Mục lục

Lời nói đầu

Hòa nhịp với tuổi trẻ cả nước hoạt động sôi nổi kỉ niệm ngày thành lập Đoàn thanh niên Cộng sản Hồ Chí Minh và thi đua lập thành tích chào mừng ngày sinh của Bác Hồ kính yêu, tiến tới kỉ niệm 37 năm ngày giải phóng Nha Trang và thực hiện các chương trình đổi mới giáo dục phổ thông, Sở Giáo Dục và Đào tạo Khánh Hòa phối hợp với Hội Toán học Hà Nội đồng tổ chức Hội thảo khoa học Các chuyên đề Toán học bồi dưỡng học sinh giỏi THPT khu vực Duyên hải Nam Trung bộ và Tây nguyên.

Đây là hội thảo lần thứ hai theo tinh thần cam kết của các tỉnh duyên hải Nam Trung bộ và Tây Nguyên về việc hợp tác để phát triển kinh tế - văn hóa và xã hội. Sở Giáo dục và Đào tạo Phú Yên đã tiến hành tổ chức Hội thảo lần thứ nhất vào ngày 18-19/4/2011 tại thành phố Tuy Hòa về liên kết bồi dưỡng học sinh giỏi và bồi dưỡng học sinh giỏi môn toán trường Trung học phổ thông Chuyên các tỉnh duyên hải Nam Trung Bộ và Tây Nguyên. Tại Hội thảo lần thứ nhất đã thống nhất giao cho Sở Giáo dục và đào tạo Khánh Hòa tổ chức Hội thảo lần thứ hai. Đây là nét sinh hoạt truyền thống mới về sinh hoạt chuyên môn, về giao lưu hợp tác trong giáo dục, đào tạo và các sinh hoạt học thuật khác. Và thực tế, giờ đây, tại vùng duyên hải Nam Trung bộ và Tây Nguyên này đã xuất hiện ngày càng nhiều nét thành tích nổi bật, đã có học sinh đạt giải toán Olympic quốc tế. Năm nay, nhiều đội tuyển đạt giải cao trong kỳ thi học sinh giỏi quốc gia. Các tỉnh Đắk Lắc, Phú Yên đã mạnh dạn cử đội tuyển tham dự kỳ thi Olympic Hà Nội mở rộng bằng tiếng Anh và đã đạt giải cao.

Khu vực Duyên hải Nam Trung bộ và Tây nguyên giờ đây đã thực sự khởi sắc, tạo tiền đề để vươn lên tầm cao mới, chủ động hội nhập, sánh vai ngang bằng với các khu vực khác trong cả nước.

Hội thảo khoa học lần này được tiến hành từ 14-15/4/2012 tại thành phố Nha Trang, Khánh Hòa hân hạnh được đón tiếp nhiều nhà khoa học, nhà giáo lão thành, các nhà quản lý, các chuyên gia giáo dục và các nhà toán học báo cáo tại các phiên toàn thể và các cán bộ chỉ đạo chuyên môn từ các sở Giáo dục và Đào tạo, các thầy giáo, cô giáo bộ môn Toán các tỉnh, thành khu vực Duyên hải Nam Trung bộ và Tây nguyên đang trực tiếp bồi dưỡng học sinh giỏi môn Toán báo cáo tại các phiên chuyên đề của hội thảo.

Ban tổ chức đã nhận được trên 30 báo cáo toàn văn gửi tới hội thảo. Song do khuôn khổ rất hạn hẹp về thời gian, khâu chế bản và thời lượng của cuốn kỷ yếu, chúng tôi chỉ có thể đưa vào kỷ yếu được 22 bài, những bài còn lại sẽ được chế bản để gửi quý đại biểu khi thực hiện chương trình báo cáo chuyên đề chính thức của hội thảo.

Nội dung của kỷ yếu lần này rất phong phú, bao gồm hầu hết các chuyên đề phục vụ việc bồi dưỡng học sinh giỏi toán từ đại số, giải tích, hình học, số học đến các dạng toán liên quan khác. Bạn đọc có thể tìm thấy ở đây nhiều dạng toán từ các kỳ olympic trong nước và quốc tế, một số dạng toán về hàm số, lý thuyết nội suy, cực trị, ...

Ban tổ chức xin chân thành cảm ơn sự hợp tác và giúp đỡ hết sức quý báu của quý thầy giáo, cô giáo và đặc biệt là toàn thể tổ toán của trường THPT chuyên Lê Quý Đôn Nha Trang, Khánh Hòa để có được cuốn kỷ yếu với nội dung thiết thực và rất phong phú này.

Vì thời gian chuẩn bị rất gấp gáp, nên các khâu hiệu đính và chế bản cuốn kỷ yếu chưa được đầy đủ, chi tiết, chắc chắn còn chứa nhiều khiếm khuyết. Rất mong được sự cảm thông chia sẻ của quý đại biểu. Những ý kiến đóng góp liên quan đến cuốn kỷ yếu này xin gửi về địa chỉ: Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn, số 67 Yersin, Nha Trang, Khánh Hòa. Email: c3lqdon@khanhhoa.edu.vn.

Xin trân trọng cảm ơn.

Nha Trang ngày 25.03.2012

Nguyễn Văn Mậu

Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội
Đồng trưởng ban tổ chức hội thảo

NGUYÊN LÝ CỰC HẠN

Trần Nam Dũng, Trường Đại học KHTN Tp HCM

Bài viết này được phát triển từ bài viết "Các phương pháp và kỹ thuật chứng minh" mà chúng tôi đã trình bày tại Hội nghị "Các chuyên đề Olympic Toán chọn lọc" tại Ba Vì, Hà Nội, tháng 5-2010 và giảng dạy cho đội tuyển Olympic Việt Nam dự IMO 2010. Trong bài này, chúng tôi tập trung chi tiết hơn vào các ứng dụng của Nguyên lý cực hạn trong giải toán.
Một tập hợp hữu hạn các số thực luôn có phần tử lớn nhất và phần tử nhỏ nhất. Một tập con bất kỳ của N luôn có phần tử nhỏ nhất. Nguyên lý đơn giản này trong nhiều trường hợp rất có ích cho việc chứng minh. Hãy xét trường hợp biên! Đó là khẩu quyết của nguyên lý này.

1 Một số ví dụ mở đầu

Ta xem xét một số ví dụ sử dụng nguyên lý cực hạn

Ví dụ 1. *Có 3 trường học, mỗi trường có n học sinh. Mỗi một học sinh quen với ít nhất $n + 1$ học sinh từ hai trường khác. Chứng minh rằng người ta có thể chọn ra từ mỗi trường một bạn sao cho ba học sinh được chọn đôi một quen nhau.*

Lời giải. Gọi A là học sinh có nhiều bạn nhất ở một trường khác. Gọi số bạn nhiều nhất này là k. Giả sử A ở trường thứ nhất và tập những bạn quen A là $M = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ ở trường thứ 2. Cũng theo giả thiết, có ít nhất 1 học sinh C ở trường thứ 3 quen với A. Vì C quen không quá k học sinh ở trường thứ nhất nên theo giả thiết C quen với ít nhất $n + 1 - k$ học sinh của trường thứ hai, đặt $N = \{D_1, D_2, ..., D_m\}$ là những người quen C ở trường thứ hai thì $m \le n+1-k$. Vì M, N đều thuộc tập hợp gồm n học sinh và $|M|+|N| \ge k+n+1-k = n+1$ nên ta có $M \cap N \neq \emptyset$. Chọn B nào đó thuộc $M \cap N$ thì ta có A, B, C đôi một quen nhau.

Ví dụ 2. *Chứng minh rằng không tồn tại số n lẻ, $n > 1$ sao cho $15^n + 1$ chia hết cho n*

Lời giải. Giả sử tồn tại một số nguyên lẻ $n > 1$ sao cho $15^n + 1$ chia hết cho n. Gọi p là ước số nguyên tố nhỏ nhất của n, khi đó p lẻ. Giả sử k là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $15^k - 1$ chia hết cho p (số k được gọi là bậc của 15 theo modulo p).
Vì $15^{2n} - 1 = (15^n - 1)(15^n + 1)$ chia hết cho p. Mặt khác, theo định lý nhỏ Fermat thì $15^{p-1} - 1$ chia hết cho p. Theo định nghĩa của k, suy ra k là ước số của các số $p - 1$ và $2n$. Suy ra $k|(p-1, 2n)$. Do p là ước số nguyên tố nhỏ nhất của n nên $(n, p-1) = 1$. Suy ra $(p-1, 2n) = 2$. Vậy $k|2$. Từ đó $k = 1$ hoặc $k = 2$. Cả hai trường hợp này đều dẫn tới $p = 7$. Nhưng điều này mâu thuẫn vì $15^n + 1$ luôn đồng dư $2 \bmod 7$

Trong hai ví dụ trên, rõ ràng việc xét các trường hợp biên đã đem đến cho chúng ta những thông tin bổ sung quan trọng. Trong ví dụ thứ nhất, việc chọn A là học sinh có số người quen nhiều nhất ở một trường khác đã cho ta thông tin số người quen của C trong trường thứ hai ít nhất là $n + 1 - k$. Trong ví dụ thứ hai, do p là ước số nguyên tố nhỏ nhất nên $p - 1$ nguyên tố cùng nhau với n là bội số của p.
Bài tập

1. Cho n điểm xanh và n điểm đỏ trên mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng ta có thể nối $2n$ điểm này bằng n đoạn thẳng có đầu mút khác màu sao cho chúng đôi một không giao nhau.
2. Trên đường thẳng có $2n+1$ đoạn thẳng. Mỗi một đoạn thẳng giao với ít nhất n đoạn thẳng khác. Chứng minh rằng tồn tại một đoạn thẳng giao với tất cả các đoạn thẳng còn lại.
3. Trong mặt phẳng cho $n > 1$ điểm. Hai người chơi lần lượt nối một cặp điểm chưa được nối bằng một véc-tơ với một trong hai chiều. Nếu sau nước đi của người nào đó tổng các véc tơ đã vẽ bằng 0 thì người thứ hai thắng; nếu cho đến khi không còn vẽ được véc tơ nào nữa mà tổng vẫn chưa có lúc nào bằng 0 thì người thứ nhất thắng. Hỏi ai là người thắng cuộc nếu chơi đúng?
4. Giả sử n là số nguyên dương sao cho $2^n + 1$ chia hết cho n.
a) Chứng minh rằng nếu $n > 1$ thì n chia hết cho 3;
b) Chứng minh rằng nếu $n > 3$ thì n chia hết cho 9;
c) Chứng minh rằng nếu $n > 9$ thì n chia hết cho 27 hoặc 19;
d) Chứng minh rằng nếu n chia hết cho số nguyên tố $p \neq 3$ thì $p \geq 19$;
e)* Chứng minh rằng nếu n chia hết cho số nguyên tố p, trong đó $p \neq 3$ và $p \neq 19$ thì $p \geq 163$.

2 Phương pháp phản ví dụ nhỏ nhất

Trong việc chứng minh một số tính chất bằng phương pháp phản chứng, ta có thể có thêm một số thông tin bổ sung quan trọng nếu sử dụng *phản ví dụ nhỏ nhất*. Ý tưởng là để chứng minh một tính chất A cho một cấu hình P, ta xét một đặc trưng $f(P)$ của P là một hàm có giá trị nguyên dương. Bây giờ giả sử tồn tại một cấu hình P không có tính chất A, khi đó sẽ tồn tại một cấu hình P_0 không có tính chất A với $f(P_0)$ nhỏ nhất. Ta sẽ tìm cách suy ra điều mâu thuẫn. Lúc này, ngoài việc chúng ta có cấu hình P_0 không có tính chất A, ta còn có mọi cấu hình P với $f(P) < f(P_0)$ đều có tính chất A.

Ví dụ 3. *Cho ngũ giác lồi ABCDE trên mặt phẳng toạ độ có toạ độ các đỉnh đều nguyên.*
a) Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 1 điểm nằm trong hoặc nằm trên cạnh của ngũ giác (khác với A, B, C, D, E) có toạ độ nguyên.
b) Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 1 điểm nằm trong ngũ giác có toạ độ nguyên.
c) Các đường chéo của ngũ giác lồi cắt nhau tạo ra một ngũ giác lồi nhỏ $A_1B_1C_1D_1E_1$ bên trong. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 1 điểm nằm trong hoặc trên biên ngũ giác lồi $A_1B_1C_1D_1E_1$.

Câu a) có thể giải quyết dễ dàng nhờ *nguyên lý Dirichlet*: Vì có 5 điểm nên tồn tại ít nhất 2 điểm X, Y mà cặp toạ độ (x, y) của chúng có cùng tính chẵn lẻ (ta chỉ có 4 trường hợp (chẵn, chẵn), (chẵn, lẻ), (lẻ, chẵn) và (lẻ, lẻ)). Trung điểm Z của XY chính là điểm cần tìm.
Sang câu b) lý luận trên đây chưa đủ, vì nếu XY không phải là đường chéo mà là cạnh thì Z có thể sẽ nằm trên biên. Ta xử lý tình huống này như sau. Để ý rằng nếu XY là một cạnh, chẳng hạn là cạnh AB thì ZBCDE cũng là một ngũ giác lồi có các đỉnh có toạ độ đều nguyên và ta có thể lặp lại lý luận nêu trên đối với ngũ giác ZBCDE, … Ta có thể dùng *đơn biến* để chứng minh quá trình này không thể kéo dài mãi, và đến một lúc nào đó sẽ có 1 ngũ giác có điểm nguyên nằm trong.
Tuy nhiên, ta có thể trình bày lại lý luận này một cách gọn gàng như sau: Giả sử tồn tại một ngũ giác nguyên mà bên trong không chứa một điểm nguyên nào (phản ví dụ). Trong tất cả

các ngũ giác như vậy, chọn ngũ giác ABCDE có diện tích nhỏ nhất (phản ví dụ nhỏ nhất). Nếu có nhiều ngũ giác như vậy thì ta chọn một trong số chúng. Theo lý luận đã trình bày ở câu a), tồn tại hai đỉnh X, Y có cặp toạ độ cùng tính chẵn lẻ. Trung điểm Z của XY sẽ có toạ độ nguyên. Vì bên trong ngũ giác ABCDE không có điểm nguyên nào nên XY phải là một cạnh nào đó. Không mất tính tổng quát, giả sử đó là AB. Khi đó ngũ giác ZBCDE có toạ độ các đỉnh đều nguyên và có diện tích nhỏ hơn diện tích ngũ giác ABCDE. Do tính nhỏ nhất của ABCDE (phản ví dụ nhỏ nhất phát huy tác dụng!) nên bên trong ngũ giác ZBCDE có 1 điểm nguyên T. Điều này mâu thuẫn vì T cũng nằm trong ngũ giác ABCDE.
Phản ví dụ nhỏ nhất cũng là cách rất tốt để trình bày một chứng minh quy nạp (ở đây thường là quy nạp mạnh), để tránh những lý luận dài dòng và thiếu chặt chẽ.

Ví dụ 4. *Chứng minh rằng nếu a, b là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau thì tồn tại các số nguyênx, y sao cho $ax + by = 1$.*

Lời giải. Giả sử khẳng định đề bài không đúng, tức là tồn tại hai số nguyên dương a, b nguyên tố cùng nhau sao cho không tồn tại x, y nguyên sao cho $ax + by = 1$. Gọi a_0, b_0 là một cặp số như vậy với $a_0 + b_0$ nhỏ nhất (phản ví dụ nhỏ nhất).
Vì $(a_0, b_0) = 1$ và $(a_0, b_0) \neq (1, 1)$ (do $1.0 + 1.1 = 1$) nên $a_0 \neq b_0$. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $a_0 > b_0$. Dễ thấy $(a_0 - b_0, b_0) = (a_0, b_0) = 1$. Do $a_0 \breve{} b_0 + b_0 = a_0 < a_0 + b_0$ nên do tính nhỏ nhất của phản ví dụ, ta suy ra $(a_0 - b_0, b_0)$ không là phản ví dụ, tức là tồn tại x, y sao cho $(a_0 - b_0)x + b_0 y = 1$. Nhưng từ đây thì $a_0 x + b_0(y - x) = 1$. Mâu thuẫn đối với điều giả sử. Vậy điều giả sử là sai và bài toán được chứng minh.
Bài tập
5. Giải phần c) của ví dụ 3.
6. Trên mặt phẳng đánh dấu một số điểm. Biết rằng 4 điểm bất kỳ trong chúng là đỉnh của một tứ giác lồi. Chứng minh rằng tất cả các điểm được đánh dấu là đỉnh của một đa giác lồi.

3 Nguyên lý cực hạn và bất đẳng thức

Nguyên lý cực hạn thường được áp dụng một cách hiệu quả trong các bất đẳng thức có tính tổ hợp, dạng chứng minh tồn tại k số từ n số thỏa mãn một điều kiện này đó.

Ví dụ 5. (Moscow MO 1984) Trên vòng tròn người ta xếp ít nhất 4 số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng tổng tất cả các tích các cặp số kề nhau không lớn hơn $\frac{1}{4}$.

Lời giải. Ta cần chứng minh rằng với mọi $n \geq 4$ số thực không âm $a_1, ..., a_n$, có tổng bằng 1, ta có bất đẳng thức

$$a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1 \leq \frac{1}{4}.$$

Với n chẵn ($n = 2m$) điều này có thể chứng minh dễ dàng: đặt $a_1 + a_3 + ... + a_{2m-1} = a$; khi đó, rõ ràng,

$$a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1 \leq (a_1 + a_3 + ... + a_{2m-1}) \times (a_2 + a_4 + ... + a_{2m}) = a(1 - a) \leq \frac{1}{4}.$$

Giả sử n lẻ và a_k là số nhỏ nhất trong các số đã cho. (Để thuận tiện, ta giả sử $1 < k < n-1$ - điều này không làm mất tính tổng quát khi $n \geq 4$.) Đặt $b_i = a_i$, với $i = 1, ..., k-1, b_k = a_k + a_{k+1}$ và $b_i = a_{i+1}$ với $i = k+1, ..., n-1$. Áp dụng bất đẳng thức của chúng ta cho các số $b_1, ..., b_{n-1}$, ta được:

$$a_1a_2 + ... + a_{k-2}a_{k-1} + (a_{k-1} + a_{k+2})b_k + a_{k+2}a_{k+3} + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1 \leq \frac{1}{4}.$$

Cuối cùng, ta sử dụng bất đẳng thức

$$a_{k-1}a_k + a_ka_{k+1} + a_{k+1}a_{k+2} \leq a_{k-1}a_k + a_{k-1}a_{k+1} + a_{k+1}a_{k+2} \leq (a_{k-1} + a_{k+2})b_k,$$

để suy ra điều phải chứng minh.
Đánh giá trên đây là tốt nhất; dấu bằng xảy ra khi 2 trong n số bằng $\frac{1}{2}$, còn các số còn lại bằng 0.

Ví dụ 6. *Cho $n \geq 4$ và các số thực phân biệt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thoả mãn điều kiện*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1.$$

Chứng minh rằng tồn tại 4 số a, b, c, d thuộc $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ sao cho

$$a + b + c + nabc \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^3 \leq a + b + d + nabd.$$

Lời giải. Nếu $a \leq b \leq c$ là ba số nhỏ nhất trong các a_i thì với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$ ta có bất đẳng thức

$$(a_i - a)(a_i - b)(a_i - c) \geq 0$$

Suy ra

$$a_i^3 \geq (a + b + c)a_i^2 - (ab + bc + ca)a_i + abc \text{ với mọi } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Cộng tất cả các bất đẳng thức này, với chú ý $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 0, \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$ ta được

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^3 \geq a + b + c + nabc.$$

Bây giờ nếu chọn d là số lớn nhất trong các a_i thì ta có

$$(a_i - a)(a_i - b)(a_i - d) \leq 0$$

với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$. Và cũng thực hiện tương tự như trên, ta suy ra bất đẳng thức vế phải của bất đẳng thức kép cần chứng minh.

Ví dụ 7. *Tổng bình phương của một 100 số thực dương lớn hơn 10000. Tổng của chúng nhỏ hơn 300. Chứng minh rằng tồn tại 3 số trong chúng có tổng lớn hơn 100.*

Lời giải. Giả sử 100 số đó là $C_1 \geq C_2 \geq ... \geq C_{100} > 0$. Nếu như $C_1 \geq 100$, thì $C_1 + C_2 + C_3 > 100$. Do đó ta có thể giả sử rằng $C_1 < 100$. Khi đó $100 - C_1 > 0, 100 - C_2 > 0, C_1 - C_2 \geq 0, C_1 - C_3 \geq 0$, vì vậy

$$\begin{aligned} 100(C_1 + C_2 + C_3) &\geq 100(C_1 + C_2 + C_3) - (100 - C_1)(C_1 - C_3) - (100 - C_2)(C_2 - C_3) \\ &= C_1^2 + C_2^2 + C_3(300 - C_1 - C_2) \\ &> C_1^2 + C_2^2 + C_3(C_3 + C_4 + \ldots + C_100) \\ &\geq C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + \ldots + C_{100}^2) > 10000. \end{aligned}$$

Suy ra, $C_1 + C_2 + C_3 > 100$.

Bài tập

7. Trong mỗi ô của bảng $2 \times n$ ta viết các số thực dương sao cho tổng các số của mỗi cột bằng 1. Chứng minh rằng ta có thể xoá đi ở mỗi cột một số sao cho ở mỗi hàng, tổng của các số còn lại không vượt quá $\frac{n+1}{4}$.

8. 40 tên trộm chia 4000 euro. Một nhóm gồm 5 tên trộm được gọi là nghèo nếu tổng số tiền mà chúng được chia không quá 500 euro. Hỏi số nhỏ nhất các nhóm trộm nghèo trên tổng số tất cả các nhóm 5 tên trộm bằng bao nhiêu?

4 Nguyên lý cực hạn và phương trình Diophant

Trong phần này, ta trình bày chi tiết ba ví dụ áp dụng nguyên lý cực hạn trong phương trình Fermat, phương trình Pell và phương trình dạng Markov.

Ví dụ 8. *Chứng minh rằng phương trình $x^4 + y^4 = z^2$ (1) không có nghiệm nguyên dương.*

Lời giải. Giả sử ngược lại, phương trình (1) có nghiệm nguyên dương, và (x, y, z) là nghiệm của (1) với z nhỏ nhất.

(1) Dễ thấy x^2, y^2, z đôi một nguyên tố cùng nhau

(2) Từ nghiệm của phương trình Pythagore, ta có tồn tại p, q sao cho

$$\begin{aligned} x^2 &= 2pq \\ y^2 &= p^2 - q^2 \\ z &= p^2 + q^2 \end{aligned}$$

(3) Từ đây, ta lại có một bộ ba Pythagore khác, vì $y^2 + q^2 = p^2$.

(4) Như vậy, tồn tại a, b sao cho

$$\begin{aligned} q &= 2ab \\ y &= a^2 - b^2 \\ p &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

a, b nguyên tố cùng nhau

(5) Kết hợp các phương trình này, ta được:

$$x^2 = 2pq = 2(a^2 + b^2)(2ab) = 4(ab)(a^2 + b^2)$$

(6) Vì ab và $a^2 + b^2$ nguyên tố cùng nhau, ta suy ra chúng là các số chính phương.
(7) Như vậy $a^2 + b^2 = P^2$ và $a = u^2, b = v^2$. Suy ra $P^2 = u^4 + v^4$.
(8) Nhưng bây giờ ta thu được điều mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của z vì:

$$P^2 = a^2 + b^2 = p < p^2 + q^2 = z < z^2.$$

(9) Như vậy điều giả sử ban đầu là sai, suy ra điều phải chứng minh.

Phương pháp trình bày ở trên còn được gọi là phương pháp xuống thang. Đây có lẽ là phương pháp mà Fermat đã nghĩ tới khi viết trên lề cuốn sách của Diophant những dòng chữ mà sau này được gọi là định lý lớn Fermat và đã làm điên đầu bao nhiêu thế hệ những nhà toán học.

