^2}-\sqrt{a_2^2+b_2^2}\right|.$$

Tương tự như trên, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\\ a_1a_2+b_1b_2 \ge 0\end{cases}$$ (quy ước mẫu số bằng 0 thì tử số bằng 0).

5.27. Giả sử hình bình hành ABCD có toạ độ các đỉnh A, B, C đều là các số nguyên. Khi đó các vectơ $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ đều có toạ độ là các số nguyên. Giả sử $\overrightarrow{CA}=(x_1;y_1)$, $\overrightarrow{CB}=(x_2;y_2)$ với $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z}$.

Theo VD 5.28 ta có

$$S_{ABCD}=2S_{ABC}=2.\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|=|x_1y_2-x_2y_1|.$$

Vậy diện tích hình bình hành ABCD là số nguyên.

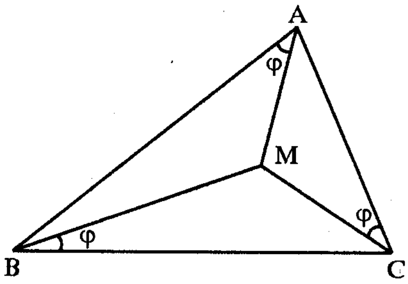
§6. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

6.1. *HD*. Áp dụng VD 6.2.

6.2. *HD*. Sử dụng định lí côtang (VD 6.1).

6.3. (h.6-14) Áp dụng định lí côtang cho các tam giác MAB, MBC, MCA, ta có :

$$\begin{cases} \cot\varphi = \dfrac{MA^2 + c^2 - MB^2}{4S_{MAB}} \\ \cot\varphi = \dfrac{MB^2 + a^2 - MC^2}{4S_{MBC}} \\ \cot\varphi = \dfrac{MC^2 + b^2 - MA^2}{4S_{MAC}} \end{cases}$$



Hình 6-14

$$\Rightarrow \cot\varphi = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S_{ABC}}$$

(tính chất của tỉ lệ thức)

$\Rightarrow \cot\varphi = \cot A + \cot B + \cot C$ (theo VD 6.1)

6.4. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2$

$$\Leftrightarrow \left[a^2 - (b-c)^2\right] + \left[b^2 - (c-a)^2\right] + \left[c^2 - (a-b)^2\right] \geq 4\sqrt{3}S$$

$$\Leftrightarrow (a - b + c)(a - c + b) + (b - c + a)(b - a + c) +$$
$$+ (c - a + b)(c - b + a) \geq 4\sqrt{3}S.$$

Đặt $x = b + c - a$; $y = c + a - b$; $z = a + b - c$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau :

$yz + zx + xy \geq \sqrt{3}\sqrt{(x+y+z)xyz} \Leftrightarrow (yz + zx + xy)^2 \geq 3xyz(x + y + z)$

$\Leftrightarrow (yz)^2 + (zx)^2 + (xy)^2 \geq xyz(x + y + z)$

$\Leftrightarrow (yz - zx)^2 + (zx - xy)^2 + (xy - yz)^2 \geq 0$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow yz = zx = xy \Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

6.5. $\dfrac{h_a}{l_a} \geq \sqrt{\dfrac{2r}{R}} \Leftrightarrow \dfrac{h_a^2}{l_a^2} \geq \dfrac{2r}{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{\dfrac{4S^2}{a^2}}{\dfrac{bc}{(b+c)^2}(a+b+c)(-a+b+c)} \geq \frac{\dfrac{4S}{a+b+c}}{\dfrac{abc}{4S}} \Leftrightarrow (b+c)^2 \geq 4a(b+c-a)$$

$\Leftrightarrow (b+c)^2 - 4(b+c)a + 4a^2 \geq 0 \Leftrightarrow (b+c-2a)^2 \geq 0$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow b + c = 2a$.

6.6. $\dfrac{m_a}{l_a} \geq \dfrac{b+c}{2\sqrt{bc}} \Leftrightarrow \dfrac{m_a^2}{l_a^2} \geq \dfrac{(b+c)^2}{4bc} \Leftrightarrow \dfrac{4m_a^2}{l_a^2} \geq \dfrac{(b+c)^2}{bc}$

$$\Leftrightarrow \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{\dfrac{bc}{(b+c)^2}(a+b+c)(-a+b+c)} \geq \frac{(b+c)^2}{bc}$$

$\Leftrightarrow 2(b^2+c^2) - a^2 \geq (b+c)^2 - a^2 \Leftrightarrow (b-c)^2 \geq 0$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại A.

6.7. *HD*. Sử dụng các công thức tính diện tích tam giác theo chu vi và bán kính các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp, bàng tiếp.

6.8. *HD*. Áp dụng bất đẳng thức trong VD 5.23

$MA.GA + MB.GB + MC.GC \geq GA^2 + GB^2 + GC^2$

và cho $M \equiv O$ (tâm đường tròn ngoại tiếp). Áp dụng bổ đề ở VD 6.19 suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

6.9. Đặt S_m là diện tích tam giác với ba cạnh là m_a, m_b, m_c. Theo bổ đề trong VD 6.13, ta có $S_m = \dfrac{3}{4}S$. Vậy

$$\frac{m_a m_b m_c}{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2} \geq r \Leftrightarrow \frac{4R_m.S_m}{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2} \geq r$$

$$\Leftrightarrow \frac{4R_m.\dfrac{3}{4}S}{\dfrac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)} \geq r \Leftrightarrow \frac{4R_m.p.r}{a^2+b^2+c^2} \geq r$$

$$\Leftrightarrow R_m \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{2(a+b+c)}.$$

Bất đẳng thức trên đúng (BT 6.8) (đpcm).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

6.10. $3r\left(\tan\frac{A}{2} - \tan\frac{C}{2}\right) = 3r^2\left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p-c}\right)$

$= \frac{3S^2}{p^2}.\frac{(p-c)-(p-a)}{(p-a)(p-c)} = \frac{3p(p-a)(p-b)(p-c)(a-c)}{p^2(p-a)(p-c)}$

$= \frac{3(p-b)(a-c)}{p}.$

Kết hợp với giả thiết $a + c = 2b$. Ta có

$$3r\left(\tan\frac{A}{2} - \tan\frac{C}{2}\right) = \frac{3(2b-b)(a-c)}{2b+b} = \frac{3b(a-c)}{3b} = a - c \text{ (đpcm).}$$

6.11. $\frac{1}{4r^2} = \frac{4p^2}{16S^2} = \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$

$= \frac{(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$

$= \frac{1}{(c+a-b)(a+b-c)} + \frac{1}{(a+b-c)(b+c-a)} + \frac{1}{(b+c-a)(c+a-b)}$

$= \frac{1}{a^2-(b-c)^2} + \frac{1}{b^2-(c-a)^2} + \frac{1}{c^2-(a-b)^2}$

$\geq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Bạn đọc tự chứng minh bất đẳng thức bên trái (dựa vào BT 6.7b).

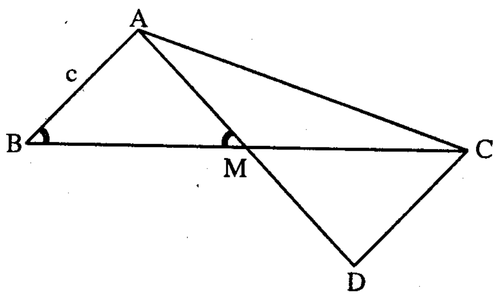
Ví dụ 6.8 là hệ quả của bài toán này.

6.12. Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho MD = MA (h.6-15). Áp dụng định lí sin cho ΔACD ta có

$\frac{\sin\widehat{DAC}}{\sin\widehat{DCA}} = \frac{DC}{DA}$

$\Rightarrow \frac{\sin(B-C)}{\sin(180^\circ - A)} = \frac{AB}{2AM}$

$\Rightarrow \frac{\sin(B-C)}{\sin A} = \frac{c}{2m_a}$



Hình 6-15

$$\Rightarrow \frac{\sin(B-C)}{\sin A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin A = 2\sin(B-C).$$

6.13. (h.6-16) Đặt I = AC ∩ BD. Ta có

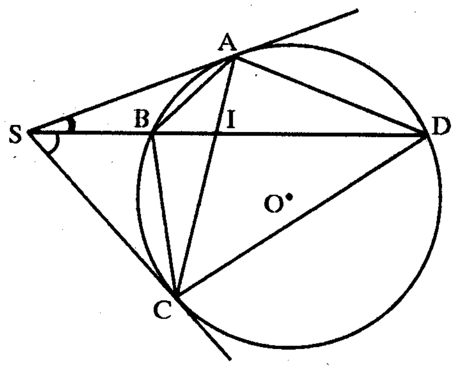
$$\frac{\sin\widehat{ASB}}{\sin\widehat{CSB}} = \frac{\frac{1}{2}SA.SI\sin\widehat{ASB}}{\frac{1}{2}SC.SI\sin\widehat{CSB}} = \frac{S_{ASI}}{S_{CSI}} = \frac{AI}{CI}.\ (1)$$

Áp dụng kết quả trong VD 6.18 cho các tam giác ABC, ADC, ta có

$$\begin{cases} \dfrac{AI}{CI} = \left(\dfrac{AB}{CB}\right)^2 \\ \dfrac{AI}{CI} = \left(\dfrac{AD}{CD}\right)^2 \end{cases} (2)$$

Từ (1), (2) suy ra

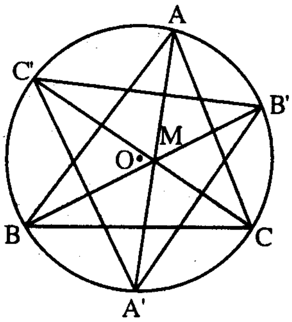
$$\frac{\sin\widehat{ASB}}{\sin\widehat{CSB}} = \left(\frac{AB}{CB}\right)^2 = \left(\frac{AD}{CD}\right)^2.$$



Hình 6-16

6.14. Giả sử R là bán kính của (O). Ta có (h.6-17) :

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\dfrac{BC.CA.AB}{4R}}{\dfrac{B'C'.C'A'.A'B'}{4R}} = \frac{BC.CA.AB}{B'C'.C'A'.A'B'}. \quad (1)$$



Hình 6-17

Lại có $\begin{cases} \Delta MBC \backsim \Delta MC'B' \\ \Delta MCA \backsim \Delta MA'C' \\ \Delta MAB \backsim \Delta MB'A' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{BC}{C'B'} = \dfrac{MB}{MC'} \\ \dfrac{CA}{A'C'} = \dfrac{MC}{MA'} \\ \dfrac{AB}{B'A'} = \dfrac{MA}{MB'} \end{cases}$

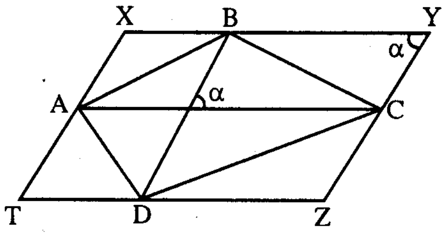
$$\Rightarrow \frac{BC.CA.AB}{B'C'.C'A'.A'B'} = \frac{MA.MB.MC}{MA'.MB'.MC'}.$$

Từ (1), (2) suy ra $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \dfrac{MA.MB.MC}{MA'.MB'.MC'}.$

6.15. *Cách 1.* Dựng hình bình hành XYZT có các cạnh tương ứng song song với AC, BD như hình 6-18. Dễ thấy

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}S_{XYZT} = \frac{1}{2}YX.YZ\sin\alpha$$

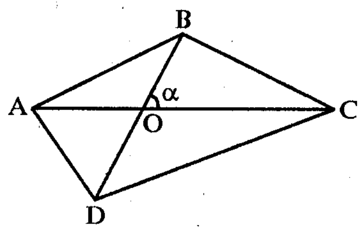
$$= \frac{1}{2}AC.BD\sin\alpha.$$



Hình 6-18

Cách 2. HD. Đặt $O = AC \cap BD$ (h.6-19). Sử dụng đẳng thức

$$S_{ABCD} = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{ODA}.$$



Hình 6-19

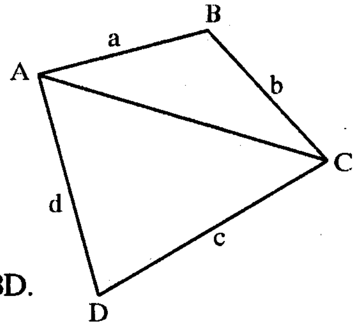
6.16. Nếu không kể đến sự sai khác về mặt kí hiệu thì có hai trường hợp xảy ra :

Trường hợp 1 (h.6-20)

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2}ab\sin B + \frac{1}{2}cd\sin D$$

$$\le \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}cd = \frac{1}{2}(ab + cd).$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^o$.



Hình 6-20

Trường hợp 2 (h.6-21)

Gọi C' là điểm đối xứng của C qua trung trực của BD.

Ta có : $\begin{cases} BC' = DC = b \\ DC' = BC = c. \end{cases}$

Dễ thấy $S_{ABCD} = S_{ABC'D}$. (1)

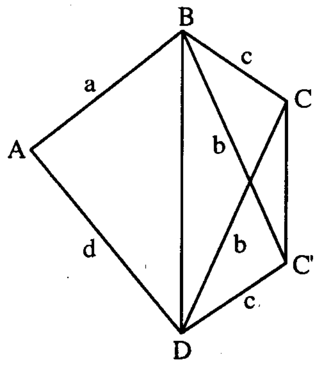
Áp dụng trường hợp 1 với tứ giác ABC'D, ta có

$$S_{ABC'D} \le \frac{1}{2}(ab + cd). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $S_{ABCD} \le \frac{1}{2}(ab + cd)$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \widehat{ABC'} = \widehat{ADC'} = 90^o$. (*)

Ta có thể thấy (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} ABCD \text{ nội tiếp} \\ AC \perp BD. \end{cases}$



Hình 6-21

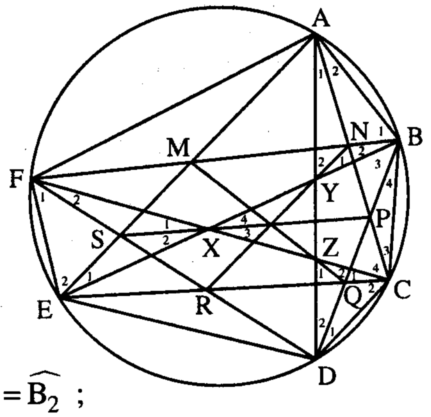
6.17. *Trường hợp 1 :* AD, BE, CF không đồng quy (h.6-22)

Giả sử BE cắt CF tại X, BE cắt AD tại Y, AD cắt CF tại Z.

Theo định lí Pa-xcan (VD 6.21), PS đi qua X, NR đi qua Y, MQ đi qua Z.

Áp dụng định lí Xê-va dạng sin lần lượt cho các tam giác XEF, YAB, ZCD, ta có

$$\begin{cases} \dfrac{\sin X_1}{\sin X_2}\cdot\dfrac{\sin E_1}{\sin E_2}\cdot\dfrac{\sin F_1}{\sin F_2} = 1 \\ \dfrac{\sin Y_1}{\sin Y_2}\cdot\dfrac{\sin A_1}{\sin A_2}\cdot\dfrac{\sin B_1}{\sin B_2} = 1 \quad (3) \\ \dfrac{\sin Z_1}{\sin Z_2}\cdot\dfrac{\sin C_1}{\sin C_2}\cdot\dfrac{\sin D_1}{\sin D_2} = 1. \end{cases}$$



Hình 6-22

Chú ý rằng :

$\widehat{E_1} = \widehat{D_2}$; $\widehat{E_2} = \widehat{B_1}$; $\widehat{A_1} = \widehat{F_2}$; $\widehat{A_2} = \widehat{D_1}$; $\widehat{C_1} = \widehat{B_2}$;

$\widehat{C_2} = \widehat{F_1}$ (4) (góc nội tiếp cùng chắn một cung).

Từ (3), (4) suy ra :

$$\frac{\sin X_1}{\sin X_2}\cdot\frac{\sin Y_1}{\sin Y_2}\cdot\frac{\sin Z_1}{\sin Z_2} = 1.$$

Vậy, theo định lí Xê-va đảo dạng sin cho ΔXYZ thì PS, NR, MQ đồng quy.

Trường hợp 2 : AD, BE, CF đồng quy tại điểm T.

Theo định lí Pa-xcan, PS đi qua T, NR đi qua T, MQ đi qua T (đpcm).

6.18. (h.6-23). Kẻ CE // BD (E thuộc đường tròn ngoại tiếp ABCD).

Ta có

$S_{ABCD} = S_{ABED} = S_{ABE} + S_{ADE}$. (1)

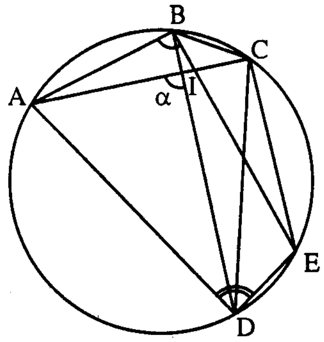
Đặt $I = AC \cap BD$ và $\widehat{AID} = \alpha$. Dễ thấy $\widehat{ABE} = \alpha$; $\widehat{ADE} = 180^\circ - \alpha$.

Từ (1) và BT 6.15, ta có

$$\frac{1}{2}AC.BD\sin\alpha =$$

$$\frac{1}{2}AB.EB\sin\alpha + \frac{1}{2}AD.ED\sin(180^\circ - \alpha)$$

$\Rightarrow AC.BD = AB.CD + AD.BC$ (vì $EB = CD$; $ED = BC$).



Hình 6-23

Nhận xét. Kết quả trên được gọi là định lí Ptô-lê-mê, rất nổi tiếng trong hình học sơ cấp.

6.19. Chỉ cần giải bài toán trong trường hợp $M \in \overset{\frown}{BC}$ (không chứa A) (h.6-24). Theo định lí Ptô-lê-mê ta có

$$MA.BC = MB.CA + MC.AB \Rightarrow MA = MB.\frac{CA}{BC} + MC.\frac{AB}{BC}$$

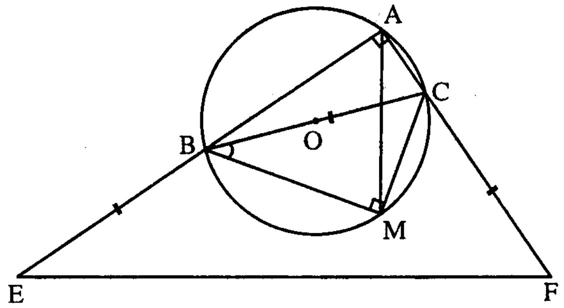
$$\Rightarrow MA + MB + MC$$

$$= MB\left(1+\frac{CA}{BC}\right)+MC\left(1+\frac{AB}{BC}\right)$$

$$= MB.\frac{BC+CA}{BC}+MC.\frac{BC+AB}{BC}$$

$$= MB.\frac{CF+CA}{BC}+MC.\frac{BE+AB}{BC}$$

$$= MB.\frac{AF}{BC} + MC.\frac{AE}{BC}$$



Hình 6-24

$$= \frac{MB}{BC}.AF + \frac{MC}{BC}.AE \le \sqrt{\left(\frac{MB^2}{BC^2}+\frac{MC^2}{BC^2}\right)\left(AF^2 + AE^2\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{MB^2 + MC^2}{BC^2}.\left(AF^2 + AE^2\right)} = \sqrt{\frac{BC^2}{BC^2}.EF^2} \text{ (định lí Py-ta-go)}$$

$$= \sqrt{EF^2} = EF.$$

Vậy $MA + MB + MC \le EF$.

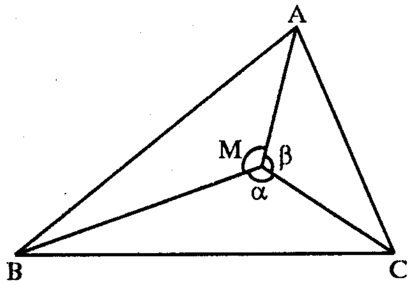
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{\frac{MB}{BC}}{AF} = \dfrac{\frac{MC}{BC}}{AE} \Leftrightarrow \dfrac{MB}{MC} = \dfrac{AF}{AE}$

$\Leftrightarrow \Delta MBC \backsim \Delta AFE \Leftrightarrow \widehat{MBC} = \widehat{AFE}$.

6.20. a) Đặt $\alpha = \widehat{BMC}$; $\beta = \widehat{CMA}$; $\gamma = \widehat{AMB}$ (h.6-25).

Ta có

$$\begin{cases} 0^\circ < \alpha, \beta, \gamma < 180^\circ \\ \alpha + \beta + \gamma = 360^\circ \end{cases}$$



Hình 6-25

$$\Rightarrow \begin{cases} 0^\circ < 180^\circ - \alpha, 180^\circ - \beta, 180^\circ - \gamma < 180^\circ \\ (180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) = 180^\circ. \end{cases}$$

Vậy tồn tại tam giác A'B'C' có $\widehat{A'} = 180^\circ - \alpha$; $\widehat{B'} = 180^\circ - \beta$; $\widehat{C'} = 180^\circ - \gamma$.

Áp dụng định lí sin cho $\Delta A'B'C'$ ta có

$$\frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{B'C'} = \frac{\sin(180^\circ - \beta)}{C'A'} = \frac{\sin(180^\circ - \gamma)}{A'B'}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{B'C'} = \frac{\sin\beta}{C'A'} = \frac{\sin\gamma}{A'B'}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{1}{2}MB.MC\sin\alpha\right).MA}{B'C'} = \frac{\left(\frac{1}{2}MC.MA\sin\beta\right).MB}{C'A'} = \frac{\left(\frac{1}{2}MA.MB\sin\gamma\right).MC}{A'B'}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{MBC}.MA}{B'C'} = \frac{S_{MCA}.MB}{C'A'} = \frac{S_{MAB}.MC}{A'B'}$$

$\Rightarrow S_{MBC}.MA$, $S_{MCA}.MB$, $S_{MAB}.MC$ là độ dài ba cạnh của một tam giác (đồng dạng với $\Delta A'B'C'$). Theo đề bài, ta kí hiệu nó là $\Delta(M)$.

b) Đặt $S_{\Delta(M)}$ là diện tích tam giác $\Delta(M)$. Theo câu a), ta có

$$S_{\Delta(M)} = \frac{1}{2}S_{MCA}.MB.S_{MAB}.MC\sin(180^\circ - \alpha)$$

$$= \left(\frac{1}{2}MB.MC\sin\alpha\right)S_{MCA}S_{MAB} = S_{MBC}.S_{MCA}.S_{MAB}$$

$$\le \left(\frac{S_{MBC} + S_{MCA} + S_{MAB}}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}S^3_{ABC}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow S_{MBC} = S_{MCA} = S_{MAB} \Leftrightarrow$ M là trọng tâm ΔABC.

Vậy $S_{\Delta(M)}$ lớn nhất khi M là trọng tâm tam giác ABC và giá trị lớn nhất đó bằng $\frac{1}{27}S^3_{ABC}$.

Nhận xét. Có thể chứng minh câu a) nhờ đẳng thức $S_{MBC}\overrightarrow{MA} + S_{MCA}\overrightarrow{MB} + S_{MAB}\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ (VD 1.21) với chú ý rằng các vectơ $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ đôi một không cùng phương.

6.21. (h.6-26) $\Delta OCA \backsim \Delta OBC \Rightarrow \dfrac{OC}{OA} = \dfrac{OB}{OC}$

$\Rightarrow OC^2 = OA.OB \Rightarrow OC^2 = 3$

$\Rightarrow OC = \sqrt{3}$. Theo định lí côsin ta có

$\widehat{ACB} \le 90^o \Leftrightarrow \cos\widehat{ACB} \ge 0$

$\Leftrightarrow CA^2 + CB^2 - AB^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow OA^2 + OC^2 - 2OA.OC\cos\widehat{xOy} + OB^2$

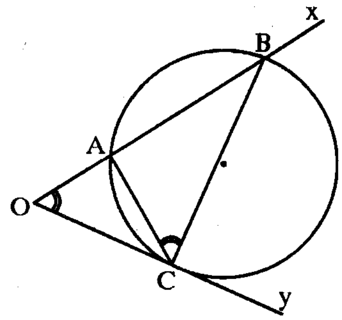
$+ OC^2 - 2OB.OC\cos\widehat{xOy} - AB^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow 1 + 3 - 2.1.\sqrt{3}\cos\widehat{xOy} + 9 + 3 - 2.3.\sqrt{3}\cos\widehat{xOy} - 4 \ge 0$

$\Leftrightarrow 8\sqrt{3}\cos\widehat{xOy} \le 12$

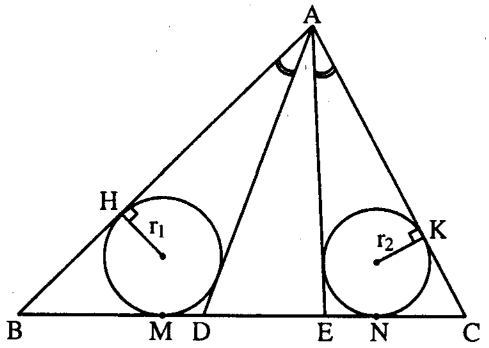
$\Leftrightarrow \cos\widehat{xOy} \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \widehat{xOy} \ge 30^o$ (đpcm).



Hình 6-26

6.22. (h.6-27) Gọi H, K theo thứ tự là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp các tam giác ABD, ACE với AB, AC. Đặt r, r_1, r_2 là bán kính đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ABD, ACE.



Hình 6-27

Ta có : $\dfrac{1}{BM} + \dfrac{1}{DM} = \dfrac{1}{CN} + \dfrac{1}{EN} \Leftrightarrow \dfrac{BD}{BM.DM} = \dfrac{CE}{CN.EN}$

$$\Leftrightarrow \frac{BD}{(BA + BD - AD)(DA + DB - AB)} = \frac{CE}{(CA + CE - AE)(EA + EC - AC)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{BD(AB+AD+BD)(AB+AD-BD)}{S^2_{ABD}} = \frac{CE(AC+AE+CE)(AC+AE-CE)}{S^2_{ACE}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{BD(AB + AD + BD).2AH}{\frac{1}{2}BD.h_a\frac{(AB + AD + BD)}{2}.r_1} = \frac{CE(AC + AE + CE).2AK}{\frac{1}{2}CE.h_a\frac{(AC + AE + CE)}{2}.r_2}$$

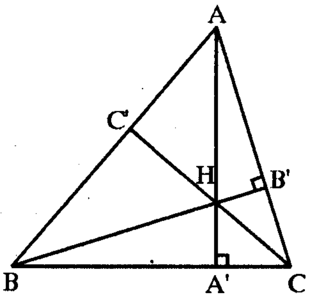
$$\Leftrightarrow \frac{AH}{r_1} = \frac{AK}{r_2} \Leftrightarrow \cot\frac{\widehat{BAD}}{2} = \cot\frac{\widehat{CAE}}{2} \Leftrightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAE} \text{ (đpcm).}$$

§7. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG ĐƯỜNG TRÒN

7.1. (h.7-21) Vì các tứ giác HA'BC', HA'CB' nội tiếp nên

$$\begin{cases} AA'.AH = AC'.AB \\ AA'.AH = AB'.AC \end{cases}$$

$\Rightarrow AA'.AH = \dfrac{1}{2}(AC'.AB + AB'.AC).$ (1)



Hình 7-21

Tương tự, ta có

$$\begin{cases} BB'.BH = \dfrac{1}{2}(BA'.BC + BC'.BA) & (2) \\ CC'.CH = \dfrac{1}{2}(CB'.CA + CA'.CB) & (3) \end{cases}$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

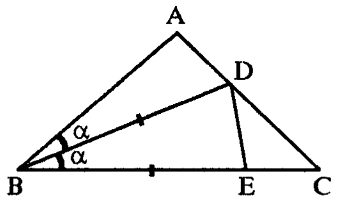
$$AA'.AH + BB'.BH + CC'.CH$$

$$= \frac{1}{2}\left[BC(BA' + CA') + CA(CB' + AB') + AB(AC' + BC')\right]$$

$$= \frac{1}{2}(BC^2 + CA^2 + AB^2) \text{ (đpcm).}$$

7.2. Trên BC lấy E sao cho BE = BD (h.7-22). Theo giả thiết CE = AD (1). Vì BD là phân giác nên

$$\frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC}. \qquad (2)$$



Hình 7-22

Từ (1), (2) với chú ý BA = CA, ta có

$\dfrac{CA}{BC} = \dfrac{CE}{DC} \Rightarrow CA.CD = CE.CB$

$\Rightarrow$ ABED nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{BED} = 180^o$.

Đặt $\widehat{ABC} = 2\alpha$, ta có

$$\begin{cases} \widehat{BAD} = 180^o - 4\alpha \text{ (vì } \Delta ABC \text{ cân tại A)} \\ \widehat{BED} = 90^o - \dfrac{\alpha}{2} \text{ (vì } \Delta BDE \text{ cân tại B).} \end{cases}$$

Từ đó suy ra $(180^\circ - 4\alpha) + \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 180^\circ$

$\Rightarrow \frac{9\alpha}{2} = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$.

Vậy $\widehat{BAC} = 180^\circ - 4.20^\circ = 100^\circ$ (đpcm).

7.3. Gọi D là điểm xuyên tâm đối của C đối với (O) (h.7-23). $K = CD \cap EF$, $I = CH \cap EF$. Trong tam giác vuông CED, ta có $CH^2 = CE^2 = CK.CD = 2CK.CO$ (1)

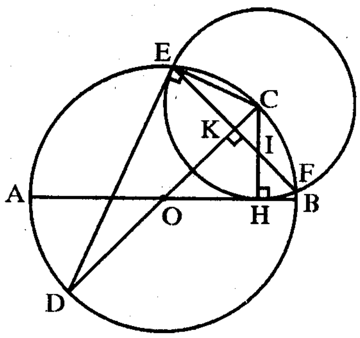
Mặt khác, vì tứ giác KIHO nội tiếp nên

$$CK.CO = CI.CH \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $CH^2 = 2CI.CH$

$\Rightarrow CH = 2CI \Rightarrow CI = IH$.

Vậy EF đi qua trung điểm I của CH.



Hình 7-23

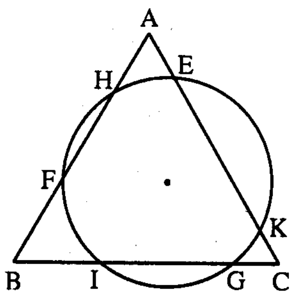
7.4. (h.7-24)

Ta có $\begin{cases} AH.AF = AE.AK \\ BI.BG = BF.BH \\ CK.CE = CG.CI \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} AH.(a - BF) = AE(a - CK) \\ BI(a - CG) = BF(a - AH) \\ CK(a - AE) = CG(a - BI) \end{cases}$

$\Rightarrow (AH + BI + CK)a = (AE + BF + CG)a$

$\Rightarrow AH + BI + CK = AE + BF + CG$ (đpcm).

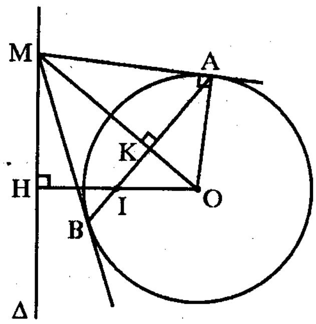


Hình 7-24

7.5. (h.7-25)

Gọi H là hình chiếu của M trên đường thẳng OI, đặt $K = AB \cap OM$. Ta có tứ giác MHIK nội tiếp, nên $\overline{OH}.\overline{OI} = \overline{OM}.\overline{OK}$. (1)

Mặt khác, trong tam giác vuông OMA ta có $\overline{OM}.\overline{OK} = OA^2 = R^2$. (2)



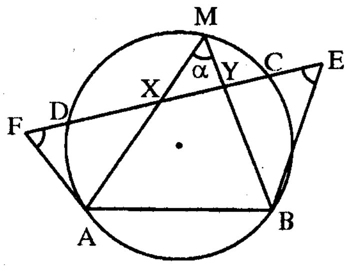
Hình 7-25

Từ (1), (2) suy ra YE.YX = YC.YD

$\Rightarrow$ (YC + CE)YX = YC(YX + XD)

$\Rightarrow$ CE.YX = YC.XD

$\Rightarrow \dfrac{XD.YC}{XY} = CE \Rightarrow \dfrac{XD.YC}{XY}$ không đổi.



Hình 7-28

Nhận xét. 1) Trên tia đối của tia DC lấy F sao cho $\widehat{AFC} = \alpha$ (h.7-28). Chứng minh như trên ta có $\dfrac{XD.YC}{XY} = DF$. Suy ra CE = DF.

2) Tương tự như vậy ta còn có $\dfrac{XC.YD}{XY} = CF = DE$.

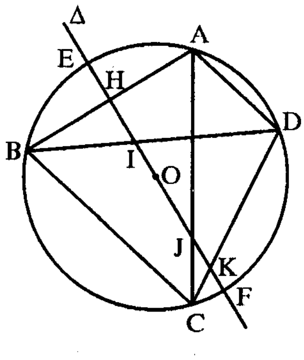
7.9. Giả sử Δ cắt (O) tại E, F (h.7-29). Nếu OH = OK, áp dụng BT 7.8 cho tứ giác BCFE, ta có $\dfrac{HE.JF}{HJ} = \dfrac{KF.IE}{KI}$.

Nếu OH = OK thì HE = KF. Vậy

$$\frac{JF}{HJ} = \frac{IE}{KI}$$

$$\Rightarrow \frac{HJ + JF}{HJ} = \frac{KI + IE}{KI}$$

$$\Rightarrow \frac{HF}{HJ} = \frac{KE}{KI}.$$



Hình 7-29

Cũng vì OH = OK nên HF = KE, do đó

$$HJ = KI$$

$\Rightarrow$ HO + OJ = KO + OI $\Rightarrow$ OI = OJ.

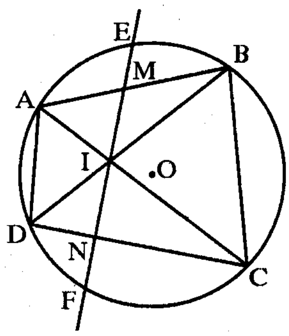
Nếu OI = OJ, tương tự như trên ta suy ra được OH = OK.

7.10. Áp dụng BT 7.8 cho tứ giác BCFE (h.7-30) ta có

$$\frac{ME.IF}{IM} = \frac{NF.IE}{IN} \Rightarrow \frac{ME}{IM.IE} = \frac{NF}{IN.IF}$$

$$\Rightarrow \frac{IE - IM}{IM.IE} = \frac{IF - IN}{IN.IF}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{IM} - \frac{1}{IE} = \frac{1}{IN} - \frac{1}{IF} \Rightarrow \frac{1}{IE} + \frac{1}{IN} = \frac{1}{IF} + \frac{1}{IM}.$$



Hình 7-30

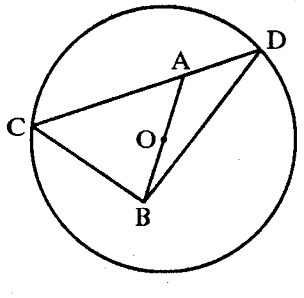
7.11. (h.7-31) Ta có

$CD^2 + DB^2 + BC^2$

$= (CA + DA)^2 + DB^2 + BC^2$

$= (CA^2 + CB^2) + (DA^2 + DB^2) + 2CA.DA.$

Áp dụng công thức tính độ dài trung tuyến cho các tam giác CAB, DAB ta có $CD^2 + DB^2 + BC^2 =$



Hình 7-31

$$= 2CO^2 + \frac{AB^2}{2} + 2DO^2 + \frac{AB^2}{2} + 2(R^2 - OA^2)$$

$$= 6R^2 + AB^2 - \frac{AB^2}{2} \text{ (vì } CO = DO = R \text{ ; } OA = \frac{1}{2}AB)$$

$$= 6R^2 + \frac{AB^2}{2} \text{ (không đổi).}$$

7.12. Áp dụng kết quả và nhận xét trong VD 5.6, ta có

$(MA^2 + NA^2) + (MB^2 + NB^2) + (MC^2 + NC^2)$

$= (MA^2 + MB^2 + MC^2) + (NA^2 + NB^2 + NC^2)$

$= 2(GA^2 + GB^2 + GC^2) + 3(GM^2 + GN^2)$

$= 2[(GA^2 + GB^2 + GC^2) + 3\overline{GM}.\overline{GN}\,] + 3(\overline{GM} - \overline{GN})^2$

$= 2[(GA^2 + GB^2 + GC^2) - 3(R^2 - OG^2)] + 3MN^2$

$= 3MN^2$ (đpcm).

7.13. Giả sử bán kính của (O) là R (h.7-32), ta có

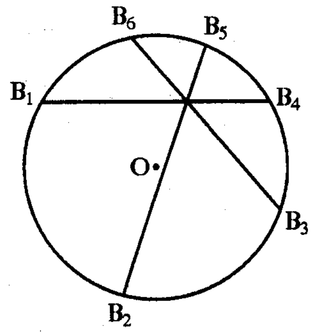
$R^2 = OB_1^2 = \left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB_1}\right)^2$

$= OI^2 + IB_1^2 + 2\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{IB_1}.$

Suy ra $\quad R^2 - OI^2 = IB_1^2 + 2\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{IB_1}$

$\Rightarrow IB_1.IB_4 = IB_1^2 + 2\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{IB_1}$

$\Rightarrow IB_4 = IB_1 + 2\overrightarrow{OI}.\dfrac{\overrightarrow{IB_1}}{IB_1}. \qquad (1)$



Hình 7-32

Tương tự, ta có

$$\begin{cases} IB_6 = IB_3 + 2\overrightarrow{OI}.\dfrac{\overrightarrow{IB_3}}{IB_3} & (2) \\ IB_2 = IB_5 + 2\overrightarrow{OI}.\dfrac{\overrightarrow{IB_5}}{IB_5} & (3) \end{cases}$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$IB_2 + IB_4 + IB_6 = IB_1 + IB_3 + IB_5 + 2\overrightarrow{OI}\left(\frac{\overrightarrow{IB_1}}{IB_1} + \frac{\overrightarrow{IB_3}}{IB_3} + \frac{\overrightarrow{IB_5}}{IB_5}\right).$$

Vì $\dfrac{\overrightarrow{IB_1}}{IB_1}, \dfrac{\overrightarrow{IB_3}}{IB_3}, \dfrac{\overrightarrow{IB_5}}{IB_5}$ là các vectơ đơn vị đôi một tạo với nhau góc 120° nên

$$\frac{\overrightarrow{IB_1}}{IB_1} + \frac{\overrightarrow{IB_3}}{IB_3} + \frac{\overrightarrow{IB_5}}{IB_5} = \vec{0}.$$

Vậy $IB_1 + IB_3 + IB_5 = IB_2 + IB_4 + IB_6$ (đpcm).

7.14. Gọi H, J, K theo thứ tự là hình chiếu của O trên B_1B_4, B_2B_5, B_3B_6 (h.7-33), ta có ΔHKJ đều, nội tiếp đường tròn đường kính OI. Theo VD 5.12,

$$OH^2 + OJ^2 + OK^2 = IH^2 + IJ^2 + IK^2. \quad (1)$$

Mặt khác : $IB_1^2 + IB_4^2 = (HB_1 - HI)^2 + (HB_4 + HI)^2$

$= 2HB_1^2 + 2HI^2$ (vì $HB_1 = HB_4$)

$= 2R^2 - 2HO^2 + 2HI^2$

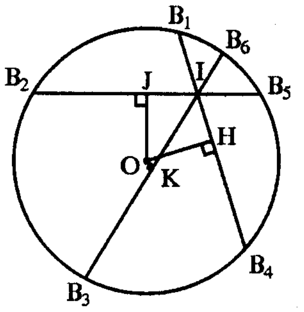
(định lí Py-ta-go cho ΔHB_1O).

Tương tự như vậy ta có

$$\begin{cases} IB_2^2 + IB_5^2 = 2R^2 - 2JO^2 + 2JI^2 \\ IB_3^2 + IB_6^2 = 2R^2 - 2KO^2 + 2KI^2 \end{cases}$$

Vậy : $IB_1^2 + IB_2^2 + IB_3^2 + IB_4^2 + IB_5^2 + IB_6^2$

$= 6R^2 - 2(HO^2 + JO^2 + KO^2) + 2(HI^2 + JI^2 + KI^2)$. (2)



Hình 7-33

Từ (1) và (2) suy ra

$$IB_1^2 + IB_2^2 + IB_3^2 + IB_4^2 + IB_5^2 + IB_6^2 = 6R^2.$$

7.15. (h.7-34) Ta có

$$GA_1 + GB_1 + GC_1 =$$

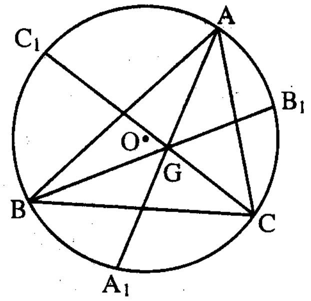
$$= \frac{GA_1.GA}{GA} + \frac{GB_1.GB}{GB} + \frac{GC_1.GC}{GC}$$

$$= (R^2 - OG^2)\left(\frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC}\right)$$

$$= \frac{3(R^2 - OG^2)}{3}\left(\frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC}\right)$$

$$= \frac{1}{3}(GA^2 + GB^2 + GC^2)\left(\frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC}\right)$$

$$\geq \frac{1}{9}(GA + GB + GC)^2\left(\frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC}\right). \qquad (1)$$



Hình 7-34

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cô-si, ta có :

$$(GA + GB + GC)\left(\frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC}\right) \geq 3\sqrt[3]{GA.GB.GC}.3\sqrt[3]{\frac{1}{GA.GB.GC}}$$

$$\Rightarrow (GA + GB + GC)\left(\frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC}\right) \geq 9 \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $GA_1 + GB_1 + GC_1 \geq GA + GB + GC$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow GA = GB = GC \Leftrightarrow G \equiv O \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

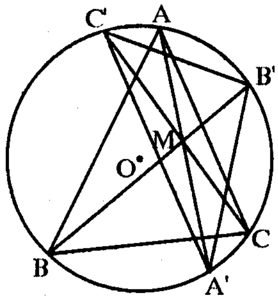
7.16. Nếu M nằm trong (O) (h.7-35) ta có

$\Delta MBC \backsim \Delta MC'B'$

$$\Rightarrow \frac{BC}{B'C'} = \frac{MB}{MC'} \Rightarrow \frac{MA.BC}{B'C'} = \frac{MA.MB.MC}{MC.MC'}$$

$$\Rightarrow \frac{MA.BC}{B'C'} = \frac{MA.MB.MC}{R^2 - MO^2}$$

$$\Rightarrow \frac{MA.BC}{B'C'} = \frac{MA.MB.MC}{|MO^2 - R^2|}.$$



Hình 7-35

Tương tự, ta có

$$\frac{MA.BC}{B'C'} = \frac{MB.CA}{C'A'} = \frac{MC.AB}{A'B'} = \frac{MA.MB.MC}{|MO^2 - R^2|}. \qquad (*)$$

Nếu M nằm ngoài (O), hoàn toàn tương tự ta thấy (*) vẫn đúng.

Nhận xét. Từ (*) với chú ý B'C', C'A', A'B' là độ dài ba cạnh của một tam giác, ta thấy : MA.BC, MB.CA, MC.AB cũng là độ dài ba cạnh của một tam giác. Kết hợp nhận xét này với định lí Ptô-lê-mê, ta có kết quả nổi tiếng sau đây, nó thường được gọi là bất đẳng thức Ptô-lê-mê.