Ví dụ 9. *Tìm tất cả các cặp đa thức $P(x), Q(x)$ thỏa mãn phương trình*

$$P^2(x) = (x^2 - 1)Q^2(x) + 1(1)$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta chỉ cần tìm nghiệm trong tập các đa thức có hệ số khởi đầu dương.
Nếu $(x + \sqrt{x^2 - 1})^n = P_n(x) + \sqrt{x^2 - 1}Q_n(x)(2)$ thì $(x - \sqrt{x^2 - 1})^n = P_n(x) - \sqrt{x^2 - 1}Q_n(x)$ (3)
Nhân (2) và (3) vế theo vế, ta được

$$\begin{aligned} 1 = (x + \sqrt{x^2 - 1})^n(x - \sqrt{x^2 - 1})^n &= (P_n(x) + \sqrt{x^2 - 1}Q_n(x))(P_n(x) - \sqrt{x^2 - 1}Q_n(x)) \\ &= P_n^2(x) - (x^2 - 1)Q_n^2(x) \end{aligned}$$

Suy ra cặp đa thức $P_n(x), Q_n(x)$ xác định bởi (2) và (3) là nghiệm của (1). Ta chứng minh đây là tất cả các nghiệm của (1). Thật vậy, giả sử ngược lại, tồn tại cặp đa thức $P(x), Q(x)$ không có dạng $P_n(x), Q_n(x)$ thỏa mãn (1). Ta xét cặp đa thức (P, Q) như vậy với $degQ$ nhỏ nhất. Đặt

$$(P(x) + \sqrt{x^2 - 1}Q(x))(x - \sqrt{x^2 - 1}) = P^*(x) + \sqrt{x^2 - 1}Q^*(x) \; (4)$$

Thì rõ ràng

$$(P(x) - \sqrt{x^2 - 1}Q(x))(x + \sqrt{x^2 - 1}) = P^*(x) - \sqrt{x^2 - 1}Q^*(x)$$

Suy ra (P^*, Q^*) cũng là nghiệm của (1).
Khai triển (4), ta thu được $P^*(x) = xP(x) - (x^2 - 1)Q(x), Q^*(x) = xQ(x) - P(x)$. Chú ý là từ (1) ta suy ra $(P(x) - xQ(x))(P(x) + xQ(x)) = -Q^2(x) + 1$. Vì $P(x)$ và $Q(x)$ đều có hệ số khởi đầu > 0 và $degP = degQ + 1$ nên ta có $deg(P(x) + xQ(x)) = degQ + 1$. Từ đây, do $deg(-Q^2(x) + 1) \leq 2deg(Q)$ nên ta suy ra $deg(Q^*(x)) \leq deg(Q) - 1 < degQ$.
Như vậy, theo cách chọn cặp (P, Q) thì tồn tại n sao cho $(P^*, Q^*) = (P_n, Q_n)$.
Nhưng khi đó từ (4) suy ra

$$\begin{aligned} P(x) + \sqrt{x^2 - 1}Q(x) &= (P^*(x) + \sqrt{x^2 - 1}Q^*(x))(x + \sqrt{x^2 - 1}) \\ &= (x + \sqrt{x^2 - 1})^n(x + \sqrt{x^2 - 1}) \\ &= (x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1} \end{aligned}$$

Suy ra $(P, Q) = (P_{n+1}, Qn + 1)$, mâu thuẫn.
Vậy điều giả sử là sai và ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 10. *Tìm tất cả các giá trị k sao cho phương trình $(x+y+z)^2 = kxyz$ có nghiệm nguyên dương.*

Lời giải. Giả sử k là một giá trị cần tìm. Gọi x_0, y_0, z_0 là nghiệm nguyên dương của phương trình

$$(x+y+z)^2 = kxyz(1)$$

có $x_0 + y_0 + z_0$ nhỏ nhất. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $x_0 \geq y_0 \geq z_0$.
Viết lại (1) dưới dạng $x^2 - (kyz - 2y - 2z)x + (y+z)^2 = 0$,
ta suy ra x_0 là nghiệm của phương trình bậc hai

$$x^2 - (ky_0z_0 - 2y_0 - 2z_0)x + (y_0 + z_0)^2 = 0(2)$$

Theo định lý Viet $x_1 = ky_0z_0 - 2y_0 - 2z_0 - x_0 = \frac{(y_0+z_0)^2}{x_0}$ cũng là nghiệm của (2). Từ đó (x_1, y_0, z_0) là nghiệm của (1). Cũng từ các công thức trên, ta suy ra x_1 nguyên dương. Tức là (x_1, y_0, z_0) là nghiệm nguyên dương của (1). Từ tính nhỏ nhất của $x_0 + y_0 + z_0$ ta $x_1 \geq x_0$. Từ đây ta có

$$ky_0z_0 - 2y_0 - 2z_0 - x_0 \geq x_0 \quad \text{và} \quad \frac{(y_0 + x_0)^2}{x_0} \geq x_0$$

Từ bất đẳng thức thứ hai ta suy ra $y_0 + z_0 \geq x_0$. Từ đó, áp dụng vào bất đẳng thức thứ nhất, ta được $ky_0z_0 \geq 4x_0$.
Cuối cùng, chia hai vế của đẳng thức $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 2x_0y_0 + 2y_0z_0 + 2z_0x_0 = kx_0y_0z_0$ cho $x_0y_0z_0$, ta được

$$\frac{x_0}{y_0z_0} + \frac{y_0}{x_0z_0} + \frac{z_0}{x_0y_0} + \frac{2}{z_0} + \frac{2}{x_0} + \frac{2}{y_0} = k.$$

Từ đó suy ra $\frac{k}{4} + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 \geq k$, tức là $k \leq \frac{32}{3}$. Suy ra $k \leq 10$.
Chú ý nếu $x_0 = 1$ thì $y_0 = z_0 = 1$ suy ra $k = 9$. Nếu $k \neq 9$ thì $x_0 \geq 2$ và đánh giá ở trên trở thành $\frac{k}{4} + 1 + \frac{1}{2} + 2 + 1 + 2 \geq k$ suy ra $k \leq \frac{26}{3}$, suy ra $k \leq 8$
Vậy giá trị $k = 10$ bị loại.
Với $k = 1$ phương trình có nghiệm, chẳng hạn (9, 9, 9)
Với $k = 2$ phương trình có nghiệm, chẳng hạn (4, 4, 8)
Với $k = 3$ phương trình có nghiệm, chẳng hạn (3, 3, 3)
Với $k = 4$ phương trình có nghiệm, chẳng hạn (2, 2, 4)
Với $k = 5$ phương trình có nghiệm, chẳng hạn (1, 4, 5)
Với $k = 6$ phương trình có nghiệm, chẳng hạn (1, 2,3)
Với $k = 8$ phương trình có nghiệm, chẳng hạn (1, 1, 2)
Với $k = 9$ phương trình có nghiệm, chẳng hạn (1, 1, 1)
Ngoài ra, ta có thể chứng minh được rằng trường hợp $k = 7$ phương trình không có nghiệm nguyên dương (xin được dành cho bạn đọc).
Vậy các giá trị k cần tìm là $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9$.

Ví dụ 11. (CRUX, Problem 1420) Nếu a, b, c là các số nguyên dương sao cho

$$0 < a^2 + b^2 - abc \leq c$$

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 - abc$ là số chính phương.

Lời giải. Giả sử ngược lại rằng tồn tại các số nguyên dương a, b, c sao cho $0 < a^2 + b^2 - abc \le c$ và $k = a^2 + b^2 - abc$ (1) không phải là số chính phương.
Bây giờ ta cố định k và c và xét tập hợp tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn phương trình (1), tức là ta xét

$$S(c, k) = \{(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 : a^2 + b^2 - abc = k\}$$

Giả sử (a, b) là cặp số thuộc S(c, k) có $a + b$ nhỏ nhất. Không mất tính tổng quát có thể giả sử $a \ge b$. Ta xét phương trình

$$x^2 - bcx + b^2 - k = 0$$

Ta biết rằng $x = a$ là một nghiệm của phương trình. Gọi a_1 là nghiệm còn lại của phương trình này thì $a_1 = bc - a = \frac{(b^2-k)}{a}$.
Ta có thể chứng minh được rằng (bạn đọc tự chứng minh!) a_1 nguyên dương. Suy ra (a_1, b) cũng thuộc S(c, k).
Tiếp theo ta có $a_1 = (b^2 - k)/a < a^2/a = a$, suy ra $a_1 + b < a + b$. Điều này mâu thuẫn với cách chọn (a, b).

Bài tập

9. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 3y^3 = 9z^3$ không có nghiệm nguyên dương.
10. Chứng minh rằng phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ không có nghiệm nguyên dương.
11. (IMO 88) Nếu $a, b, q = (a^2 + b^2)/(ab + 1)$ là các số nguyên dương thì q là số chính phương.
12. (PTNK 03). Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho phương trình $x^2 - (k^2 - 4)y^2 = -24$ có nghiệm nguyên dương.
13. (Mathlinks) Cho A là tập hợp hữu hạn các số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại tập hợp hữu hạn các số nguyên dương B sao cho $A \subset B$, $\prod\limits_{x \in B} x = \prod\limits_{x \in B} x^2$
14.* (AMM 1995) Cho x, y là các số nguyên dương sao cho $xy + x$ và $xy + y$ là các số chính phương. Chứng minh rằng có đúng một trong hai số x, y là số chính phương.
15. (IMO 2007) Cho a, b là các số nguyên dương sao cho $4ab - 1$ chia hết $(4a^2 - 1)^2$. Chứng minh rằng $a = b$.
16. (VMO 2012) Xét các số tự nhiên lẻ a, b mà a là ước số của $b^2 + 2$ và b là ước số của $a^2 + 2$. Chứng minh rằng a và b là các số hạng của dãy số tự nhiên (v_n) xác định bởi

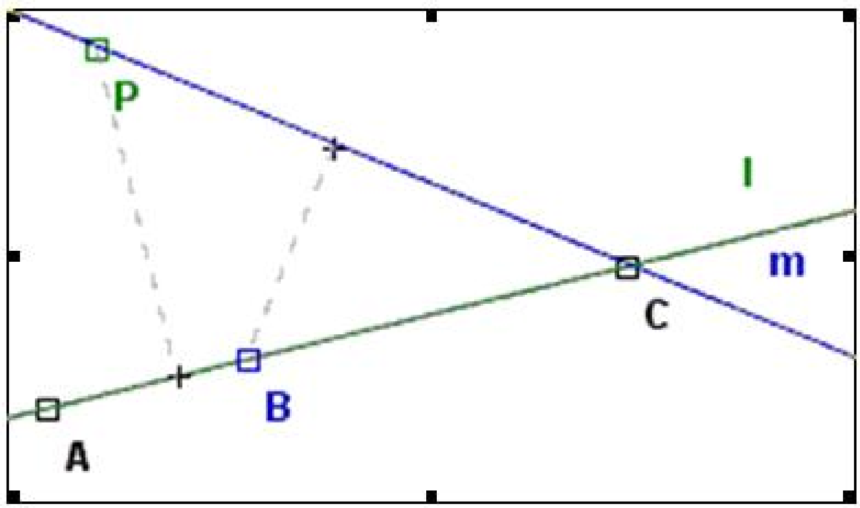
$$v_1 = v_2 = 1 \text{ và } v_n = 4v_{n-1} - v_{n-2} \text{ với mọi } n \ge 2.$$

5 Nguyên lý cực hạn trong tổ hợp

Trên đây chúng ta đã xem xét các ví dụ áp dụng của nguyên lý cực hạn trong mảnh đất màu mỡ nhất dành cho nguyên lý cực hạn. Nguyên lý cực hạn có thể được ứng dụng để chứng minh một quá trình là dừng (trong các bài toán liên quan đến biến đổi trạng thái) trong bài toán về đồ thị, hay trong các tình huống tổ hợp đa dạng khác. Các đối tượng thường được đem ra để xét cực hạn thường là: đoạn thẳng ngắn nhất, tam giác có diện tích lớn nhất, góc lớn nhất, đỉnh có bậc lớn nhất, chu trình có độ dài ngắn nhất ...
Dưới đây ta xem xét một số ví dụ:

Ví dụ 12. (Định lý Sylvester) Cho tập hợp S gồm hữu hạn các điểm trên mặt phẳng thỏa mãn tính chất sau: Một đường thẳng đi qua 2 điểm thuộc S đều đi qua ít nhất một điểm thứ ba thuộc S. Khi đó tất cả các điểm của S nằm trên một đường thẳng.

Kết luận của định lý nghe có vẻ hiển nhiên nhưng chứng minh nó thì không hề đơn giản. Chứng minh dưới đây của Kelly được chúng tôi tham khảo từ Wikipedia
Giả sử phản chứng là tồn tại một tập hợp S gồm hữu hạn điểm không thẳng hàng nhưng mọi đường thẳng qua hai điểm trong S đều chứa ít nhất ba điểm. Một đường thẳng gọi là đường nối nếu nó đi qua ít nhất hai điểm trong S. Giả sử (P,l) là cặp điểm và đường nối có khoảng cách dương nhỏ nhất trong mọi cặp điểm-đường nối.
Theo giả thiết, l đi qua ít nhất ba điểm trong S, nên nếu hạ đường cao từ P xuống l thì tồn



Hình 1:

tại ít nhất hai điểm nằm cùng một phía của đường cao (một điểm có thể nằm ở ngay chân đường cao). Trong hai điểm này, gọi điểm ở gần chân đường cao hơn là B, và điểm kia là C. Xét đường thẳng m nối P và C. Khoảng cách từ B tới m nhỏ hơn khoảng cách từ P tới l, mâu thuẫn với giả thiết về P và l. Một cách để thấy điều này là tam giác vuông với cạnh huyền BC đồng dạng và nằm bên trong tam giác vuông với cạnh huyền PC.
Do đó, không thể tồn tại khoảng cách dương nhỏ nhất giữa các cặp điểm-đường nối. Nói cách khác, mọi điểm đều nằm trên đúng một đường thẳng nếu mọi đường nối đều chứa ít nhất ba điểm.

Ví dụ 13. *Ví dụ 13. (Trận đấu toán học Nga 2010) Một quốc gia có 210 thành phố. Ban đầu giữa các thành phố chưa có đường. Người ta muốn xây dựng một số con đường một chiều nối giữa các thành phố sao cho: Nếu có đường đi từ A đến B và từ B đến C thì không có đường đi từ A đến C.Hỏi có thể xây dựng được nhiều nhất bao nhiêu đường?*

Lời giải. Gọi A là thành phố có nhiều đường đi nhất (gồm cả đường đi xuất phát từ A và đường đi đến A). Ta chia các thành phố còn lại thành 3 loại. Loại I - Có đường đi xuất phát từ A. Loại II - Có đường đi đến A. Loại III: Không có đường đi đến A hoặc xuất phát từ A. Đặt $m = |I|, n = |II|, p = |III|$. Ta có $m + n + p = 209$.
Dễ thấy giữa các thành phố loại I không có đường đi. Tương tự, giữa các thành phố loại 2 không có đường đi.

Số các đường đi liên quan đến các thành phố loại 3 không vượt quá $p(m+n)$. (Do bậc của $A = m+n$ là lớn nhất).
Tổng số đường đi bao gồm:
+ Các đường đi liên quan đến A: $m+n$
+ Các đường đi liên quan đến III : $\leq p(m+n)$
+ Các đường đi giữa I và II: $\leq mn$
Suy ra tổng số đường đi nhỏ hơn $mn + (p+1)m + (p+1)n \leq (m+n+p+1)^2/3 = 210^2/3$.

Dấu bằng xảy ra với đồ thị 3 phe, mỗi phe có 70 thành phố, thành phố phe 1 có đường đi đến thành phố phe 2, thành phố phe 2 có đường đi đến thành phố phe 3, thành phố phe 3 có đường đi đến thành phố phe 1.

Ví dụ 14. *Trong quốc hội Mỹ, mỗi một nghị sĩ có không quá 3 kẻ thù. Chứng minh rằng có thể chia quốc hội thành 2 viện sao cho trong mỗi viện, mỗi một nghị sĩ có không quá một kẻ thù.*

Đây là một ví dụ mà tôi rất thích. Có nhiều cách giải khác nhau nhưng ở đây chúng ta sẽ trình bày một cách giải sử dụng nguyên lý cực hạn. Ý tưởng tuy đơn giản nhưng có rất nhiều ứng dụng (trong nhiều bài toán phức tạp hơn).
Ta chia quốc hội ra thành 2 viện A, B một cách bất kỳ. Với mỗi viện A, B, ta gọi $s(A), s(B)$ là tổng của tổng số các kẻ thù của mỗi thành viên tính trong viện đó. Vì số cách chia là hữu hạn nên phải tồn tại cách chia (A_0, B_0) sao cho $s(A_0) + s(B_0)$ nhỏ nhất. Ta chứng minh cách chia này thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Giả sử rằng cách chia này vẫn chưa thoả mãn yêu cầu, tức là vẫn có một nghị sĩ nào đó có nhiều hơn 1 kẻ thù trong viện của mình. Không mất tính tổng quát, giả sử nghị sĩ x thuộc A_0 có ít nhất 2 kẻ thù trong A_0. Khi đó ta thực hiện phép biến đổi sau: chuyển x từ A_0 sang B_0 để được cách chia mới là $A' = A_0\ \{x\}$ và $B' = B_0 \cup \{x\}$. Vì x có ít nhất 2 kẻ thù trong A_0 và A' không còn chứa x nên ta có
$s(A') \leq s(A_0) - 4$ (trong tổng mất đi ít nhất 2 của $s(x)$ và 2 của các kẻ thù của x trong A_0)
Vì x có không quá 3 kẻ thù và có ít nhất 2 kẻ thù trong A_0 nên x có nhiều nhất 1 kẻ thù trong B_0 (hay B'), cho nên

$$s(B') \leq s(B_0) + 2$$

Từ đó $s(A') + s(B') \leq s(A_0) + s(B_0) - 2$. Mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của $s(A_0) + s(B_0)$. Vậy điều giả sử là sai, tức là cách chia (A_0, B_0) thỏa mãn yêu cầu bài toán (đpcm).

Bài tập

17. Cho 2n điểm trên mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng những điểm này có thể phân thành n cặp sao cho các đoạn thẳng nối chúng không cắt nhau.
18. Trong mặt phẳng cho 100 điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Biết rằng ba điểm bất kỳ trong chúng tạo thành một tam giác có diện tích không lớn hơn 1. Chứng minh rằng ta có thể phủ tất cả các điểm đã cho bằng một tam giác có diện tích 4.
19. Trên mặt phẳng cho $2n+3$ điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng và không có 4 điểm nào nằm trên một đường tròn. Chứng minh rằng ta có thể chọn ra từ các điểm này 3 điểm, sao cho trong các điểm còn lại có n điểm nằm trong đường tròn và n điểm nằm ngoài đường tròn.
20. Trong mặt phẳng cho n điểm và ta đánh dấu tất cả các điểm là trung điểm của các đoạn thẳng có đầu mút là các điểm đã cho. Chứng minh rằng có ít nhất $2n-3$ điểm phân biệt được đánh dấu.
21. Tại một quốc gia có 100 thành phố, trong đó có một số cặp thành phố có đường bay. Biết

rằng từ một thành phố bất kỳ có thể bay đến một thành phố bất kỳ khác (có thể nối chuyến). Chứng minh rằng có thể đi thăm tất cả các thành phố của quốc gia này sử dụng không quá a) 198 chuyến bay b) 196 chuyến bay.

22*. Trong một nhóm 12 người từ 9 người bất kỳ luôn tìm được 5 người đôi một quen nhau. Chứng minh rằng tìm được 6 người đôi một quen nhau trong nhóm đó.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu, *Các chuyên đề Olympic Toán chọn lọc*,Ba Vì , 5-2010 .

[2] Đoàn Quỳnh chủ biên, *Tài liệu giáo khoa chuyên toán - Đại số 10*, NXB GD, 2010.

[3] http://fermatslasttheorem.blogspot.com/2005/05/fermats-last-theorem-n-4.html

[4] vi.wikipedia.org/wiki/Định lý Sylvester-Gallai

[5] www.mathscope.org

[6] www.problems.ru

MỘT SỐ DẠNG TỔNG QUÁT CỦA PHƯƠNG TRÌNH HÀM PEXIDER VÀ ÁP DỤNG

Trịnh Đào Chiến, Trường Cao Đẳng Sư Phạm Gia Lai
Lê Tiến Dũng, Trường THPT Pleiku, Gia Lai

Phương trình hàm Pexider (PTHP) là phương trình hàm tổng quát trực tiếp của Phương trình hàm Cauchy quen thuộc. Bài viết này đề cập đến một số dạng tổng quát của PTHP và vài áp dụng của nó trong chương trình Toán phổ thông.

1 Phương trình hàm Pexider

PTHP cơ bản gồm bốn dạng dưới đây (lời giải có thể xem trong [1] hoặc [2])

Bài toán 1.1. *Tìm tất cả các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên R thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y) = g(x) + h(y), \quad \forall x, y \in R. \tag{1}$$

Giải. Nghiệm của phương trình (1) là

$$f(t) = ct + a + b, \quad g(t) = ct + a, \quad h(t) = ct + b; \quad a, b, c \in R.$$

Bài toán 1.2. *Tìm tất cả các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên R thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y) = g(x)\, h(y), \quad \forall x, y \in R. \tag{2}$$

Giải. Nghiệm của phương trình (2) là

$$f(t) = abe^c t, \quad g(t) = ae^c t, \quad h(t) = be^c; \quad a, b, c \in R$$

hoặc

$$f \equiv 0, \quad g \equiv 0, \quad h \in C_R,$$

trong đó C_R là tập hợp các hàm số liên tục trên R,
hoặc

$$f \equiv 0, \quad h \equiv 0, \quad g \in C_R.$$

Bài toán 1.3. *Tìm tất cả các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên R^+ thỏa mãn điều kiện*

$$f(xy) = g(x) + h(y), \quad \forall x, y \in R^+. \tag{3}$$

Giải. Nghiệm của phương trình (3) là

$$f(t) = m.lnt + a + b, \quad g(t) = m.lnt + a, \quad h(t) = m.lnt + b; \quad m, a, b, c \in R.$$

Bài toán 1.4. *Tìm tất cả các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên R^+ thỏa mãn điều kiện*

$$f(xy) = g(x)\, h(y), \quad \forall x, y \in R^+. \tag{4}$$

Giải. Nghiệm của phương trình (4) là

$$f(t) = abt^c, \quad g(t) = at^c, \quad h(t) = bt^c; \quad a, b, c \in R.$$

2 Một số dạng tổng quát của Phương trình hàm Pexider

Tùy theo mức độ kiến thức, PTHP có nhiều dạng tổng quát khác nhau. Dưới đây là một số dạng tổng quát của phương trình (1) gần gũi với chương trình của hệ phổ thông chuyên Toán.

Bài toán 2.1. *Tìm tất cả các hàm số f, f_i $(i = 1, 2, ..., n)$ xác định và liên tục trên R thỏa mãn điều kiện*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i), \quad \forall x, x_i \in R. \tag{5}$$

Giải. Đây là dạng quy nạp một cách tự nhiên của Bài toán 1.1. Nghiệm của phương trình (5) là

$$f(t) = at + \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad f_i(t) = at + a_i; \quad a, a_i \in R.$$

Tương tự Bài toán 2.1, ta cũng có thể giải được phương trình hàm dạng

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x_i), \quad \forall x, x_i \in R, \quad a_i \in R.$$

Bài toán sau đây là một dạng tổng quát khá cơ bản, mà phương pháp quy nạp không thể áp dụng trong lời giải. Một số phần chứng minh có sử dụng một số kiến thức cơ bản, không quá khó, của Đại số tuyến tính và Phương trình vi phân, thuộc chương trình cơ sở của Toán cao cấp.

Bài toán 2.2. *Tìm tất cả các hàm số f, f_i, g_i $(i = 1, 2, ..., n)$ xác định và tồn tại đạo hàm (theo mỗi biến số độc lập x, y) trên R thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, g_k(y), \quad \forall x, y \in R, \quad n \geq 2. \tag{6}$$

Giải. Ta giải bài toán này trong trường hợp $n = 2$. Trường hợp $n \geq 3$ được giải tương tự.

Xét phương trình hàm

$$f(x+y) = f_1(x)\, g_1(y) + f_2(x)\, g_2(y), \quad \forall x, y \in R, \tag{7}$$

trong đó các hàm f, f_1, f_2, g_1, g_2 xác định và tồn tại đạo hàm (theo mỗi biến số độc lập x, y) trên R.

Không mất tính tổng quát, ta luôn có thể giả thiết rằng các hệ hàm $\{f_1(x), f_2(x)\}$ và $\{g_1(x), g_2(x)\}$ là độc lập tuyến tính. Ta có

$$f'_x(x+y) = f'_1(x)\, g_1(y) + f'_2(x)\, g_2(y),$$

$$f'_y(x+y) = f_1(x)\, g'_1(y) + f_2(x)\, g'_2(y).$$

Vì $f'_x(x+y) = f'_y(x+y)$, nên

$$f'_1(x)\, g_1(y) + f'_2(x)\, g_2(y) = f_1(x)\, g'_1(y) + f_2(x)\, g'_2(y). \tag{8}$$

Ngoài ra, vì $\{g_1(x), g_2(x)\}$ là độc lập tuyến tính, nên tồn tại các hằng số y_1 , y_2 sao cho

$$\begin{vmatrix} g_1(y_1) & g_1(y_2) \\ g_2(y_1) & g_2(y_2) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Thay y_1, y_2 vào (8), ta được

$$f_1'(x)\, g_1(y_1) + f_2'(x)\, g_2(y_1) = f_1(x)\, g_1'(y_1) + f_2(x)\, g_2'(y_1),$$

$$f_1'(x)\, g_1(y_2) + f_2'(x)\, g_2(y_2) = f_1(x)\, g_1'(y_2) + f_2(x)\, g_2'(y_2).$$

Vì định thức nêu trên khác 0, nên hệ phương trình này có nghiệm duy nhất $f_1'(x)$, $f_2'(x)$. Do đó, ta có thể biểu diễn $f_1'(x)$ và $f_2'(x)$ qua $f_1(x)$ và $f_2(x)$ dưới dạng

$$f_1'(x) = a_{11}f_1(x) + a_{12}f_2(x), \quad f_2'(x) = a_{21}f_1(x) + a_{22}f_2(x). \tag{9}$$

Mặt khác, thay $y = 0$ vào (7), ta có

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x). \tag{10}$$

Suy ra

$$f'(x) = c_{11}f_1(x) + c_{12}f_2(x), \quad f''(x) = c_{21}f_1(x) + c_{22}f_2(x). \tag{11}$$

- Nếu $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = 0$, thì từ (10) và (11), ta thu được phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

$$a_1 f'(x) + a_2 f''(x) = 0,$$

trong đó a_1 và a_2 không đồng thời bằng 0. Giải phương trình vi phân này, ta tìm được $f(x)$.