Cho tam giác ABC và điểm M bất kì, ta có :

$$\begin{cases} MB.CA + MC.AB \geq MA.BC & (1) \\ MC.AB + MA.BC \geq MB.CA & (2) \\ MA.BC + MB.CA \geq MC.AB & (3) \end{cases}$$

Đẳng thức xảy ra ở (1) $\Leftrightarrow$ M thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ (không chứa A)

Đẳng thức xảy ra ở (2) $\Leftrightarrow$ M thuộc cung $\overset{\frown}{CA}$ (không chứa B)

Đẳng thức xảy ra ở (3) $\Leftrightarrow$ M thuộc cung $\overset{\frown}{AB}$ (không chứa C).

7.17. (h.7-36)

a) Gọi K là giao điểm của AB với đường tròn (BMN), K $\neq$ B. Ta có

$\overline{AK}.\overline{AB} = \overline{AM}.\overline{AN} = \mathcal{P}_{A/(O)}$

$\Rightarrow \overline{AK} = \dfrac{\mathcal{P}_{A/(O)}}{\overline{AB}}$ không đổi

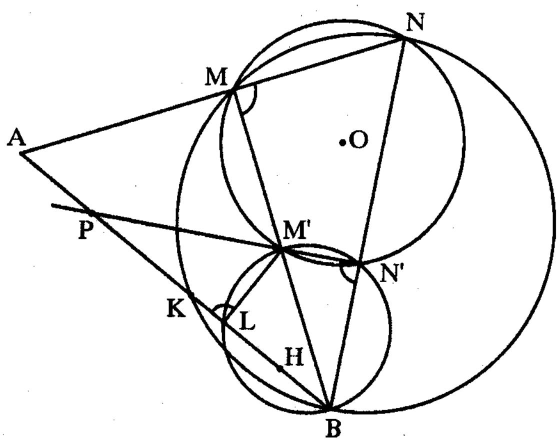
$\Rightarrow$ K cố định.

b) Đặt L = AB $\cap$ (BM'N'), L $\neq$ B.

Dễ thấy $\widehat{NMM'} = \widehat{M'N'B} = \widehat{M'LA}$, suy ra tứ giác AMM'L nội tiếp, do đó

$\overline{BL}.\overline{BA} = \overline{BM}.\overline{BM'} = \mathcal{P}_{B/(O)}$ không đổi.

$\Rightarrow$ L cố định.



Hình 7-36

c) Đặt P = M'N' $\cap$ AB. Gọi H là trung điểm của LB thì H cố định. Ta có

$\overline{PL}.\overline{PB} = \overline{PM'}.\overline{PN'}$

$\Rightarrow (\overline{PH} + \overline{HL})(\overline{PH} + \overline{HB}) = PO^2 - R^2$

$\Rightarrow (\overline{PH} - \overline{HB})(\overline{PH} + \overline{HB}) = PO^2 - R^2$

$\Rightarrow PH^2 - HB^2 = PO^2 - R^2$

$\Rightarrow PH^2 - PO^2 = HB^2 - R^2$ (không đổi).

Theo VD 3.7, P thuộc đường thẳng cố định vuông góc với OH. Mặt khác, P thuộc AB nên P cố định. Vậy M'N' luôn đi qua điểm P cố định.

§8. ĐƯỜNG THẲNG

8.1. a) Đường thẳng Δ cắt trục hoành tại điểm $I(-1 ; 0)$.

Gọi B là điểm đối xứng của I qua $A(2 ; 0)$, ta có $B = (5 ; 0)$. Đường thẳng Δ' qua B, song song với Δ sẽ đối xứng với Δ qua A.

Phương trình Δ' có dạng $x - 3y + c = 0$.

$$B \in \Delta' \Rightarrow 5 - 3.0 + c = 0 \Rightarrow c = -5.$$

Vậy phương trình của Δ' là $x - 3y - 5 = 0$.

b) Điểm $A(2 ; 0) \in d$. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua Δ, ta tính được $A' = \left(\frac{7}{5} ; \frac{9}{5}\right)$.

Đường thẳng d' đi qua giao điểm của Δ, d và qua A' sẽ đối xứng với d qua Δ (dễ thấy d cắt Δ). Vì d' thuộc chùm đường thẳng xác định bởi Δ và d nên phương trình d' có dạng

$$\alpha(x - 3y + 1) + \beta(2x + y - 4) = 0.$$

$$A' \in d' \Rightarrow \alpha\left(\frac{7}{5} - \frac{27}{5} + 1\right) + \beta\left(\frac{14}{5} + \frac{9}{5} - 4\right) = 0 \Rightarrow -5\alpha + \beta = 0$$

Chọn $\alpha = 1$, $\beta = 5$ ta được phương trình của d' là

$$11x + 2y - 19 = 0.$$

8.2. Giải hệ gồm phương trình của (BC) và (BB') tìm được toạ độ $B = \left(\frac{2}{3} ; \frac{2}{3}\right)$.

Tương tự tìm được $C = (-1 ; 3)$.

Đường thẳng AB đi qua B, nhận vectơ chỉ phương $\vec{u}(1 ; -1)$ của (CC') làm vectơ pháp tuyến, phương trình (AB) là

$$\left(x - \frac{2}{3}\right) - \left(y - \frac{2}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0.$$

Tương tự tìm được phương trình cạnh AC là $x + 3y - 8 = 0$.

Từ đó ta có $A = (2 ; 2)$. Phương trình đường cao AA' là $5x - 7y + 4 = 0$.

8.3. (h.8-9) Vectơ chỉ phương của (BC) là vectơ pháp tuyến của (AH) : $\vec{u} = (3 ; -4)$

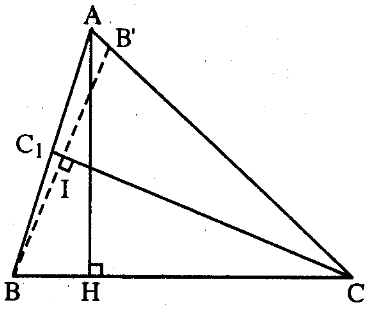
$\Rightarrow$ Phương trình của (BC) là

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4}$$

$\Leftrightarrow 4x + 3y - 5 = 0.$

Toạ độ của C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 4x + 3y - 5 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow C = (-1 ; 3).$$



Hình 8-9

• Gọi B' là điểm đối xứng của B qua phân giác CC_1. Đường thẳng BB' có vectơ pháp tuyến là $\vec{u} = (2 ; -1)$ (vectơ chỉ phương của CC_1)

$\Rightarrow$ phương trình (BB') : $2(x - 2) - (y + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - y - 5 = 0.$

Toạ độ giao điểm I của (BB') và (CC_1) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow I = (3 ; 1) \Rightarrow B' = (4 ; 3).$$

Phương trình cạnh AC là $y = 3$.

Từ đó tìm được toạ độ đỉnh $A(-5 ; 3)$ và phương trình cạnh AB là $4x + 7y - 1 = 0$.

8.4. Phương trình các đường thẳng AB và AC có dạng $\alpha(x - 2) + \beta(y - 6) = 0$ ($\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$), vectơ chỉ phương của nó là $(\beta ; -\alpha)$. Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $(3 ; \sqrt{3})$. Các đường thẳng AB và AC tạo với d góc 60° khi và chỉ khi

$$\frac{|3\beta - \sqrt{3}\alpha|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.\sqrt{12}} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow (3\beta - \sqrt{3}\alpha)^2 = 3(\alpha^2 + \beta^2)$

$\Leftrightarrow 6\beta^2 - 6\sqrt{3}\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \beta^2 - \sqrt{3}.\alpha\beta = 0.$

Chọn $\alpha = 1$ ta được $\beta = 0$ hoặc $\beta = \sqrt{3}$.

Vậy phương trình các cạnh AB và AC là

$$x - 2 = 0 ; x + \sqrt{3}y - 2 - 6\sqrt{3} = 0.$$

8.5. Toạ độ trung điểm của AB là $I\left(\frac{5}{2} ; -\frac{5}{2}\right)$. Gọi $G(x_0, y_0)$ là trọng tâm ΔABC, ta có

$S_{GAB} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{2}$, mà $AB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ nên đường cao GH của ΔGAB là

$$GH = \frac{2S_{GAB}}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Phương trình đường thẳng AB là $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{1} \Leftrightarrow x - y - 5 = 0$,

suy ra khoảng cách từ $G(x_0, y_0)$ đến đường thẳng AB là

$$GH = \frac{|x_0 - y_0 - 5|}{\sqrt{2}}.$$

Khoảng cách này chính bằng đường cao GH, kết hợp điều kiện G thuộc đường thẳng $3x - y - 8 = 0$, ta có hệ

$$\begin{cases} 3x_0 - y_0 - 8 = 0 \\ \dfrac{|x_0 - y_0 - 5|}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -2. \end{cases}$$

Với $G = (1 ; -5)$, tìm được $C = (-2 ; -10)$.

Với $G = (2 ; -2)$, tìm được $C = (1 ; -1)$

(sử dụng hệ thức $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OI}}{3}$).

8.6. Khoảng cách từ điểm $I(x_0 ; y_0)$ đến đường thẳng Δ là

$$\begin{aligned} d(I ; \Delta) &= |x_0.\cos\alpha + y_0.\sin\alpha + 2\cos\alpha + 1| \\ &= |(x_0 + 2)\cos\alpha + y_0.\sin\alpha + 1|. \end{aligned}$$

Với $x_0 = -2$, $y_0 = 0$ thì $d(I ; \Delta) = 1\ \forall\alpha$.

Vậy đường thẳng Δ luôn cách I một khoảng bằng 1, tức là Δ luôn tiếp xúc với đường tròn tâm $I(-2 ; 0)$, bán kính 1.

8.7. Toạ độ của B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B = (1 ; 0).$$

Đường thẳng BC có hệ số góc $k = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{ABC} = 60^o$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC thì $\widehat{ABI} = 30^o$. Đường thẳng BI có hệ số góc là $\tan 30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$ nên phương trình của nó là

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{3}x - 3y - \sqrt{3} = 0.$$

Mặt khác, đường tròn (I) bán kính 2 tiếp xúc với trục hoành nên I thuộc đường thẳng $y = 2$ hoặc $y = -2$. Toạ độ của I là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \sqrt{3}x - 3y - \sqrt{3} = 0 \\ y = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow x_I = 1 \pm 2\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = x_C = x_I + 2 = 3 + 2\sqrt{3} \\ x_A = x_C = x_I - 2 = -1 - 2\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Từ phương trình (BC) tìm được $y_C = \sqrt{3}x_C - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 6$ hoặc

$y_C = -2\sqrt{3} - 6$. Như vậy

$$\begin{cases} A = (3 + 2\sqrt{3}\ ;\ 0) \\ B = (1\ ;\ 0) \\ C = (3 + 2\sqrt{3}\ ;\ 2\sqrt{3} + 6) \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} A = (-1 - 2\sqrt{3}\ ;\ 0) \\ B = (1\ ;\ 0) \\ C = (-1 - 2\sqrt{3}\ ;\ -2\sqrt{3} - 6). \end{cases}$$

Trong trường hợp thứ nhất, trọng tâm G của tam giác ABC có toạ độ là

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{7 + 4\sqrt{3}}{3}\ ;\ y_G = \frac{2\sqrt{3} + 6}{3}.$$

Trường hợp thứ hai ta có $G = \left(\frac{-1 - 4\sqrt{3}}{3}\ ;\ \frac{-2\sqrt{3} - 6}{3}\right)$.

8.8. Giả sử $A = (a\ ;\ 0)$, $B = (0\ ;\ b)$ thì $a > 0$, $b > 0$, $a + b = k$ (không đổi).

Gọi I là trung điểm của AB, ta có $I = \left(\frac{a}{2}\ ;\ \frac{b}{2}\right)$. Đường trung trực của AB đi qua I, có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{BA} = (a\ ;\ -b)$, do đó phương trình trung trực là

$$a\left(x-\frac{a}{2}\right)-b\left(y-\frac{b}{2}\right)=0. \qquad (1)$$

Dễ thấy điểm $P\left(\frac{a+b}{2}\ ;\ \frac{a+b}{2}\right)$ có toạ độ thoả mãn phương trình (1). Vậy đường trung trực của AB luôn đi qua điểm $P\left(\frac{k}{2}\ ;\ \frac{k}{2}\right)$ cố định.

8.9. Lập hệ trục toạ độ Oxy. Giả sử $A = (a ; 0)$, $B = (0 ; b)$, $M = (m ; 0)$, $N = (0 ; n)$.

Phương trình đường thẳng AN đi qua $A(a ; 0)$, $N(0 ; n)$ là $\frac{x-a}{-a}=\frac{y}{n}$

$\Leftrightarrow nx + ay - na = 0.$

Tương tự có phương trình đường thẳng BM là

$bx + my - mb = 0.$

Toạ độ giao điểm của (AN) và (BM) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} nx + ay - na = 0 \\ bx + my - mb = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{mna - mba}{mn - ab} \\ y = \dfrac{mnb - nab}{mn - ab} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{2mn-(mb+na)}{mn-ab}. \qquad (1)$$

Theo giả thiết, $\frac{m}{a}+\frac{n}{b}=2 \Rightarrow mb + na = 2ab$, thế vào (1) được

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{2mn-2ab}{mn-ab}=2.$ Vậy các giao điểm của (AN) và (BM) luôn chạy trên đường thẳng $\frac{x}{2a}+\frac{y}{2b}=1$. Đó chính là đường thẳng A'B' với $A' \in Ox$, $B' \in Oy$ sao cho $OA' = 2OA$, $OB' = 2OB$.

8.10. Giả sử $M = (m ; 0)$, $N = (0 ; n)$, $(m > 0, n > 0)$. Phương trình đường thẳng MN có dạng $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$. Vì $A \in (MN)$ nên $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}=1. \qquad (1)$

Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki, ta có

$m+n=(m+n)\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{n}\right)\geq\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{m^2}{a}=\frac{n^2}{b} \Leftrightarrow \frac{m}{n}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) tìm được $m = \sqrt{a}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$, $n = \sqrt{b}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$. Với các giá trị này của m và n thì OM + ON nhỏ nhất. Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là

$$\frac{x}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)} + \frac{y}{\sqrt{b}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)} = 1$$

hay $$\sqrt{b}\,x + \sqrt{a}\,y - \sqrt{ab}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) = 0.$$

8.11. *HD*. Sử dụng bất đẳng thức

$$|MA - MB| = |MA' - MB| \le A'B,$$

trong đó A' là điểm đối xứng của A qua đường thẳng Δ (xem VD 8.13).

§9. ĐƯỜNG TRÒN

9.1. Tâm đường tròn cần tìm là giao điểm của đường trung trực của AB và đường thẳng đi qua B, vuông góc với đường thẳng $2x + y - 3 = 0$.

ĐS : Toạ độ tâm $I\left(\frac{7}{3}\,;\,\frac{5}{3}\right)$ bán kính $IA = \frac{\sqrt{20}}{3}$.

Phương trình đường tròn là :

$$\left(x - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{20}{9}.$$

9.2. Đường tròn (C_m) có tâm $I_m(m+1\,;\,-2m)$, bán kính $R_m = \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2 + 5}$.

(C_m) tiếp xúc với đường thẳng $x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow$ khoảng cách từ I_m đến đường thẳng bằng bán kính

$$\Leftrightarrow \frac{|m + 1 - 2m - 1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{(m + 1)^2 + 4m^2 + 5}$$

$$\Leftrightarrow |m| = \sqrt{2}.\sqrt{5m^2 + 2m + 6}$$

$$\Leftrightarrow 9m^2 + 4m + 12 = 0.$$

Vậy không có đường tròn nào của họ tiếp xúc với đường thẳng đã cho. Phương trình trên vô nghiệm.

9.3. Giả sử phương trình đường tròn cần tìm có dạng

$$(C) : x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0.$$

P(1 ; 1) thuộc đường tròn nên

$$2 + 2a + 2b + c = 0. \qquad (1)$$

(C) tiếp xúc với hai đường thẳng nên khoảng cách từ tâm $I(-a ; -b)$ đến hai đường thẳng bằng nhau, bằng khoảng cách từ I đến P, do đó:

$$\frac{|-7a - b - 3|}{\sqrt{50}} = \frac{|-a - 7b - 3|}{\sqrt{50}} = \sqrt{(a+1)^2 + (b+1)^2}. \qquad (2)$$

Từ các hệ thức (2) tìm được $a = b = -\frac{7}{2}$ hoặc $a = b = -\frac{13}{18}$. Thay vào (1) tìm được $c = 12$ hoặc $c = \frac{8}{9}$ (tương ứng).

Vậy có hai đường tròn cần tìm là

$$x^2 + y^2 - 7x - 7y + 12 = 0 ;$$

$$x^2 + y^2 - \frac{13}{4}x - \frac{13}{4}y + \frac{8}{9} = 0.$$

9.4. (h.9-6) Viết lại phương trình các đường tròn

$(C_1) : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$

$(C_2) : (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 64.$

(C_1) có tâm $I(1 ; -2)$, bán kính $R_1 = 3$,

(C_2) có tâm $J(-2 ; 2)$, bán kính $R_2 = 8$.

Ta có $IJ = \sqrt{(-2-1)^2 + (2+2)^2} = 5$

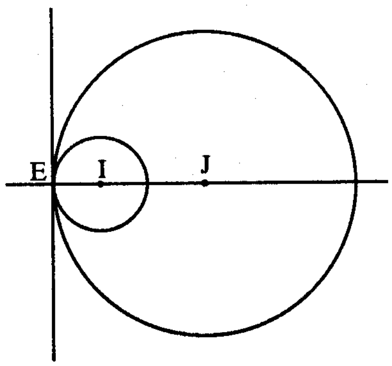
$= R_2 - R_1$.

Vậy (C_1) và (C_2) tiếp xúc trong với nhau.

Tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) chính là trục đẳng phương của hai đường tròn này, nó có phương trình

$$6x - 8y - 52 = 0$$

hay $\qquad 3x - 4y - 26 = 0.$



Hình 9-6

9.5. $(C_1) : (x - 5)^2 + (y + 12)^2 = 15^2$ có tâm $E(5 ; -12)$, bán kính $R_1 = 15$.

$(C_2) : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5^2$ có tâm $F(1 ; 2)$, bán kính $R_2 = 5$.

Vì $R_1 - R_2 < EF = \sqrt{4^2 + 14^2} = \sqrt{212} < R_1 + R_2$ nên

(C_1) và (C_2) cắt nhau, do đó hai đường tròn chỉ có tiếp tuyến chung ngoài.

Gọi S là điểm trên đường thẳng EF sao cho

$$\frac{\overline{SE}}{\overline{SF}} = \frac{R_1}{R_2} = 3 \Rightarrow \overrightarrow{SE} = 3\overrightarrow{SF}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OS} = \frac{\overrightarrow{OE} - 3\overrightarrow{OF}}{-2} = (-1 ; 9) \text{ (O là gốc toạ độ)}$$

$$\Rightarrow S = (-1 ; 9).$$

Tiếp tuyến chung của hai đường tròn đi qua S nên phương trình của nó có dạng $a(x+1) + b(y-9) = 0 (a^2 + b^2 \neq 0) \Leftrightarrow ax + by + a - 9b = 0$.

Khoảng cách từ $F(1 ; 2)$ đến tiếp tuyến bằng $R_2 = 5$,

nên $\dfrac{|2a - 7b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 5 \Leftrightarrow (2a - 7b)^2 = 25(a^2 + b^2)$

$\Leftrightarrow 21a^2 + 28ab - 24b^2 = 0$.

Chọn $b = 7$, ta có $a = \dfrac{-14 \pm 10\sqrt{7}}{3}$.

Vậy phương trình các tiếp tuyến chung là

$$\left(-14 \pm 10\sqrt{7}\right)x + 21y - 203 \pm 10\sqrt{7} = 0.$$

9.6. a) $(C_m) : x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 5m^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x - m)^2 + (y + 2m)^2 = 1$.

Đường tròn (C_m) có tâm $I_m(m ; -2m)$, bán kính $R = 1$.

Tập hợp các tâm I_m là đường thẳng $\Delta : y = -2x$ hay $2x + y = 0$.

Do họ (C_m) có bán kính không đổi nên có hai đường thẳng tiếp xúc với (C_m) $\forall m$. Hai đường thẳng này song song với Δ và cách Δ một khoảng $R = 1$, phương trình của chúng có dạng $2x + y - k = 0$. Lấy điểm $M(x_M ; -2x_M + k)$ thuộc một trong hai đường thẳng đó, ta có

$$d(M ; \Delta) = \frac{|2x_M - 2x_M + k|}{\sqrt{5}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}} = 1 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{5}.$$

Vậy họ đường tròn (C_m) luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định là

$$2x + y \pm \sqrt{5} = 0.$$

b) Đường tròn (C) : $x^2 + y^2 = 1$ có tâm O(0 ; 0), bán kính R' = 1. (C_m) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi

$$|R - R'| < OI_m < R + R' \Leftrightarrow 0 < OI_m < 2 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{5m^2} < 2$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ |m| < \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$. Khi đó đường thẳng AB là trục đẳng phương của (C_m) và (C), phương trình của nó là

$$2mx - 4my - 5m^2 = 0 \text{ hay } 2x - 4y - 5m = 0.$$

9.7. Đường tròn (C) cần tìm thuộc chùm đường tròn xác định bởi hai đường tròn đã cho nên phương trình của nó có dạng

$$\alpha(x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12) + (x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12) = 0 \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + 1)(x^2 + y^2) - 2(3\alpha + 4)x - 2(2\alpha + 1)y + 12\alpha + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{2(3\alpha + 4)}{\alpha + 1}x - \frac{2(2\alpha + 1)}{\alpha + 1}y + 12 = 0.$$

Bán kính của (C) bằng $\sqrt{13}$ nên ta có

$$\left(\frac{3\alpha + 4}{\alpha + 1}\right)^2 + \left(\frac{2\alpha + 1}{\alpha + 1}\right)^2 - 12 = 13$$

$$\Leftrightarrow 6\alpha^2 + 11\alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = -\dfrac{1}{2} \\ \alpha = -\dfrac{4}{3} \end{array}\right..$$

Với $\alpha = -\frac{1}{2}$, ta có tâm $I_1(5 ; 0) \Rightarrow$ phương trình đường tròn là $(x - 5)^2 + y^2 = 13$.