Tất cả các hàm $f(x)$ này đều thỏa mãn (7) nên là nghiệm của phương trình.

- Nếu $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, thì từ (10) và (11), ta có thể biểu diễn $f_1(x)$ và $f_2(x)$ bởi một tổ hợp tuyến tính của $f'(x)$ và $f''(x)$. Thay biểu diễn này vào (5), ta thu được phương trình dạng

$$f(x) + a_1 f'(x) + a_2 f''(x) = 0.$$

Giải phương trình vi phân này, ta tìm được $f(x)$.

Tất cả các hàm $f(x)$ này đều thỏa mãn (7) nên là nghiệm của phương trình. Bài toán đã được giải quyết.

Dưới đây là một số trường hợp đặc biệt mà phương trình (7) trở thành một số phương trình hàm cơ bản. Những phương trình này khá nổi tiếng và đã có lời giải hoàn toàn sơ cấp (có thể xem trong [1] hoặc [2]).

- Với $f_1(x) = f(x)$, $g_1(y) \equiv 1$, $f_2(x) \equiv 1$, $g_2(y) = f(y)$, phương trình (7) trở thành Phương trình hàm Cauchy

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in R.$$

- Với $f_1(x) = g(x)$, $g_1(y) \equiv 1$, $f_2(x) \equiv 1$, $g_2(y) = h(y)$, phương trình (7) trở thành Phương trình hàm Pexider

$$f(x+y) = g(x) + h(y), \quad \forall x, y \in R.$$

- Với $f_2(x) \equiv 1$, phương trình (7) trở thành Phương trình hàm Vincze

$$f(x+y) = f_1(x)\, g_1(y) + g_2(y)\,, \quad \forall x, y \in R,$$

- Với $f_1(x) = f(x)$, $g_1(y) = g(y)$, $f_2(x) = g(x)$, $g_2(y) = f(y)$, phương trình (7) trở thành phương trình hàm dạng lượng giác (vì một nghiệm của phương trình này là $f(t) = sint$, $g(t) = cost$)

$$f(x+y) = f(x)\, g(y) + g(x)\, f(y)\,, \quad \forall x, y \in R.$$

3 Áp dụng

PTHP tổng quát có nhiều áp dụng trong việc nghiên cứu một số vấn đề liên quan của Toán phổ thông. Sau đây là một áp dụng liên quan đến các phép chuyển đổi bảo toàn yếu tố góc của một tam giác.

Bài toán 3.1. *Tìm tất cả các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên R thỏa mãn điều kiện sau: "Nếu $A, B, C \in R$, $A+B+C = \pi$, thì $A_1+B_1+C_1 = \pi$", trong đó $A_1 = f(A)$, $B_1 = f(B)$, $C_1 = f(C)$.*

Giải. Giả sử các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên R thỏa mãn điều kiện trên. Ta có

$$A_1 + B_1 + C_1 = \pi \Rightarrow f(A) + f(B) + f(C) = \pi \Rightarrow$$

$$f(\pi - B - C) = \pi - f(B) - f(C)\,. \tag{12}$$

Đặt $F(x) = f(\pi - x)$, $G(x) = \dfrac{\pi}{2} - g(x)$, $H(x) = \dfrac{\pi}{2} - h(x)$. Khi đó, phương trình (12) có dạng

$$F(B+C) = G(B) + H(C)\,. \tag{13}$$

Phương trình (13) chính là Phương trình Pexider đã biết. Nghiệm liên tục tổng quát của phương trình này là

$$F(x) = ax + c_1 + c_2, \quad G(x) = ax + c_1, \quad H(x) = ax + c_2,$$

trong đó $a, c_1, c_2 \in R$.

Do đó

$$f(x) = a(\pi - x) + c_1 + c_2, \quad g(x) = \frac{\pi}{2} - ax - c_1, \quad h(x) = \frac{\pi}{2} - ax - c_2. \tag{14}$$

Đặt $a = -k$, $c_1 + c_2 + a\pi = \lambda\pi$, $\dfrac{\pi}{2} - c_1 = \mu\pi$, $\dfrac{\pi}{2} - c_2 = \gamma\pi$. Thế thì $k + \lambda + \mu + \gamma = 1$. Khi đó, bởi (14), ta thu được

$$f(x) = kx + \lambda\pi, \quad g(x) = kx + \mu\pi, \quad h(x) = kx + \gamma\pi,$$

trong đó $k + \lambda + \mu + \gamma = 1$.

Rõ ràng các hàm số f, g, h nêu trên thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Bài toán 3.2. *Tìm tất cả các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên R thỏa mãn điều kiện sau: "Nếu $A, B, C \geq 0$, $A + B + C = \pi$, thì $A_1, B_1, C_1 \geq 0$, $A_1 + B_1 + C_1 = \pi$", trong đó*

$A_1 = f(A),\ B_1 = f(B),\ C_1 = f(C)\,.$
Giải. Tương tự cách giải trên, ta tìm được

$$f(x) = kx + \lambda\pi,\quad g(x) = kx + \mu\pi,\quad h(x) = kx + \gamma\pi,$$

trong đó $\lambda \geq 0,\ \ \mu \geq 0,\ \ k + \lambda \geq 0,\ \ k + \mu \geq 0,\ \ \lambda + \mu \leq 1,\ \ k + \lambda + \mu \leq 1.$

Kết quả của Bài toán 3.2 có nhiều áp dụng trong các phép chuyển đổi bảo toàn yếu tố góc trong tam giác, chẳng hạn các Hệ quả sau đây mà phần chứng minh dành cho bạn đọc

Hệ quả 3.1. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác, thì A_1, B_1, C_1 xác định như sau*

$$A_1 = \frac{B+C}{2},\ \ B_1 = \frac{C+A}{2},\ \ C_1 = \frac{A+B}{2}$$

cũng là ba góc của một tam giác.

Hệ quả 3.2. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác thỏa mãn $\max\{A, B, C\} < \dfrac{\pi}{2}$, tức là tam giác ABC nhọn, thì A_1, B_1, C_1 xác định như sau*

$$A_1 = \pi - 2A,\ \ B_1 = \pi - 2B,\ \ C_1 = \pi - 2C$$

cũng là ba góc của một tam giác.

Hệ quả 3.3. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác, thì A_2, B_2, C_2 xác định như sau*

$$A_2 = \frac{A}{2},\quad B_2 = \frac{B}{2},\quad C_2 = \frac{\pi + C}{2}$$

cũng là ba góc của một tam giác, trong đó C_2 là góc tù.

Hệ quả 3.4. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác, trong đó C là góc tù, thì A_2, B_2, C_2 xác định như sau*

$$A_2 = 2A,\quad B_2 = 2B,\quad C_2 = 2\pi - C$$

cũng là ba góc của một tam giác.

Hệ quả 3.5. *Nếu tam giác ABC có ba góc nhọn (hoặc vuông tại C), thì A_3, B_3, C_3 xác định như sau*

$$A_3 = \frac{\pi}{2} - A,\quad B_3 = \frac{\pi}{2} - B,\quad C_3 = \pi - C,$$

cũng là ba góc của một tam giác tù (hoặc vuông tại C_3).

Hệ quả 3.6. *Nếu tam giác ABC có góc C tù (hoặc vuông), thì A_3, B_3, C_3 xác định như sau*

$$A_3 = \frac{\pi}{2} - A,\quad B_3 = \frac{\pi}{2} - B,\quad C_3 = \pi - C,$$

cũng là ba góc của một tam giác nhọn (hoặc vuông tại C_3).

Bây giờ, mở rộng một cách tự nhiên các bài toán trên, ta có các bài toán sau

Bài toán 3.3. *Tìm tất cả các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên R thỏa mãn điều kiện sau: "Nếu $A_i \in R$, $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = (n-2)\pi$, thì $\sum\limits_{i=1}^{n} A'_i = (n-2)\pi$", trong đó $A'_i = f(A_i)$.*

Giải. Tương tự cách giải Bài toán 3.1, trong đó phương trình hàm cảm sinh chính là Phương trình hàm Perxider tổng quát. Các hàm số tìm được là

$$f_i(x) = k_0 x + k_i (n-2)\pi \quad (i = 1, ..., n,\ \ n \geq 3)\,,$$

trong đó $\sum\limits_{j=0}^{n} k_j = 1$.

Tương tự, mở rộng Bài toán 3.2, ta thu được

Bài toán 3.4. *Tìm tất cả các hàm số f_i $(i = 1, ..., n, n \geq 3)$ xác định và liên tục trên R thỏa mãn điều kiện sau: "Nếu $0 \leq A_i \leq 2\pi$, $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = (n-2)\pi$, thì $0 \leq A'_i \leq 2\pi$, $\sum\limits_{i=1}^{n} A'_i = (n-2)\pi$", trong đó $A'_i = f(A_i)$.*

Giải. Tương tự cách giải Bài toán 3.2, trong đó phương trình hàm cảm sinh chính là Phương trình hàm Perxider tổng quát. Các hàm số tìm được là

$$f_i(x) = k_0 x + k_i(n-2)\pi \quad (i = 1, ..., n, \quad n \geq 3),$$

trong đó $0 \leq k_i(n-2) \leq 2$, $0 \leq 2k_0 + k_i(n-2) \leq 2$.

Thu hẹp giả thiết của Bài toán 3.4, ta thu được

Bài toán 3.5. *Tìm tất cả các hàm số f_i $(i = 1, ..., n, n \geq 3)$ xác định và liên tục trên R thỏa mãn điều kiện sau: "Nếu $0 \leq A_i \leq \pi$, $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = (n-2)\pi$, thì $0 \leq A'_i \leq \pi$, $\sum\limits_{i=1}^{n} A'_i = (n-2)\pi$", trong đó $A'_i = f(A_i)$.*

Giải. Tương tự cách giải Bài toán 3.4, trong đó phương trình hàm cảm sinh chính là Phương trình hàm Perxider tổng quát. Các hàm số tìm được là

$$f_i(x) = k_0 x + k_i(n-2)\pi \quad (i = 1, ..., n, \quad n \geq 3),$$

trong đó $0 \leq k_i(n-2) \leq 1$, $0 \leq k_0 + k_i(n-2) \leq 1$.

Từ những kết quả trên ta thấy rằng, với ba góc của một tam giác cho trước, có thể tạo ra được ba góc của một tam giác mới và do đó có thể suy ra được nhiều hệ thức lượng giác liên quan đến các góc của tam giác đó. Hơn nữa, bằng cách phối hợp những phương pháp khác nhau, ta còn có thể tạo ra được nhiều đẳng thức và bất đẳng thức lượng giác khác, vô cùng phong phú. Sau đây là một vài ví dụ.

Giả sử rằng, ta đã chứng minh được các hệ thức sau đây và xem chúng là những hệ thức "gốc" ban đầu

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \tag{15}$$

$$\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8} \tag{16}$$

$$0 < \sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}, \tag{17}$$

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C. \tag{18}$$

Áp dụng Hệ quả 3.1 vào (15), ta có

$$\sin\left(\frac{\pi - A}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi - B}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi - C}{2}\right) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Như vậy, ta đã tạo được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 1. $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$

Áp dụng Hệ quả 3.1 vào (16), ta có

$$\cos\left(\frac{\pi-A}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi-B}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi-C}{2}\right)\leq\frac{1}{8}.$$

Như vậy, ta đã tạo được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 2. $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\frac{1}{8}.$

Áp dụng Hệ quả 3.1 vào (18), ta có

$$\sin 2\left(\frac{\pi-A}{2}\right)+\sin 2\left(\frac{\pi-B}{2}\right)+\sin 2\left(\frac{\pi-C}{2}\right)=4\sin\frac{\pi-A}{2}\sin\frac{\pi-B}{2}\sin\frac{\pi-C}{2}.$$

hay

$$\sin(\pi-A)+\sin(\pi-B)+\sin(\pi-C)=4\sin\frac{\pi-A}{2}\sin\frac{\pi-B}{2}\sin\frac{\pi-C}{2}.$$

Như vậy, ta đã tạo được đẳng thức sau

Đẳng thức 1. $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$

Bây giờ, để sáng tác thêm những hệ thức đa dạng hơn, ta tiếp tục khai thác những kết quả trên, chẳng hạn từ Bất đẳng thức 2 ta có

$$8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq 1\Leftrightarrow 32\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\leq 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\left(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right)\left(2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\right)\left(2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)\leq 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin A\sin B\sin C\leq 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}. \tag{19}$$

Như vậy, ta đã tạo được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 3. $\sin A\sin B\sin C\leq\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$

Bởi (18) và Đẳng thức 1, từ (19), ta có bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 4. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C\leq\sin A+\sin B+\sin C.$

Ta tiếp tục khai thác Bất đẳng thức 4. Nhận xét rằng, nếu tam giác ABC là tam giác nhọn thì, áp dụng Hệ quả 3.2 vào Bất đẳng thức 4, ta có

$$\sin 2(\pi-2A)+\sin 2(\pi-2B)+\sin 2(\pi-2C)$$

$$\leq\sin(\pi-2A)+\sin(\pi-2B)+\sin(\pi-2C)$$

$$\Leftrightarrow -\sin 4A-\sin 4B-\sin 4C\leq\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C.$$

Như vậy, ta tiếp tục tạo được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 5. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C+\sin 4A+\sin 4B+\sin 4C\geq 0.$

Bây giờ, áp dụng Hệ quả 3.3 vào Bất đẳng thức 4, ta có

$$\sin\left(2.\frac{A}{2}\right)+\sin\left(2.\frac{B}{2}\right)+\sin\left(2.\frac{\pi+C}{2}\right)\leq\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{\pi+C}{2}.$$

Ta tạo được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 6. $\sin A + \sin B - \sin C \leq \sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{C}{2}.$

Bây giờ, giả sử tam giác ABC có góc C tù. Áp dụng Hệ quả 3.4 vào Bất đẳng thức 1, ta có

$$\cos\frac{2A}{2} + \cos\frac{2B}{2} + \cos\frac{2C-\pi}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ta tạo được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 7. $\cos A + \cos B + \sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \quad \left(C > \dfrac{\pi}{2}\right).$

Tiếp theo, giả sử tam giác ABC nhọn (hoặc vuông tại C). Áp dụng Hệ quả 3.5 vào (17), ta có

$$0 < \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right)\sin(\pi - C) \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Ta được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 8. $0 < \cos A \cos B \sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{8} \quad \left(C \leq \dfrac{\pi}{2}\right).$

Bây giờ, giả sử tam giác ABC có góc C tù (hoặc vuông). Áp dụng Hệ quả 3.6 vào (15), ta có

$$0 < \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) + \sin(\pi - C) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Ta được bất đẳng thức sau

Bất đẳng thức 9. $0 < \cos A + \cos B + \sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \quad \left(C \geq \dfrac{\pi}{2}\right).$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] J. Aczél (1966), *Lectures on Functional equations and their applications*, Chapter 3, pp. 141-145, Chapter 4, pp. 197-199.

[2] Nguyễn Văn Mậu, *Một số lớp phương trình hàm đa ẩn hàm dạng cơ bản*, Kỷ yếu Hội thảo khoa học "Các chuyên đề chuyên Toán bồi dưỡng học sinh giỏi Trung học phổ thông", Hà Nội, 2011.

[3] D.S. Mitrinovic, J.E. Pecaric and V. Volenec (1989), *Recent advances in geometric inequalities*, Mathematics and its applications (East European series), Published by Kluwer Academic Publishers, the Netherlands, Chapter V, pp. 64-69.

XÂY DỰNG MỘT LỚP PHƯƠNG TRÌNH HÀM NHỜ CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Lê Sáng, Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn - Khánh Hòa

Trong các kì thi Đại học câu hỏi về phương trình, bất phương trình thường được chú ý,thì trong các câu hỏi của đề thi chọn học sinh giỏi quốc gia hay quốc tế các bài toán về phương trình hàm cũng chiếm phần trọng tâm. Trong bài viết này chúng tôi thử liên hệ kiến thức về lượng giác đã học trong chương trình phổ thông để đưa đến một số bài toán có nghiệm là hàm số lượng giác

1 Các hàm số lượng giác trong chương trình toán và vài tính chất

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x,\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}(1)$$
$$\sin(x + y)\sin(x - y) = \sin^2 x \cos^2 y - \sin^2 y \cos^2 x,\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}(2)$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}(3)$$

Từ (2) đưa đến công thức của phương trình hàm ẩn là hàm sin

$$g(x + y)g(x - y) = g^2(x) - g^2(y) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Từ (3) ta cũng đạt được công thức của hàm cosin (phương trình hàm d'Alembert)

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Ngoài ra từ một số công thức lượng giác mà ta cũng đoán được nghiệm

$$f(2x) = 2f^2(x) - 1, f(3x) = 4\mathrm{f}^3(x) - 3\mathrm{f(x)}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Quy ước: $f^n(x) = [f(x)]^n$.

Bốn Phương trình hàm cơ bản : Trong các bài toán sau phần nhiều trước khi đi đến kết quả thường phải qua trung gian là các phương trình hàm cơ bản sau

Các phương trình Cauchy

$$A(x + y) = A(x) + A(y)\ \ (I)$$
$$E(x + y) = E(x).E(y)\ \ \ \ (II)$$
$$L(xy) = L(x) + L(y) \text{ với } x > 0\ \ (III)$$
$$F(xy) = F(x).F(y) \text{ với } x > 0\ \ (IV)$$

Ta có lần lượt các nghiệm là A(x)=ax ,với a=f(1) được giải bởi A.L.cauchy 1821

$$E(x) = exp(ax) \text{ hay } E(x) = 0$$
$$L(x) = alnx \text{ hay } L(x) = 0$$
$$F(x) = xc \text{ hay } F(x) = 0$$

2 Phương trình hàm d'Alembert – Hàm cosin

Bài toán 1. *Tìm các hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên và thỏa mãn các điều kiện*

$$\begin{cases} f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y), & \forall x,y\in\mathbb{R} \\ f(0)=1, \exists x_0\in\mathbb{R}: |f(x_0)|<1 \end{cases}$$

Lời giải. Vì $f(0)=1$ và $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $\exists\varepsilon>0$ sao cho $f(x)>0,\ \forall x\in(-\varepsilon,\varepsilon)$
Khi đó theo (2) với $n_0\in\mathbb{N}$ đủ lớn thì

$$f(\frac{x_0}{2^{n_0}})>0\Rightarrow f(\frac{x_0}{2^{n_0}})<1 \text{ (do phản chứng)}$$

Vậy tồn tại $x_1\neq 0$, $x_1=\frac{x_0}{2^{n_0}}$ sao cho

$$0<f(x_1)<1.f(x)>0,\ \forall x\in(-|x_1|,|x_1|), f(x_1)=\cos\alpha, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

Từ (1) suy ra

$$f(2x_1)=2f^2(x_1)-1=2\cos^2\alpha-1=\cos 2\alpha$$

Giả sử $f(kx_1)=\cos k\alpha,\ \forall k=1,2,...,n\in\mathbb{N}^+$. Khi đó

$$\begin{aligned} f((n+1)x_1) &= f(nx_1+x_1) \\ &= 2f(nx_1)f(x_1)-f((n-1)x_1) \\ &= 2\cos n\alpha\cos\alpha-\cos(n-1)\alpha \\ &= \cos(n+1)\alpha. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $f(mx_1)=\cos m\alpha,\ \forall m\in\mathbb{N}^+$ và $f(x)$ là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$ và như vậy

$$f(mx_1=\cos m\alpha, \forall m\in\mathbb{Z}(3)$$

Do tính trù mật trong $\mathbb{R}$, $f(x)$ và $\cos x$ là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)=\cos ax, a\in R^*$
Thử lại ta thấy $f(x)=\cos ax\,(a\neq 0)$ thỏa mãn các điều kiện của bài toán .
Nhận xét 1. Thay trong giả thiết $|f(x_0)|<1$ ở bài toán 1 bởi $|f(x_0)|>1$ ta có nghiệm của bài toán là $f(x)=\cosh(x)$, đây là hàm cosin hyprebol mà ta không khảo sát ở chương trình học phổ thông
Nhận xét 2. Khi f là hàm khả vi, lấy đạo hàm theo y hai lần , ta được $f'(0)=0$, $f''(x)=k.f(x)$, k hằng Nếu $k=0$ thì $f(x)=ax+b$;
Nếu $k>0$ thì $f(x)=c\sin bx+d\cos bx$, c,d hằng
Từ $f(0)=1, f''(0)=0$ suy ra $d=1, bc=0, b=0$ thì f hằng; $c=0$ thì $f(x)=\cos x$
Nếu $k<0$ thì $f(x)=c\sinh bx+d\cosh bx$ với $b^2=k$, điều kiện $f(0)=1, f''(0)=0$.
Vậy nghiệm là $f(x)=\cos bx$, b số thực.

Định lý 1. (Định lý nghiệm của Phương trình d'Alembert)
Cho $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ hàm liên tục và thỏa mãn điều kiện

$$(C)\ f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y),\ \textit{với mọi } x,y$$

thì $f(x)=0, f(x)=1, f(x)=\cos ax$, hay $f(x)=coshbx, a,b\in\mathbb{R}$.

Bài toán 2. *(IMO1972). Tìm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn các điều kiện*

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y),\ \text{với mọi}\ x,y$$

Chứng minh rằng nếu $f(x)\neq 0, |f(x)|\leq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ thì $|g(y)|\leq 1,\ \forall y\in\mathbb{R}$

Lời giải. Do f bị chặn

$$f(x)\neq 0\,|f(x)|\,|g(y)|=2\,|f(x+y)+f(x-y)|\leq|f(x+y)|+|f(x-y)|\leq 2M,\ \ \forall x\in\mathbb{R}$$

Bài toán 3. *Tìm tất cả các hàm liên tục $D\to R$ thỏa*

$$f(x+y)=\frac{\mathrm{f(x)+f(y)}}{\mathrm{1-f(x)f(y)}}$$

Lời giải. Ta biết rằng hàm $f(x)=\tan x$ thỏa đề bài.
Vì thế nếu đặt $A(x)=\arctan f(x)$ thì $A(x+y)=A(x)+A(y)\pm 2k$.
Suy ra $A(x)=kx\ mod\ 2\pi$, từ đó dẫn đến $f(x)=\tan kcx$.

Bài toán 4. *Tìm các hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên R và thỏa mãn các điều kiện*

$$f\left(x\right)+f\left(y\right)=f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right),\ \ \forall x,y\in: x+y>0$$

Lời giải. Đặt $x=cotgu, y=cotgv, 0<u,v<\pi$
Thì $\frac{x+y}{1-xy}=cotg\left(u+v\right)$
Hay $A\left(u+v\right)=A\left(u\right)+A\left(v\right), 0<u,v<\pi$ trong đó $A\left(u\right)=f\left(cotgu\right)$.

$$f\left(x\right)=karcctgx, k\in,\ \ \forall x\in\mathbb{R}\ \ (i)$$

Thử lại ta thấy hàm $f(x)$ xác định theo (i) thỏa mãn các điều kiện của bài toán
Kết luận $f\left(x\right)=karcctgx, k\in R,\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

Bài toán 5. *Tìm các cặp hàm $f(x)$ và $g(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện*

$$f(x-y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)$$

Lời giải. Nghiệm của bài toán là

$$\begin{cases} f(x)=c\\ g(x)=\pm\sqrt{1-c^2}\end{cases}\ \text{hay}\begin{cases} f(x)=\cos kx\\ g(x)=\pm\sin kx\end{cases}\ , k\in\mathbb{R}^*$$

Bài toán 6. (Putnam1991)
Cho hai hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x), g(x)$ khác hằng, khả vi và thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y) \\ g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

và $f'(0) = 0$ .Chứng minh rằng $f^2(x) + g^2(x) = 1$

Lời giải. Ta chỉ cần chứng minh rằng $H(x) = f^2(x) + g^2(x)$ là hằng
Thật vậy lấy đạo hàm theo y rồi thay $y = 0$
ta được $f'(x) = -g'(0)g(x)$ và $g'(x) = g'(0)f(x)$
Do đó $2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = 0$ suy ra $f^2(x) + g^2(x) = C$
Ngoài ra $f^2(x+y) + g^2(x+y) = (f^2(x) + g^2(x))(f^2(y) + g^2(y))$,nên $C2 = C$.
Nhưng $C \neq 0$,nên $C = 1$
Nhận xét.Từ giả thiết của bài toán ta thấy hai hàm $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$ là nghiệm của bài toán, nên ta đặt $E(x) = f(x) + ig(x)$,từ giả thiết bài toán ta có $E(x+y) = E(x)E(y)$
Vì vậy ta có 1 cách giải khác như sau
Do E hàm khả vi nên $E'(0) = ib$, $E(x+y) = E(x)E(y)$ Lấy đạo hàm y ,rồi cho $y = 0$ ta được $E(x) = Ce^{ibx}$,
Từ $E(0+0) = E(0)E(0)$, ta rút ra được $C = 1$.
Cuối cùng $f2(x) + g2(x) = |\mathrm{E}(x)| = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{ibx}}\right|^2 = 1$

Bài toán 7. *a.Tìm các cặp hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn điều kiện*

$$\begin{cases} f(x-y) = f(x)g(y) - f(y)g(x) \\ g(x-y) = g(x)g(y) + f(x)f(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Đáp số. *Nghiệm của bài toán là $f(x) = \sin bx, g(x) = \cos bx$, b số thực hay $f(x) = g(x) = 0$*
b. $\begin{cases} f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x) \\ g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$

Đáp số . Nghiệm là $f(x) = a^{x/2}\sin bx, g(x) = a^{x/2}\cos bx$, $a > 0$, b số thực hay $f(x) = g(x) = 0$.

Bài toán 8. *Tìm các cặp hàm $f(x)$ và $g(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$\begin{cases} [f(x) + g(x)]^2 = 1 + f(2x), f(0) = 0 \\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Đáp số . Nghiệm của bài toán là $f(x) = \sin bx$, $g(x) = \cos bx$, bsố thực hay $f(x) = g(x) = 0$

3 Phương trình hàm có chứa hàm số lượng giác

3.1 Trước hết xét hàm thực f xác định với mọi x,y thuộc R thỏa

$$f(x+y) + f(x-y) = 2cosxcosy, \ \ (3.1)$$

Kết quả 1. $f(x)$ là nghiệm của 4.1 khi và chỉ khi $f(x) = \cos x$
Kết quả 2. Phương trình $f(x+y) + f(x-y) = 2\sin x \sin y$, không có nghiệm
Kết quả 3. Phương trình $f(x+y) + g(x-y) = 2\sin x \sin y$
có nghiệm $f(x) = c - \cos x,\ g(x) = \cos x - c$
Do công thức biến đổi $2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$ suy ra $f(u) + \cos u = \cos v - g(v)$
Kết quả 4. Phương trình $f(x+y) - f(x-y) = 2\sin x \sin y$ có nghiệm
$f(x) = c - \cos x, c$ là hằng
Kết quả 5. Phương trình $f(x+y) + f(x-y) = 2\cos x \sin y$ không có nghiệm
Kết quả 6. Phương trình $f(x+y) + g(x-y) = 2\cos x \sin y$,
có nghiệm $f(x) = c + \sin x,\ g(x) = -\sin x - c$
Kết quả 7. Phương trình $f(x+y) + f(x-y) = 2\sin x \cos y$,có nghiệm $f(x) = \sin x$
3.2 Xét hai hàm thực f ,g xác định trên R thỏa

$$f(x+y) + g(x-y) = 2\sin x \cos y,\ (3.2)$$

Kết quả 8. Nghiệm của (3.2) là $f(x) = c + sinx,\ g(x) = sinx - c$
Cho y = 0, rồi thay $y = -y$ vào (3.2)
ta được $f(x) + g(x) = 2\sin x$ và $f(x+y) + g(x-y) - f(x-y) + g(x+y) = 0$
3.3 Cho hàm thực $f(x)$ thỏa $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y$ (3.3) .
Khi đó hàm $g(x) = f(x) - d\cos x$ thỏa $g(x+y) = g(x)\cos y + g(y)\cos x$ (3.4)
Kết quả 9. Nghiệm tổng quát của (3.4) là $g(x) = b\sin x$, do đó $f(x) = b\sin x + d\cos x$
Thật vậy, cho $x = 0$, rồi hoán đổi x, y trong (3.3) ta được $f(y) + f(-y) = 2d\cos y$ và $2f(x+y) + f(x-y) + f(y-x) = 2f(x)\cos y + 2f(y)\cos x$
Tức là $2f(x+y) + 2d\cos(x-y) = 2f(x)\cos y + 2f(y)\cos x$. Suy ra (3.4)
Để có nghiệm (3.4) , dùng tính kết hợp của hàm $g(x)$

$$\begin{aligned} g(x+y+z) &= (g(x)\cos y + g(y))\cos x + g(z)\cos(x+y) \\ &= g(x)\cos(y+z) + (g(y)\cos z + g(z)\cos y)\cos x \end{aligned}$$

Suy ra $g(x)\sin y \sin z = g(z)\sin y \sin x,$ mọi x, y, z
Cố định y, z với $\sin z \neq 0$, ta được $g(x) = b\sin x$
3.4. Cho hai hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa

$$f(x-y) - f(x+y) = 2g(x)\sin y,\ \text{với mọi số thực}\, x, y (3.5)$$

khi và chỉ khi $f(x) = a\cos x - d\sin x + c,\ g(x) = a\sin x + d\cos x$
Lời giải. Cho $x = 0$, rồi hoán đổi x, y trong (3.5) ta được $f(-y) - f(y) = 2d\sin y$ và

$$f(x-y) - f(y-x) = 2g(x)\sin y - 2g(y)\sin x$$

Tức là $-2d\sin(x-y) = 2g(x)\sin y - 2g(y)\sin x$.
Suy ra $(g(x) - d\cos x)\sin y = (g(y) - d\cos y)\sin x$, tức là $g(x) = d\cos x + a\sin x$ (cố định y).
Thay $g(x)$ vào (3.5) ta có kết quả
3.5.Lập luận tương tự ta cũng có vài phương trình hàm

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= f(x)\sin y + f(y)\sin x\,(3.6) \\ \sin(x+y) &= g(x)\sin y + g(y)\sin x\,(3.7) \\ f(x+y) &= g(x)\sin y + g(y)\sin x\,(3.8) \end{aligned}$$

Kết quả 10. Nghiệm (3.6) là $f(x) = \cos x$,nghiệm của (3.7) là $f(x) = \cos x + d \sin x$, $g(x) = \cos x - b \sin x$, nghiệm của(4.8) là $f(x) = a \cos x = g(x)$
3.6. Dùng tính kết hợp của hàm
Xét $f(x+y)f(x-y) = \sin^2(x) - \sin^2(y), (3.9)$
Kết quả 11. (4.9) có nghiệm là $f(x) = k \sin x,\ k^2 = 1$

Bài toán 9. Nghiệm của $f(x+y)f(x-y) = f^2(x) - sin^2(y), (3.10)$
Là $f(x) = a \sin x$ hay $f(x) = b \cos x + d \sin x, a, b, d$ hằng thỏa $a^2 = 1 = b^2 + d^2$

Lời giải. Cho $x = y$ trong (4.10).Xét 2 trường hợp $f(0) = 0$ hay khác không
Trường hợp khác không ta đưa về dạng $f(u)f(v) = bf(u+v) + \sin u \sin v$.
Sau đó xét $bf(u+v+z) = f(u)(f(v)f(z) - \sin v \sin z) - \sin u(\sin v \cos z + \cos v \sin z)$

Tính chất 1. Cho hàm $f(x)$xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$(S^*) f(x+y+2d) + f(x-y+2d) = 2f(x)f(y),\ \text{với mọi}\ \ x, y, d\ \text{hằng khác không}$$

thì f là hàm số lẽ

Tính chất 2.
(i) Nếu $f(0) = 1$ và $f(d) = 1$ thì hàm f có chu kỳ là d
(ii) Nếu $f(0) = 1$ và $f(d) = -1$ thì hàm f có chu kỳ là $2d$
(iii) Nếu $f(0) = -1$ thì $f(d) = 0$ hàm f có chu kỳ là d

Bài toán 10. *Tìm hàm $f(x)$ thỏa mãn (S*)*

Lời giải. Trường hợp (i) và (ii) thì f thỏa phương trình d'Alembert của hàm (C)
Trường hợp (iii) thì $g(x) = f(x+2d)$ là nghiệm của phương trình (C)
$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x)g(y), g(x)$ có chu kỳ $4d$
Kết quả. Nghiệm của bài toán (S*) là $f(x) = \cos \frac{2n\pi x}{d}\ hay f(x) = \pm \cos \frac{(2n+1)\pi x}{d}$.

4 Phương trình hàm sin $(S) f(x+y)f(x-y) = f^2(x) - f^2(y)$, với mọi x, y

Tính chất 3. Hàm f khác không, thỏa (S) là hàm lẽ

Bài toán 11. *Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục thỏa (S)*
Thì $f(x) = cx$, $f(x) = c \sin bx hay\ f(x) = \sinh bx$

Lời giải. Do f liên tục, khả vi. Lấy đạo hàm lần thứ nhất theo y, lần thứ hai theo x
Suy ra $f''(x) = kf(x)$. Như vậy ta có kết quả

Bài toán 12. (Corovei) *Cho hai hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khác không thỏa*

$$f(x)g(y-x) = f\left(\frac{y}{2}\right) g\left(\frac{y}{2}\right) - f\left(x - \frac{y}{2}\right) g\left(x - \frac{y}{2}\right), \forall x, y \in \mathbb{R}(*)$$

Khi đó g là nghiệm của (S) và

$$g(x) = A(x), f(x) = c + dA(x)(1), g(x) = b(E(x) - E(-x)), f(x) = c(E(x) - E(-x)) + dE(-x)(2)$$

trong đó A, E thỏa phương trình cơ bản, b và c là các hằng số.

Lời giải. Thay x bởi $x+y$, và y bởi $2x$ vào (*) $f(x+y)g(x-y) = f(x)g(x) - f(y)g(y)(3)$, sau đó đổi chổ x và y với nhau ta được $f(x+y)g(y-x) = -f(x+y)g(x-y)$,
suy ra $g(x)$ hàm lẽ (do f khác không)
Lấy $y = -x$ rồi thay y bởi $-y$ trong (1) , trừ (*) cho (3)

$$f(x-y)g(x+y) - f(x+y)g(x-y) = g(y)(f(-y) + f(y))$$

Xét 2 trường hợp $f(0), f(0) = 0$, thì f và g trong (1) là nghiệm; $f(0)$ khác không, f và g trong (2) là nghiệm
Kêt quả Trường hợp hàm liên tục, nghiệm khác không là

$$\begin{aligned}
&f(x) = bx + c,\ g(x) = ax;\\
&f(x) = c\sin ax + d\cos ax, g(x) = b\sin ax;\\
&f(x) = b\sinh ax + d\cosh ax,\ \ g(x) = b\sinh ax.
\end{aligned}$$

5 Mở rộng phương trình hàm d'Alembert dạng lượng giác của W. H. Wilson1919

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y), (1)\text{với mọi } x, y$$

$$f(x+y) + g(x-y) = h(x)k(y), (2) \text{ với mọi } x, y$$

Nhận xét khi $f(x) = 0$ thì $g(x)$ là một hàm tùy ý Nên ta xét $f(x) \neq 0$,nên có a sao cho $f(a) \neq 0$ Trong (1) thay $x = a, y = -y$ ta được $g(x)$ là hàm số chẳn. Nhờ phương pháp tách f thành 2 hàm chẳn f^1 và hàm lẽ f^2 Wilson thu gọn được $f^1(x) = kg(x)$,với $k = f^1(0)$ và g thỏa mãn hàm d'Alembert

Định lý 2. *(Định lý Wilson.) Nghiệm tổng quát của phương trình(1) là*

$$\begin{aligned}
&f(x) = 0,\ g(x) \text{ tùy ý, hay}\\
&f(x) = k\cos bx + C\sin bx \quad \text{và } g(x) = \cos bx, \text{hay}\\
&f(x) = k\cosh bx + C\sinh bx \quad \text{và } g(x) = \cosh bx,\ \text{hay}\\
&f(x) = k + Cx \text{ và } g(x) = 1
\end{aligned}$$

Nhận xét. Trong phạm vi của bài này chúng tôi chỉ nhằm xét phương trình (1) có nghiệm dạng lương giác, dạng (2) được xét tổng quát trong bài khác

Bài toán 13. *Nếu hàm f thỏa $f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.thì cũng thỏa phương trình d'Alembert $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y, \forall x, y \in \mathbb{R}$.*

Lời giải. Do bài toán 3.5

Bài toán 14. (Bình Định 2009)Tìm tất cả các hàm số f xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

.

6 Mở rộng các phương trình hàm cơ bản dạng

$$f[G(x,y)] = F(f(x), f(y))$$

Trong bài viết này, chúng tôi chỉ xét trường hợp đặc biệt G(x,y)=x+y, tức là dạng phương trình hàm $f(x+y) = F(f(x), f(y))\,, x, y \in \mathbb{R}$

Tính chất 4. F có tính kết hợp tức là $F[F[u,v],w] = F[u, F[v,w]] = f(x+y+w)$

Trường hợp

$F(u,v) = Auv + Bu + Bv + C$, F là đa thức đối xứng, do tính kết hợp ta được $AC = B^2 - B$

Khi $A = 0$ thì $B = 1$ bài toán có dạng $f(x+y) = f(x) + f(y) + C$

Đặt $A(x) = f(x) + C$, bài toán được đưa về $A(x+y) = A(x) + A(y)$ (phương trình Cauchy I)

Do đó $f(x) = A(x) - C$. Khi A≠0 , bài toán có dạng

$$f(x+y) = Af(x)f(y) + Bf(x) + Bf(y) + \frac{B^2 - B}{A} = \frac{[Af(x)+B]\,[Af(y)+B] - B}{A}$$

Đặt $E(x) = Af(x) + B$, bài toán được đưa về $E(x+y) = E(x).E(y)$ (phương trình Cauchy II)

Do đó $f(x) = \frac{E(x)-B}{A}$

Một số bài toán liên quan

Các nghiệm tổng quát được đưa ra ở đây trong lớp hàm lượng giác được xác định trong các khoảng để hàm số liên tục và đơn điệu trong khoảng xác định đó

$$\begin{aligned}
&6.1\quad f_1(x+y) = \frac{f_1(x)+f_1(y)}{1-f_1(x)f_1(y)},\\
&6.2\quad f_2(x+y) = \frac{f_2(x)f_2(y)-1}{f_2(x)+f_2(y)},\\
&6.3\quad f_3(x+y) = \frac{f_3(x)+f_3(y)-2f_3(x)f_3(y)}{1-f_3(x)f_3(y)},\\
&6.4\quad f_4(x+y) = \frac{f_4(x)+f_4(y)-1}{2f_4(x)+2f_4(y)-2f_4(x)f_4(y)-1},\\
&6.5\quad f_5(x+y) = \frac{f_5(x)+f_5(y)-2f_5(x)f_5(y)\cos a}{1-f_5(x)f_5(y)},\\
&6.6\quad f_6(x+y) = f_6(x)f_6(y) - \sqrt{1-f^2(x)}\sqrt{1-f^2(y)}
\end{aligned}$$

Có các nghiệm lần lượt là

$$\begin{aligned}
f_1\,(x) = \tan kx, f_2\,(x) = \cot kx, f_3\,(x)&\\
= \frac{1}{1+\cot kx}, f_4\,(x) = \frac{1}{1+\tan kx}, f_5&\\
(x) = \frac{\sin kx}{\sin(kx+a)}, f_6\,(x) = \cos kx.&
\end{aligned}$$

7 Lượng giác hóa bài toán phương trình hàm

Bài toán 15. (Putnam2000) Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục trong $[-1,1]$ và thỏa mãn

$$f\left(2x^2-1\right)=2xf\left(x\right),\ \ \forall x\in[-1.1]$$

Lời giải. Ta có $x=1, x=-\frac{1}{2}$ thỏa mãn $2x^2-1=x$ suy ra $f(1)=f(-\frac{1}{2})=0$
Nên $f\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)\right)=0$.Từ $f(\cos 2a)=0$ ta suy ra $f(\cos a)=0$
Đặt $x=\cos a$, Ta được $f\left(\cos 2^{-k}\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)\right)=0, \forall n\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{N}$
Hơn nữa, tập các số $2^{-k}(\frac{2\pi}{3}+2\pi n)$ trù mật trong $\mathbb{R}$ và $f(\cos x)$ liên tục suy ra $f(\cos r)=0$,mọi r

Bài toán 16. *Tìm hàm $f(x)$,chẵn, liên tục trong lân cận điểm O xác định*

$$f(x)\geqslant 0 \text{ khi } 0\leqslant x\leqslant \pi/2, f(x)\leqslant 0 \text{ khi } \pi/2\leqslant x\leqslant\pi,$$

và thỏa (*) $f(2x)=1-2f^2\left(\frac{\pi}{2}\text{ - }x\right)$,$\forall x\in R$, thì $f(x)=\cos x$, mọi x.

Bài toán 17. *Tìm các hàm $f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $[-1,1]$ và thỏa mãn các điều kiện*

$$f\left(x\right)+f\left(y\right)=f\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right),\ \ \forall x,y\in[-1,1]\quad(18)$$

Lời giải. Đặt $x=\sin u, y=\sin v,\ \ \forall u,v\in\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ Thì $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\sin\left(u+v\right)$
Khi đó có thể viết (18) dưới dạng

$$g\left(u+v\right)=g\left(u\right)+g\left(v\right), u,v\in\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\text{ với } g(u)=f(\sin u)$$

Suy ra $f\left(x\right)=aarc\sin x,\ \ \forall x\in[-1,1], a\in\mathbb{R}\ \ (i)$
Thử lại ta thấy hàm $f\left(x\right)$ xác định theo (i) thỏa mãn các điều kiện của bài toán .

Bài toán 18. *Tìm các hàm số $f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $[-1,1]$ và thỏa mãn điều kiện*

$$f\left(xy-\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2}\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right),\ \ \forall x,y\in[-1,1]$$

Lời giải. Đặt $x=\cos u, y=\cos v,\ \ \forall u,v\in[0,\pi]$ .Khi đó $\sin u\geqslant 0, \sin v\geqslant 0$

$$xy-\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2}=\cos\left(u+v\right),\ \ \forall u,v\in[0,\pi]$$

Phương trình hàm đã cho có thể viết dưới dạng

$$f\left(\cos u\right)+f\left(\cos v\right)=f\left(\cos\left(u+v\right)\right),\ \ \forall u,v\in[0,\pi]$$

Đặt $f\left(\cos u\right)=g\left(u\right)$ ta được

$$g\left(u+v\right)=g\left(u\right)+g\left(v\right),\ \ \forall u,v\in[0,\pi]$$

Do vậy, $g\left(u\right)=au, a=\text{const}$, $f\left(x\right)=a\text{arccos } x$
Thử lại, ta thấy hàm số này thỏa mãn bài toán .

Bài toán 19. *Tìm các hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện*

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right), \ \forall x,y \in R : |xy| < 1 (17)$$

Lời giải. Đặt $x = tgu, y = tgv, \frac{-\pi}{2} < u, v < \frac{\pi}{2}$. Do $|xy| < 1$ nên ta có $\frac{x+y}{1-xy} = tg\,(u + v)$
Vậy $\frac{-\pi}{2} < u + v < \frac{\pi}{2}$ Khi đó $A(u + v) = A(u) + A(v)$,trong đó A (u) = f (tgu) , $\frac{-\pi}{2} < u, v < \frac{\pi}{2}$
Vậy $f\,(x) = aarctgx, a \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}$ (ii) Thử lại ta thấy hàm $f\,(x)$ xác định theo (ii) thỏa mãn các điều kiện của bài toán . Kết luận $f\,(x) = aarctgx, a \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}$

Bài toán 20. *Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ liên tục trên R và*

$$f(x)f(y) - f(x + y) = \sin x \sin y, \forall x,y \in R(*)$$

Lời giải. Với $x = y = 0$,ta thu được: $f^2\,(0) - f\,(0) = 0$ Suy ra f(0) = 0 hay f(0) = 1
-Nếu $f\,(0) = 0$ thì với $y = 0$ ta có $-f\,(x) = 0$ Từ đó $f\,(x) \equiv 0, \ \forall x$
Nhưng nếu thay $x = y = \frac{\pi}{2}$ ta thấy mâu thuẫn.
-Nếu $f\,(0) = 1$ thay $y = -x$ ta có

$$f\,(x)\,f\,(-x) = 1 - \sin^2 x = \cos^2 \mathrm{x}$$

Thay $x = \frac{\pi}{2}$ ta có $f\left(\frac{\pi}{2}\right) f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$
+Nếu $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, thay $y = \frac{\pi}{2}$, Ta có $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
+Nếu $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ thay $y = -\frac{\pi}{2}$,

$$f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Vậy $f(x) = \cos x$. Thử lại thấy đúng.

Bài toán 21. (Russia 2000)*: Tìm tất cả các hàm số $f(x)$xác định trên $\mathbb{R}$ và*

$$|f(x + y) + \sin x + \sin y| < 2, \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Lời giải. Lần lượt thay $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$,rồi áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có kết quả

Bài toán 22. (Turkey 2000)*: Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa*

$$|f\,(x + y) - f(x)f(y)| \leq 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Chứng minh rằng tồn tại hàm $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ sao cho

$$|f\,(x) - g\,(x)| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

và $g(x + y) = g(x) + g(y)$ mọi x, y

Đáp số. $g(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$

Bài toán 23. (Indian TST2004) *Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và*

$$f(x+y) = f(x)f(y) - c\sin x \sin y, \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ } c \text{ hằng } c > 1$$

Đáp số. $f(x) = \pm\sqrt{c-1}\sin x + \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$

Bài toán 24. (Thái lan 2007) *Tìm các hàm xác đinh trên $\mathbb{R}$ thỏa*

$$f(x + \cos(2007y)) = f(x) + 2007\cos(f(y)).$$

Lời giải. Đặt $A(x) = f(x) - d$, $d = f(0)$, $c = A(1) = f(1) - A(0)$, $A(0) = 0$
Ta có: $A(x + \cos 2007y) = A(x) + 2007\cos(A(y) + d)$.
ta có :$A(\cos 2007y) = 2007\cos(A(y)+d) \leq 2007$ suy ra $A(y) \leqslant 2007$, $\forall y \in [-1, 1]$và $A(x+y) = A(x) + A(y)$, với mọi y trong đoạn [-1,1].
Bằng quy nạp ta có $A(x + ny) = A(x) + nA(y)$, và $A(ny) = A(0) + nA(y) = A(0)$.
Suy ra A thỏa mãn PTH Cauchy và $A(x) = cx$ và $f(x) = cx + d$, mọi x.

Tài liệu tham khảo

[1] J. Aczel,1966, *Lectures on Functional equations and their applications*, Academic press.

[2] Nguyễn Văn Mậu,1997, *Phương trình hàm*, NXB Giáo Dục.

[3] Christopher G. Small,2000, *Functional equations and how to solve them*, Springer.

[4] Razvan Gelca and Titu Andreescu,2007,*Putnam and Beyond*,Springer.

[5] PI. Kannappan,2009 *Functional equations and inqualities with application*,Springer.

TÍNH ỔN ĐỊNH NGHIỆM CỦA MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH HÀM CAUCHY

Lê Thị Anh Đoan, THPT Chuyên Lê Quý Đôn -Khánh Hòa

Trong nội dung bài viết này, ta cần quan tâm đến khái niệm ổn định. Chẳng hạn ta nói phương trình hàm (Cauchy) nhân tính là ổn định nếu nó thỏa mãn tính chất sau:

Giả sử G là một nhóm, $H(d)$ là một nhóm metric và $f : G \to H$, với mỗi $\varepsilon > 0$ thì tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$d\left(f(xy), f(x)f(y)\right) < \delta,\ \forall x, y \in G$$

và do đó, tồn tại một đồng cấu $M : G \to H$ sao cho

$$d\left(f(x), M(x)\right) < \varepsilon,\ \forall x \in G.$$

1 Tính ổn định của phương trình hàm (Cauchy) cộng tính

Trước hết ta nhắc lại phương trình hàm (Cauchy) cộng tính (A)

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{A}$$

Giả sử hàm $f : X \to Y$ thỏa mãn (A), với X và Y là hai không gian Banach. Khi đó f được gọi là hàm cộng tính.