Với $\alpha = -\frac{4}{3}$ ta có tâm $I_2(0 ; 5) \Rightarrow$ phương trình đường tròn là $x^2 + (y - 5)^2 = 13$.

9.8. Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1 ; -2)$, bán kính $R_1 = 3$.

Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(-1 ; 1)$, bán kính $R_2 = 4$.

Dễ thấy (C_2) tiếp xúc với đường thẳng $d : x + 5 = 0$, còn (C_1) thì không tiếp xúc với d. Ta hãy đi tìm đường tròn (C) thuộc chùm xác định bởi (C_1), (C_2), khác với hai đường tròn đã cho. Phương trình của (C) có dạng :

$$\lambda\left(x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4\right) + \left(x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14\right) = 0 (\lambda \neq -1 ; \lambda \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + 1)\left(x^2 + y^2\right) + 2(1 - \lambda)x + 2(2\lambda - 1)y - 4\lambda - 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{2(1-\lambda)}{\lambda + 1}x + \frac{2(2\lambda - 1)}{\lambda + 1}y - \frac{4\lambda + 14}{\lambda + 1} = 0.$$

(C) có tâm $I\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} ; \frac{1 - 2\lambda}{\lambda + 1}\right)$, bán kính

$$R = \sqrt{\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\right)^2 + \left(\frac{1 - 2\lambda}{\lambda + 1}\right)^2 + \frac{4\lambda + 14}{\lambda + 1}} = \sqrt{\frac{9\lambda^2 + 12\lambda + 16}{(\lambda + 1)^2}}$$

(chú ý rằng $9\lambda^2 + 12\lambda + 16 > 0\ \forall\lambda$).

Đường tròn (C) tiếp xúc với đường thẳng d khi và chỉ khi khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng d bằng bán kính R, tức là

$$\left|\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} + 5\right| = \sqrt{\frac{9\lambda^2 + 12\lambda + 16}{(\lambda + 1)^2}} \Leftrightarrow (6\lambda + 4)^2 = 9\lambda^2 + 12\lambda + 16$$

$$\Leftrightarrow \lambda(27\lambda + 36) = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \quad \text{(loại)} \\ \lambda = -\dfrac{4}{3}. \end{array}\right.$$

Với $\lambda = -\frac{4}{3}$, ta có phương trình đường tròn (C) là

$$x^2 + y^2 - 14x + 22y + 26 = 0.$$

9.9. Viết lại phương trình các đường tròn

$$(C_1) : (x - 2)^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$(C_2) : (x + 2)^2 + (y + 1)^2 - 3 = 0$$

$$(C_3) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 5 = 0.$$

Điểm $K(x ; y)$ có cùng phương tích với ba đường tròn $(C_1),(C_2),(C_3)$ khi và chỉ khi $(x ; y)$ là nghiệm của hệ

$$(x - 2)^2 + y^2 - 1 = (x + 2)^2 + (y + 1)^2 - 3 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 5.$$

Giải hệ tìm được $x = \frac{5}{18}$; $y = -\frac{11}{18}$ · Vậy điểm cần tìm là $K\left(\frac{5}{18} ; -\frac{11}{18}\right)$.

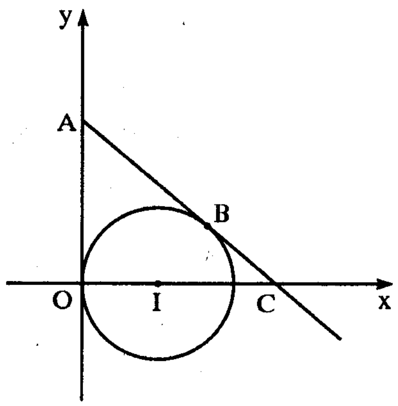
(Điểm K gọi là *tâm đẳng phương* của ba đường tròn).

9.10. (h.9-7)

Viết lại hệ đã cho thành

$$\begin{cases} x + m(y-1) = 0 & (1) \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}. & (2) \end{cases}$$

Dễ thấy (1) là phương trình đường thẳng đi qua điểm cố định A(0 ; 1) $\forall m$; (2) là phương trình đường tròn tâm $I\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$, bán kính $R = \frac{1}{2}$.



Hình 9-7

Số nghiệm của hệ là số điểm chung của đường thẳng và đường tròn.

Kẻ các tiếp tuyến từ A tới đường tròn : trục tung và tiếp tuyến ABC.

Đặt $\widehat{OAI} = \alpha$ thì $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, khi đó $\tan\widehat{OAC} = \tan 2\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \overline{OC} = \frac{4}{3}$.

Đường thẳng (1) cắt trục hoành tại điểm M(m ; 0).

Từ đó ta có kết luận

– Nếu $m < 0$ hoặc $m > \frac{4}{3}$: hệ vô nghiệm ;

– Nếu $m = 0$ hoặc $m = \frac{4}{3}$: hệ có 1 nghiệm ;

– Nếu $0 < m < \frac{4}{3}$: hệ có 2 nghiệm.

§10. ELIP

10.1. (h.10-15)

Giả sử K thoả mãn điều kiện đề bài, ta có

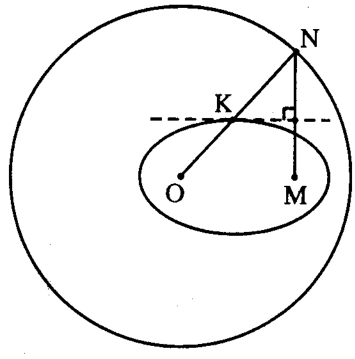
KM + KO = KN + KO = ON = R, suy ra K thuộc elip (E) có hai tiêu điểm là O, M và độ dài trục lớn bằng R.

Ngược lại, lấy $K \in (E)$, gọi N là giao của (O) với tia OK. Ta có $KO + KM = R = ON$, suy ra $OK < ON$

$\Rightarrow$ K thuộc đoạn ON, do đó $KO + KN = R = KO + KM$

$\Rightarrow KN = KM$, tức K thuộc trung trực của MN.

Tóm lại, tập hợp các điểm K là elip có hai tiêu điểm O, M và độ dài trục lớn bằng R.



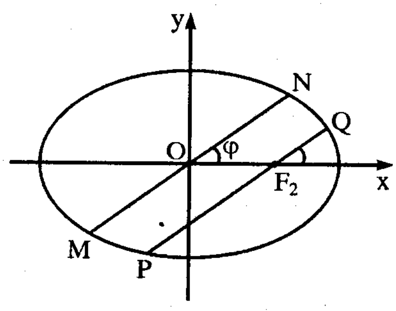
Hình 10-15

10.2. Giả sử (E) là elip có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

MN là một đường kính của (E) và PQ là dây cung qua tiêu điểm $F_2(c\ ;\ 0)$, song song với MN (h.10-16). Đặt

$\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{ON}\right) = \left(\vec{i}\,;\overrightarrow{F_2Q}\right) = \varphi$, ta có



Hình 10-16

$$PQ = F_2Q + F_2P = \frac{b^2}{a + c.\cos\varphi} + \frac{b^2}{a - c.\cos\varphi} \text{ (VD 10.3)}$$

$$= \frac{2ab^2}{a^2 - c^2\cos^2\varphi}. \qquad (1)$$

Mặt khác, $\begin{cases} x_N = ON\cos\varphi \\ y_N = ON\sin\varphi \end{cases}$, mà $N \in (E)$ nên

$$\frac{ON^2\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{ON^2\sin^2\varphi}{b^2} = 1 \Rightarrow ON^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) = 1$$

$$ON^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi} = \frac{a^2b^2}{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\varphi} = \frac{a^2b^2}{a^2 - c^2\cos^2\varphi},$$

suy ra $MN^2 = 4ON^2 = \dfrac{4a^2b^2}{a^2 - c^2\cos^2\varphi} = \dfrac{2a.2ab^2}{a^2 - c^2\cos^2\varphi}.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MN^2 = 2a.PQ$ (đpcm).

10.3. Lấy $M(x_0 ; y_0) \in (E)$, ta có

$$25 = x_0^2 + 4y_0^2 = \frac{1}{13}(3^2 + 2^2)\left[x_0^2 + (2y_0)^2\right] \ge \frac{1}{13}(3x_0 + 4y_0)^2$$

suy ra $(3x_0 + 4y_0)^2 \le 25.13 \Rightarrow -5\sqrt{13} \le 3x_0 + 4y_0 \le 5\sqrt{13}$

$\Rightarrow -5\sqrt{13} - 30 \le 3x_0 + 4y_0 - 30 \le 5\sqrt{13} - 30$

$\Rightarrow 30 - 5\sqrt{13} \le |3x_0 + 4y_0 - 30| \le 30 + 5\sqrt{13}$

$\Rightarrow 6 - \sqrt{13} \le \dfrac{|3x_0 + 4y_0 - 30|}{5} \le 6 + \sqrt{13}$

$\Rightarrow 6 - \sqrt{13} \le d(M ; \Delta) \le 6 + \sqrt{13}.$

Ta thấy $d(M ; \Delta) = 6 + \sqrt{13}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_0^2 + 4y_0^2 = 25 & (1) \\ \dfrac{x_0}{3} = \dfrac{2y_0}{2} & (2) \\ 3x_0 + 4y_0 = -5\sqrt{13} & (3) \end{cases}$$

Từ (2), (3) dễ dàng suy ra $x_0 = -\dfrac{15}{\sqrt{13}}$, $y_0 = -\dfrac{5}{\sqrt{13}}$, các giá trị này thoả mãn (1).

Vậy $d(M ; \Delta)$ lớn nhất khi $M = \left(-\dfrac{15}{\sqrt{13}} ; -\dfrac{5}{\sqrt{13}}\right)$, giá trị lớn nhất đó là $6 + \sqrt{13}$.

Tương tự, $d(M ; \Delta)$ nhỏ nhất khi $M = \left(\dfrac{15}{\sqrt{13}} ; \dfrac{5}{\sqrt{13}}\right)$, giá trị nhỏ nhất đó là $6 - \sqrt{13}$.

10.4. (h.10-17) Theo hệ thức quen biết (VD 1.19), ta có

$F_1F_2\overrightarrow{IM} + MF_2\overrightarrow{IF_1} + MF_1\overrightarrow{IF_2} = \vec{0}$. Chú ý rằng

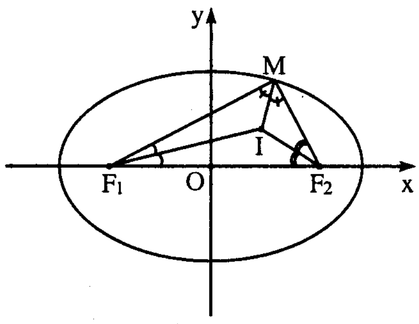
$F_1F_2 = 2c$; $F_1M = a + \dfrac{c}{a}x_M$; $F_2M = a - \dfrac{c}{a}x_M$, ta có

$$\begin{cases} 2c(x_M - x_I) + \left(a - \dfrac{c}{a}x_M\right)(-c - x_I) + \left(a + \dfrac{c}{a}x_M\right)(c - x_I) = 0 \\ 2c(y_M - y_I) + \left(a - \dfrac{c}{a}x_M\right)(-y_I) + \left(a + \dfrac{c}{a}x_M\right)(-y_I) = 0 \end{cases}$$

suy ra $\begin{cases} x_M = \dfrac{a}{c}x_I \\ y_M = \dfrac{a+c}{c}y_I \end{cases}$. Để ý rằng

$\dfrac{x_M^2}{a^2} + \dfrac{y_M^2}{b^2} = 1$ ta có

$$\frac{x_I^2}{c^2} + \frac{y_I^2}{\left(\dfrac{bc}{a+c}\right)^2} = 1.$$



Hình 10-17

Vậy I chạy elip (E') có phương trình $\dfrac{x^2}{c^2} + \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{bc}{a+c}\right)^2} = 1.$

10.5. Vì Δ qua $M\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{2}{3}\right)$ nên nó có phương trình $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} + mt \\ y = \dfrac{2}{3} + nt \end{cases}$ $(m^2 + n^2 \neq 0)$.

Vì $M_1(x_1\ ;\ y_1)$, $M_2(x_2\ ;\ y_2)$ thuộc Δ nên tồn tại t_1, t_2 sao cho $x_1 = \dfrac{2}{3} + mt_1$, $x_2 = \dfrac{2}{3} + mt_2$.

Để ý tới điều kiện $\overrightarrow{MM_1} = -2\overrightarrow{MM_2}$, ta có

$$\frac{2}{3} = \frac{x_1 + 2x_2}{3} = \frac{\left(\dfrac{2}{3} + mt_1\right) + 2\left(\dfrac{2}{3} + mt_2\right)}{3},$$ suy ra $m(t_1 + 2t_2) = 0$.

Dễ dàng kiểm tra được đường thẳng $x = \dfrac{2}{3}$ (qua M, song song với Oy) không thoả mãn yêu cầu bài toán, do đó $m \neq 0$, suy ra $t_1 + 2t_2 = 0$.

Mặt khác, vì M_1, M_2 thuộc (E) nên t_1, t_2 là các nghiệm của phương trình

$$\frac{\left(\dfrac{2}{3} + mt\right)^2}{4} + \left(\frac{2}{3} + nt\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + 4n^2)t^2 + \frac{4}{3}(m + 4n)t - \frac{16}{9} = 0 \qquad (1)$$

Theo định lí Vi-ét ta có

$$0 = t_1 + 2t_2 = \frac{-\frac{4}{3}(m + 4n)}{m^2 + 4n^2} + t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{\frac{4}{3}(m + 4n)}{m^2 + 4n^2}. \qquad (2)$$

Thế (2) vào (1) và rút gọn ta được $m^2 + 16mn + 28n^2 = 0$,

suy ra $(m + 2n)(m + 14n) = 0$, từ đó $m + 2n = 0$ hoặc $m + 14n = 0$.

– Với $m + 2n = 0$, chọn $m = 2$, $n = -1$ ta được phương trình của Δ là

$$\frac{x - \frac{2}{3}}{2} = \frac{y - \frac{2}{3}}{-1} \Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0.$$

– Với $m + 14n = 0$, chọn $m = 14$, $n = -1$ ta được phương trình của Δ là

$$x + 14y - 10 = 0.$$

Lưu ý. Dễ dàng kiểm tra rằng cả hai đường thẳng $x + 2y - 2 = 0$ và $x + 14y - 10 = 0$ đều thoả mãn điều kiện bài toán.

10.6. Giả sử H thoả mãn điều kiện đề bài (h.10-18). Ta có

$MH \perp x'Ox$ nên $x_M = x_H$. (1)

$MA_1 \perp HA_2$ nên $\overrightarrow{MA_1}.\overrightarrow{HA_2} = 0$.

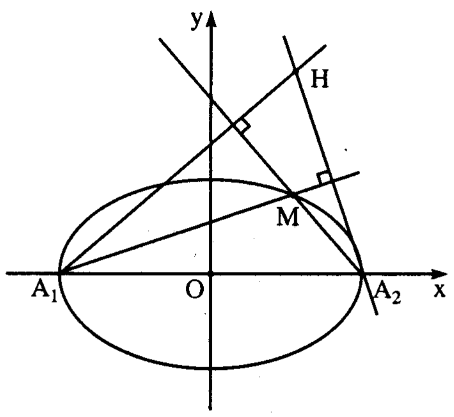
Ta có $\overrightarrow{MA_1} = (-a - x_M ; -y_M)$,

$\overrightarrow{HA_2} = (a - x_H ; -y_H)$

$= (a - x_M ; -y_H)$, do đó

$-(a^2 - x_M^2) + y_M y_H = 0$

$\Rightarrow y_M y_H = a^2 - x_M^2$. (2)



Hình 10-18

Mặt khác, vì $M \in (E)$ nên

$$\frac{x_M^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y_M^2}{b^2} = \frac{a^2 - x_M^2}{a^2} = \frac{y_M y_H}{a^2} \text{ (theo (2))}$$

$$\Rightarrow y_M = \frac{b^2}{a^2} y_H \text{ (vì } y_M \neq 0). \ (3)$$

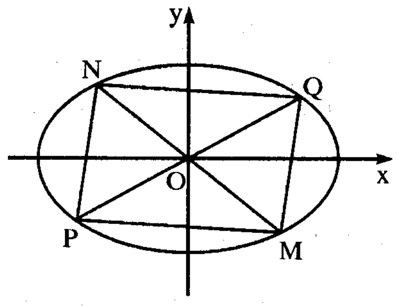
Từ (1), (3) suy ra

$$\frac{x_H^2}{a^2}+\frac{y_H^2}{\left(\frac{a^2}{b}\right)^2}=1 \quad \left(\text{vì } \frac{x_M^2}{a^2}+\frac{y_M^2}{b^2}=1\right),$$ suy ra H thuộc đường cong (E') có

phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{a^2}{b}\right)^2}=1.$ (*)

Chú ý rằng $a > b \Rightarrow a < \frac{a^2}{b} \Rightarrow$ (E') là một elip, nhưng (*) không phải là phương trình chính tắc của (E') (xem VD 10.9).

10.7. (h.10-19) Dễ thấy Δ_1 có vectơ chỉ phương $(\beta\,;-\alpha)$ nên phương trình tham số của nó là $\begin{cases} x=\beta t \\ y=-\alpha t \end{cases}$. Vì $M \in \Delta_1$ nên tồn tại t_M sao cho $\begin{cases} x_M=\beta t_M \\ y_M=-\alpha t_M \end{cases}$, từ đó ta có



Hình 10-19

$$\frac{(\beta t_M)^2}{a^2}+\frac{(-\alpha t_M)^2}{b^2}=1, \text{ suy ra } t_M^2=\frac{a^2b^2}{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $t_M=\frac{ab}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}}$,

ta có $\overrightarrow{OM}=(x_M\,;\,y_M)=\left(\frac{ab\beta}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}}\,;\,\frac{-ab\alpha}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}}\right)$.

Tương tự, $\overrightarrow{OP}=(x_P\,;\,y_P)=\left(\frac{-a^2\alpha}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}}\,;\,\frac{-b^2\beta}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}}\right)$.

Vì MPNQ là hình bình hành nên

$S_{MPNQ}=4S_{OMP}=4.\frac{1}{2}\left|x_My_P-x_Py_M\right|$ (xem VD 5.28)

$$=2\left|\frac{ab\beta(-b^2\beta)}{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}-\frac{(-ab\alpha)(-a^2\alpha)}{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}\right|=2ab\left|\frac{-b^2\beta^2}{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}-\frac{a^2\alpha^2}{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}\right|$$

$= 2ab.$

Nhận xét. Từ kết quả vừa chứng minh và khái niệm về đường kính liên hợp (VD 10.6), ta có kết quả sau đây : Nếu MN và PQ là hai đường kính liên hợp của elip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ thì S_{MPNQ} không đổi và bằng 2ab.

10.8. Vì (E) nhận O làm tâm đối xứng nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $\left(\vec{i};\overrightarrow{OA}\right)=\varphi$, $0^o \le \varphi \le 90^o$, $\left(\vec{i};\overrightarrow{OB}\right)=\varphi+90^o$. Khi đó

$$\begin{cases} x_A = OA\cos\varphi \\ y_A = OA\sin\varphi \end{cases}, \quad \begin{cases} x_B = OB\cos(\varphi+90^o) = -OB\sin\varphi \\ y_B = OB\sin(\varphi+90^o) = OB\cos\varphi \end{cases}$$

Vì A, B thuộc elip nên

$$\begin{cases} \dfrac{OA^2\cos^2\varphi}{a^2}+\dfrac{OA^2\sin^2\varphi}{b^2}=1 \\ \dfrac{OB^2\sin^2\varphi}{a^2}+\dfrac{OB^2\cos^2\varphi}{b^2}=1 \end{cases}, \text{ suy ra } \begin{cases} \dfrac{1}{OA^2}=\dfrac{\cos^2\varphi}{a^2}+\dfrac{\sin^2\varphi}{b^2} \\ \dfrac{1}{OB^2}=\dfrac{\sin^2\varphi}{a^2}+\dfrac{\cos^2\varphi}{b^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{a^2}+\frac{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

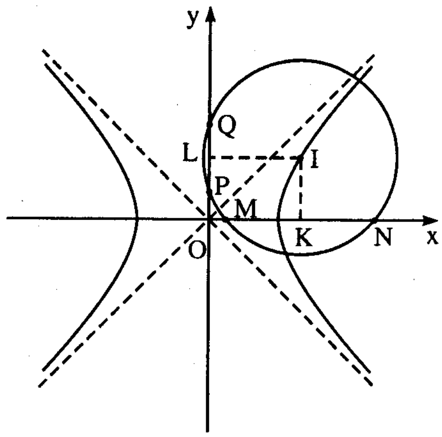
Ta lại có $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2} \Rightarrow OH=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Vậy, H nằm trên đường tròn tâm O, bán kính $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

10.9. a) Biến đổi phương trình đã cho về dạng $\frac{(x+3)^2}{7}+\frac{(y-1)^2}{2}=1$. Chọn I(–3 ; 1) và đặt x = –3 + X, y = 1 + Y. Trong hệ toạ độ IXY, (E_1) có phương trình $\frac{X^2}{7}+\frac{Y^2}{2}=1$, suy ra (E_1) là elip với độ dài trục lớn $2\sqrt{7}$, độ dài trục bé $2\sqrt{2}$, tiêu cự $2\sqrt{5}$, tâm sai $\sqrt{\frac{5}{7}}$. Các tiêu điểm trong hệ toạ độ IXY là $\left(-\sqrt{5};0\right)$ và $\left(\sqrt{5};0\right)$, suy ra các tiêu điểm trong hệ toạ độ Oxy là $\left(-\sqrt{5}-3;1\right)$ và $\left(\sqrt{5}-3;1\right)$.

b) Biến đổi phương trình của (E_2) về dạng $\frac{(x+1)^2}{3}+\frac{(y+2)^2}{5}=1$. Lập luận tương tự VD 10.9b, ta được (E_2) là một elip có độ dài trục lớn $2\sqrt{5}$, độ dài trục bé $2\sqrt{3}$, tiêu cự $2\sqrt{2}$, tâm sai $\sqrt{\frac{2}{5}}$, các tiêu điểm (trong hệ toạ độ Oxy) là $\left(-1\,;-\sqrt{2}-2\right)$ và $\left(-1\,;\sqrt{2}-2\right)$.

§11. HYPEBOL

11.1. *Thuận :* Giả sử (I) thoả mãn điều kiện đề bài. Gọi R là bán kính của (I) ; K, L lần lượt là hình chiếu của I trên x'Ox, y'Oy. Dễ thấy K, L là trung điểm của MN, PQ, suy ra MK = a, PL = b. (1)



Hình 11-8

Mặt khác, theo định lí Py-ta-go, ta có :

$$\begin{cases} IK^2 + MK^2 = IM^2 \\ IL^2 + PL^2 = IP^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_I^2 + a^2 = R^2 \\ x_I^2 + b^2 = R^2 \end{cases} \text{ (theo (1))}$$

$$\Rightarrow x_I^2 - y_I^2 = a^2 - b^2,$$

suy ra I thuộc hypebol (H) có phương trình

$$x^2 - y^2 = a^2 - b^2.$$

Đảo : Lấy I thuộc (H), ta có $x_I^2 - y_I^2 = a^2 - b^2$

$$\Rightarrow y_I^2 + a^2 = x_I^2 + b^2 > 0.$$

Đặt $y_I^2 + a^2 = x_I^2 + b^2 = R^2$ $(R > 0)$. (2)

Gọi K, L là hình chiếu của I trên x'Ox, y'Oy.

Ta có $\begin{cases} IK^2 = y_I^2 = R^2 - a^2 < R^2 \\ IL^2 = x_I^2 = R^2 - b^2 < R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IK < R \\ IL < R \end{cases}$

Suy ra đường tròn tâm I, bán kính R cắt cả x'Ox và y'Oy. Giả sử (I) cắt x'Ox tại M, N, cắt y'Oy tại P, Q. Ta thấy :

$$\begin{cases} MK^2 = IM^2 - IK^2 = R^2 - y_I^2 = a^2 \\ PL^2 = IP^2 - IL^2 = R^2 - x_I^2 = b^2 \end{cases}$$

Mặt khác, $S_{(MNOP)} = 2S_{(ONP)} = 2.\frac{1}{2}\left|x_N y_P - x_P y_N\right|$ (xem VD 5.28)

$$= \left|n\left(-\frac{b}{a}p\right) - p\left(\frac{b}{a}n\right)\right| = \left|-2np\frac{b}{a}\right| = \left|-2\frac{a^2}{4}.\frac{b}{a}\right| = \frac{1}{2}ab.$$

11.4. Gọi H, K là hình chiếu của M trên các tiệm cận.

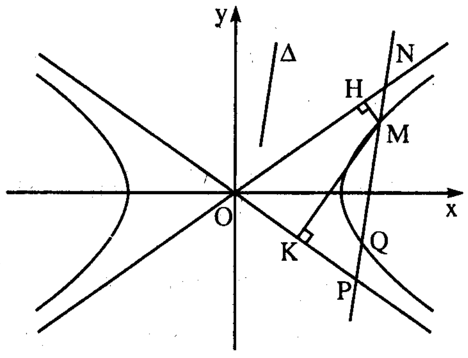
Đặt $\alpha = \widehat{HNM}$; $\beta = \widehat{KPM}$.

Ta có $MN.MP = \frac{MH}{\sin\alpha}.\frac{MK}{\sin\beta} = \frac{a^2.b^2}{(a^2+b^2)\sin\alpha\sin\beta}$ (theo VD 11.2).

Chú ý rằng α,β không thay đổi khi M chạy trên (H) (vì NP// Δ).

Vậy MN.MP không đổi.

Nhận xét. Gọi Q là giao điểm (khác M) của đường thẳng NP với hypebol. Từ chứng minh trên ta suy ra MN.MP = QN.QP. Mặt khác, MN + MP = QN + QP, từ đó theo định lí Vi-ét rút ra một kết quả thú vị : MN = PQ (h.11-11).



Hình 11-11

11.5. (h.11-12) Ta có $FN = -a + \frac{c}{a}x_N = \frac{c^2 - a^2}{a} = \frac{b^2}{a}$,

$FM = y_M = \frac{b}{a}x_M = \frac{bc}{a}$ (vì $x_M = x_N = c$).

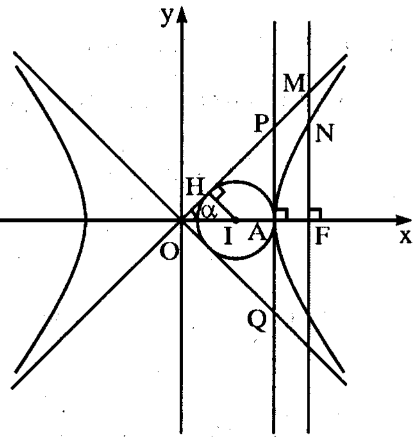
Suy ra $MN = FM - FN = \frac{b(c-b)}{a}$. (1)

Đặt $\alpha = \angle AOP$, ta có $\tan\alpha = \frac{b}{a}$

(hệ số góc của Δ_1)

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha = 1 + \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2 + a^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{b}{c}.$$



Hình 11-12

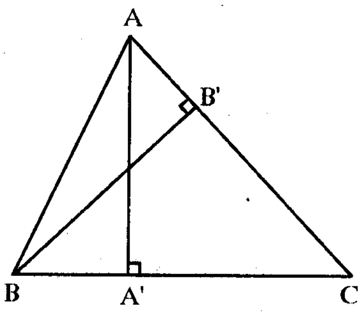
Ta có $r = IH = OI\sin\alpha = (OA - IA)\sin\alpha = (a - r)\frac{b}{c}$, suy ra

$$r = \frac{ab}{b+c} = \frac{ab(c-b)}{c^2 - b^2} = \frac{ab(c-b)}{a^2} = \frac{b(c-b)}{a}. \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

11.6. (h.11-13) Chứng minh trực tâm K của ΔABC thuộc (H).

A, B, C $\in$ (H) : $y = \frac{1}{x}$ nên $A = \left(a ; \frac{1}{a}\right)$, $B = \left(b ; \frac{1}{b}\right)$, $C = \left(c ; \frac{1}{c}\right)$, $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$.



Hình 11-13

Phương trình đường cao AA' qua $A\left(a ; \frac{1}{a}\right)$ và vuông góc với $\overrightarrow{BC}\left(c-b ; \frac{b-c}{bc}\right)$ là

$$(c-b)(x-a) + \frac{b-c}{bc}\left(y - \frac{1}{a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - a - \frac{1}{bc}\left(y - \frac{1}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{bc}y - a + \frac{1}{abc} = 0.$$

Phương trình đường cao BB' qua $B\left(b ; \frac{1}{b}\right)$ và vuông góc với $\overrightarrow{AC}\left(c-a ; \frac{a-c}{ac}\right)$ là $(c-a)(x-b) + \frac{a-c}{ac}\left(y - \frac{1}{b}\right) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{ac}y - b + \frac{1}{abc} = 0.$

Trực tâm K của ΔABC là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - \frac{1}{bc}y - a + \frac{1}{abc} = 0 & (1) \\ x - \frac{1}{ac}y - b + \frac{1}{abc} = 0. & (2) \end{cases}$$

Trừ (1) và (2) theo từng vế ta được

$$\frac{b-a}{abc}y + b - a = 0 \Leftrightarrow y = -abc. \qquad (3)$$

Thay (3) vào (1) ta có : $x + a - a + \frac{1}{abc} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{abc}$.

Do đó $K = \left(-\frac{1}{abc} ; -abc\right) \Rightarrow K \in (H)$ (đpcm).

11.7. Giả sử $A = \left(a ; \frac{1}{a}\right)$, $B = \left(-b ; -\frac{1}{b}\right)$ (a, b > 0) thuộc hai nhánh của (H) (vì hai tiệm cận của (H) là hai trục toạ độ, xem VD 11.3). Ta có

$$AB^2 = (a+b)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{2}{ab} + \frac{1}{b^2}$$

$$= \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + 2\left(ab + \frac{1}{ab}\right) + \left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right) \geq 2 + 2.2 + 2 = 8.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \dfrac{1}{a^2} \\ ab = \dfrac{1}{ab} \\ b^2 = \dfrac{1}{b^2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1 \Leftrightarrow A = (1\,;1), B = (-1\,;-1).$

Tóm lại, AB nhỏ nhất khi $A = (1\,;\,1)$; $B = (-1\,;\,-1)$ và giá trị nhỏ nhất đó bằng $2\sqrt{2}$.

11.8. Trước hết, ta giải bài toán phụ : Tìm k sao cho hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 5x - 3y = k \end{cases}$ (I)

Ta thấy (I) có nghiệm khi và chỉ khi hệ $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ y = \dfrac{5x-k}{3} \end{cases}$ có nghiệm

$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2 - \left(\dfrac{5x-k}{3}\right)^2 = 1$ có nghiệm

$\Leftrightarrow$ Phương trình $16x^2 - 10kx + (k^2 + 9) = 0$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta'_{(k)} = 25k^2 - 16(k^2+9) \geq 0 \Leftrightarrow k^2 \geq 16 \Leftrightarrow |k| \geq 4.$

Trở lại bài toán. Lấy $M \in (H)$, đặt $k(M) = 5x_M - 3y_M \Rightarrow$ hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 5x - 3y = k(M) \end{cases}$ có nghiệm (là $(x_M\,;\,y_M)$)

$\Rightarrow |k(M)| \geq 4$ (theo bài toán phụ) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5x_M - 3y_M \geq 4 \\ 5x_M - 3y_M \leq -4 \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{5x_M - 3y_M - 1}{\sqrt{34}} \geq \dfrac{3}{\sqrt{34}} \\ \dfrac{5x_M - 3y_M - 1}{\sqrt{34}} \leq -\dfrac{5}{\sqrt{34}} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{|5x_M - 3y_M - 1|}{\sqrt{34}} \geq \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$\left(\text{vì } \left|-\frac{5}{\sqrt{34}}\right| > \frac{3}{\sqrt{34}}\right)$

$\Rightarrow d(M\,;\Delta) \geq \frac{3}{\sqrt{34}}.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $k(M) = 4$ $\Leftrightarrow x_M$ là nghiệm duy nhất của phương trình $16x^2 - 10kx + (k^2 + 9) = 0$ với $k = 4$

$\Leftrightarrow x_M = \frac{5}{4}$. Từ đó $y_M = \frac{1}{3}(5x_M - 4) = \frac{3}{4}$.

Tóm lại, $d(M\,;\Delta)$ nhỏ nhất khi $M = \left(\frac{5}{4}\,;\frac{3}{4}\right)$ và giá trị nhỏ nhất đó là $\frac{3}{\sqrt{34}}$.

11.9. Biến đổi các phương trình đã cho về các phương trình tương ứng :

a) $(H_1): \frac{(y-5)^2}{6} - \frac{(x+2)^2}{4} = 1$;

b) $(H_2): (x-3)(y+4) = -1$.

Dùng các phép đổi toạ độ thích hợp, ta kết luận được các đường cong đã cho là những hypebol (xem VD 11.10).

ĐS. a) Độ dài trục thực bằng $2\sqrt{6}$, độ dài trục ảo bằng 4, tiêu cự bằng $2\sqrt{10}$, tâm sai bằng $\sqrt{\frac{5}{3}}$, các tiêu điểm (trong hệ toạ độ Oxy)

$F_1 = \left(-2\,;5-\sqrt{10}\right), F_2 = \left(-2\,;5+\sqrt{10}\right)$, các tiệm cận $y = \frac{\sqrt{6}}{2}x + \sqrt{6} + 5$ và

$y = -\frac{\sqrt{6}}{2}x - \sqrt{6} + 5.$

b) Độ dài trục thực bằng $2\sqrt{2}$, độ dài trục ảo bằng $2\sqrt{2}$, tiêu cự bằng 4, tâm sai bằng $\sqrt{2}$, các tiêu điểm (trong hệ toạ độ Oxy) là

$F_1 = \left(3-\sqrt{2}\,;-4-\sqrt{2}\right)$ và $F_1 = \left(3+\sqrt{2}\,;-4+\sqrt{2}\right)$, các tiệm cận $x = 3$, $y = -4$.

§12. PARABOL

12.1. (h.12-11) a) Lập hệ toạ độ Oxy sao cho A = (0 ; 0), S = (R ; 0). Gọi K là giao điểm của SM và đường tròn (N), H là giao điểm của KN và MT. Ta có $\widehat{SMA} = \widehat{SMT}$ suy ra K là trung điểm của cung MT $\Rightarrow$ NK $\perp$ MT $\Rightarrow$ H là trung điểm của MT và KH //.ST, do đó KH = $\frac{1}{2}$ST = $\frac{1}{2}$R. (1)

Trong tam giác vuông MNH ta có

$$x_N^2 = MN^2 = MH^2 + NH^2$$

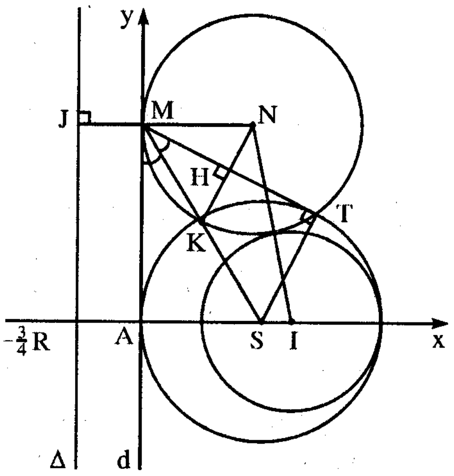
$$= \left(\frac{1}{2}MT\right)^2 + (NK - HK)^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}MA\right)^2 + (NM - HK)^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}y_N\right)^2 + \left(x_N - \frac{1}{2}R\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}y_N^2 + x_N^2 - Rx_N + \frac{1}{4}R^2$$

$$\Rightarrow y_N^2 = 4R\left(x_N - \frac{R}{4}\right). \quad (1)$$



Hình 12-11

Vậy N thuộc parabol (P) có phương trình

$$y^2 = 4R\left(x - \frac{R}{4}\right).$$

(P) có tiêu điểm $I\left(\frac{5}{4}R ; 0\right)$, đường chuẩn $x = -\frac{3}{4}R$.

b) Gọi (I) là đường tròn tâm I, bán kính $R_1 = \frac{3}{4}R$; còn R_N là bán kính của đường tròn (N). Theo câu a), ta có $NI = NL = NM + ML = R_N + \frac{3}{4}R = R_N + R_I$.

Suy ra đường tròn (N) luôn tiếp xúc với đường tròn (I).

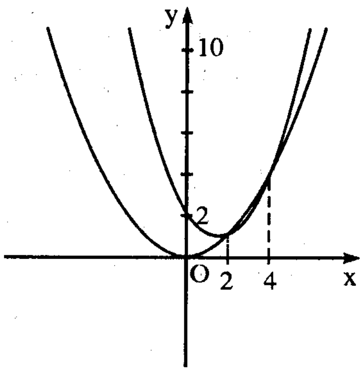
12.2. (h.12-12) a) Xét hệ phương trình

$$(I) \begin{cases} y = \frac{x^2}{4} \\ y = k(x-3) + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{4} \\ \frac{x^2}{4} = k(x-3) + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4} \\ x^2 - 4kx + 12k - 8 = 0. \end{cases}$$

Số giao điểm của d và (P) là số nghiệm của hệ (I) hay chính bằng số nghiệm của phương trình

$$x^2 - 4kx + 12k - 8 = 0. \qquad (1)$$



Hình 12-12

Ta có $\Delta'(k) = 4k^2 - 12k + 8 = 4(k-1)(k-2)$.

– Nếu $1 < k < 2$, (1) vô nghiệm, d và (P) không có điểm chung.

– Nếu $k = 1$ hoặc $k = 2$, (1) có đúng một nghiệm, d và (P) có một điểm chung.

– Nếu $k < 1$ hoặc $k > 2$, (1) có hai nghiệm phân biệt, d cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Khi $k \le 1$ hoặc $k \ge 2$, d và (P) có hai điểm chung A và B (không nhất thiết phân biệt), x_A, x_B, là hai nghiệm của phương trình (1). Theo định lí Vi-ét ta có

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 2k.$$

Mặt khác, $I \in d$ nên $y_I = k(x_I - 3) + 2$

$$= \frac{x_I}{2}(x_I - 3) + 2$$

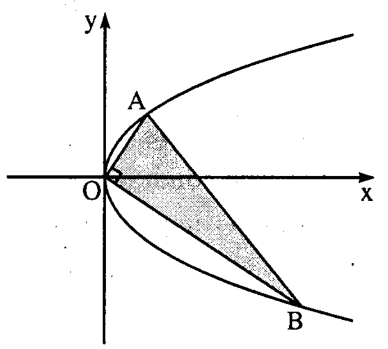
$$= \frac{1}{2}x_I^2 - \frac{3}{2}x_I + 2. \qquad (2)$$

Điều kiện $\left[\begin{array}{l} k \le 1 \\ k \ge 2 \end{array}\right.$ tương đương với $\left[\begin{array}{l} x_I \le 2 \\ x_I \ge 4. \end{array}\right.$ (3)

Từ (2) và (3) dẫn đến kết luận : Tập hợp các trung điểm I là phần của parabol $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$, gồm những điểm có hoành độ $x \le 2$ hoặc $x \ge 4$.

12.3. (h.12-13) Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ x + y + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4x \\ y^2 + 4y + 4m = 0. \end{cases}$$



Hình 12-13

Đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi hệ đang xét có hai nghiệm phân biệt, hay phương trình

$$y^2 + 4y + 4m = 0 \qquad (1)$$

có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow 4 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < 1.$$

Khi đó y_A, y_B là hai nghiệm của phương trình (1) :

$$\begin{cases} y_A = -2 + \sqrt{4-4m} \\ y_B = -2 - \sqrt{4-4m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = 2 - m - \sqrt{4-4m} \\ x_B = 2 - m + \sqrt{4-4m}. \end{cases}$$

Ta có $\overrightarrow{OA} = \left(2 - m - \sqrt{4-4m}\,; -2 + \sqrt{4-4m}\right)$,

$\overrightarrow{OB} = \left(2 - m + \sqrt{4-4m}\,; -2 - \sqrt{4-4m}\right)$;

$OA \perp OB \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$

$\Leftrightarrow (2 - m)^2 - (4 - 4m) + 4 - (4 - 4m) = 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 4m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -4. \end{array}\right.$

Các giá trị m = 0 và m = −4 đều thoả mãn điều kiện m < 1. Vậy giá trị cần tìm của m là m = 0 hoặc m = −4. Khi đó đường thẳng d có phương trình x + y = 0 hoặc x + y − 4 = 0.

12.4. (h.12-14) Đường thẳng d có phương trình dạng y = 2x + m.

Xét phương trình $x^2 - 2x + 3 = 2x + m$

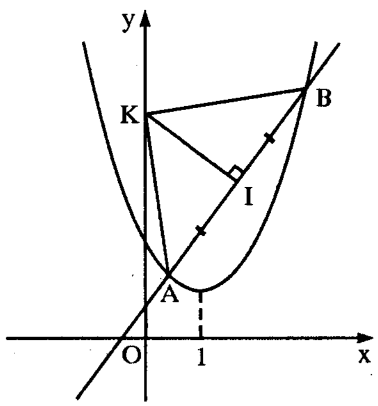
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 - m = 0. \qquad (1)$$

Đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 4 - 3 + m > 0 \Leftrightarrow m > -1.$$

Khi đó x_A, x_B là nghiệm của phương trình (1). Theo định lí Vi-ét ta có $x_A + x_B = 4$.

Gọi I là trung điểm của AB thì



Hình 12-14

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 2,$$

do đó $\overrightarrow{KI} = (2\,; y_I - 6)$. Vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\vec{u} = (1\,; 2)$.

Tam giác KAB cân tại K khi và chỉ khi $KI \perp AB \Leftrightarrow \overrightarrow{KI} \perp \vec{u}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{KI}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2 + 2y_I - 12 = 0 \Leftrightarrow y_I = 5.$$

Đường thẳng d đi qua I(2 ; 5) nên $5 = 2.2 + m \Rightarrow m = 1$.

Vậy phương trình đường thẳng d là $y = 2x + 1$.

12.5. (h.12-15) Vì Δ qua O, cắt (P) và (P') tại A, A' khác O nên Δ có phương trình $y = kx$ ($k \neq 0$).