Định lý 1. *Giả sử , hàm $f : X \to Y$ thỏa mãn, với mọi $\varepsilon > 0$, ta có*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \le \varepsilon,\ \forall x, y \in X. \tag{1}$$

Khi đó tồn tại giới hạn sau

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} f(2^n x) \tag{2}$$

với mỗi $x \in X$ và tồn tại duy nhất hàm cộng tính $A : X \to Y$ thỏa mãn

$$\|f(x) - A(x)\| \le \varepsilon,\ \forall x \in X. \tag{3}$$

Chứng minh. Thay $x = y$ vào (1) ta được

$$\|\left(\frac{1}{2}\right) f(2x) - f(x)\| \le \left(\frac{1}{2}\right)\varepsilon. \tag{4}$$

Sử dụng phương pháp quy nạp, ta được

$$\|2^{-n} f(2^n x) - f(x)\| \le (1 - 2^{-n})\varepsilon. \tag{5}$$

Thật vậy, trong (4) ta thay x bởi $2x$, ta được

$$\|\frac{1}{2}f(2^2x) - f(2x)\| \leq \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Khi đó

$$\|[\frac{1}{2}f(2^2x) - 2f(x)] - [f(2x) - 2f(x)]\| = \|\frac{1}{2}f(2^2x) - f(2x)\| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$$

hay

$$\|\frac{1}{2^2}f(2^2x) - f(x)\| - \|\frac{1}{2}f(2x) - f(x)\| \leq \frac{1}{2^2}\varepsilon,$$

nên

$$\|\frac{1}{2^2}f(2^2x) - f(x)\| \leq \varepsilon\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right),$$

do đó

$$\|\frac{1}{2^n}f(2^nx) - f(x)\| \leq \varepsilon\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh dãy $\{\frac{1}{2^n}f(2^nx)\}$ là dãy Cauchy với mỗi $x \in X$. Chọn $m > n$, khi đó

$$\begin{aligned}\|\frac{1}{2^n}f(2^nx) - \frac{1}{2^m}f(2^mx)\| &= \frac{1}{2^n}\|\frac{1}{2^{m-n}}f(2^{m-n}.2^nx) - f(2^nx)\| \\ &\leq \frac{1}{2^n}\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^{m-n}}\right) = \varepsilon\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m}\right).\end{aligned}$$

Do đó dãy $\{\frac{1}{2^n}f(2^nx)\}$ là dãy Cauchy và do Y không gian Banach nên tồn tại $A : X \to Y$ sao cho $A(x) := \lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n}f(2^nx)$ với mỗi $x \in X$, hay

$$\|A(x) - \frac{1}{2^n}f(2^nx)\| \leq \frac{1}{2^n}\varepsilon.$$

Tiếp theo ta cần chứng minh A là hàm cộng tính. Thay x, y bởi 2^nx và 2^ny trong (1), ta được

$$\|\frac{1}{2^n}f(2^n(x+y)) - \frac{1}{2^n}f(2^nx) - \frac{1}{2^n}f(2^ny)\| \leq \frac{1}{2^n}\varepsilon$$

với $n \in \mathbb{Z}_+^*, x, y \in X$. Cho $n \to \infty$, ta được

$$\|A(x+y) - A(x) - A(y)\| \leq \varepsilon.$$

Với mỗi $x \in X$, ta có

$$\begin{aligned}\|f(x) - A(x)\| &= \|[f(x) - \frac{1}{2^n}f(2^nx)] + [\frac{1}{2^n}f(2^nx) - A(x)]\| \\ &\leq \|f(x) - \frac{1}{2^n}f(2^nx)\| + \|\frac{1}{2^n}f(2^nx) - A(x)]\| \\ &\leq \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \varepsilon\frac{1}{2^n} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Cuối cùng, ta cần chứng minh A duy nhất. Giả sử tồn tại một hàm cộng tính $A_1 : X \to Y$ thỏa mãn (3). Khi đó, với mỗi $x \in X$,

$$\begin{aligned}\|A(x) - A_1(x)\| &= \frac{1}{n}\|[A(nx) - f(nx)] + [A_1(nx) - f(nx)]\| \\ &\le \frac{2\varepsilon}{n} \quad \text{theo (3)}\end{aligned}$$

Vậy $A_1 = A$. □

Định lý 2. *Với mỗi dãy số thực bất kỳ a_n thỏa mãn*

$$|a_{n+m} - a_n - a_m| < 1, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+^*, \tag{6}$$

thì tồn tại giới hạn hữu hạn

$$A := \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$$

và

$$\|a_n - nA\| < 1, \quad n \in \mathbb{Z}_+^*.$$

Chứng minh. Áp dụng Định lý 1 cho $Y = \mathbb{R}$. Cố định $x \in X$ và đặt $a_n := (\frac{1}{\varepsilon})f(nx), n \in \mathbb{Z}_+^*$. Khi đó, theo (1) dãy (a_n) thỏa mãn (6). Đặt

$$A := \lim_{k\to\infty}\left(\frac{a_k}{k}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{f(kx)}{k}\right),$$

Theo định lý 1, ta có

$$|\frac{1}{\varepsilon}f(nx) - nA(x)| < 1,$$

với mọi $n \in \mathbb{Z}_+^*$ và mọi $x \in X$ hay

$$|f(x) - n\varepsilon A\left(\frac{x}{n}\right)| < \varepsilon.$$

Vì theo (1), với mọi $x, y \in X$ ta có

$$\begin{aligned}|\varepsilon A(x+y) - \varepsilon A(x) - \varepsilon A(y)| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(nx+ny)}{n} - \frac{f(nx)}{n} - \frac{f(ny)}{n}\right| \\ &\le \lim_{n\to\infty}\frac{\varepsilon}{n} = 0,\end{aligned}$$

Do đó

$$|f(x) - A(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

2 Tính ổn định của phương trình hàm (Cauchy) nhân tính

Trong phần này nghiên cứu phương trình

$$f(xy) = f(x)f(y) \tag{M}$$

Giả sử hàm $f : X \to Y$ thỏa mãn (M), với X và Y là hai không gian Banach. Khi đó f được gọi là hàm nhân tính.

Định lý 3. *Giả sử $\delta > 0, S$ là một nửa nhóm và $f : S \to \mathbb{C}$ sao cho*

$$|f(xy) - f(x)f(y)| \leq \delta, \quad \forall x, y \in S. \tag{1}$$

Khi đó

$$|f(x)| \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4\delta}}{2} =: \varepsilon, \quad \forall x \in S. \tag{2}$$

hoặc f là hàm nhân tính với mọi $x, y \in S$.

Chứng minh. Trong (2), ta có $\frac{1+\sqrt{1+4\delta}}{2} =: \varepsilon$ hay $\varepsilon^2 - \varepsilon = \delta$ và $\varepsilon > 1$. Giả sử (2) không xảy ra, tức là tồn tại $a \in S$ sao cho $|f(a)| > \varepsilon$, hay $|f(a)| = \varepsilon + \rho$, với $\rho > 0$ nào đó. Trong (1), chọn $x = y = a$, ta được

$$|f(a^2) - f(a)^2| \leq \delta \tag{3}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
|f(a^2)| &= |f(a)^2 - (f(a)^2 - f(a^2))| \\
&\geq |f(a)^2| - |f(a)^2 - f(a^2)| \\
&\geq |f(a)|^2 - \delta \quad \text{ theo (3)} \\
&= (\varepsilon + \rho)^2 - \delta \\
&= (\varepsilon + \rho) + (2\varepsilon - 1)\rho + \rho^2 \quad (\text{do } \ \varepsilon^2 - \varepsilon = \delta) \\
&> \varepsilon + 2\rho \quad (\text{do } \ \varepsilon > 1)
\end{aligned}$$

Bằng phép chứng minh quy nạp, ta có

$$|f(a^{2^n})| > \varepsilon + (n + 1)\rho, \quad \forall n = 1, 2, \ldots.$$

Với mọi $x, y, z \in S$,

$$|f(xyz) - f(xy)f(z)| \leq \delta, \quad \text{và} \quad |f(xyz) - f(x)f(yz)| \leq \delta$$

Ta có

$$\begin{aligned}
|f(xy)f(z) - f(x)f(yz)| &\leq |f(xyz) - f(xy)f(z)| + |f(xyz) - f(x)f(yz)| \\
&\leq 2\delta
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}|f(xy)f(z) - f(x)f(y)f(z)| &\leq |f(xy)f(z) - f(x)f(yz)| \\ &\quad + |f(x)f(yz) - f(x)f(y)f(z)| \\ &\leq 2\delta + |f(x)|\delta\end{aligned}$$

Suy ra

$$|f(xy) - f(x)f(y)|.|f(z)| \leq 2\delta + |f(x)|\delta.$$

Chọn $z = a^{2^n}$, ta được

$$|f(xy) - f(x)f(y)| \leq \frac{2\delta + |f(x)|\delta}{|f(a^{2^n})|}.$$

với mọi $x, y \in S$ và mọi $n = 1, 2 \ldots$. Cho $n \to \infty$, ta được $f(xy) = f(x)f(y)$, $\forall x, y \in S$. Vậy f là một hàm nhân tính.

3 Các ví dụ áp dụng

Ví dụ 1. *Nghiệm của phương trình Jensen.*

Bài toán 1. Tìm hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình sau

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Thay $y = 0$ vào (1), ta được

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x) + f(0)}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Khi đó áp dụng (1) và (2), ta được

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+y) + f(0)}{2}$$

hay

$$f(x) + f(y) = f(x+y) + f(0), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đặt $A(x) = f(x) - f(0)$. Ta có $A(x) + A(y) = A(x+y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$. Vậy A là một hàm cộng tính trên $\mathbb{R}$ nên $f(x) = A(x) + \alpha$, trong đó $\alpha = f(0)$.

Chú ý. Nếu bài toán có thêm giả thiết: hàm f liên tục thì nghiệm tìm được sẽ là $f(x) = ax + \alpha$, với a, α là các hằng số tùy ý.

Tiếp theo ta xét tính ổn định nghiệm của phương trình (1).

Mệnh đề 1. *Giả sử hàm f thỏa mãn*

$$\left|f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{f(x) + f(y)}{2}\right| \leq \varepsilon \tag{3}$$

với ε là số dương tùy ý cho trước và với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó tồn tại duy nhất một hàm cộng tính $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$|f(x) - A(x) - f(0)| \leq 4\varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh. Thay $y = 0$ vào (3), ta được

$$\left| f\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{f(x) + f(0)}{2} \right| \le \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó

$$\left| f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{f(x+y) + f(0)}{2} \right| \le \varepsilon \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\left| \frac{f(x) + f(y)}{2} - \frac{f(x+y) + f(0)}{2} \right| &\le \left| \frac{f(x) + f(y)}{2} - \frac{f(x+y)}{2} \right| \\ &\quad + \left| \frac{f(x+y)}{2} - \frac{f(x+y) + f(0)}{2} \right| \\ &\le 2\varepsilon\end{aligned}$$

hay

$$|f(x+y) + f(0) - f(x) - f(y)| \le 4\varepsilon. \tag{4}$$

Đặt $g(x) = f(x) - f(0)$. Thay vào (4), ta được

$$|g(x+y) - g(x) - g(y)| \le 4\varepsilon$$

Theo tính ổn định của hàm cộng tính, tồn tại duy nhất hàm cộng tính A sao cho

$$|g(x) - A(x)| \le 4\varepsilon.$$

Ta có

$$|f(x) - A(x) - f(0)| = |g(x) - A(x)| \le 4\varepsilon.$$

Ví dụ 2. *Nghiệm của phương trình Cauchy hai ẩn hàm.*

Bài toán 2. Tìm cặp hàm $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình sau

$$f(x+y) = g(x) + g(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Thay $y = 0$ vào (5), ta được

$$f(x) = g(x) + g(0) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

hay $f(x) = g(x) + \alpha$, với $\alpha = g(0)$. Do đó $g(x) = f(x) - \alpha$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Thay vào phương trình (5), ta được

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - 2\alpha \tag{6}$$

Đặt $f(x) = A(x) + 2\alpha$. Phương trình (6) trở thành

$$A(x+y) + 2\alpha = A(x) + 2\alpha + A(y) + 2\alpha - 2\alpha$$

hay

$$A(x+y) = A(x) + A(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Vậy A là một hàm cộng tính trên $\mathbb{R}$ nên

$$\begin{cases} f(x) = A(x) + 2\alpha \\ g(x) = A(x) + \alpha. \end{cases}$$

Chú ý. Nếu bài toán có thêm giả thiết: hàm f, g liên tục thì nghiệm tìm được sẽ là

$$\begin{cases} f(x) = ax + 2\alpha \\ g(x) = ax + \alpha \end{cases}$$

với a, α là các hằng số tùy ý.

Tiếp theo ta xét tính ổn định nghiệm của phương trình (5).

Mệnh đề 2. *Giả sử hàm $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$|f(x+y) - g(x) - g(y)| \leq \varepsilon \tag{7}$$

với ε là số dương tùy ý cho trước và với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó tồn tại duy nhất một hàm cộng tính $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{cases} |f(x) - A(x) - f(0)| \leq 4\varepsilon \\ |g(x) - A(x) - g(0)| \leq 3\varepsilon \end{cases}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. Thay $y = 0$ vào (7), ta được

$$|f(x) - g(x) - g(0)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

suy ra

$$|f(0) - 2g(0)| \leq \varepsilon. \tag{9}$$

Sử dụng (8), ta được

$$|f(x+y) - g(x+y) - g(0)| \leq \varepsilon, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Ta có

$$|f(x+y) - g(x+y) - g(0)| = |f(x+y) - g(x) - g(y) - g(x+y) + g(x) + g(y) - g(0)|$$

nên kết hợp (7) và (10) thu được

$$\begin{aligned} |g(x+y) - g(x) - g(y) + g(0)| &\leq |f(x+y) - g(x+y) - g(0)| + |f(x+y) - g(x) - g(y)| \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

hay

$$|[g(x+y) - g(0)] - [g(x) - g(0)] - [g(y) - g(0)]| \leq 2\varepsilon, \tag{11}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Đặt
$$G(x) = g(x) - g(0), \tag{12}$$
với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Thế vào (11) ta được
$$|G(x+y) - G(x) - G(y)| \leq 2\varepsilon, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
Theo định lý về tính ổn định của hàm cộng tính, tồn tại duy nhất một hàm cộng tính $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho
$$|G(x) - A(x)| \leq 2\varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{13}$$
Từ (12) và (13) ta được
$$|g(x) - A(x) - g(0)| \leq 2\varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{14}$$
Từ (8), (9) và (14) ta được
$$\begin{aligned}|f(x) - A(x) - f(0)| &= |f(x) - g(x) - g(0) + g(x) - A(x) - g(0) + 2g(0) - f(0)| \\ &\leq |f(x) - g(x) - g(0)| + |g(x) - A(x) - g(0)| + |f(0) - 2g(0)| \\ &\leq \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon.\end{aligned}$$

Ví dụ 3. *Nghiệm của phương trình Pexider.*

Bài toán 3. Tìm tất cả các hàm $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình sau
$$f(x+y) = g(x) + h(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{15}$$

Thay $y = 0$ vào (15), ta được
$$f(x) = g(x) + h(0) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
hay $f(x) = g(x) + \alpha$, với $\alpha = h(0)$. Do đó $g(x) = f(x) - \alpha$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Thay $x = 0$ vào (15), ta được $f(y) = h(x) + \beta$, với $\beta = g(0)$, hay $h(x) = f(x) - \beta$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình (15)trở thành
$$f(x+y) = f(x) + f(y) - \alpha - \beta, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{16}$$
Đặt $f(x) = A(x) + \alpha + \beta$ thay vào phương trình (16), ta được
$$A(x+y) + \alpha + \beta = A(x) + \alpha + \beta + A(y) + \alpha + \beta - \alpha - \beta$$
hay
$$A(x+y) = A(x) + A(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
Vậy A là một hàm cộng tính trên $\mathbb{R}$ nên
$$\begin{cases} f(x) = A(x) + \alpha + \beta \\ g(x) = A(x) + \beta \\ h(x) = A(x) + \alpha \end{cases}$$

Chú ý. Nếu bài toán có thêm giả thiết: hàm f, g, h liên tục thì nghiệm tìm được sẽ là

$$\begin{cases} f(x) = ax + \alpha + \beta \\ g(x) = ax + \beta \\ h(x) = ax + \alpha \end{cases}$$

với a, α, β là các hằng số tùy ý.

Tiếp theo ta xét tính ổn định nghiệm của phương trình (15).

Mệnh đề 3. *Giả sử hàm $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$|f(x+y) - g(x) - h(y)| \leq \varepsilon \tag{17}$$

với ε là số dương tùy ý cho trước và với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó tồn tại duy nhất một hàm cộng tính $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{cases} |f(x) - A(x) - f(0)| \leq 6\varepsilon \\ |g(x) - A(x) - g(0)| \leq 4\varepsilon \\ |h(x) - A(x) - h(0)| \leq 6\varepsilon \end{cases}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. Thay $y = 0$ vào (17), ta được

$$|f(x) - g(x) - h(0)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

suy ra

$$|f(0) - g(0) - h(0)| \leq \varepsilon. \tag{19}$$

Thay $y = 0$ vào (17), ta được

$$|f(y) - h(y) - g(0)| \leq \varepsilon, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \tag{20}$$

Từ (18) và (20)

$$\begin{aligned} |h(x) - g(x) - h(0) + g(0)| &= |f(x) - g(x) - h(0) + h(x) + g(0) - f(x)| \\ &\leq |f(x) - g(x) - h(0)| + |f(x) - h(x) - h(0)| \end{aligned}$$

hay

$$|h(x) - g(x) - h(0) + g(0)| \leq 2\varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Sử dụng (18), ta được

$$|f(x+y) - g(x+y) - h(0)| \leq \varepsilon, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{22}$$

Ta có

$$|f(x+y) - g(x+y) - h(0)| = |f(x+y) - g(x) - h(y) - g(x+y) + g(x) + h(y) - h(0)|$$

nên kết hợp (17) và (22) thu được

$$\begin{aligned}|g(x+y)-g(x)-h(y)+h(0)| &\le |f(x+y)-g(x+y)-h(0)|+|f(x+y)-g(x)-h(y)|\\ &\le 2\varepsilon\end{aligned}$$

Mặt khác

$$|g(x+y)-g(x)-h(y)+h(0)| = |g(x+y)-g(x)-g(y)+g(0)-h(y)+g(y)-g(0)+h(0)|$$

nên từ (21)

$$\begin{aligned}|g(x+y)-g(x)-g(y)+g(0)| &\le |g(x+y)-g(x)-h(y)-h(0)|+|h(y)-g(y)+g(0)-h(0)|\\ &\le 4\varepsilon\end{aligned}$$

hay

$$|[g(x+y)-g(0)]-[g(x)-g(0)]-[g(y)-g(0)]| \le 4\varepsilon, \tag{23}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Đặt

$$G(x) = g(x)-g(0), \tag{24}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Thế vào (23) ta được

$$|G(x+y)-G(x)-G(y)| \le 4\varepsilon, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Theo định lý về tính ổn định của hàm cộng tính, tồn tại duy nhất một hàm cộng tính $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$|G(x)-A(x)| \le 4\varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{25}$$

Từ (24) và (25) ta được

$$|g(x)-A(x)-g(0)| \le 4\varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{26}$$

Từ (18), (19) và (26) ta được

$$\begin{aligned}|f(x)-A(x)-f(0)| &= |[f(x)-g(x)-h(0)]+[g(x)-A(x)-g(0)]+[g(0)+h(0)-f(0)]|\\ &\le |f(x)-g(x)-h(0)|+|g(x)-A(x)-g(0)|+|f(0)-g(0)-h(0)|\\ &\le \varepsilon+4\varepsilon+\varepsilon = 6\varepsilon\end{aligned}$$

Từ (21) và (26) ta được

$$\begin{aligned}|h(x)-A(x)-h(0)| &= |[h(x)-g(x)-h(0)+g(0)]+[g(x)-A(x)-g(0)]|\\ &\le |h(x)-g(x)-h(0)+g(0)|+|g(x)-A(x)-g(0)|\\ &\le 2\varepsilon+4\varepsilon = 6\varepsilon.\end{aligned}$$

Ví dụ 4. *Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình sau*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{27}$$

Từ phương trình (27), ta có $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Giả sử tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) = 0$. Khi đó

$$f(\frac{x_0 + y}{2}) = \sqrt{f(x_0)f(y)} = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

hay $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Xét $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó lấy logarit hai vế của phương trình (27), ta được

$$\ln f(\frac{x+y}{2}) = \frac{\ln f(x) + \ln f(y)}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Đặt $g(x) = \ln f(x)$ ta có

$$g(\frac{x+y}{2}) = \frac{g(x) + g(y)}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

hay g là một nghiệm của phương trình Jensen, tức là $g(x) = ax + b$. Suy ra nghiệm của phương trình (27) là $f(x) = e^{ax+b}$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Tiếp theo ta xét tính ổn định nghiệm của phương trình (27).

Mệnh đề 4. *Giả sử hàm* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *thỏa mãn*

$$|f(\frac{x+y}{2}) - \sqrt{f(x)f(y)}| \leq \varepsilon \tag{28}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ *và*

$$|f(x) - f(-x)| \leq \delta \tag{29}$$

với ε, δ *là các số dương tùy ý cho trước. Giả sử tồn tại* $f(a)^{-1}$*, khi đó tồn tại một hàm* $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *sao cho*

$$|E(x+y) - E(x) - E(y)| \leq \alpha, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{30}$$

và

$$|f(x) - \frac{1}{2}(E(x) - E(-x))| \leq \beta, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{31}$$

với α, β *là các hằng số nào đó.*

Chứng minh. Đặt $m = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \sqrt{f(x)f(a)}$. Từ điều kiện (29) thì m là hữu hạn. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
\sqrt{f(x)f(-a)} &\leq \sqrt{f(-x)f(a)} + |\sqrt{f(x)f(-a)} - \sqrt{f(-x)f(a)}| \\
&\leq m + |f(\frac{x-a}{2}) - \sqrt{f(x)f(-a)}| + |f(\frac{-x+a}{2}) - \sqrt{f(-x)f(a)}| \\
&\quad + |f(\frac{x-a}{2}) - f(\frac{-x+a}{2})| \\
&\leq m + 2\varepsilon + \delta
\end{aligned}$$

Đặt $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ thỏa

$$h(x) = \sqrt{f(x)f(-x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó h là một hàm chẵn và

$$|h(x) - f(x)| = \sqrt{f(x)}|\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(-x)}| \leq 2\frac{m^2}{f(a)}, \ \ x \in \mathbb{R}, \quad |h(x)\sqrt{f(a)}| \leq m. \tag{32}$$

Đặt $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$E(x) = h(x) + \sqrt{f(a)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Áp dụng (32) ta có

$$\begin{aligned}|E(x+y) - E(x)E(y)| &= |h(x+y) + \sqrt{f(a)} - h(x)h(y) - (h(x)+h(y))\sqrt{f(a)} - f(a)|\\ &\leq |h(x+y)| + |h(x)h(y)| + |(h(x)+h(y))\sqrt{f(a)}| + |f(a)|\\ &\leq |h(x+y) - f(x+y)| + |f(x+y)| + |h(x)h(y)f(a)f^-1(a)|\\ &\quad + |h(x)\sqrt{f(a)}| + |h(y)\sqrt{f(a)}| + \sqrt{f(a)} + |f(a)|\\ &\leq 2\frac{m^2}{f(a)} + \frac{m}{\sqrt{f(a)}} + \frac{m^2}{f(a)} + 2m + \sqrt{f(a)} + |f(a)| = \alpha\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}&|f(x) - \frac{1}{2}(E(x) - E(-x))| =\\ &\qquad |f(x) - h(x) + h(x) - \frac{1}{2}(h(x) + h(-x)) - \sqrt{f(a)}|\\ &\qquad \leq |f(x) - h(x)| + \sqrt{f(a)} \leq 2\frac{m^2}{f(a)} + \sqrt{f(a)} = \beta.\end{aligned}$$

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu, *Phương trình hàm*, Nhà xuất bản Giáo dục, 1997.

[2] Pl. Kannappan, *Functional Equations and Inequalities with Applications*, Springer, 2009, 295-323.

MỘT SỐ LỚP PHƯƠNG TRÌNH HÀM ĐA ẨN SINH BỞI PHI ĐẲNG THỨC

Trần Viết Tường, Trường THPT Trần Phú - Đà Nẵng

Trong toán học phổ thông các bài toán về phương trình hàm là các loại toán thường mới và rất khó, thường xuyên xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi quốc gia, Olympic Toán khu vực và Quốc tế, Olympic sinh viên giữa các trường Đại học và cao đẳng. Liên quan đến các dạng toán này là các bài toán về các đặc trưng khác nhau của hàm số và các tính chất liên quan với chúng.
Để hệ thống các phương trình hàm, cần thiết phải hệ thống các kiến thức cơ bản và nâng cao về các dạng phương trình hàm cũng như các ứng dụng của chúng.
Đối với các bài toán về phương trình hàm với nhiều ẩn hàm trong các lớp hàm cụ thể: liên tục, khả vi, tuần hoàn, lồi lõm,... cần nắm được một số kĩ thuật về biến đổi hàm số, khảo sát các tính chất cơ bản của hàm thực và các phép biến hình trên trục thực.

1 Phương trình hàm sinh bởi phi đẳng thức $a^2 + b^2 \not\equiv g(a+b)h(a-b)$

Bài toán 1. Tìm các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2 + y^2) = g(x+y).h(x-y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải. Xét trường hợp $g(0) = 0$.
Cho $y = -x$, phương trình đã cho trở thành

$$f(2x^2) = 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Suy ra

$$f(x) = 0,\ \ \forall x \geq 0.$$

Thay $f(x)$ vào phương trình đã cho ta được

$$\begin{aligned} g(x+y).h(x-y) &= 0,\ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ g(u).h(v) &= 0,\ \ \forall u, v \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{cases} g(x) = 0 \\ h(x) \ \text{ liên tục tùy ý trên } \ \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} h(x) = 0 \\ g(x) \ \text{ liên tục tùy ý trên } \ \mathbb{R} \end{cases}$$

Vậy nghiệm trong trường hợp này là :

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \text{ với } x \geq 0 \\ f(x) = q(x) \text{ với } q(x) \text{ liên tục tùy ý trong } (-\infty; 0] \text{ và } q(0) = 0 \end{array} \right. \\ g(x) \equiv 0 \\ h(x) \text{ là hàm liên tục tùy ý} \end{cases}$$

hoặc

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \text{ với } x \geq 0 \\ f(x) = q(x) \text{ với } q(x) \text{ liên tục tùy ý trong } (-\infty; 0] \text{ và } q(0) = 0 \end{array} \right. \\ g(x) \text{ là hàm số liên tục tùy ý và } g(0) = 0 \\ h(x) \equiv 0 \end{cases}$$

Xét trường hợp $h(0) = 0$
Cho $y = x$, phương trình đã cho trở thành

$$f(2x^2) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Suy ra

$$f(x) = 0, \ \forall x \geq 0.$$

Thế $f(x)$ vào đã cho ta được

$$\begin{aligned} g(x+y).h(x-y) = 0, \ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ g(u).h(v) = 0, \ \forall u, v \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{cases} g(x) = 0 \\ h(x) \text{ liên tục tùy ý trên } \mathbb{R}; h(0) = 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} h(x) = 0 \\ g(x) \text{ liên tục tùy ý trên } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình trong trường hợp này là :

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \text{ với } x \geq 0 \\ f(x) = q(x) \text{ với } q(x) \text{ liên tục tùy ý trong } (-\infty; 0] \text{ và } q(0) = 0 \end{array} \right. \\ g(x) \text{ là hàm liên tục tùy ý} \\ h(x) \equiv 0 \end{cases}$$

hoặc

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \text{ với } x \geq 0 \\ f(x) = q(x) \text{ với } q(x) \text{ liên tục tùy ý trong } (-\infty; 0] \text{ và } q(0) = 0 \end{array} \right. \\ g(x) \equiv 0 \\ h(x) \text{ là hàm liên tục tùy ý với } h(0) = 0 \end{cases}$$

Xét trường hợp $g(0) \neq 0$ và $h(0) \neq 0$.
Ta có $f(0) \neq 0$.
Cho $x = y$, phương trình đã cho trở thành

$$f(2x^2) = g(2x).h(0), \quad g(2x) = \frac{f(2x^2)}{h(0)}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{f(\dfrac{x^2}{2})}{h(0)}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cho $x = -y$, phương trình đã cho trở thành

$$f(2x^2) = g(0).h(2x), \ \ h(2x) = \frac{f(2x^2)}{g(0)}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{f(\dfrac{x^2}{2})}{g(0)}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay $g(x)$ và $h(x)$ vào phương trình ta được

$$f(x^2 + y^2) = f[\frac{(x+y)^2}{2}].f[\frac{(x-y)^2}{2}].\frac{1}{g(0)h(0)}, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đặt $\begin{cases} u = \dfrac{(x+y)^2}{2} \\ v = \dfrac{(x-y)^2}{2} \end{cases}$ .Khi đó ta có

$$f(u+v) = f(u).f(v).\frac{1}{g(0)h(0)}, \ \ \forall u, v \geq 0. \tag{2}$$

Đặt $f(u) = g(0)h(0)F(u), \ \ \forall u \geq 0$.
Phương trình (3.2) trở thành

$$g(0)h(0)F(u+v) = g(0)h(0)F(u).g(0)h(0)F(v).\frac{1}{g(0)h(0)}, \ \ \forall u, v \geq 0$$
$$\Leftrightarrow F(u+v) = F(u)F(v), \ \ \forall u, v \geq 0.$$

Ta có

$$F(u) = a^u \quad u \geq 0; a > 0$$
$$f(u) = b.a^u \ \text{ với } \ b = g(0)h(0); a > 0$$
$$f(x) = b.a^x, \ \ \forall x \geq 0; a > 0, b \neq 0.$$

Suy ra $g(x) = \dfrac{f(\dfrac{x^2}{2})}{h(0)}, \ \forall x \in \mathbb{R} = g(0).a^{\frac{x^2}{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R} = m.a^{\frac{x^2}{2}}$ với $m = g(0)$.

$h(x) = \dfrac{f(\dfrac{x^2}{2})}{g(0)}, \ \forall x \in \mathbb{R} = h(0).a^{\frac{x^2}{2}}, \ \forall x \in \mathbb{R} = n.a^{\frac{x^2}{2}}$ với $n = h(0)$.

Vậy nghiệm của phương trình trong trường hợp này là :

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = b.a^x \ \text{ với } \ x \geq 0; a > 0; b \neq 0 \\ f(x) = q(x) \ \text{ với } \ q(x) \ \text{ liên tục tùy ý trong } \ (-\infty; 0] \ \text{ và } \ q(0) = 0 \end{array}\right. \\ g(x) = m.a^{\frac{x^2}{2}}, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ h(x) = n.a^{\frac{x^2}{2}}, \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Tóm lại nghiệm của bài toán là

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \ \text{ với } \ x \geq 0 \\ f(x) = q(x) \ \text{ với } \ q(x) \ \text{ liên tục tùy ý trong } \ (-\infty; 0] \ \text{ và } \ q(0) = 0 \end{array}\right. \\ g(x) \equiv 0 \\ h(x) \ \text{ là hàm liên tục tùy ý} \end{cases}$$

hoặc

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \ \text{ với } \ x \geq 0 \\ f(x) = q(x) \ \text{ với } \ q(x) \ \text{ liên tục tùy ý trong } \ (-\infty; 0] \ \text{ và } \ q(0) = 0 \end{array}\right. \\ g(x) \ \text{ là hàm số liên tục tùy ý và } \ g(0) = 0 \\ h(x) \equiv 0 \end{cases}$$

hoặc

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \ \text{ với } \ x \geq 0 \\ f(x) = q(x) \ \text{ với } \ q(x) \ \text{ liên tục tùy ý trong } \ (-\infty; 0] \ \text{ và } \ q(0) = 0 \end{array}\right. \\ g(x) \ \text{ là hàm liên tục tùy ý} \\ h(x) \equiv 0 \end{cases}$$

hoặc

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \ \text{ với } \ x \geq 0 \\ f(x) = q(x) \ \text{ với } \ q(x) \ \text{ liên tục tùy ý trong } \ (-\infty; 0] \ \text{ và } \ q(0) = 0 \end{array}\right. \\ g(x) \equiv 0 \\ h(x) \ \text{ là hàm liên tục tùy ý với } \ h(0) = 0 \end{cases}$$

hoặc

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = b.a^x \ \text{ với } \ x \geq 0; a > 0; b \neq 0 \\ f(x) = q(x) \ \text{ với } \ q(x) \ \text{ liên tục tùy ý trong } \ (-\infty; 0] \ \text{ và } \ q(0) = 0 \end{array}\right. \\ g(x) = m.a^{\dfrac{x^2}{2}}, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ h(x) = n.a^{\dfrac{x^2}{2}}, \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Bài toán 2. Tìm các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2 + y^2) = g(x + y) + h(x - y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Giải. Nghiệm của bài toán là

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = ax + b + c \ \text{ với } \ x \geq 0 \\ f(x) = q(x) \ \text{ với } \ q(x) \ \text{ liên tục tùy ý trong } \ (-\infty; 0] \ \text{ và } \ q(0) = 0 \end{array} \right. \\ g(x) = a\dfrac{x^2}{2} + b, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ h(x) = a\dfrac{x^2}{2} + c, \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

với $b = g(0); c = h(0)$

Bài toán 3. Tìm các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2 + y^2) = g(x^2) - h(y^2), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Giải. Nghiệm của bài toán là

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = ax + b \ \text{ với } \ x \geq 0 \\ f(x) = q(x) \ \text{ với } \ q(x) \ \text{ liên tục tùy ý trong } \ (-\infty; 0] \ \text{ và } \ q(0) = 0 \end{array} \right. \\ g(x) = ax + c, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ h(x) = -ax - d, \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2 Phương trình hàm sinh bởi đẳng thức $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Bài toán 4. Tìm các hàm số f, g, h liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2 - y^2) = (x + y)g(x - y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Giải. Cho $y = 0$, phương trình đã cho trở thành

$$f(x^2) = x.g(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nếu $x = 0$ thì

$$f(x) = 0. \tag{6}$$

Nếu $x \neq 0$, ta có

$$g(x) = \frac{f(x^2)}{x}.$$

Do đó, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}
f(x^2-y^2) &= \frac{(x+y)f[(x-y)^2]}{x-y},\ \ \forall x\neq y\\
\frac{f(x^2-y^2)}{x+y} &= \frac{f[(x-y)^2]}{x-y},\ \ \forall x\neq \pm y\\
\frac{f(x^2-y^2)}{x^2-y^2} &= \frac{f[(x-y)^2]}{(x-y)^2},\ \ \forall x\neq \pm y.
\end{aligned}$$

Đặt $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ với $x\neq 0$. Khi đó, ta có

$$h(x^2-y^2)=h[(x-y)^2].$$

Cho $x=y+1$, ta có

$$\begin{aligned}
h(2y+1)&=h(1),\ \ \forall y\in\mathbb{R}\\
h(x)&=a,\ \ \forall x\neq 0.
\end{aligned}$$

Do đó

$$f(x)=ax \ \text{ với } \ x\neq 0. \tag{7}$$

Kết hợp (10) và (7) ta có

$$f(x)=ax,\ \ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Suy ra

$$g(x)=\frac{ax^2}{x}=ax,\ \ \forall x\neq 0.$$

Vậy nghiệm của bài toán là $\begin{cases} f(x)=ax\\ g(x)=ax\end{cases}$

Bài toán 5. Tìm tất cả các hàm số f,g,h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2-y^2)=g(x-y)+h(x+y),\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{8}$$

Giải. Nghiệm của bài toán là $\begin{cases} f(x)=a,\ \ \forall x\in\mathbb{R}\\ g(x)=b,\ \ \forall x\in\mathbb{R}\\ h(x)=c,\ \ \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$ trong đó $a,b,c\in\mathbb{R}; a=b+c.$

Bài toán 6. Tìm tất cả các hàm số f,g,h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2-y^2)=g^2(x)-h^2(y),\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}. \tag{9}$$

Giải. Nghiệm của bài toán là

$$\begin{cases} f(x) = mx + a - b, & \forall x \in \mathbb{R}; a, b, m \geq 0 \\ g(x) = \sqrt{mx^2 + a} \\ h(x) = \sqrt{mx^2 + b} \end{cases}$$

$$\text{hoặc} \begin{cases} f(x) = mx + a - b, & \forall x \in \mathbb{R}; a, b, m \geq 0 \\ g(x) = \sqrt{mx^2 + a} \\ h(x) = -\sqrt{mx^2 + b} \end{cases}$$

$$\text{hoặc} \begin{cases} f(x) = mx + a - b, & \forall x \in \mathbb{R}; a, b, m \geq 0 \\ g(x) = -\sqrt{mx^2 + a} \\ h(x) = \sqrt{mx^2 + b} \end{cases}$$

$$\text{hoặc} \begin{cases} f(x) = mx + a - b, & \forall x \in \mathbb{R}; a, b, m \geq 0 \\ g(x) = -\sqrt{mx^2 + a} \\ h(x) = -\sqrt{mx^2 + b} \end{cases}$$

3 Một số bài toán phương trình đa ẩn hàm khác

Bài toán 7. Tìm các hàm số f, g, h liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x) - g(y) = xh(y) - yh(x), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Giải. Cho $x = y$, phương trình đã cho trở thành

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cho $y = 0$, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} f(x) - g(0) &= x.h(0), \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) &= x.h(0) + g(0), \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) &= ax + b \ \text{ với } \ a = h(0); b = g(0). \end{aligned}$$

Thay f, g vào phương trình đã cho ta được

$$\begin{aligned} (ax + b) - (ay + b) &= xh(y) - yh(x), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ ax - ay &= xh(y) - yh(x), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \frac{a}{y} - \frac{a}{x} &= \frac{h(y)}{y} - \frac{h(x)}{x}, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \frac{a}{x} - \frac{h(x)}{a} &= \frac{a}{y} - \frac{h(y)}{y}, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\frac{a}{x} - \frac{h(x)}{x} &= C \ \text{ với C là hằng số}\\ h(x) &= -Cx + a\\ h(x) &= cx + a \ \text{ với } \ c = -C.\end{aligned}$$

Thử lại phương trình ta thấy f, g, h thỏa mãn.
Vậy nghiệm của phương trình là $\begin{cases} f(x) = g(x) = ax + b \\ h(x) = cx + a \end{cases}$

Bài toán 8. Tìm tất cả các hàm số f, g xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x) - f(y) = (x + y)g(x - y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Giải. Nghiệm của bài toán là $\begin{cases} f(x) = ax^2 + b \\ g(x) = ax \end{cases}$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$.

Bài toán 9. Tìm tất cả các hàm số f, g xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x) + f(y) + 2xy = (x + y)g(x + y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Giải. Nghiệm của bài toán là $f(x) = x^2 + ax$ và $g(x) = \begin{cases} x + a & \text{với } \ x \neq 0 \\ c & \text{với } \ x = 0 \end{cases}$.

Bài toán 10. Tìm tất cả các hàm số f, g xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x).g(y) = x^2 - y^2, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Giải. Nếu tồn tại x_0 sao cho $f(x_0) = 0$. Khi đó ta có

$$0 = f(x_0).g(y) = x_0^2 - y^2, \ \forall y \in \mathbb{R} \quad \text{(vô lý)}.$$

Suy ra

$$f(x) \not\equiv 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tương tự ta cũng có

$$g(x) \not\equiv 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cho $x = y$, phương trình (15) trở thành

$$f(x).g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \ \text{ hoặc } \ g(x) = 0 \quad (\text{loại do } \ f(x) \not\equiv 0; g(x) \not\equiv 0).$$

Vậy không tồn tại các hàm f, g thỏa mãn bài toán.

Bài toán 11. Tìm tất cả các hàm số f, g, h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) + g(x-y) = h(xy), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Giải. Nghiệm của bài toán là $\begin{cases} f(x) = \dfrac{mx^2}{4} + b, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ g(x) = -\dfrac{mx^2}{4} + a, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ h(x) = mx + a + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Bài toán 12. Tìm tất cả các hàm số dương f, g, h xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y).g(x-y) = h(xy), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Giải. Do f, g, h là các hàm số dương nên phương trình (**??**) tương đương

$$\ln f(x+y) + \ln f(x-y) = \ln h(xy), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đặt $\begin{cases} \ln f(x) = F(x) \\ \ln g(x) = G(x) \\ \ln h(x) = H(x) \end{cases}$. Khi đó ta có $F(x+y) + G(x-y) = H(xy), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$

Ta có $\begin{cases} F(x) = \dfrac{mx^2}{4} + b, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ G(x) = -\dfrac{mx^2}{4} + a, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ H(x) = mx + a + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$. Suy ra

$$\begin{cases} f(x) = e^{\frac{mx^2}{4} + b}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ g(x) = e^{-\frac{mx^2}{4} + a}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ h(x) = e^{mx + a + b}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Thử lại ta thấy các hàm f, g, h thỏa mãn điều kiện bài toán.

Vậy nghiệm của bài toán là $\begin{cases} f(x) = e^{\frac{mx^2}{4} + b}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ g(x) = e^{-\frac{mx^2}{4} + a}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ h(x) = e^{mx + a + b}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Bài toán 13. Tìm tất cả các hàm số f, g xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x) + g(x) + f(y) - g(y) = \sin x - \cos y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Giải. Nghiệm của bài toán là $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2}(\sin x - \cos x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ g(x) = \dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x) + a, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu, 1997, *Phương trình hàm,* NXB Giáo Dục

[2] Nguyễn Văn Mậu, 2006, *Các bài toán nội suy và áp dụng,* NXB Giáo Dục.

[3] Nguyễn Văn Mậu, 2009, *Phương trình hàm với nhóm hữu hạn các biến đổi phân tuyến tính*, Kỷ yếu HNKH "Các phương pháp và chuyên đề toán sơ cấp" tại Bắc Giang, 27-29/11/2009.

[4] Christopher G. Small, 2000, *Functinal equations and how to solve them*, Springer.

TỪ CÔNG THỨC EULER ĐẾN CÁC BÀI TOÁN SỐ PHỨC

Lê Sáng, Nguyễn Đinh Huy, Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn - Khánh Hòa

Áp dụng số phức trong hình học phẳng đã có nhiều tài liệu của tác giả Đoàn Quỳnh,Nguyễn Hữu Điển như là sách giáo khoa dùng tham khảo.Trong bài viết này chúng tôi đề cập đến một phương pháp rất hiệu quả trong giải hệ phương trình, chứng minh đẳng thức, hay dùng để tính tổng được gọi là phương pháp số phức. Trước đó xét thêm khai triển chuỗi Taylor để xây dựng công thức Moivre mà trong sách giáo khoa có được từ công thức nhân số phức dạng lượng giác và chứng minh quy nạp I Khai triển Taylor và công thức Moivre

1 Khai triển Taylor và công thức Moivre

Cho z là số phức
$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ...$$
Trường hợp đặc biệt, với một góc x, ta có
$$e^{ix} = 1 + i\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$
Phần thực và phần ảo của e^{ix} lần lượt là
$$\mathrm{Re}(e^{\mathrm{ix}}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6} + \cdots,\ \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{ix}}) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$
Hai chuỗi trên là khai triển Taylor của $\cos x$ và $\sin x$.
Ta có được công thức Euler như sau $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ và ta có một công thức tuyệt đẹp: $e^{i\pi} = -1$ Ngoài ra do $e^{inx} = (e^{(ix)^n})$ nên ta suy ra công thức Moivre: $\cos nx + i\sin nx = (\cos x + i\sin x)^n$
Ví dụ mở đầu
Tìm khai triển Taylor của hàm $f(x) = e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)$ tại điểm 0, với θ là tham số.
Giải. Đặt $g(x) = e^{x\cos\theta}\sin(x\sin\theta)$ và viết :
$$\begin{aligned} f(x) + ig(x) &= e^{x\cos\theta}\left(\cos(x\sin\theta) + i\sin(x\sin\theta)\right) \\ &= e^{x\cos\theta}.e^{ix\sin\theta} = e^{x(\cos\theta + i\sin\theta)} \end{aligned}$$
Dùng công thức Moivre và khai triển Taylor:
$$1 + \frac{x}{1!}(\cos\theta + \sin\theta) + \frac{x^2}{1!}(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \cdots + \frac{x^n}{n!}(\cos n\theta + i\sin n\theta) + \cdots$$

Khai triển và rút gọn ta thu được

$$f(x) = 1 + \frac{\cos\theta}{1!}x + \frac{\cos 2\theta}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\cos n\theta}{n!}x^n + \cdots$$

Sau đây là một số bài toán áp dụng phương pháp số phức

2 Chứng minh đẳng thức

Bài toán 1. *Chứng minh* $\frac{1}{\cos 6^0} + \frac{1}{\sin 24^0} + \frac{1}{\sin 48^0} = \frac{1}{\sin 12^0}$

Lời giải. Đặt $z = \cos 6^0 + i\sin 6^0$. Ta có $z^15 = i$
Mà $\cos 6^0 = \frac{z^2+1}{2z}, \sin 12^0 = \frac{z^4-1}{2iz^2}, \sin 24^0 = \frac{z^8-1}{2iz^4}, \sin 48^0 = \frac{z^{16}-11}{2iz^8}$
Đẳng thức cần chứng minh trở thành chứng minh $\frac{2z}{z^2+1} - \frac{2iz^2}{z^4-1} + \frac{2iz^4}{z^8-1} + \frac{2iz^8}{z^{16}-1} = 0$. Quy đồng mẫu số, thu gọn Ta có $z^{16} - 1 - iz\left(z^{14}+1\right) = 0z^{16} - 1 - iz\left(z^{14}+1\right) = 0$ tức là $iz - 1 - i^2 - iz = 0$
Điều này hiển nhiên đúng.

Bài toán 2. Cho a, b, c là các số thực thỏa $\cos a + \cos b + \cos c = \sin a + \sin b + \sin c = 0$
Chứng minh rằng
a) $\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = \sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 0$
b) $3(\cos(a+b+c) = \cos 3a + \cos 3b + \cos 3c$ và $3(\sin(a+b+c) = \sin 3a + \sin 3b + \sin 3c$

Lời giải. Đặt $x = \cos a + i\sin a,\ y = \cos b + i\sin b,\ z = \cos c + i\sin c$
Từ giả thiết ta có $x + y + z = x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = 0$ suy ra $xy + yz + zx = 0$
a) $x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = 0$. Suy ra kết quả
b) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$. Suy ra kết quả

Bài toán 3. *Chứng minh đẳng thức:*

$$\left(\frac{1+i\tan t}{1-i\tan t}\right)^n = \frac{1+i\tan nt}{1-i\tan nt}, n \geqslant 1$$

Lời giải. Nếu ta nhân tử và mẫu vế bên trái với $\cos t$, và vế bên phải bởi $\cos nt$, thì ta có được đẳng thức: $\left(\frac{e^{it}}{e^{-it}}\right)^n = \frac{e^{int}}{e^{-int}}$

Bài toán 4. *Chứng minh đẳng thức*

$$\left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} n \\ 2k \end{array}\right) + ... = \frac{2^n}{k}\sum_{i=1}^{k} \cos^n\frac{j\pi}{k}\cos\frac{nj\pi}{k}$$

Lời giải. Let $C_1, C_2, \ldots, C_k$ là k nghiệm của căn đơn vị, tức là, $C_j = \cos\frac{2j\pi}{k} + i\sin\frac{2j\pi}{k}$, $j = 1, 2, .., k$
Như vậy

$$\sum_{j=1}^{k}(1+C_j)^n = \sum_{s=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ s \end{array}\right)\left(\sum_{j=1}^{k} C_j\right) = k\sum_{j=0}^{\frac{n}{k}}\binom{n}{jk}$$

Vì $1 + C_j = 2cos\frac{j\pi}{k}\left(cos\frac{j\pi}{k} + i\sin\frac{j\pi}{k}\right)$
Nên áp dụng công thức Moivre

$$\sum_{j=1}^{k}(1+C_j)^n = \sum_{j=1}^{k}2^n cos^n\frac{j\pi}{k}\left(cos\frac{nj\pi}{k} + i\sin\frac{nj\pi}{k}\right)$$

So sánh phần thực 2 vế ta được kết quả

Bài toán 5. *Chứng minh đẳng thức*

$$1 - \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n \\ 6 \end{pmatrix} + ... = 2^{\frac{n}{2}}\left(cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)\ ,\ n \geq 1$$

Lời giải. Dùng công thức Moivre, ta được:

$$(1+i)^n = \left[\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

Khai triển $(1+i)^n$ và cho hai vế bằng nhau bởi phần thực,ta có được điều phải chứng minh ban đầu.

3 Tính tích và tổng

Bài toán 6. *Chứng minh tổng* $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$

Lời giải. Nếu $z = \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$ thì $z^7 = 1$ Điều cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \frac{1}{2}\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + \frac{1}{2} = 0$$

Nhân cho $2z^3$, sắp xếp các số hạng $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{z^7-1}{z-1} = 0$

Bài toán 7. *Tính tổng* $T = \sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{9}} + \sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{9}}$

Lời giải. Xét phương trình $z^9 - 1 = 0$ có 9 nghiệm z_k, $k = 0, 1, \ldots, 8$ có tổng là 0
Phương trình $t^4 + t^3 - 3t^2 - 2t + 1 = (t+1)(t^3 - 3t + 1) = 0$ có 4 nghiệm:

$$2\cos\frac{2\pi}{9}, 2\cos\frac{4\pi}{9}, 2\cos\frac{6\pi}{9}, 2\cos\frac{8\pi}{9}$$

Đặt $t = z + \frac{1}{z}$, phương trình $(t^3 - 3t + 1) = 0$ có 3 nghiệm $2\cos\frac{2\pi}{9}, 2\cos\frac{4\pi}{9}, 2\cos\frac{8\pi}{9}$
Dùng các biểu thức đối xứng nghiệm phương trình bậc 3, ta có tổng là $\sqrt[3]{\frac{3\sqrt[3]{9}-6}{2}}$

Bài toán 8. Tính tích $P = \cos cos40^0 cos80^0$

Lời giải. . Đặt $z = \cos 20^0 + i \sin 20^0$
Ta có $2\cos 20^0 = \left(z + \frac{1}{z}\right), 2\cos 40^0 = \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right), 2\cos 80^0 = \left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right), z^9 = -1$
Suy ra $(z - -z^8)(z^2 - -z^7)(z^3 - -z^5) = (z - -z^2 + z^3 - -z^4 + z^5 - -z^6 + z^7 - -z^8) = 1$

Bài toán 9. *Tính tích* $\sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{2n} \sin \frac{3\pi}{2n} \cdots \sin \frac{(n-1)\pi}{2n}$

Lời giải. Xét đa thức $P(X) = X^{2n} - 1$
Có các nghiệm $x_k = \cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n}, k = 0, 1, \cdots, 2n-1, x_0 = 1, x_n = -1, \overline{x_k} = x_{2n-k}$khi $1 \leqslant k \leqslant n-1$
Khi đó $P(X) = (X^2 - 1)\prod\limits_{k=1}^{n-1}(X - x_k)(X - \overline{x_k}) = (X^2 - 1)\prod\limits_{k=1}^{n-1}(X^2 - 2\cos \frac{k\pi}{n} + 1)$, do $x_k + \overline{x_k} = 2\cos \frac{k\pi}{n}, x_k\overline{x_k} = 1$
Chia 2 vế cho $x^2 - 1$, ta có

$$x^{2n-2} + x^{2n-4} + \cdots x^4 + x^2 + 1 = \prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos \frac{k\pi}{n} + 1\right).$$

Lấy $x = 1$, ta được $n = 2^{n-1}\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(1 - \cos \frac{k\pi}{n}\right) = 2^{n-1}\prod\limits_{k=1}^{n-1} 2\sin^2 \frac{k\pi}{2n}$, suy ra $\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin \frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$

Bài toán 10. *Tính tổng:*

$$\binom{n}{1}\cos x + \binom{n}{2}\cos 2x + ... + \binom{n}{n}\cos nx$$

Lời giải. Gọi tổng cần tìm là S_1 và cho

$$S_2 = \binom{n}{1}\sin x + \binom{n}{2}\sin 2x + ... + \binom{n}{n}\sin nx.$$

Dùng công thức Euler, ta có thể viết

$$1 + S_1 + iS_2 = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}e^{\mathrm{ix}} + ... + \binom{n}{2}e^{\mathrm{i}2x}$$

Nhờ tính nhân của lũy thừa, ta có:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{\mathrm{ix}}\right)^k = \left(1 + e^{\mathrm{ix}}\right)^n = \left(2\cos\frac{x}{2}\right)^n\left(e^{\frac{\mathrm{ix}}{2}}\right)^n$$

Tổng trong câu hỏi là một phần thực của khai triển luôn bé hơn 1, điều này dẫn đến kết quả tổng là

$$2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{nx}{2} - 1$$

Bài toán 11. (USAMO 1999) Tính $(\cos\alpha)(\cos 2\alpha)(\cos 3\alpha)\ldots(\cos 999\alpha)$
với $\alpha = \frac{2\pi}{1999}$

Lời giải. Xét bài toán tổng quát, với n là số nguyên lẻ, hãy tính:

$$S = (\cos\alpha)(\cos 2\alpha)(\cos 3\alpha)\ldots(\cos n\alpha) \text{ với } \alpha = \frac{2\pi}{2n+1}$$

Chúng ta có thể cho $\varsigma = e^{i\ldots?}$ và $S = 2^{-n}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\varepsilon^k + \varepsilon^{-k}\right)$.
Khi $\varepsilon^k + \varepsilon^{-k} = \varepsilon^{2n+1-k},\ \ k = 1, 2, .., n$, chúng chứa:
$S^2 = 2^{-2x}\prod\limits_{k=1}^{2n}\left(\varepsilon^k + \varepsilon^{-k}\right) = 2^{-2n}.\prod\limits_{k=1}^{2n}\varepsilon^{-k}.\prod\limits_{k=1}^{2n}\left(1 + \varepsilon^{2k}\right)$
Mà $\varepsilon^{-(1+2+\ldots+2n)} = 1$. Bởi vì $(1 + 2 + \ldots + 2n) = n(2n+1)$ là bội của $2n+1$.
Xét $\prod\limits_{k=1}^{2n}\left(1 + \varepsilon^{2k}\right)$, chú ý rằng ta có thể viết là $\prod\limits_{k=1}^{2n}\left(1 + \varepsilon^{k}\right)$, từ khi số ε^{2k} có hơn $(2n+1)$ nghiệm.
Trong khai triển

$$z^{n+1} - 1 = (z-1)\prod_{k=1}^{2n}\left(z - \varepsilon^k\right)$$

Cho $z = -1$ và chia cả 2 vế bởi -2 vì thế $\prod\limits_{k=1}^{2n}\left(1 + \varepsilon^k\right) = 1$. Nên $S^2 = 2^{-2n}$, và vì thế $S = \pm 2^{-n}$
Khi $1 \le k \le n,\ \cos k\alpha\ khi\ \frac{\pi}{2} < k\alpha < \pi$. Giá trị của k chẳn , lẻ, tùy theo n số dư khi chia cho 4

$$S = \begin{cases} +2^{-n} \text{ khi n} \equiv 1 \text{ hay } 2 \text{ (mod4)} \\ -2^{-n} \text{ khi n} \equiv 0 \text{ hay } 3 \text{ (mod4)} \end{cases}$$
$$\text{Khi n} = 999 \equiv 3 \text{ (mod4)}$$

Ta có kết quả là -2^{-999}.