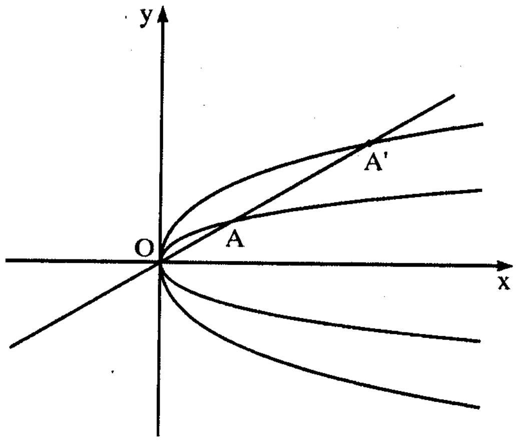
Vì $A = (P) \cap \Delta$ nên

$$\begin{cases} y_A^2 = 2px_A \\ y_A = kx_A \end{cases} \Rightarrow y_A^2 = \frac{2p}{k} y_A$$

$$\Rightarrow y_A = \frac{2p}{k} \text{ (vì } A \neq O).$$

Tương tự, $y_{A'} = \dfrac{2p'}{k}$, suy ra

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{y_A}{y_{A'}} = \frac{p}{p'} \text{ không phụ thuộc vào k.}$$



Hình 12-15

12.6. (h.12-16) a) Gọi I, I' lần lượt là trung điểm của MN và M'N'. Ta có

$$II' = \frac{1}{2}(MM' + NN')$$

$$= \frac{1}{2}(MF + NF) = \frac{1}{2}MN.$$

Suy ra đường tròn đường kính MN tiếp xúc với M'N'.

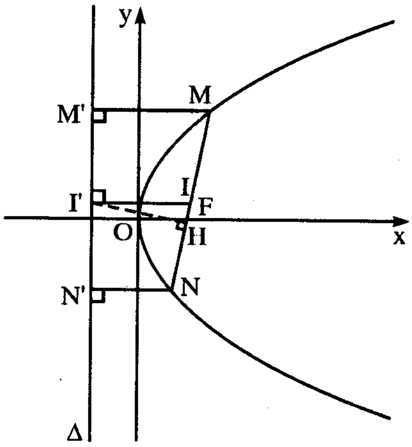
b) Gọi H là hình chiếu của I' trên MN. Ta có

$$S_{II'M} = S_{II'M'} \text{ (do } II' \,//\, MM')$$

$\Rightarrow S_{I'MN} = S_{IM'N'}$ (vì II' là trung tuyến của tam giác IM'N', I'I là trung tuyến của tam giác I'MN).

$$\Rightarrow \frac{1}{2}I'H.MN = \frac{1}{2}II'.M'N'. \qquad (1)$$

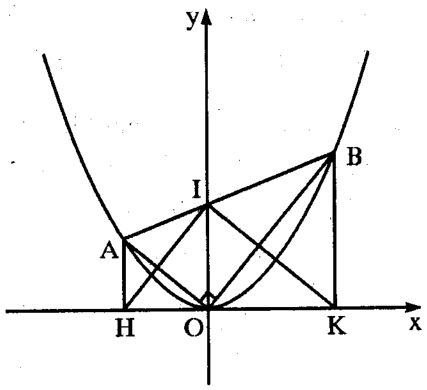
Theo câu a) ta có $II' = \dfrac{1}{2}MN$. $\quad$ (2)



Hình 12-16

Từ (1) và (2) suy ra $I'H = \frac{1}{2}M'N'$. Vậy đường tròn đường kính M'N' tiếp xúc với MN.

12.7. (h.12-17) Vì d đi qua $I\left(0\,;\,\frac{1}{a}\right)$ và cắt (P) tại hai điểm phân biệt nên d có phương trình dạng $y = kx + \frac{1}{a}$.



Hình 12-17

Toạ độ của A, B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = ax^2 \\ y = kx + \dfrac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = kx + \dfrac{1}{a} \\ ax^2 - kx - \dfrac{1}{a} = 0. \end{cases}$$

x_A, x_B là nghiệm của phương trình

$$ax^2 - kx - \frac{1}{a} = 0.$$

Theo định lí Vi-ét ta có $x_A + x_B = \frac{k}{a}$, $x_Ax_B = -\frac{1}{a^2}$. (1)

$$\begin{aligned} \text{Do đó, } \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} &= x_Ax_B + y_Ay_B = x_Ax_B + \left(kx_A + \frac{1}{a}\right)\left(kx_B + \frac{1}{a}\right) \\ &= x_Ax_B + k^2x_Ax_B + \frac{k}{a}(x_A + x_B) + \frac{1}{a^2} \\ &= (1 + k^2)\, x_Ax_B + \frac{k}{a}(x_A + x_B) + \frac{1}{a^2} \\ &= (1 + k^2)\left(-\frac{1}{a^2}\right) + \frac{k}{a}.\frac{k}{a} + \frac{1}{a^2} \text{ (theo (1))} \\ &= 0, \end{aligned}$$

suy ra $OA \perp OB$ hay $\widehat{AOB} = 90^\circ$.

b) Ta có $H = (x_A\,;\,0)$, $K = (x_B\,;\,0)$, nên

$$\overrightarrow{IH} = \left(x_A\,;\,-\frac{1}{a}\right), \overrightarrow{IK} = \left(x_B\,;\,-\frac{1}{a}\right).$$

Do đó $\quad \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{IK} = x_A x_B + \frac{1}{a^2} = \left(-\frac{1}{a^2}\right) + \frac{1}{a^2} = 0.$

Suy ra $\quad IH \perp IK$ hay $\widehat{HIK} = 90^{\circ}$.

12.8. Chứng minh tương tự VD 12.7 ta được K thuộc đường cong (P) có phương trình

$$y^2 = 2R\left(x + \frac{R}{2}\right)$$

Đặt $\begin{cases} x = -\dfrac{R}{2} + X \\ y = Y \end{cases}$, $I = \left(-\frac{R}{2}; 0\right)$. Trong hệ toạ độ IXY,

(P) có phương trình $Y^2 = 2RX$. Đó là phương trình chính tắc của parabol với tiêu điểm $\left(\frac{R}{2}; 0\right)$, đường chuẩn $X = -\frac{R}{2}$. Vậy K chạy trên parabol

$$(P): y^2 = 2R\left(x + \frac{R}{2}\right),$$

có tiêu điểm F(0 ; 0), đường chuẩn $x = -R$.

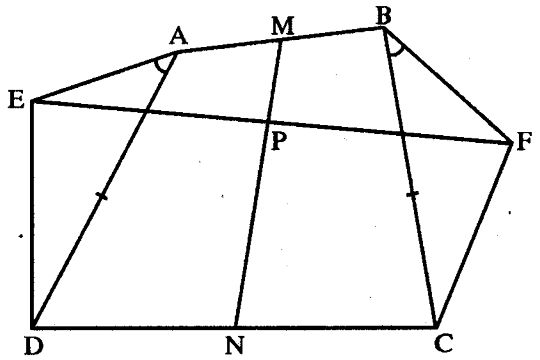
12.9. Biến đổi phương trình của đường cong (P) về dạng

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = \left(\frac{5x + 12y - 1}{13}\right)^2.$$

Do đó, $M(x ; y) \in (P)$ khi và chỉ khi $MF^2 = d^2(M ; \Delta) \Leftrightarrow MF = d(M ; \Delta)$, trong đó $F = (2 ; -3)$, Δ là đường thẳng có phương trình $5x + 12y - 1 = 0$. Vậy (P) là một parabol có tiêu điểm F và đường chuẩn Δ như trên.

§13. TÍCH NGOÀI CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

13.1. (h.13-12) Gọi M, N, P là trung điểm của các đoạn AB, CD, EF (h.13-13). Ta có



Hình 13-12

$\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) \wedge \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF})$

$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BF})$

$= \frac{1}{4}\left(S[ADE] + S[BCF] + AD.BF\sin\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BF}\right) + BC.AE\sin\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AE}\right)\right)$ (1)

Mặt khác, vì ΔADE, ΔBCF bằng nhau và ngược hướng nên ta có :

$$\begin{cases} S[ADE] + S[BCF] = 0 \\ AD.BF = BC.AE \end{cases} \quad (2)$$

và $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BF}\right) + \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AE}\right)$

$= \left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF}\right) + \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AE}\right) + k_1.360^\circ$

$= \left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right) + \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF}\right) + k_2.360^\circ$

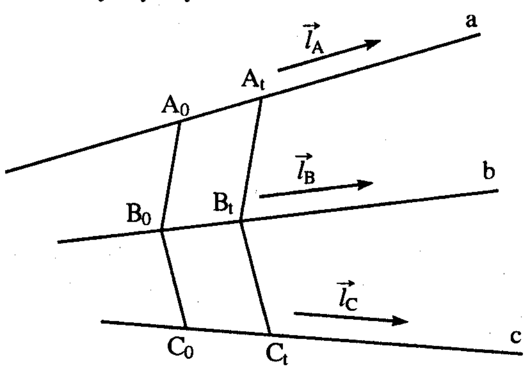
$= k_3.360^\circ$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra : $\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{MP} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MN} // \overrightarrow{MP} \Rightarrow$ M, N, P thẳng hàng.

13.2. (h.13-13) Giả sử hướng chuyển động của các điểm A, B, C là hướng của các vectơ đơn vị $\overrightarrow{e_A},\overrightarrow{e_B},\overrightarrow{e_C}$, vận tốc của A, B, C là v. Tại thời điểm ban đầu, các điểm A, B, C tương ứng ở các vị trí A_0,B_0,C_0. Sau một khoảng thời gian t kể từ thời điểm ban đầu, ta kí hiệu A, B, C là A_t,B_t,C_t.

Với các kí hiệu trên, ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{A_0A_t} = vt\overrightarrow{e_A} \\ \overrightarrow{B_0B_t} = vt\overrightarrow{e_B} \quad (1) \\ \overrightarrow{C_0C_t} = vt\overrightarrow{e_C}. \end{cases}$$



Hình 13-13

Vì A_0,B_0,C_0 không thẳng hàng nên ta có :

$\overrightarrow{A_0B_0} \wedge \overrightarrow{A_0C_0} \neq 0.$ (2)

Từ (1) suy ra :

$\overrightarrow{A_tB_t} \wedge \overrightarrow{A_tC_t} = \left(\overrightarrow{A_tA_0} + \overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{B_0B_t}\right) \wedge \left(\overrightarrow{A_tA_0} + \overrightarrow{A_0C_0} + \overrightarrow{C_0C_t}\right)$

$= \left(vt\left(\overrightarrow{e_B} - \overrightarrow{e_A}\right) + \overrightarrow{A_0B_0}\right) \wedge \left(vt\left(\overrightarrow{e_C} - \overrightarrow{e_A}\right) + \overrightarrow{A_0C_0}\right)$

$$= v^2\left(\overrightarrow{e_B} - \overrightarrow{e_A}\right) \wedge \left(\overrightarrow{e_C} - \overrightarrow{e_A}\right)t^2 + v\left(\left(\overrightarrow{e_B} - \overrightarrow{e_A}\right) \wedge \overrightarrow{A_oC_o}\right)t$$

$$+v\left(\left(\overrightarrow{e_C} - \overrightarrow{e_A}\right)\overrightarrow{A_0B_0}\right)t + \overrightarrow{A_0B_0} \wedge \overrightarrow{A_0C_0}$$

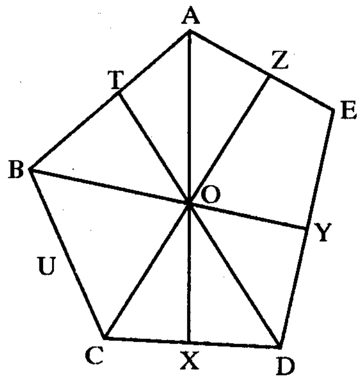
$$= v^2\left(\overrightarrow{e_A} \wedge \overrightarrow{e_B} + \overrightarrow{e_B} \wedge \overrightarrow{e_C} + \overrightarrow{e_C} \wedge \overrightarrow{e_A}\right)t^2 +$$

$$+v\left(\left(\overrightarrow{e_B} - \overrightarrow{e_A}\right) \wedge \overrightarrow{A_0C_0} + \left(\overrightarrow{e_C} - \overrightarrow{e_A}\right) \wedge \overrightarrow{A_0B_0}\right)t + \overrightarrow{A_0B_0} \wedge \overrightarrow{A_0C_0}. \quad (3)$$

Từ (2), (3) suy ra phương trình (ẩn t) : $\overrightarrow{A_tB_t} \wedge \overrightarrow{A_tC_t} = 0$

không thể có quá hai nghiệm. Suy ra, không tồn tại quá hai thời điểm mà tại đó A, B, C thẳng hàng.

Nhận xét. BT 13.2 được phát biểu dưới dạng bài toán Vật lí. Để giải được nó, trước hết cần phải chuyển nó thành bài toán Toán học. Vì vậy, việc thể hiện lời giải của nó khá cầu kì.



Hình 13-14

13.3. (h.13-14). *HD*. Lấy điểm O bất kì. Hãy chứng minh

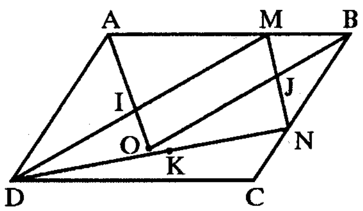
$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OZ}$$
$$+ \overrightarrow{OD} \wedge \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OE} \wedge \overrightarrow{OU} = 0.$$

Suy ra nếu AX, BY, CZ, DT đồng quy tại O thì $\overrightarrow{OE} \wedge \overrightarrow{OU} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OE} // \overrightarrow{OU} \Rightarrow O \in EU$.

Vậy : AX, BY, CZ, DT, EU đồng quy (tại O).

13.4. (h.13-15) Đặt $O = AI \cap BJ$. Ta có :

$\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OJ} \wedge \overrightarrow{OB} = 0$. Suy ra :



Hình 13-15

$$\overrightarrow{OK} \wedge \overrightarrow{OC} =$$
$$= \overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OJ} \wedge \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OK} \wedge \overrightarrow{OC}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OD}\right) \wedge \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}\right) \wedge \overrightarrow{OB}$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OD}\right) \wedge \overrightarrow{OC}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} \wedge \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{OB}\right.$$
$$\left.-\overrightarrow{ON} \wedge \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{ON} \wedge \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \wedge \overrightarrow{OC}\right)$$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM} \wedge \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) + \overrightarrow{ON} \wedge \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right) + \overrightarrow{OD} \wedge \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} \wedge \overrightarrow{OC}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{ON} \wedge \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OD} \wedge \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} \wedge \overrightarrow{OC}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{OC}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} \wedge \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}\right) + \overrightarrow{OC} \wedge \left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{DC}\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{AC}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}\right) \wedge \overrightarrow{CA}\right)$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CA}$

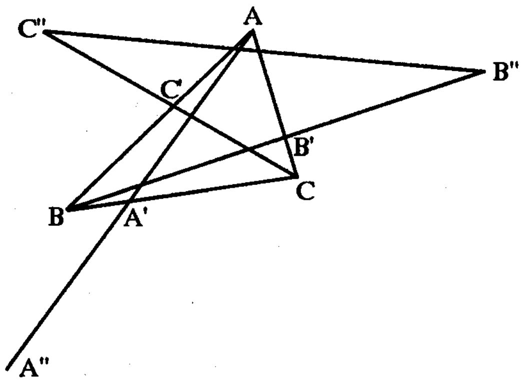
$= 0$

Suy ra OK // OC $\Rightarrow$ O $\in$ KC.

Vậy AI, BJ, CK đồng quy (tại O)

Nhận xét. BT 13.4 chính là VD 3.18

13.5. (h.13-16) Không mất tính tổng quát, giả sử ΔABC có hướng dương. Từ đó, với chú ý rằng A', B', C' theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB, ta có : $\Delta A'B'C'$ và $\Delta A''B''C''$ cũng có hướng dương.



Hình 13-16

Ta có : S(A"B"C") = S[A"B"C"]

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{A''B''} \wedge \overrightarrow{A''C''} = \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{AB}\right) \wedge \left(2\overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{AC}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(4\overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'} - 2\overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)$

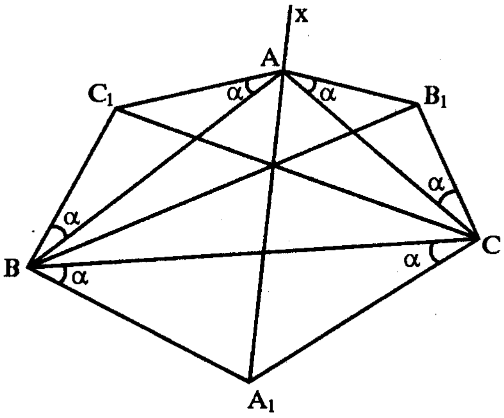
$= 4S[A'B'C'] + 2S[AA'C] + 2S[ABA'] + S[ABC]$

$= 4S[A'B'C'] + 3S[ABC]$

$= 4S(A'B'C') + 3S(ABC).$

13.6. (h.13-17) AA_1, BB_1, CC_1 không thể đôi một song song (1).

Giả sử tam giác ABC có hướng dương, ta có :



Hình 13-17

$$\frac{\sin\left(\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{AB}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{AC}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{BC}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{BA}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\overrightarrow{CC_1}.\overrightarrow{CA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{CC_1},\overrightarrow{CB}\right)}$$

$$=\frac{S[AA_1B]}{S[AA_1C]}\cdot\frac{S[BB_1C]}{S[BB_1A]}\cdot\frac{S[CC_1A]}{S[CC_1B]}$$

$$=\frac{S[BAA_1]}{S[CAA_1]}\cdot\frac{S[CBB_1]}{S[ABB_1]}\cdot\frac{S[ACC_1]}{S[BCC_1]}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}BA.BA_1\sin\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BA_1}\right)}{\frac{1}{2}CA.CA_1\sin\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CA_1}\right)}\cdot\frac{\frac{1}{2}CB.CB_1\sin\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CB_1}\right)}{\frac{1}{2}AB.AB_1\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB_1}\right)}\cdot\frac{\frac{1}{2}AC.AC_1\sin\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC_1}\right)}{\frac{1}{2}BC.BC_1\sin\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BC_1}\right)}$$

$$=\frac{-\sin(B+\alpha)}{\sin(C+\alpha)}\cdot\frac{-\sin(C+\alpha)}{\sin(A+\alpha)}\cdot\frac{-\sin(A+\alpha)}{\sin(B+\alpha)}=-1. \qquad (2)$$

Từ (1), (2), theo định lí Xê-va dạng sin, ta có AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

13.7. Trước hết ta phát biểu và chứng minh một bổ đề đơn giản.

Bổ đề : Diện tích đại số của tứ giác lồi ABCD được tính bởi công thức

$$S[ABCD]=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BD}.$$

Chứng minh bổ đề

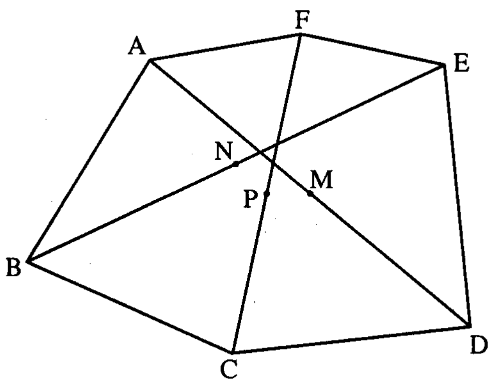
Theo hệ thức Sa-lơ về diện tích đại số, ta có

$S[ABCD] = S[AAB] + S[ABC] + S[ACD] + S[ADA]$

$= 0 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} + 0$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \wedge (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}.$



Hình 13-18

Nhận xét. Bổ đề trên chính là sự mở rộng của BT 6.15

Trở lại việc giải BT 13.7. Không mất tính tổng quát giả sử ABCDEF có hướng dương (h.13-18). Theo nhận xét trên, ta có

$\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DB}) \wedge \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DF})$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{DF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DF}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(S[AEC] + S[ADEF] + \frac{1}{2}S[DABC] + \frac{1}{2}S[DBF]\right)$

$= \frac{1}{2}(-S(AEC) + S(ADEF) + S(DABC) - S(DBF))$

$= \frac{1}{2}(S(ABCDEF) - S(ACE) - S(BDF))$

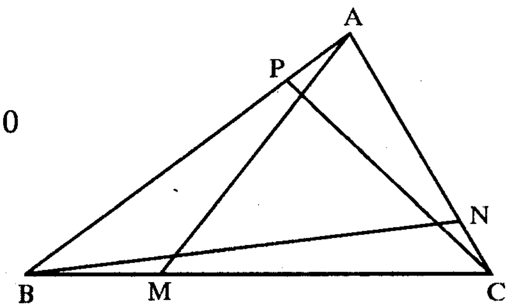
Vậy : M, N, P thẳng hàng

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{MP} = 0$

$\Leftrightarrow S(ABCDEF) - S(ACE) - S(BDF) = 0$

$\Leftrightarrow S(ABCDEF) = S(ACE) + S(BDF).$

13.8. Không mất tính tổng quát, giả sử ΔABC có hướng dương (h.13-19)



Hình 13-19

a) Theo VD 1.10 ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{BN} = (1-k)\overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{CP} = (1-k)\overrightarrow{CA} + k\overrightarrow{CB} \end{cases}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=(1-2k)(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=(1-2k).\vec{0}=\vec{0}$ (1)

Mặt khác, $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{BN}=((1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC})\wedge((1-k)\overrightarrow{BC}+k\overrightarrow{BA})$

$=((1-k)^2\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}+k(1-k)\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BC}+(1-k)k\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BA}+k^2\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BA})$

$=((1-k)^2S[ABC]+k(1-k)S[ABC]+0+k^2S[ABC])$

$=((1-k)^2+k(1-k)+k^2)S[ABC]$

$=(k^2-k+1)\ S(ABC)$

$=\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)S(ABC)>0$

Suy ra : $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BN}$ không cùng phương

Tương tự như vậy, $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BN},\overrightarrow{CP}$ đôi một không cùng phương (2).

Từ (1), (2), theo định nghĩa phép cộng vectơ, ta có : AM, BN, CP là độ dài ba cạnh của một tam giác.

b) Đặt $S_{\Delta(k)}$ là diện tích tam giác $\Delta(k)$. Theo câu a) ta có

$$S_{\Delta(k)}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{BN}=\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)S(ABC)\geq\frac{3}{4}S(ABC).$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow k=\frac{1}{2}$.

Vậy $S_{\Delta(k)}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $k=\frac{1}{2}$ và giá trị nhỏ nhất đó bằng $\frac{3}{4}S_{(ABC)}$.