4 Giải phương trình -hệ phương trình

Bài toán 12. Giải phương trình $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$

Lời giải. Đặt $z = \cos x + i\sin x$
Phương trình thành $\frac{z^2-1}{2iz} + \frac{z^4-1}{2iz^2} + \frac{z^6-1}{2iz^3} = \frac{z^2+1}{2z} + \frac{z^4+1}{2z^2} + \frac{z^6+1}{2z^3}$
Thu gọn ta được $\left(z^4 - i\right)\left(z^2 + z + 1\right) = 0$

$$z^2 + z + 1 = 0 \text{ suy ra z} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = cos\frac{\pm 2\pi}{3} + i\text{sin}\frac{\pm 2\pi}{3}, x = \frac{\pm 2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$z^4 = i \text{ suy ra } \cos 4x + i\sin 4x = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Bài toán 13. (VMO 1996) *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \sqrt{3x}(1+\dfrac{1}{x+y})=2 \\ \sqrt{7y}(1-\dfrac{1}{x+y})=4\sqrt{2} \end{cases}$$

Lời giải. Bài này có nhiều các giải, ở đây vân dụng phương pháp số phức
Thế $\sqrt{x}=u, \sqrt{y}=v$, ta có hệ

$$\begin{cases} u(1+\dfrac{1}{u^2+v^2})=\dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ v(1-\dfrac{1}{u^2+v^2})=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{cases}$$

Đặt $z=u+iv$, do u^2+v^2 là bình phương của modun số phức z, nên nhân phương trình sau cho i, rồi cộng vế ta có 1 phương trình phức $z^2-(\frac{2}{\sqrt{3}}+i\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}})z+1=0$ có nghiệm lần lượt là $\frac{1}{\sqrt{3}}\pm\frac{2}{\sqrt{21}}+i(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\pm\sqrt{2})$, dấu cộng, trừ tương ứng
Do đó nghiệm x, y lần lượt là $(\frac{1}{\sqrt{3}}\pm\frac{2}{\sqrt{21}})^2$ $(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\pm\sqrt{2})^2$

Bài toán 14. (Chọn đội tuyển chuyên Vĩnh Phúc 2010-2011)
Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x+\frac{3x-y}{x^2+y^2}=3\,(1) \\ y-\frac{3x+y}{x^2+y^2}=0\,(2) \end{cases}$$

Lời giải. Nhân phương trình (2) với i và cộng theo vế với (1) ta được :

$$x+yi+3\frac{x-yi}{x^2+y^2}-\frac{i\,(x-yi)}{x^2+y^2}=3\,(3)$$

Đến đây ta đặt $z=x+yi$ khi đó $\frac{x-yi}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}$ và do đó (3) trở thành : $z+\frac{3-i}{z}=3$.
Giải phương trình số phức này ta được 2 nghiệm :$z=1-i$ và $z=2+i$.
Từ đó ta suy ra hệ phương trình ban đầu có 2 cặp nghiệm là : $x=1$, $y=1$ và $x=2$, $y=1$.
Như vậy dựa vào việc sắp xếp các ẩn số thích hợp để đưa về một phương trình số phức ta có thể dễ dàng tìm được nghiệm của hệ ban đầu thông qua nghiệm phức này.
Bài toán tương tự
Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x+\frac{x+2y}{x^2+y^2}=2\,(1) \\ x+\frac{2x-3y}{x^2+y^2}=0\,(2) \end{cases}$$

Hà nội 2007 :

$$\begin{cases} x-\frac{3x+10y}{x^2+y^2}=1\,(1) \\ x+\frac{10x-3y}{x^2+y^2}=2\,(2) \end{cases}$$

Bài toán 15. *Giải hệ phương trình :*

$$\begin{cases} 2x\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right)=3\,(1) \\ 2y\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right)=1\,(2) \end{cases}$$

Lời giải. Tương tự như bài toán 1 ta cũng nhân (2) với và cộng với (1) ta được :

$$2(x+yi)+\frac{x-yi}{x^2+y^2}=3+i\,(3).$$

Đặt $z=x+yi$ khi đó phương trình (3) trở thành: $2z+\frac{2}{z}=3+i$.
Phương trình này có 2 nghiệm: $z=1+i$ và $z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.
Do đó hệ phương trình ban đầu có 2 cặp nghiệm: $x=y=1$ và $x=\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2}$.

Bài toán 16. (Moldova TST 2011)
Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x+y+4=\frac{12x+11y}{x^2+y^2}\,(1) \\ y-x+3=\frac{11x-12y}{x^2+y^2}\,(2) \end{cases}$$

Lời giải. Nhân (2) với và cộng với (1) ta được :

$$x+yi+y-xi+4+3i=12\frac{x-yi}{x^2+y^2}+11\frac{y+xi}{x^2+y^2}\,(3)$$

Đặt $z=x+yi$ khi đó phương trình (3) trở thành: $z(z-iz+4+3i)=12+11i$.
Phương trình này có 2 nghiệm : $2+i$ và $-\frac{5}{2}-\frac{9}{2}i$.
Do đó hệ phương trình ban đầu có 2 cặp nghiệm: $x=2,\, y=1$ và $x=-\frac{5}{2},\, y=-\frac{9}{2}$.
Từ các ví dụ trên ta nhận thấy nếu các hệ phương trình có đại lượng x^2+y^2 nằm ở mẫu số ở cả hai phương trình của hệ thì chúng ta nên nghĩ đến phương pháp sử dụng số phức để tận dụng tính chất $z.\bar{z}=|z|^2$ của số phức liên hợp và modul số phức để giải nó. Việc còn lại là giải phương trình số phức sau khi đã biến đổi từ hệ phương trình ban đầu.

Bài toán 17. *Giải hệ phương trình :*

$$\begin{cases} x^2+x-y^2+\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{3}{2}\,(1) \\ 2xy+y-\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{5}{2}\quad(2) \end{cases}$$

Lời giải. Vẫn như các ví dụ trước ta thu được :

$$x^2+2xyi-y^2+x+yi+\frac{x-yi}{x^2+y^2}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i\ (3)$$

Đặt $z=x+yi$ khi đó phương trình (3) trở thành:

$$z^2+z+\frac{1}{z}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i.$$

Giải phương trình này ta được 3 nghiệm từ đó ta kết luận được nghiệm của hệ ban đầu.

Bài toán 18. *Giải hệ phương trình :*

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + x + \frac{x}{x^2+y^2} = -\frac{3}{2} \\ 2xy - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + y - \frac{y}{x^2+y^2} = -1 \end{cases}$$

Lời giải. Hướng dẫn : Đặt $z = x + yi$ hệ phương trình dẫn đến phương trình số phức :

$$z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} = -\frac{3}{2} - i.$$

Bài toán 19. *Giải hệ phương trình :*

$$\begin{cases} \cos 2x + \cos 2y + \frac{4\cos x}{2+\cos 2x-\cos 2y} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \cos x. \sin y - \frac{\sin y}{2+\cos 2x-\cos 2y} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$

Lời giải. Hướng dẫn : Đặt $z = \cos x + i\sin y$, hệ phương trình sẽ dẫn đến phương trình số phức :

$$z^2 + \frac{1}{z} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

5 Các dạng khác

Bài toán 20. (Indian TST 2005) *Cho a, b, c, d các số thực không đồng thời bằng 0. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

$$f(x) = a + b\cos 2x + c\sin 5x + d\cos 8x.$$

Giả sử rằng có số thực t sao cho $f(t) = 4a$. Chứng minh rằng tồn tại số thực s sao cho $f(s) < 0$.

Lời giải. Cho $g(x) = be^{2ix} - ice^{5ix} + de^{8ix}$. Khi đó $f(x) = a + \mathrm{Re} g(x)$.
Để ý rằng

$$g(x) + g\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + g\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = g(x)\left(1 + e^{\frac{2\pi i}{s}} + e^{\frac{4\pi i}{s}}\right) = 0$$

Do đó $f(x) + f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + f\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 3a$
Nếu $a < 0$, thì lấy $s = t$, nếu $a = 0$ thì trong 3 số hạng trên có 1 số âm, nếu $a > 0$, thay $x = t$ trong đẳng thức trên và $f(t) = 4a$, ta có $f\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) + f\left(t + \frac{4\pi}{3}\right) = -a < 0$.
Vậy $f\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$ hay $f\left(t + \frac{4\pi}{3}\right)$. Bài toán đã chứng minh xong.

Bài toán 21. *Cho z_1, z_2, z_3 là các sô phức phân biệt có modun bằng nhau, không phải là số thực . Chứng minh rằng, nếu: $z_1 + z_2z_3,\ z_2 + z_2 + z_3z_1,\ z_3 + z_1z_2$ là những số thực, thì $z_1z_2z_3 = 1$.*

Lời giải. Cho $z_j = r(\cos t_j + i\sin t_j)$, với $r \neq 0$ với $r_j \in (0,\pi), j = 1,2,3$.
Với giả thiết

$$\begin{aligned}\sin t_1 + r\sin(t_2+t_3) &= 0\\ \sin t_2 + r\sin(t_3+t_1) &= 0\\ \sin t_3 + r\sin(t_1+t_2) &= 0\end{aligned}$$

Đặt $t = t_1+t_2+t_3$, thì $\sin t_j = -r\sin(t-t_j) = -r\sin t\cos t_j - r\cos t\sin t_j$, với $j = 1,2,3$.
Có nghĩa là: $\cos t_j \sin t = \frac{1}{r} - \cos t_j$, $j = 1,2,3$.
Nếu $\sin t \neq 0$ thì $\cos t_1 = \cos t_2 = \cos t_3$. Chỉ có 2 giá trị có thể xảy ra t_1, t_2, t_3 có thể nhận giá trị giữa 0 và 2π. Điều này dẫn tới $\sin t = 0$. mặt khác ta lại có $r\cos t = 1$ nên ta có $\cos t = 1$ hoặc -1. Mà điều này chỉ xãy ra nếu $\cos t = 1$ và $r = 1$ nên ta có đpcm.

Bài toán 22. (Putnam 2006) *Cho n là một số nguyên dương lẻ và θ là một số thực sao cho $\frac{\theta}{n}$ là số vô tỉ.*
Đặt $a_k = \tan\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)$, $k = 1,2,...,n$.
Chứng minh rằng : $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{a_1.a_2...a_n}$ là một số nguyên và tìm giá trị nguyên đó.

Lời giải. Xét số phức có dạng $\omega = cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$. Ta phải chứng minh

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}\right)^n = \omega^{2n}$$

Có nghiệm là $a_k = \tan\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)$, $k = 1,2,...,n$.
Viết lại đa thức bậc n, ta được

$$\begin{aligned}0 &= (1+\mathrm{i}x)^2 - \omega^{2n}(1-\mathrm{i}x)^n\\ &= \left(1-\omega^{2x}\right) + ni\left(1+\omega^{2x}\right)x + ... + i^{n-1}\left(1-\omega^{2x}\right)x + i^n\left(1+\omega^{2x}\right)x^n\end{aligned}$$

Tổng các nghiệm theo khải triển trên là

$$\frac{-ni^{n-1}\left(= a1 - \omega^{2x}\right)}{i^n\left(1+\omega^{2x}\right)}$$

và tích của chúng là $\frac{-\left(1-\omega^{2x}\right)}{i^n\left(1+\omega^{2x}\right)}$.
Do đó: $\frac{a_1+a_2+...a_n}{a_1a_2...a_n} = n.i^{n-1} = n(-1)^{\frac{(n-1)}{2}}$. Đpcm

Bài toán 23. *Cho số nguyên dương n và hàm f: $F(n) = x^n\sin(nA) + y^n\sin(nB) + z^n\sin(nC)$, x,y,z,A,B,C là các số thực và $A+B+C = k\pi$ với k nguyên . Chứng minh rằng, nếu $F(1) = F(2) = 0$, thì $F(n) = 0$, với mọi số dương n.*

Lời giải. Chọn các số phức sao cho $p = x.e^{iA}$, $q = y.e^{iB}$, $r = z.e^{iC}$ và $f(n) = p^n + q^n + z^n$.
Đặt $F(n) = Im(f(n))$. Ta chứng mình bằng qui nạp $f(n)$ là số thực với mọi n, tức là $F(n) = 0$.
Chúng ta cho rằng $f(1)$ và $f(2)$ là thực và $f(0) = 3$ cũng là một số thực. Bây giờ chúng ta giải

sử $f(k)$ là thực cho tất cả $k \leq n$ và $n \leq 3$, ta sẽ chứng minh rằng $f(n+1)$ cũng là số thực. Chú ý rằng, $a = p + q + r = f(1)$, $b = pq + qr + rp = \frac{1}{2}(f(1)^2 - f(2))$, và $c = pqr = xyz.e^{i(A+B+C)}$ là các số thực. Các số p, q, r là nghiệm của tam thức $P(t) = t^3 - at^2 + bt - c$.
Dùng

$$\begin{aligned} f(n+1) &= p^{n+1} + q^{n+1} + r^{n+1} \\ &= a(p^n + q^n + r^n) - b(p^{n-1} + q^{n-1} + r^{n-1}) + c(p^{n-2} + q^{n-2} + r^{n-2}) \\ &= af(n) - bf(n-1) + cf(n-2) \end{aligned}$$

Khi $f(n)$, $f(n-1)$ và $f(n-2)$là các số thực, theo phương pháp qui nạp ta có $f(n+1)$ là số thực. Ta có đpcm.

Tài liệu tham khảo

[1] R. Gelca and T. Andresscu, 2007, *Putnam and beyond*, Springer.

[2] R. Gelca and T. Andresscu, 2000, *Mathematical olympiad challenges*, Bi̇̃khauser.

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH PELL

Nguyễn Thị Tình, Trường THPT Lý Thường Kiệt, TX Ayun Pa, Gia Lai

Các phương trình Diophant đóng một vai trò quan trọng trong lý thuyết số học. Từ thời Trung cổ, các phương trình này đã được các nhà toán học ấn Độ quan tâm nghiên cứu và đã đạt được những kết quả sâu sắc, chẳng hạn đã tìm ra dạng nghiệm tổng quát của phương trình Diophant tuyến tính $ax + by = c$ từ năm 499.

Trong các phương trình Diophant bậc hai, có dạng phương trình bậc hai chính tắc rất cơ bản và quan trọng là $x^2 - dy^2 = 1$ hoặc $x^2 - dy^2 = -1$, trong đó d là số nguyên dương không chính phương.

Phương trình trên thường được gọi là phương trình Pell, lấy theo tên nhà toán học người Anh John Pell (1610 - 1685) mà theo những câu chuyện toán học truyền lại, do sự nhầm lẫn nào đó của nhà toán học thiên tài Euler khi đi tìm công lao những người đầu tiên khai mở phương trình này.

Cho đến nay, ở Việt Nam đã có một số tài liệu, sách tham khảo trong đó có đề cập một cách trọn vẹn phương pháp giải phương trình Pell và một số vấn đề liên quan của GS. Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), GS. Hà Huy Khoái, GS. Đặng Hùng Thắng,...

Trên cơ sở những tài liệu sưu tầm được, xin giới thiệu lại một số vấn đề cơ bản nhất, dành cho hệ phổ thông chuyên toán, về phương trình kinh điển này. Trong đó, không quá đi sâu vào lý thuyết của phương trình Pell, vì điều này đã có trong một số tài liệu đã nêu.

1 Một số ví dụ dẫn đến phương trình Pell

Từ rất lâu đời, khi mà chưa có cách giải phương trình Pell, trong toán học đã có rất nhiều những câu hỏi tự nhiên đặt ra. Để trả lời được các vấn đề đó nhiều khi lại dẫn đến yêu cầu tìm tất cả những số nguyên dương thỏa mãn phương trình bậc 2 có hai biến. Có rất nhiều những bài toán mà nhiều khi chúng ta không thấy có sự liên quan đến phương trình Pell, nhưng bằng những phép biến đổi đại số lại dẫn đến một yêu cầu chung, đó là đi tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2 - dy^2 = n$, trong đó d không phải là số chính phương, n là một số nguyên. Chẳng hạn ta có kết quả rất đơn giản là $1+2+3+\cdots+14 = 15+16+17+18+19+20$ hoặc $3 + 4 + 5 + 6 = 3.6$. Như vậy một vấn đề tự nhiên đặt ra là liệu rằng còn những cặp số nguyên dương (m, n) nào có tính chất như trên hay không? Chúng tôi xét 2 ví dụ sau đây:

Ví dụ 1. *Xác định các số nguyên dương m và n sao cho*

$$m + (m + 1) + \cdots + n = mn \tag{1}$$

Ta có

$$\begin{aligned}(1) \Leftrightarrow \frac{(m+n)(n-m+1)}{2} &= mn\\ \Leftrightarrow n^2+n-m^2+m &= 2mn\\ \Leftrightarrow (n-m)^2-2m^2+n+m &= 0\end{aligned}$$

Đặt $u = n - m$, ta có

$$\begin{aligned}u^2-2m^2+u+2m=0 &\Leftrightarrow u^2-u-2(k^2-k)=0\\ &\Leftrightarrow \left(u+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\right]=0\\ &\Leftrightarrow (2u+1)^2-2(2m-1)^2=-1\end{aligned}$$

Đặt $x = 2u + 1 = 2(n - m) + 1;\quad y = 2m - 1$, ta được phương trình

$$x^2 - 2y^2 = -1 \tag{2}$$

Như vậy yêu cầu của bài toán đặt ra sẽ được giải quyết nếu phương trình (2) được giải.

Ví dụ 2. Tìm tất cả những số nguyên dương k, m sao cho $k < m$ và

$$1 + 2 + \cdots + k = (k + 1) + (k + 2) + \cdots + m$$

Giả sử $k, m(k < m)$ là hai số nguyên dương thỏa mãn hệ thức:

$$1 + 2 + \cdots + k = (k + 1) + (k + 2) + \cdots + m \tag{3}$$

Ta có

$$\begin{aligned}(3) &\Leftrightarrow 2(1+2+\cdots+k) = 1+2+\cdots+k+(k+1)+(k+2)+\cdots+m\\ &\Leftrightarrow k(k+1) = \frac{m(m+1)}{2}\\ &\Leftrightarrow 2k^2+2k = m^2+m\\ &\Leftrightarrow 8k^2+8k = 4m^2+4m\\ &\Leftrightarrow 2(2k+1)^2-1 = (2m+1)^2.\end{aligned}$$

Đặt $x = 2m + 1;\quad y = 2k + 1$, khi đó ta có phương trình

$$x^2 - 2y^2 = -1. \tag{4}$$

Như vậy vấn đề đặt ra sẽ được giải quyết nếu như phương trình (4) được giải.

Sự kết hợp giữa Số học và Hình học trong một số trường hợp cũng tạo ra những bài toán khá thú vị. Chẳng hạn xét ví dụ sau đây

Ví dụ 3. Tìm các số nguyên dương m để tam giác với 3 cạnh $\frac{1}{2}(m^3+m^2)-1; \frac{1}{2}(m^3-m^2)+1; m^2$ hoặc $m^3-\frac{1}{2}(m-1); m^3-\frac{1}{2}(m+1); m$ có diện tích là số chính phương.

Gọi $2p, S$ lần lượt là chu vi và diện tích tam giác.

1) Trường hợp 3 cạnh tam giác là
$a=\frac{1}{2}(m^3+m^2)-1; \quad b=\frac{1}{2}(m^3-m^2)+1; \quad c=m^2$, ta có
$p=\frac{1}{2}(m^3+m^2); \quad p-a=1; \quad p-b=m^2-1; \quad p-c=\frac{1}{2}(m^3-m^2)$
Theo công thức Hêrông, ta có

$$\begin{aligned} S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} &= \sqrt{\frac{1}{4}(m^3+m^2)(m^2-1)(m^3-m^2)} \\ &= \frac{1}{2}m^2(m^2-1) \end{aligned}$$

2) Trường hợp 3 cạnh tam giác là
$a=m^3-\frac{1}{2}(m-1); \quad b=m^3-\frac{1}{2}(m+1); \quad c=m$, ta có
$p=m^3; \quad p-a=\frac{1}{2}(m-1); \quad p-b=\frac{1}{2}(m+1); \quad p-c=m^3-m$

$$\begin{aligned} S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} &= \sqrt{\frac{1}{4}m^3(m-1)(m+1)(m^3-m)} \\ &= \frac{1}{2}m^2(m^2-1) \end{aligned}$$

Để các tam giác với số đo các cạnh cho như trên có diện tích là một số chính phương thì $\frac{1}{2}(m^2-1)$ là một số chính phương, tức là

$$\frac{1}{2}(m^2-1)=n^2 \Leftrightarrow m^2-1=2n^2 \Leftrightarrow m^2-2n^2=1$$

Chúng ta thấy điều kiện để tam giác có cạnh cho trước như trên có diện tích là một số chính phương phụ thuộc vào việc đi tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình

$$m^2-2n^2=1$$

Một số vấn đề khác, ta biết rằng $\sqrt{2}$ là số vô tỉ. Một chứng minh thường gặp cho khẳng định này là phương pháp phản chứng. Chứng minh sau đây, tuy dài, nhưng khá thú vị vì nó dẫn đến phương trình Pell cơ bản.

Ví dụ 4. *Chứng minh $\sqrt{2}$ là số vô tỉ*

Chứng minh. Ta cần chứng minh $\sqrt{2}$ được biểu diễn thành liên phân số vô hạn.

Xét dãy số $\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_n = 1 + \dfrac{1}{1 + r_{n-1}} \end{cases}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$ Ta dễ dàng nhận thấy với mỗi giá trị n, r_n được biểu diễn dưới dạng $\dfrac{p_n}{q_n}$, với $(p_n, q_n) = 1$ và khi n càng tăng thì r_n càng tăng khi n lẻ và r_n càng giảm khi n chẵn

Ta sẽ chứng minh:

$$1 \leq r_1 \leq r_3 \leq \cdots \leq r_{2k+1} \leq \cdots \leq r_{2l} \leq \cdots \leq r_4 \leq r_2 \leq \frac{3}{2} \tag{5}$$

$$|r_{n+1} - r_n| \leq \frac{1}{4} |r_n - r_{n-1}| \tag{6}$$

1. Chứng minh(5)

Trước hết ta chứng minh

$$1 \leq r_1 \leq r_3 \leq \cdots \leq r_{2n+1} \leq \cdots \tag{7}$$

Ta có $r_3 - r_1 = \dfrac{3}{1} - 1 = \dfrac{1}{2} > 0$

Giả sử (7) đúng với một số tự nhiên $n = k$ bất kỳ, tức là ta có $r_{2k+1} - r_{2k-1} > 0$. Ta cần chứng minh $r_{2(k+1)+1} - r_{2(k+1)-1} > 0$

$$r_{2k+3} + r_{2k+1} = 1 + \frac{1}{1 + r_{2k+2}} - 1 - \frac{1}{1 + r_{2k}} = \frac{r_{2k} - r_{2k+2}}{(1 + r_{2k+2})(1 + r_{2k})}$$

$$= \frac{1 + \dfrac{1}{1 + r_{2k-1}} - 1 - \dfrac{1}{1 + r_{2k+1}}}{(1 + r_{2k+2})(1 + r_{2k})}$$

$$= \frac{r_{2k+1} - r_{2k-1}}{(1 + r_{2k+2})(1 + r_{2k})(1 + r_{2k-1})(1 + r_{2k+1})} > 0$$

(bất đẳng thức luôn đúng vì theo giả thiết quy nạp)

Vậy $1 \leq r_1 \leq r_3 \leq \cdots \leq r_{2n+1} \leq \cdots$, với n nguyên dương bất kỳ.