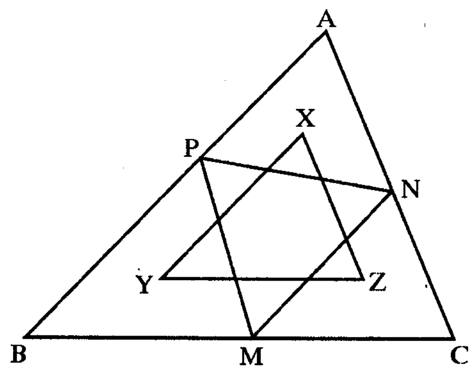
Nhận xét. Câu a) của bài tập này chính là BT 1.6

13.9. Không mất tính tổng quát, giả sử ΔABC có hướng dương (h.13-20). Ta có $S(XYZ)=S[XYZ]=\frac{1}{2}\overrightarrow{XY}\wedge\overrightarrow{XZ}$

$=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{NM})\wedge\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{PM})$

$=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{NM}\wedge\overrightarrow{AC}\right.$

$\left.+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{PM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{NM}\wedge\overrightarrow{PM}\right)$



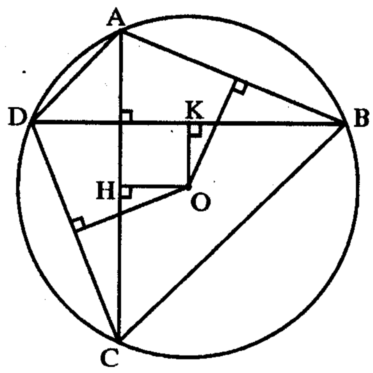
Hình 13-20

$= \frac{1}{9}(S[ABC] + S[AMC] + S[ABM] + S[MNP])$

$= \frac{1}{9}(S(ABC) + S(AMC) + S(ABM) + S(MNP))$

$= \frac{1}{9}\ (2S(ABC) + S(MNP))$

$< \frac{2}{9}S(ABC).$



Hình 13-21

13.10. (h.13-21) Gọi H, K là hình chiếu của O trên AC, BD. Vì S(OAB) = S(OCD) nên S[OAB] = S[OCD]

$\Rightarrow \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}$

$\Rightarrow (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA}) \wedge (\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KB})$

$= (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HC}) \wedge (\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KD})$

$\Rightarrow \overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{HA} \wedge \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{HA} \wedge \overrightarrow{KB}$

$= \overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{HC} \wedge \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{HC} \wedge \overrightarrow{KD}.$

Từ đó, với chú ý rằng, $\overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{KB}, \overrightarrow{HA} \wedge \overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{KD}, \overrightarrow{HC} \wedge \overrightarrow{OK}$ cùng bằng không, ta có :

$\overrightarrow{HA} \wedge \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{HC} \wedge \overrightarrow{KD}$

$\Rightarrow$ HA.KB = HC.KD (vì $\sin(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{KB}) = \sin(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{KD})$)

Nếu HA > HC thì KB < KD

Suy ra : OA > OC = OD > OB, mâu thuẫn (vì OA = OB).

Tương tự, nếu HA < HC thì cũng suy ra mâu thuẫn.

Vậy : HA = HC $\Rightarrow$ OA = OC $\Rightarrow$ OA = OB = OC = OD $\Rightarrow$ Tứ giác ABCD nội tiếp.

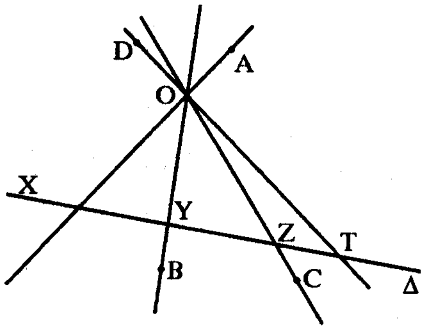
13.11. (h.13-22) Ta có $\dfrac{\overline{ZX}}{\overline{ZY}} : \dfrac{\overline{TX}}{\overline{TY}} = \dfrac{S[OZX]}{S[OZY]} : \dfrac{S[OTX]}{S[OTY]}$

$$= \frac{\frac{1}{2}OZ.OX\sin(\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OX})}{\frac{1}{2}OZ.OY\sin(\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OY})} : \frac{\frac{1}{2}OT.OX\sin(\overrightarrow{OT}, \overrightarrow{OX})}{\frac{1}{2}OT.OY\sin(\overrightarrow{OT}, \overrightarrow{OY})}$$

$$= \frac{\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OX})}{\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OY})} : \frac{\sin(\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OX})}{\sin(\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OY})}. \quad (1)$$

Nếu $\overrightarrow{OX} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OA}$ thì $\frac{\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OX})}{\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OY})} : \frac{\sin(\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OX})}{\sin(\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OY})}$

$$= \frac{\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OA})}{\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OY})} : \frac{\sin(\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OA})}{\sin(\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OY})}.$$



Hình 13-22

Nếu $\overrightarrow{OX} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OA}$ thì

$$\frac{\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OX})}{\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OY})} : \frac{\sin(\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OX})}{\sin(\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OY})}$$

$$= \frac{\sin\left((\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OX})\right)}{\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OY})} : \frac{\sin\left((\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OX})\right)}{\sin(\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OY})}$$

$$= \frac{\sin\left((\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OA})+180^\circ\right)}{\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OY})} : \frac{\sin\left((\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OA})+180^\circ\right)}{\sin(\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OY})}$$

$$= \frac{-\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OA})}{\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OY})} : \frac{-\sin(\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OA})}{\sin(\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OY})}$$

$$= \frac{\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OA})}{\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OY})} : \frac{\sin(\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OA})}{\sin(\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OY})}.$$

Tóm lại, trong cả hai trường hợp, ta đều có

$$\frac{\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OX})}{\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OY})} : \frac{\sin(\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OX})}{\sin(\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OY})} = \frac{\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OA})}{\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OY})} : \frac{\sin(\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OA})}{\sin(\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OY})}.$$

Tiếp tục với các biến đổi tương tự, ta có

$$\frac{\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OX})}{\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OY})} : \frac{\sin(\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OX})}{\sin(\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OY})} = \frac{\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OA})}{\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OY})} : \frac{\sin(\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OA})}{\sin(\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OY})}$$

$$= \frac{\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OA})}{\sin(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{OB})} : \frac{\sin(\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OA})}{\sin(\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OB})} = \frac{\sin(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA})}{\sin(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB})} : \frac{\sin(\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OA})}{\sin(\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OB})}$$

$$= \frac{\sin\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}\right)} : \frac{\sin\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}\right)}. \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $\dfrac{\overline{ZX}}{\overline{ZY}} : \dfrac{\overline{TX}}{\overline{TY}} = \dfrac{\sin\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}\right)} : \dfrac{\sin\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}\right)}$.

§14. PHƯƠNG TÍCH CỦA ĐIỂM ĐỐI VỚI ĐƯỜNG TRÒN. TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG, TÂM ĐẲNG PHƯƠNG

14.1. (h.14-19)

a) Đặt $K = (BCE) \cap (EF)$, $K \neq E$.

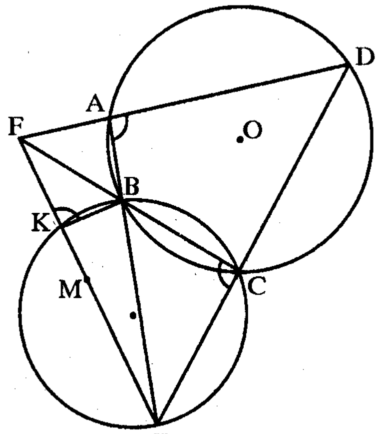
Dễ thấy tứ giác ABKF nội tiếp, do đó

$\mathcal{P}_{E/(O)} = \overline{EA}.\overline{EB} = \overline{EF}.\overline{EK}$,

$\mathcal{P}_{F/(O)} = \overline{FB}.\overline{FC} = \overline{FE}.\overline{FK}$,

suy ra $\mathcal{P}_{E/(O)} + \mathcal{P}_{F/(O)}$

$= \overline{EF}(\overline{EK} - \overline{FK}) = EF^2$.



Hình 14-19

b) Theo công thức tính độ dài trung tuyến trong tam giác OEF, ta có

$\mathcal{P}_{M/(O)} = MO^2 - R^2$

$= \dfrac{2(OE^2 + OF^2) - EF^2}{4} - R^2$

$= \dfrac{2\left[(OE^2 - R^2) + (OF^2 - R^2)\right] - EF^2}{4}$

$= \dfrac{2\left[\mathcal{P}_{E/(O)} + \mathcal{P}_{F/(O)}\right] - EF^2}{4} = \dfrac{2EF^2 - EF^2}{4} = \dfrac{EF^2}{4}$.

14.2. (h.14-20). Gọi (O_1) là đường tròn đường kính AH, (O_2) là đường tròn đường kính MH, ta có $O_1O_2 \,//\, AM$. (1)

Mặt khác, $(KA'BC) = -1$ nên $\overline{KA'}.\overline{KM} = \overline{KB}.\overline{KC}$ (2) (hệ thức Mác-Lô-ranh).

Dễ thấy tứ giác BCB'C' nội tiếp, suy ra

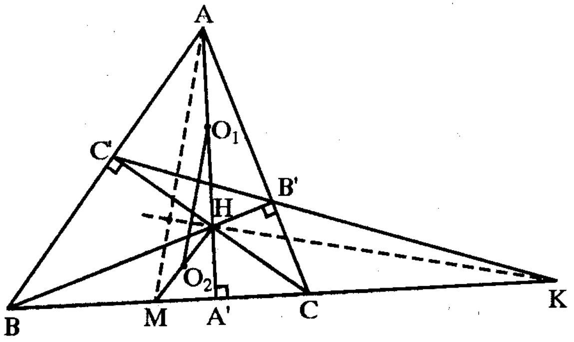
$\overline{KB}.\overline{KC} = \overline{KB'}.\overline{KC'}$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra

$\overline{KA'}.\overline{KM} = \overline{KB'}.\overline{KC'}$,

tức là $\mathcal{P}_{K/(O_2)} = \mathcal{P}_{K/(O_1)}$.

Lại có $\mathcal{P}_{H/(O_2)} = \mathcal{P}_{H/(O_1)} = 0$, suy ra (HK) là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2), nên $HK \perp O_1O_2$. Kết hợp với (1), suy ra $HK \perp AM$.



Hình 14-20

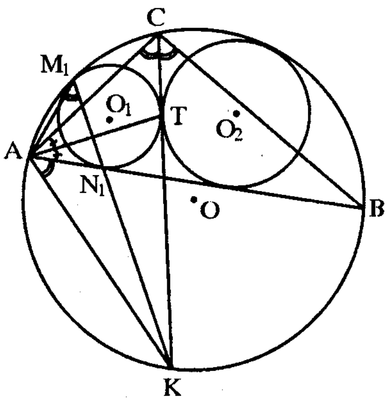
14.3. (h.14-21)

Vì (CT) là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) nên chứng minh tương tự VD 14.11, ta có (CT) đi qua trung điểm K của cung AB. (1)

Ta lại có $KA^2 = \overline{KM_1}.\overline{KN_1} = KT^2$ (M_1, N_1 lần lượt là tiếp điểm của (O_1) với (O), AB)

$\Rightarrow KA = KT \Rightarrow \widehat{KAT} = \widehat{KTA}$. (2)

Mặt khác, $\widehat{KAB} = \widehat{ACK} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AK}$. (3)



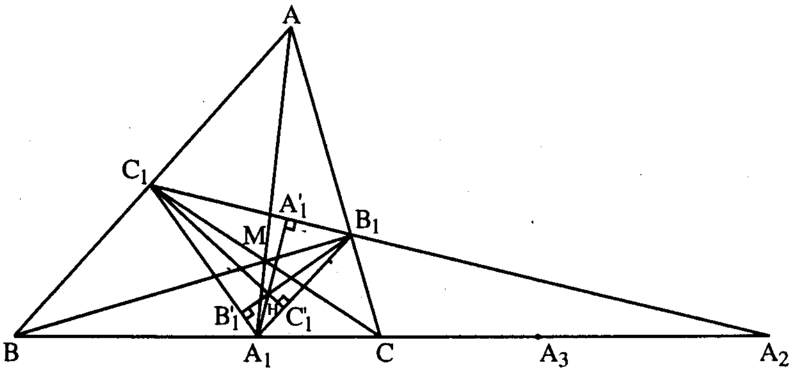
Hình 14-21

Từ (2) và (3) suy ra

$\widehat{KAT} - \widehat{KAB} = \widehat{KTA} - \widehat{KCA} \Rightarrow \widehat{BAT} = \widehat{CAT}$. (4)

Từ (1) và (4) suy ra T là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

14.4. (h.14-22)



Hình 14-22

HD. Gọi (O ; R) là đường tròn ngoại tiếp ΔABC, H là trực tâm $\Delta A_1B_1C_1$, là giao của các đường cao $A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1'$. Kí hiệu các đường tròn đường kính A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 lần lượt là (A_3), (B_3), (C_3). Hãy chứng tỏ

$$\mathcal{P}_{H/(A_3)} = \mathcal{P}_{H/(B_3)} = \mathcal{P}_{H/(C_3)} \quad (1)$$

và
$$\mathcal{P}_{O/(A_3)} = \mathcal{P}_{O/(B_3)} = \mathcal{P}_{O/(C_3)}. \quad (2)$$

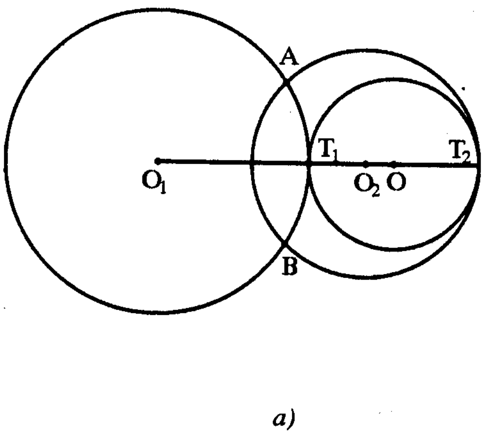
Từ (1) và (2) suy ra $HO \perp A_3B_3$, $HO \perp A_3C_3$.

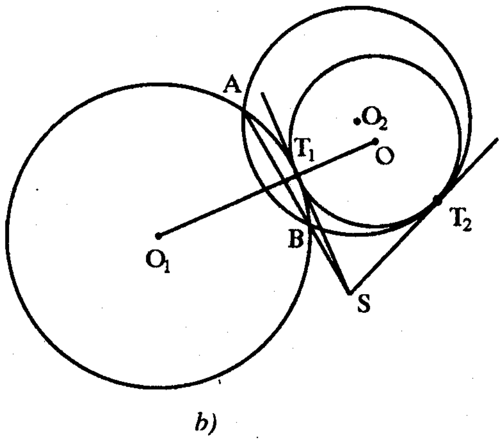
Vậy A_3, B_3, C_3 cùng thuộc một đường thẳng và đường thẳng đó vuông góc với OH.

14.5. *Trường hợp 1 :* O, O_1, O_2 thẳng hàng (h.14-23a).

Ta có ngay $\dfrac{AT_1}{BT_1} = \dfrac{AT_2}{BT_2} = 1.$

Trường hợp 2 : O, O_1, O_2 không thẳng hàng (h.14-23b)





Hình 14-23

Gọi S là tâm đẳng phương của ba đường tròn (O), (O_1), (O_2). Ta có $S \in AB$, ST_1 là tiếp tuyến chung của (O) và (O_1), ST_2 là tiếp tuyến chung của (O) và (O_2). Suy ra

$$\begin{cases} \Delta SAT_1 \backsim \Delta ST_1B \text{ (vì } \widehat{SAT_1} = \widehat{ST_1B}); \\ \Delta SAT_2 \backsim \Delta ST_2B \text{ (vì } \widehat{SAT_2} = \widehat{ST_2B}); \end{cases}$$

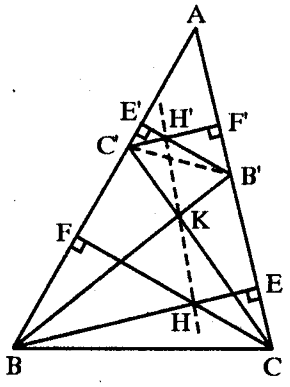
$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{AT_1}{T_1B} = \dfrac{SA}{ST_1} \\ \dfrac{AT_2}{T_2B} = \dfrac{SA}{ST_2} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AT_1}{BT_1} = \dfrac{AT_2}{BT_2}.$$

14.6. *HD*. Áp dụng định lí Ta-lét và điều kiện nội tiếp để suy ra bốn điểm B_2, B_3, C_2, C_3 cùng thuộc một đường tròn. Tương tự, mỗi bộ bốn điểm C_2, C_3, A_2, A_3 ; A_2, A_3, B_2, B_3 cùng thuộc một đường tròn.

Theo VD 14.8, ta có sáu điểm A_2, A_3, B_2, B_3, C_2, C_3 cùng thuộc một đường tròn.

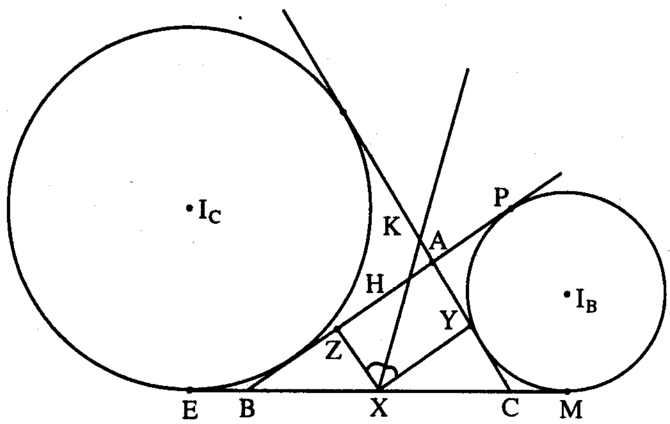
14.7. (h.14-24)

HD. Gọi (O_1), (O_2) theo thứ tự là các đường tròn đường kính BB', CC' ; K là giao điểm của BB' và CC'. Bằng cách chỉ ra mỗi điểm K, H, H' đều có cùng phương tích đối với hai đường tròn (O_1), (O_2), ta kết luận được K, H, H' thẳng hàng, tức là BB', CC', HH' đồng quy.



Hình 14-24

14.8. (h.14-25)



Hình 14-25

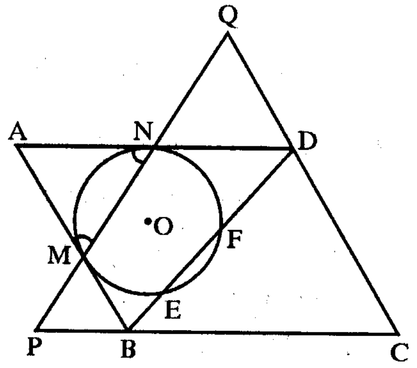
HD. Giả sử X, Y, Z lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB, (I_A), (I_B), (I_C) là các đường tròn bàng tiếp đối diện với các đỉnh A, B, C của tam giác ABC.

Gọi Δ_A là trục đẳng phương của (I_B), (I_C) ; Δ_B là trục đẳng phương của (I_C), (I_A) ; Δ_C là trục đẳng phương của (I_A), (I_B).

Hãy chứng minh Δ_A, Δ_B, Δ_C theo thứ tự là phân giác của các góc ZXY, XYZ, YZX.

14.9. (h.14-26). Đặt $P = MN \cap BC$, $Q = MN \cap CD$. Dễ thấy các tam giác CPQ, BPM, DQN cân tại C, B, D, suy ra

$$\begin{cases} CP = CQ & (1) \\ BM = BP & (2) \\ DN = DQ. & (3) \end{cases}$$



Hình 14-26

Từ (1) suy ra tồn tại đường tròn (O') tiếp xúc với các đường thẳng CB, CD tại P, Q.

Mặt khác, từ (2), (3) suy ra $\mathcal{P}_{B/(O)} = \mathcal{P}_{B/(O')}$; $\mathcal{P}_{D/(O)} = \mathcal{P}_{D/(O')}$, nên BD là trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (O'). Từ đó, với chú ý rằng E, F là các giao điểm của (O) và BD, ta có

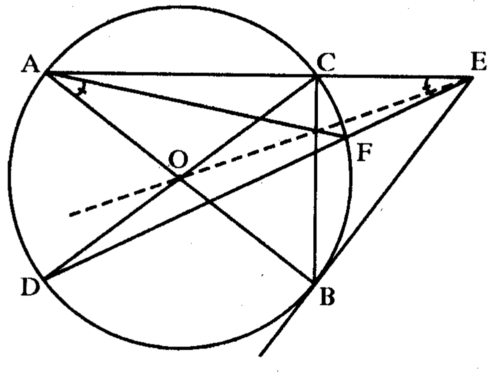
$\mathcal{P}_{E/(O')} = \mathcal{P}_{E/(O)} = 0$; $\mathcal{P}_{F/(O')} = \mathcal{P}_{F/(O)} = 0$, suy ra E, F thuộc (O').

Vậy ta đã chỉ ra đường tròn (O') đi qua E, F và tiếp xúc với các đường thẳng CB, CD.

14.10. (h.14-27). *HD*. Gọi (O_1), (O_2) là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCE, AEF. Hãy chứng tỏ BC là trục đẳng phương của (O) và (O_1) (1) ;

AF là trục đẳng phương của (O) và (O_2) (2) ;

OE là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) (3)



Hình 14-27

Từ (1), (2), (3) suy ra BC, AF, OE đồng quy tại tâm đẳng phương của ba đường tròn (O), (O_1), (O_2).

14.11. (h.14-28)

Gọi (O_2) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác AKLM. Vì ΔABC không cân tại A nên O, O_1, O_2 không thẳng hàng. Gọi S là tâm đẳng phương của (O), (O_1), (O_2) ($S = BC \cap KL \cap AM$). Ta có

$\overline{SM}.\overline{SA} = \overline{SK}.\overline{SL} =$

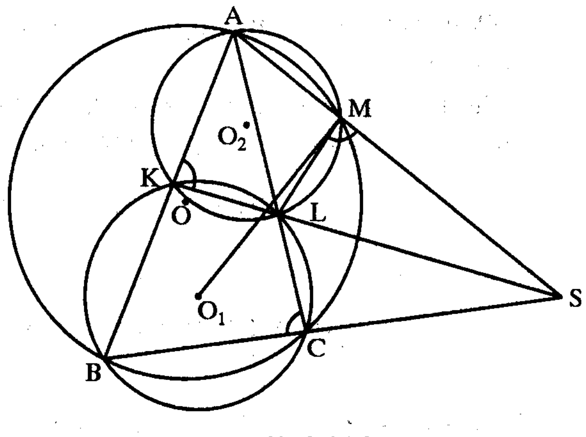
$\mathcal{P}_{S/(O_1)} = SO_1^2 - R_1^2.$ (1)

Ta lại có $\widehat{SML} = \widehat{LKA} = \widehat{LCB}$

$\Rightarrow$ tứ giác LMSC nội tiếp

$\Rightarrow \overline{AM}.\overline{AS} = \overline{AL}.\overline{AC} =$

$\mathcal{P}_{A/(O_1)} = AO_1^2 - R_1^2.$ (2)



Hình 14-28

Từ (1), (2) suy ra

$\overline{SM}.\overline{SA} - \overline{AM}.\overline{AS} = SO_1^2 - AO_1^2$

$\Rightarrow (\overline{SM} + \overline{AM}).\overline{SA} = SO_1^2 - AO_1^2$

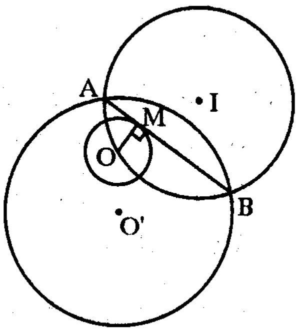
$\Rightarrow (\overline{SM} + \overline{AM})(\overline{SM} - \overline{AM}) = SO_1^2 - AO_1^2$

$\Rightarrow \overline{SM}^2 - \overline{AM}^2 = SO_1^2 - AO_1^2$

$\Rightarrow SA \perp MO_1$ (VD 3.7).

Vậy $\widehat{AMO_1} = 90^o$.

14.12. (h.14-29). Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB. Ta có AB là trục đẳng phương của (O') và (I), OM $\perp$ AB, do đó



Hình 14-29

$\mathcal{P}_{O/(O')} = \mathcal{P}_{O/(O')} - \mathcal{P}_{O/(I)}$

$= \left[\mathcal{P}_{O/(O')} - \mathcal{P}_{M/(O')}\right] - \left[\mathcal{P}_{O/(I)} - \mathcal{P}_{M/(I)}\right]$

$= (OO'^2 - MO'^2) - (OI^2 - MI^2)$

$= (OO'^2 - OI^2) - (MO'^2 - MI^2)$

$= (\overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{OI}).(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OI}) - (\overrightarrow{MO'} - \overrightarrow{MI}).(\overrightarrow{MO'} + \overrightarrow{MI})$

$= \overrightarrow{IO'}.(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{MO'} - \overrightarrow{MI})$

$= 2.\overline{IO'}.\overline{OM}$

$\Rightarrow \left|\mathcal{P}_{O/(O')}\right| = 2IO'.R \Rightarrow IO' = \dfrac{\left|\mathcal{P}_{O/(O')}\right|}{2R}$ (*) không đổi.

Vậy I chạy trên đường tròn cố định, tâm O', bán kính xác định bởi (*).

Nhận xét. Nhờ kĩ thuật giải bài tập 14.12, ta chứng minh được kết quả quan trọng sau :

Cho hai đường tròn (O), (O') ; M là điểm bất kì, H là hình chiếu của M trên trục đẳng phương của (O) và (O'). Khi đó ta có

$$P_{M/(O)} - P_{M/(O')} = 2\overline{OO'}.\overline{HM}.$$

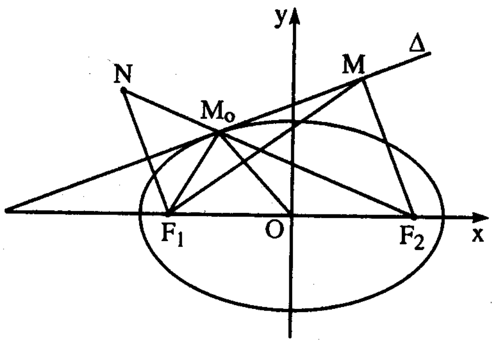
§15. TIẾP TUYẾN CỦA BA ĐƯỜNG CÔNIC

15.1. (h.15-10). Gọi N là điểm đối xứng với F_1 qua Δ. Theo VD 15.3, Δ là phân giác của góc ngoài ứng với đỉnh M_0 của tam giác $M_0F_1F_2$, suy ra N, M_0, F_2 thẳng hàng. Với điểm M bất kì thuộc Δ, ta có

$MF_1 + MF_2 = MN + MF_2 \geq NF_2 = M_0N + M_0F_2 = M_0F_1 + M_0F_2$.

Vậy $MF_1 + MF_2 \geq M_0F_1 + M_0F_2$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv M_0$.



Hình 15-10

15.2. Giả sử trong hệ toạ độ Oxy, parabol (P) có phương trình $y^2 = 2px$, $M_0 = (x_0 ; y_0)$. Phương trình của Δ là $y_0y = p(x_0 + x) \Leftrightarrow px - y_0y + px_0 = 0$.

Đặt $f(x, y) = px - y_0y + px_0$. Ta có $f(0, 0) = px_0$. (1)

Giả sử $M_1(x_1 ; y_1)$ là điểm thuộc (P), $M_1 \neq M_0$. Ta có

$y_1^2 = 2px_1$, $y_0^2 = 2px_0$, suy ra $y_1^2 + y_0^2 = 2p(x_1 + x_0)$.

Từ đó, theo bất đẳng thức Cô-si, $2y_1y_0 < y_1^2 + y_0^2 = 2p(x_1 + x_0)$

$\Rightarrow y_1y_0 < p(x_1 + x_0) \Rightarrow f(x_1, y_1) = px_1 - y_0y_1 + px_0 > 0$. (2)

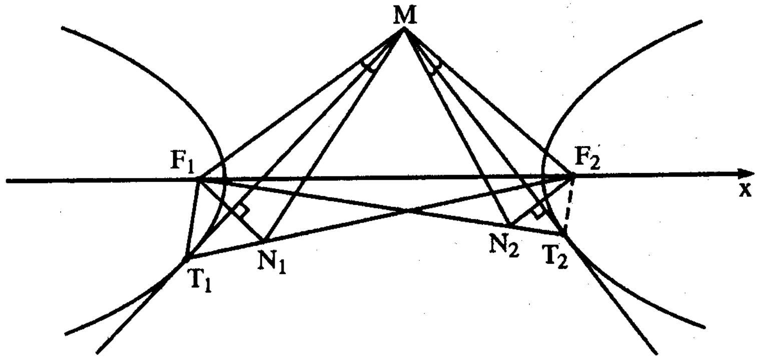
Từ (1) và (2) suy ra O và M_1 nằm cùng phía đối với Δ (với $x_0 > 0$).

Khi $M_0 \equiv O$, kết luận là hiển nhiên. Vậy mọi điểm của parabol, trừ O, nằm cùng phía đối với Δ.

15.3. Bằng cách tương tự VD 15.3, ta chứng minh được T_1M, T_2M tương ứng là phân giác của các góc $F_1T_1F_2$, $F_1T_2F_2$ (h.15-11).

Gọi N_1 là điểm đối xứng của F_1 qua MT_1, N_2 là điểm đối xứng của F_2 qua MT_2. Vì MT_1, MT_2 tương ứng là phân giác của các góc $F_1T_1F_2$ và $F_1T_2F_2$ nên $N_1 \in T_1F_2$, $N_2 \in T_2F_1$.

Ta có :



Hình 15-11

$F_1N_2 = |T_2F_1 - T_2N_2| = |T_2F_1 - T_2F_2| = 2a,$

$F_2N_1 = |T_1F_2 - T_1N_1| = |T_1F_2 - T_1F_1| = 2a$

$\Rightarrow F_1N_2 = F_2N_1.$

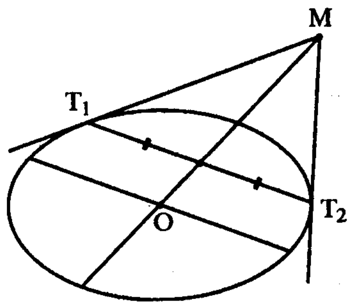
Mặt khác, do tính đối xứng ta có $MF_1 = MN_1$, $MF_2 = MN_2$, suy ra

$\Delta MF_1N_2 = \Delta MN_1F_2 \Rightarrow \widehat{F_1MN_2} = \widehat{F_2MN_1}$

$\Rightarrow \widehat{F_1MN_1} = \widehat{F_2MN_2} \Rightarrow \widehat{F_1MT_1} = \widehat{F_2MT_2}$ (đpcm).

15.4. (h.15-12) Xét elip (E) : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Giả sử $M = (x_0 ; y_0)$ Phương trình đường thẳng T_1T_2 là $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2} - 1 = 0$ (VD 15.10).

Phương trình đường thẳng OM là $y = \dfrac{y_0}{x_0}x$ hay $y_0x - x_0y = 0$. Như vậy đường kính của elip song song với T_1T_2 và đường kính tạo bởi đường thẳng OM là hai đường kính liên hợp. Theo hệ quả VD 10.6 thì dây cung T_1T_2 bị đường thẳng OM chia làm đôi.

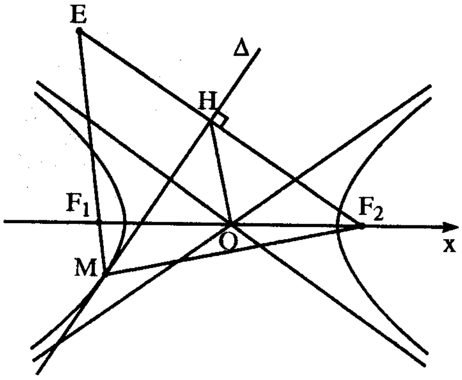


Hình 15-12

15.5. *HD*. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (P) tại $M(x_0 ; y_0)$ thuộc (P). Từ điều kiện vectơ chỉ phương của Δ vuông góc với vectơ $\overrightarrow{AM}$, kết hợp với hệ thức $y_0^2 = 2x_0$, tìm được toạ độ của M.

Đáp số : $M_1\left(\frac{1}{2}; -1\right), M_2\left(\frac{9}{8}; -\frac{3}{2}\right), M_3\left(\frac{25}{8}; \frac{5}{2}\right)$.

15.6. Gọi H là hình chiếu của tiêu điểm F_2 trên tiếp tuyến Δ ; E là điểm đối xứng của F_2 qua Δ. Theo VD 15.3, Δ là phân giác của góc $\widehat{F_1MF_2}$ (M là tiếp điểm của Δ và (H)), do đó E, F_1 M thẳng hàng và $ME = MF_2$. Từ đó $MF_2 - MF_1 = ME - MF_1 = EF_1 = 2a$, suy ra $OH = \frac{1}{2}EF_1 = a$.



Hình 15-13

Vậy H thuộc đường tròn tâm O, bán kính bằng a. Chứng minh tương tự ta thấy hình chiếu của F_1 trên Δ cũng nằm trên đường tròn này.

15.7. Giả sử $M(x_0 ; y_0) \in (P)$, $x_0 > 0$. Tham số tiêu $p = 2$.

Xét trường hợp $y_0 > 0$. Khi đó $M = \left(x_0 ; 2\sqrt{x_0}\right)$.

Phương trình đường thẳng MN : $y_0y = 2(x_0 + x)$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x_0}\, y = 2(x_0 + x)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x_0}y = x_0 + x$.

$$\Rightarrow N = \left(-1 ; \frac{x_0 - 1}{\sqrt{x_0}}\right) = \left(-1 ; \sqrt{x_0} - \frac{1}{\sqrt{x_0}}\right)$$

$$\Rightarrow MN^2 = (x_0 + 1)^2 + \left(\sqrt{x_0} + \frac{1}{\sqrt{x_0}}\right)^2 = (x_0 + 1)^2 + \frac{(x_0 + 1)^2}{x_0}$$

$$= (x_0 + 1)^2\left(1 + \frac{1}{x_0}\right) = \frac{(x_0 + 1)^3}{x_0} = \frac{\left(x_0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^3}{x_0} \geq \frac{\left(3\sqrt[3]{x_0.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}}\right)^3}{x_0}$$

$$= \frac{27}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}$. Vậy $M = \left(\frac{1}{2}\,;\sqrt{2}\right)$.

Tương tự, với $y_0 < 0$ ta tìm được $M' = \left(\frac{1}{2}\,;-\sqrt{2}\right)$.

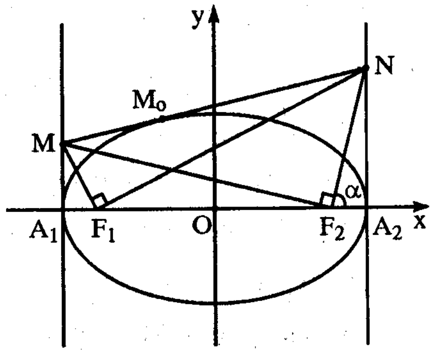
15.8. (h.15-14)

a) Phương trình tiếp tuyến Δ là

$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ với tiếp điểm $M_0(x_0\,;y_0)$,

suy ra toạ độ giao điểm của Δ với các đường thẳng $x = -a$, $x = a$ lần lượt là

$$M=\left(-a\,;\frac{b^2}{y_0}.\frac{a+x_0}{a}\right)\,;\ N=\left(a\,;\frac{b^2}{y_0}.\frac{a-x_0}{a}\right).$$



Hình 15-14

Ta có $\overrightarrow{F_2M} = \left(-a-c\,;\frac{b^2}{y_0}.\frac{a+x_0}{a}\right)$

$$\overrightarrow{F_2N} = \left(a-c\,;\frac{b^2}{y_0}.\frac{a-x_0}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{F_2M}.\overrightarrow{F_2N} = \left(c^2-a^2\right)+\frac{b^4}{y_0^2}.\frac{a^2-x_0^2}{a^2} = -b^2+\frac{b^4}{y_0^2}\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)$$

$$= -b^2+\frac{b^4}{y_0^2}.\frac{y_0^2}{b^2} = -b^2+b^2=0,$$

$\Rightarrow \overrightarrow{F_2M} \perp \overrightarrow{F_2N}$. Vậy $\widehat{MF_2N} = 90^\circ$.

Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được $\widehat{MF_1N} = 90^\circ$.

Nhận xét. Ta có thể chứng minh được chiều ngược lại của kết quả trên : Nếu M, N theo thứ tự thuộc các đường thẳng $x = -a$, $x = a$ sao cho $\widehat{MF_1N} = 90^\circ$ hoặc $\widehat{MF_2N} = 90^\circ$ thì MN là tiếp tuyến của (E).

b) Đặt $\widehat{NF_2A_2} = \alpha$ thì $\widehat{MF_2A_1} = 90^\circ - \alpha$.

Ta có $S_{MF_2N} = \frac{1}{2}F_2M.F_2N = \frac{1}{2}.\frac{A_1F_2}{\cos(90^\circ-\alpha)}.\frac{A_2F_2}{\cos\alpha}$

$$= \frac{(a+c)(a-c)}{\sin 2\alpha} = \frac{a^2-c^2}{\sin 2\alpha} = \frac{b^2}{\sin 2\alpha} \geq b^2.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45^o$.

Vậy diện tích tam giác MF_2N bằng b^2, đạt được khi $\alpha = 45^o$.

Bạn đọc có thể kiểm tra khi đó $x_0 = c$ và điểm M_0 chính là giao điểm của elip với đường thẳng qua F_2, vuông góc với Ox.

15.9. (h.15-15) Giả sử Δ có phương trình

$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$,

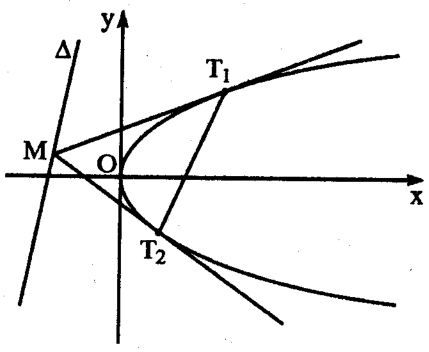
Xét $M(x_0 ; y_0) \in \Delta$, ta có

$$\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0. \qquad (1)$$

Đặt $T_1 = (x_1 ; y_1)$, $T_2 = (x_2 ; y_2)$, ta có phương trình $MT_1 : y_1y = p(x_1 + x)$, phương trình $MT_2 : y_2y = p(x_2 + x)$.

Vì $M \in MT_1$, $M \in MT_2$ nên

$$\begin{cases} y_1y_0 = p(x_1 + x_0) \\ y_2y_0 = p(x_2 + x_0). \end{cases}$$



Hình 15-15

Suy ra toạ độ của T_1 và T_2 thoả mãn phương trình $y_0y = p(x_0 + x)$.

Nói cách khác, phương trình của đường thẳng T_1T_2 là $y_0y = p(x_0 + x)$. $\qquad$ (2)

Trường hợp 1 : $\alpha \neq 0$ (Δ không song song với Ox).

Từ (1) suy ra $y_0\left(-\dfrac{p\beta}{\alpha}\right) = p\left(x_0 + \dfrac{\gamma}{\alpha}\right)$.

Để ý đến (2), ta thấy T_1T_2 đi qua điểm cố định $R\left(\dfrac{\gamma}{\alpha} ; -\dfrac{p\beta}{\alpha}\right)$.

Trường hợp 2 : $\alpha = 0$ (Δ song song với Ox).

Từ (1) suy ra $\beta y_0 + \gamma = 0 \Rightarrow -\gamma p + \beta p(-y_0) = 0$. $\qquad$ (3)

T_1T_2 có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (p ; -y_0)$.

Đặt $\vec{u} = (-\gamma ; \beta p)$. Từ (3) suy ra $\vec{n} \perp \vec{u} \Rightarrow T_1T_2 \,//\, \vec{u}$.

Vậy T_1T_2 có phương không đổi.

Nhận xét. Khi Δ là đường chuẩn của (P) tức $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = \dfrac{p}{2}$, đường thẳng T_1T_2 đi qua điểm cố định $F\left(\dfrac{p}{2} ; 0\right)$, chính là tiêu điểm của parabol.

15.10. *HD*. Sử dụng kết quả VD 15.7 và BT 11.3.

ĐS : $S_{AOB} = ab$.

15.11. Hiển nhiên các tiếp tuyến kẻ từ M tới hypebol không song song với trục tung. Phương trình tiếp tuyến qua $M(x_0 ; y_0)$ có dạng

$$y = k(x - x_0) + y_0 \text{ hay } kx - y + y_0 - kx_0.$$

Theo định lí 15.2 ta có

$$k^2a^2 - b^2 = (y_0 - kx_0)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2 - x_0^2\right)k^2 + 2x_0y_0k - b^2 - y_0^2 = 0. \quad (1)$$

Từ M kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc tới (H) khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm k_1, k_2 thoả mãn $k_1k_2 = -1$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2 + y_0^2}{a^2 - x_0^2} = 1 \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = a^2 - b^2 > 0.$$

Vậy M thuộc đường tròn tâm O, bán kính $\sqrt{a^2 - b^2}$.

15.12. Xét parabol $(P) : x^2 = 2py$.

Gọi các tiếp điểm của các đường thẳng BC, CA, AB với parabol lần lượt là M, N, P ; α, β, γ lần lượt là hoành độ của chúng.

Ta có $M = \left(\alpha ; \dfrac{\alpha^2}{2p}\right)$; $N = \left(\beta ; \dfrac{\beta^2}{2p}\right)$; $P = \left(\gamma ; \dfrac{\gamma^2}{2p}\right)$.

Phương trình tiếp tuyến BC là $\alpha x = p\left(y + \dfrac{\alpha^2}{2p}\right)$

$$\Leftrightarrow \alpha x - py - \frac{\alpha^2}{2} = 0. \quad (1)$$

Tương tự, phương trình tiếp tuyến CA là

$$\beta x - py - \frac{\beta^2}{2} = 0. \quad (2)$$

Phương trình tiếp tuyến AB : $\gamma x - py - \dfrac{\gamma^2}{2} = 0. \quad (3)$

Toạ độ của A là nghiệm của hệ (2), (3), giải hệ ta được $A = \left(\dfrac{\beta + \gamma}{2} ; \dfrac{\beta\gamma}{2p}\right)$.

Đường cao AH qua A, có vectơ pháp tuyến là vectơ chỉ phương $\vec{u} = (p\,;\,\alpha)$ của BC $\Rightarrow$ Phương trình của AH là

$$p\left(x - \frac{\beta+\gamma}{2}\right) + \alpha\left(y - \frac{\beta\gamma}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow px + \alpha y - \frac{p}{2}(\beta+\gamma) - \frac{\alpha\beta\gamma}{2} = 0. \qquad (4)$$

Tương tự, phương trình đường cao BH là

$$px + \beta y - \frac{p}{2}(\alpha+\gamma) - \frac{\alpha\beta\gamma}{2} = 0. \qquad (5)$$

Toạ độ trực tâm H là nghiệm của hệ (4), (5). Giải hệ này ta được

$$\begin{cases} y_H = -\dfrac{p}{2} \\ x_H = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2} + \dfrac{\alpha\beta\gamma}{2p}. \end{cases}$$

Vậy trực tâm H luôn thuộc đường thẳng $y = -\frac{p}{2}$, chính là đường chuẩn của (P).

MỤC LỤC