Chứng minh tương tự bằng phương pháp quy nạp như bất đẳng thức trên ta có:

$\dfrac{3}{2} \geq r_2 \geq r_4 \geq \cdots \geq r_{2n} \geq \cdots$ và $r_{2n-1} \leq r_{2n}$, với mọi n nguyên dương.

Vậy với mỗi cặp số nguyên dương $(k; l)$ ta có:

$1 \leq r_1 \leq r_3 \leq \cdots \leq r_{2k+1} \leq \cdots \leq r_{2l} \leq \cdots \leq r_4 \leq r_2 \leq \dfrac{3}{2}$

2. Chứng minh (6)

Ta có

$$\begin{aligned}
|r_{n+1} - r_n| &= \left|1 + \frac{1}{1+r_n} - 1 - \frac{1}{1+r_{n-1}}\right| \\
&= \frac{|r_n - r_{n-1}|}{(1+r_n)(1+r_{n-1})} \\
&\leq \frac{|r_n - r_{n-1}|}{4\sqrt{r_n r_{n-1}}} \leq \frac{1}{4}\,|r_n - r_{n-1}|\,.
\end{aligned}$$

Gọi α là cận trên nhỏ nhất của tập hợp các phần tử $\{r_1, r_3, \cdots, r_{2k+1}, \cdots\}$,
khi đó $r_{2m-1} \leq \alpha \leq r_{2m}$
Ta có

$$\begin{aligned}
|\alpha - r_{2m-1}| < |r_{2m} - r_{2m-1}| \leq \frac{1}{4^{2(m-1)}}\,|r_2 - r_1| = \frac{1}{2^{4m-3}} \\
|\alpha - r_{2m}| < |r_{2m} - r_{2m-1}| \leq \frac{1}{4^{2(m-1)}}\,|r_2 - r_1| = \frac{1}{2^{4m-3}}
\end{aligned}$$

suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty} r_{n-1} = \alpha$ suy ra $\alpha = 1 + \dfrac{1}{1+\alpha}$ hay $\alpha^2 = 2$
$\Rightarrow \alpha = \sqrt{2}$. Vậy $\sqrt{2}$ được biểu diễn dưới dạng liên phân số vô hạn nên $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ.

Định nghĩa 1. Các số $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, \ldots$,
$t_n = \dfrac{1}{2}n(n+1), \ldots$ được gọi là các số tam giác.

Về mô hình hình học, các số tam giác lần lượt phân bố đều trên cạnh của một tam giác, thể hiện trên hình vẽ 1.2
Nhận xét rằng, tổng 2 số tam giác kề nhau là một số chính phương.

Thật vậy $t_n + t_{n+1} = \dfrac{1}{2}n(n+1) + \dfrac{1}{2}(n+1)(n+2) = (n+1)^2$.
Một cách rất tự nhiên nảy sinh là liệu có tìm được tất cả các số tam giác là số chính phương hay không. Chúng ta xét ví dụ sau đây

Ví dụ 5. Tìm các số tam giác là số chính phương.

Từ dãy số liệt kê ở trên, các số 1 và 36 là các số chính phương. Một cách tổng quát, ta cần xác định những giá trị $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho t_n là số chính phương, hay ta tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $\dfrac{1}{2}n(n+1) = m^2$.

Dễ thấy phương trình này tương đương với phương trình:

$$(2n+1)^2 - 8m^2 = 1.$$

Như vậy việc tìm các số tam giác là số chính phương quy về bài toán tìm nghiệm nguyên dương của phương trình :

$$x^2 - 8y^2 = 1$$

Cũng liên quan đến số tam giác, một vấn đề mới đặt ra là liệu có hay không các bộ ba số tam giác liên tiếp mà tích của chúng hoặc tổng của chúng là số chính phương. Vấn đề này sẽ được đề cập trong hai ví dụ sau đây

Ví dụ 6. Tìm các bộ ba số tam giác liên tiếp sao cho tích của chúng là một số chính phương.

Giả sử 3 số tam giác liên tiếp có dạng $\frac{1}{2}(n-1)n$, $\frac{1}{2}n(n+1)$, và $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Ta có

$$\frac{1}{2}(n-1)n \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \cdot \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2}n^2(n-1)(n+1)^2(n+2).$$

Để tích của 3 số tam giác liên tiếp là một số chính phương thì $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ phải là một số chính phương, tức là

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(n-1)(n+2) = m^2 \\ \Leftrightarrow \quad & (n-1)(n+2) = 2m^2 \\ \Leftrightarrow \quad & (2n+1)^2 - 8m^2 = 9, m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Đặt $x = 2n+1$; $\quad y = m$, ta được phương trình

$$x^2 - 8y^2 = 9 \tag{8}$$

Như vậy bài toán sẽ được làm sáng tỏ nếu như phương trình(8) được giải.

Ví dụ 7. Tìm các bộ ba số tam giác liên tiếp sao cho tổng của 3 số đó là một số chính phương.

Định nghĩa 2. Với các số nguyên n và k, ta định nghĩa

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Như vậy liên quan đến bài toán tổ hợp, một vấn đề đặt ra ở đây là:

Ví dụ 8. Có tồn tại các số nguyên a, b không âm sao cho

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 \\ b+1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Ví dụ 9. Giả sử rằng có n viên bi trong một cái lọ, trong đó có r viên bi màu đỏ và $n-r$ viên bi màu xanh. Lấy ra 2 viên bi một cách ngẫu nhiên. Biết rằng, xác suất để lấy được 2 viên bi cùng màu là $\frac{1}{2}$. Xác định các giá trị có thể có được của n và r.

Định nghĩa 3. Giả sử $a, b, c,$) là 3 số nguyên thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2$. Khi đó bộ số (a, b, c) được gọi là bộ ba số Pitago.

Bổ đề 1. Với mọi số nguyên k, m, n, bộ số sau đây là bộ ba số Pitago:

$$\big(k(m^2 - n^2), 2kmn, k(m^2 + n^2)\big) \tag{10}$$

Hệ quả 1. Với $k = 1, m = y, n = z$ thì bộ ba

$$(y^2 - z^2, 2yz, y^2 + z^2) \tag{11}$$

là bộ ba số Pitago.

Ví dụ 10. Ta biết rằng $2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = 4.5 + 5.6 + 6.7 + 7.8 + 8.9$.
Vấn đề đặt ra là tìm những ví dụ khác, tương tự, nghĩa là: "Tìm những đẳng thức mà một vế là tổng các bình phương của n số chẵn đầu tiên và một vế là tổng của n cặp số nguyên liền kề".

Qua một số ví dụ được trình bày ở trên, chúng ta nhận thấy có rất nhiều vấn đề đơn giản, nhưng lại được tổng quát hoá thành những bài toán khó và rất thú vị. Việc giải quyết một số ví dụ trên phụ thuộc vào việc giải phương trình dạng:

$$x^2 - dy^2 = 1 \tag{12}$$

hoặc

$$x^2 - dy^2 = -1 \tag{13}$$

hoặc

$$x^2 - dy^2 = n, \tag{14}$$

ở đây d là số nguyên dương, không phải là số chính phương; n là một số nguyên.

2 Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình.

Bài toán 1. Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x^2 - 6xy + y^2 = 1$$

Giải.
Ta có $x^2 - 6xy + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x - 3y)^2 - 8y^2 = 1$.

Đặt $u = x - 3y$, ta được phương trình:

$$u^2 - 8y^2 = 1 \tag{15}$$

Nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình (15) là $(a; b) = (3; 1)$ nên nghiệm của phương trình (15) cho bởi dãy sau:

$$\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 3; u_{n+2} = 6u_{n+1} - u_n \\ y_0 = 0; y_1 = 1; y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n \end{cases}, n = 0, 1, 2, \cdots$$

Mà $u = x - 3y$ nên $x = u + 3y$ luôn là số nguyên dương khi u, y nguyên dương. Do đó

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= u_{n+2} + 3y_{n+2} \\ &= 6u_{n+1} - u_n + 3(6y_{n+1} - y_n) \\ &= 6(u_{n+1} + 3y_{n+1}) - (u_n + 3y_n) \\ &= 6x_{n+1} - x_n. \end{aligned}$$

Theo định lí (**??**) nói về công thức nghiệm của phương trình Pell loại I, ta có nghiệm của phương trình đã cho có các nghiệm nguyên dương thoả mãn hệ thức sau đây:

$$\begin{cases} x_0 = 1; x_1 = 6; x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n \\ y_0 = 0; y_1 = 1; y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n \end{cases}, n = 0, 1, 2, \cdots$$

Bài toán 2. Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình

$$(x-1)^2 + (x+1)^2 = y^2 + 1$$

Giải. Nếu dùng phương pháp xây dựng nghiệm thì chúng ta có thể chứng minh được phương trình trên có vô số nghiệm nguyên dương, nhưng nếu biến đổi phương trình trên về phương trình Pell cơ bản thì chúng ta sẽ chỉ ra được tất cả các nghiệm nguyên dương của nó và lời giải cũng sẽ gọn gàng hơn.

Ta có $(x-1)^2 + (x+1)^2 = y^2 + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 2 = y^2 + 1$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2x^2 = 1 \tag{16}$$

Phương trình (16) là phương trình Pell loại I, có nghiệm nguyên dương nhỏ nhất là $(a; b) = (3; 2)$.Vậy theo định lí (**??**) ta có nghiệm của phương trình (16) cũng như phương trình đã cho là:

$$\begin{cases} x_0 = 0; x_1 = 2; x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n \\ y_0 = 1; y_1 = 3; y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n \end{cases}, n = 0, 1, 2, \cdots$$

Bài toán 3. Tìm các số nguyên dương (x, y, z, w) thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$ sao cho $x = y; z = x \pm 1$.

3 Tính tổng của các số nguyên liên tiếp.

Bài toán 4. Tìm tất cả những số nguyên dương k, m sao cho $k < m$ và

$$1 + 2 + \cdots + k = (k+1) + (k+2) + \cdots + m$$

Giải. Giả sử $k, m (k < m)$ là hai số nguyên dương thỏa mãn hệ thức:

$$1 + 2 + \cdots + k = (k+1) + (k+2) + \cdots + m \tag{17}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}(17)) &\Leftrightarrow 2(1+2+\cdots+k) = 1+2+\cdots+k+(k+1)+(k+2)+\cdots+m\\ &\Leftrightarrow k(k+1) = \frac{m(m+1)}{2}\\ &\Leftrightarrow 2k^2+2k = m^2+m\\ &\Leftrightarrow 8k^2+8k = 4m^2+4m\\ &\Leftrightarrow 2(2k+1)^2-1 = (2m+1)^2.\end{aligned}$$

Đặt $x = 2m+1; y = 2k+1$, khi đó ta có phương trình Pell loại II:

$$x^2 - 2y^2 = -1. \tag{18}$$

Liên kết với (18) là phương trình Pell loại I:

$$x^2 - 2y^2 = 1. \tag{19}$$

Phương trình Pell loại I có nghiệm nguyên dương bé nhất là
$(x, y) = (3, 2)$.

Xét hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} u^2 + 2v^2 = 3 \\ 2uv = 2 \end{cases} \tag{20}$$

Dễ thấy $(u, v) = (1, 1)$ là nghiệm nguyên dương bé nhất của hệ (20). Theo lý thuyết xây dựng dãy thì phương trình Pell loại II có nghiệm là

$$\begin{cases} x_0 = 1; x_1 = 7; x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n \\ y_0 = 1; y_1 = 5; y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n \end{cases}, n = 0, 1, 2, \cdots$$

Ta thấy $x_k \equiv 1 \pmod 2; y_k \equiv 1 \pmod 2$, với mọi $k = 0, 1, \cdots$. Từ đó suy ra dãy nghiệm $m_i = \frac{x_i - 1}{2}; k_i = \frac{y_i - 1}{2}$ được cho bởi công thức:

$$m_0 = 0; m_1 = 3; m_{i+2} = 6m_{i+1} - m_i + 2$$
$$k_0 = 0; k_1 = 2; k_{i+2} = 6k_{i+1} - k_i + 2,$$

với $i = 0, 1, 2, \cdots$ Bốn đáp số đầu tiên là:

$$(m, k) = (3, 2); (20, 14); (119, 84); (696, 492).$$

Bài toán 5. Xác định các số nguyên dương m và n sao cho

$$m + (m+1) + \cdots + n = mn \tag{21}$$

Bài toán 6. Ta có $2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = 4.5 + 5.6 + 6.7 + 7.8 + 8.9$.
Tìm những đẳng thức khác mà một vế là tổng các bình phương của n số chẵn đầu tiên và một vế là tổng của n cặp số nguyên liền kề.

4 Số tam giác và tính chất của số tam giác

Bài toán 7. Tìm các số nguyên dương n sao cho số tam giác $\frac{1}{2}n(n+1)$ là một số chính phương.

Giải.
Ta có

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)}{2} = y^2 &\Leftrightarrow n(n+1) = 2y^2\\ &\Leftrightarrow 4n^2+4n+1 = 8y^2+1\\ &\Leftrightarrow (2t+1)^2 - 8y^2 = 1.\end{aligned}$$

Đặt $x = 2n+1$ thì $(x; y)$ là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 8y^2 = 1 \tag{22}$$

Ngược lại nếu $(x; y)$ là nghiệm của phương trình (22) thì x lẻ nên $n = \frac{x-1}{2}$ thỏa mãn đề bài.

Nghiệm nhỏ nhất của phương trình (22) là $(3; 1)$ nên phương trình có nghiệm là dãy

$$\begin{cases} x_0 = 1; x_1 = 3; x_{i+2} = 6x_{i+1} - x_i \\ y_0 = 0; y_1 = 1; y_{i+2} = 6y_{i+1} - y_i \end{cases}, i = 0, 1, 2, \cdots$$

Khi đó với $x_i = 2n_i + 1$ thì $2n_{i+2} + 1 = 6(2n_{i+1}+1) - (2n_i+1)$. Dãy (n_i) cần tìm xác định bởi $n_0 = 0; n_1 = 1; n_{i+2} = 6n_{i+1} - n_i + 2$.

Đó là các số $1; 8; 49; 288; \cdots$

Bài toán 8. Tìm các bộ ba số tam giác liên tiếp sao cho tích của chúng là một số chính phương.

Bài toán 9. Tìm các bộ ba số tam giác liên tiếp sao cho tổng của 3 số đó là một số chính phương.

Bài toán 10. Xác định số nguyên dương b sao cho số $(111\cdots1)_b$, gồm k chữ số 1, với b là cơ số, là số tam giác với bất kỳ giá trị nào của k.

5 Tìm số chính phương

Một áp dụng cũng rất quan trọng nữa đó là trong toán học có rất nhiều bài toán liên quan đến số chính phương. Việc giải phương trình Pell sẽ giúp chúng ta tìm được các số chính phương thoả mãn yêu cầu cho trước nào đó.

Bài toán 11. Tìm tất cả các số nguyên dương t sao cho tổng của t số nguyên dương đầu tiên là một số chính phương.

Cũng tương tự như bài toán trên ta đã biết tổng của n số chính phương đầu tiên. Do đó ta cũng có bài toán tiếp theo

Bài toán 12. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho trung bình cộng của n số chính phương đầu tiên cũng là một số chính phương.

Bài toán 13. Tìm các số nguyên dương m để tam giác với 3 cạnh : $\frac{1}{2}(m^3+m^2)-1; \frac{1}{2}(m^3-m^2)+1; m^2$ hoặc $m^3-\frac{1}{2}(m-1); m^3-\frac{1}{2}(m+1); m$ có diện tích là số chính phương.

Bài toán 14. Tìm tất cả các số nguyên dương n có tính chất $n^2+(n+1)^2$ là số chính phương.

Bài toán 15. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn những số nguyên dương n sao cho $n!$ chia hết cho n^2+1.

Giải.
Xét phương trình Pell loại II :

$$x^2 - 5y^2 = -1 \tag{23}$$

Phương trình Pell loại I liên kết với (23) là phương trình sau:

$$x^2 - 5y^2 = 1 \tag{24}$$

Phương trình (24)có nghiệm nguyên dương nhỏ nhất là $(9;4)$. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2+5v^2=9 \\ 2uv=4 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm nguyên dương nhỏ nhất là $(u,v)=(2,1)$. Vì thế phương trình (23) có dãy nghiệm là:

$$\begin{cases} x_0=2\,; x_1=38\,;\, x_{n+2}=18x_{n+1}-x_n\,;\, n=0,1,2,\cdots \\ y_0=2\,; y_1=17\,;\, y_{n+2}=18y_{n+1}-y_n\,;\, n=0,1,2,\cdots \end{cases}$$

Các dãy nghiệm có tính chất $5<y_k<2y_k<x_k$,với mọi $k=1,2,\cdots$
Thật vậy, ta có $5<y_k<2y_k$. Do $y_k>5$ nên $4y_k^2<5y_k^2-1=x_k^2$ suy ra $2y_k<x_k$.
Do vậy $5<y_k<3y_k<x_k$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$.
Vì thế $(x_k)!=1.2.3.4.5\cdots y_k\cdots(2y_k)\cdots(x_k)$.
Từ đó suy ra $(x_k)!\vdots 5y_k(2y_k)=2(x_k^2+1)$ nên $x_k\vdots(x_k^2+1), \forall k\in\mathbb{N}^*$.
Bài toán được chứng minh.

Bài toán 16. Xét dãy số $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}=\left\{\left[\sqrt{n^2+(n+1)^2}\right]\right\}_{n=0}^{\infty}$. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn các chỉ số n sao cho ta có đồng thời

$$u_n-u_{n-1}>1; [u_{n+1}]-[u_n]=1.$$

Bài toán 17. Chứng minh rằng phương trình $5^x-3^y=2$ có một nghiệm dương duy nhất là $(x,y)=(1,1)$.

Tài liệu tham khảo

[1] Phan Huy Khải, "Các chuyên đề số học bồi dưỡng học sinh giỏi toán trung học ", *Phương trình nghiệm nguyên*, NXB Giáo dục.

[2] Phan Huy Khải(2004), "Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán trung học phổ thông ", *Các bài toán cơ bản của số học*, NXB Giáo dục.

[3] Hà Huy Khoái, "Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán trung học phổ thông",*Số học,* NXB Giáo dục.

[4] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), *Một số vấn đề số học chọn lọc,* NXB Giáo dục.

[5] Đặng Hùng Thắng (1995), *Bài giảng số học,* NXB Giáo dục.

[6] Đặng Hùng Thắng, Nguyễn Văn Ngọc, Vũ Kim Thủy(1997), *Bài giảng số học,*Tuyển tập 30 năm tạp chí toán học và tuổi trẻ, NXB Giáo dục.

[7] Vũ Dương Thụy (chủ biên)(2006), *Tuyển tập 40 năm Olympiads Toán học quốc tế(IMO 1959-2000),* NXB Giáo dục.

[8] Barbeau Edward J.(2003), *Pell's Equation,* Problem Books in Mathematics, Springer.

PHÉP THẾ LƯỢNG GIÁC LÀ CÔNG CỤ GIẢI TOÁN TRONG CÁC BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI

Huỳnh Bá Lộc - Sở Giáo dục và Đào tạo Khánh Hòa

Việc chọn phép thế lượng giác linh hoạt trong một số lớn công thức lượng giác sẽ làm cho bài toán đơn giản hơn. Phép thế thường được cho dưới dạng biểu thức đại số, ở đây việc lượng giác hóa bài toán được xét dưới nhiều dạng toán thường gặp sau đây

1 Chứng minh đẳng thức

Bài toán 1. *(IMO 1985) Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$, sao cho $x + y + z = xyz$. Chứng minh*

$$x(1-y^2)(1-z^2) + y(1-z^2)(1-x^2) + z(1-x^2)(1-y^2) = 4xyz.$$

Lời giải. Rõ ràng đẳng thức đúng với $xyz = 0$, nên chúng ta chỉ cần chứng minh với $x, y, z \neq 0$. Chia 2 vế cho $4xyz$ ta có

$$\frac{1-y^2}{2y}\frac{1-z^2}{2z} + \frac{1-z^2}{2z}\frac{1-x^2}{2x} + \frac{1-x^2}{2x}\frac{1-y^2}{2y} = 1$$

Từ điều kiện $x + y + z = xyz$ ta nghĩ đến việc lượng giác hóa bài toán bằng cách
Đặt $x = \tan A$, $y = \tan B$, $z = \tan C$ với A, B, C là 3 góc của một tam giác, ta đưa bài toàn trở thành

$$\cot 2B \cot 2C + \cot 2C. \cot 2A + \cot 2A. \cot 2B = 1$$

$$\Leftrightarrow \tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = \tan 2A. \tan 2B. \tan 2C$$

Đây rõ ràng là đẳng thức đúng vì $\tan(2A + 2B + 2C) = \tan 2\pi = 0$.
Bài toán được chứng minh.

Bài toán 2. *Cho a, b, c là 3 số thực khác $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Chứng minh rằng $abc = a + b + c$ khi và chỉ khi*

$$\frac{3a-a^3}{3a^2-1} - \frac{3b-b^3}{3b^2-1} - \frac{3c-c^3}{3c^2-1} = \frac{3a-a^3}{3a^2-1} + \frac{3b-b^3}{3b^2-1} + \frac{3c-c^3}{3c^2-1}.$$

Lời giải. Đặt $a = \tan x$; $b = \tan y$; $c = \tan z$ với $x, y, z \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Từ đẳng thức

$$\tan(x+y+z) = \frac{\tan x + \tan y + \tan z - \tan x - \tan y - \tan z}{x - \tan x \tan y - \tan y \tan z - \tan x \tan z}$$

Ta thấy $abc = a + b + c$ khi và chỉ khi $x + y + z = k\pi (k \in \mathbb{Z})$
Suy ra $\tan(3x + 3y + 3z) = \tan 3k\pi = 0$
Hay

$$\tan 3x \tan 3y \tan 3z = \tan 3x + \tan 3y + \tan 3z$$

$$\Leftrightarrow \frac{3a-a^3}{3a^2-1}\frac{3b-b^3}{3b^2-1}\frac{3c-c^3}{3c^2-1} = \frac{3a-a^3}{3a^2-1} + \frac{3b-b^3}{3b^2-1} + \frac{3c-c^3}{3c^2-1}.$$

Bài toán 3. *Chứng minh rằng* $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^k\cos^3\left(3^{k-\pi}\pi\right)=\frac{3}{4}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}+\cos^3\frac{\pi}{3^n}\right]$.

Lời giải. Từ đẳng thức $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$, ta có $\cos^3 x=\frac{1}{4}(\cos 3x+3\cos x)$
Suy ra

$$\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^k\cos^3\left(3^k a\right)=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^k\cos\left(3^{k+1}a\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}\cos\left(3^k a\right)\right]$$

Cho $a=3^{-n}\pi$ ta được kết quả của bài toán.

Bài toán 4. *Chứng minh rằng*

$$27\sin^3 9^0+9\sin^2 27^0+3\sin^3 81^0+\sin^3 243^0=20\sin 9^0.$$

Lời giải. Từ $\sin^3 x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$ ta có

$$27\frac{3\sin 9^0-\sin 27^0}{4}+9\frac{3\sin 27^0-\sin 81^0}{4}+3\frac{3\sin 81^0-\sin 243^0}{4}+\frac{3\sin 243^0-\sin 729^0}{4}$$
$$=\frac{81\sin 9^0-\sin 729^0}{4}=\frac{81\sin 9^0-\sin 9^0}{4}=20\sin 9^0.$$

Bài toán 5. *Tính* $(1-\cot 1^0)(1-\cot 2^0)\dots(1-\cot 44^0)$.

Lời giải. Ta có $((1-\cot 1^0)(1-\cot 2^0)\dots(1-\cot 44^0)$

$$=\left(1-\frac{\cos t^0}{\sin t^0}\right)\left(1-\frac{\cos 2^0}{\sin 2^0}\right)....\left(1-\frac{\cos 44^0}{\sin 44^0}\right)$$
$$=\frac{\left(\sin t^0-\cos t^0\right)\left(\sin 2^0-\cos 2^0\right)...\left(\sin 44^0-\cos 44^0\right)}{\sin t^0\sin 2^0...\sin 44^0}$$

Dùng đẳng thức $\sin a-\cos a=\sqrt{2}\sin\left(a-45^0\right)$ ta đưa về

$$\frac{\sqrt{2}\sin\left(1^0-45^0\right)\sqrt{2}\sin\left(2^0-45^0\right)...\sqrt{2}\sin\left(44^0-45^0\right)}{\sin 1^0\sin 2^0...\sin 44^0}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{44}(-1)^{44}\sin 44^0\sin 43^0......\sin 2^0\sin 1^0}{\sin 44^0\sin 43^0...\sin 2^0\sin 1^0}=2^{22}.$$

Bài toán 6. *Chứng minh*

a) $\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{\pi}{7}\right)\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{3\pi}{7}\right)\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{9\pi}{7}\right)=-\frac{1}{8}$.

b) $\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{3\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{9\pi}{20}\right)\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{27\pi}{20}\right)=-\frac{1}{16}$.

Lời giải.
a) Để ý rằng $1-2\cos 2x-1-2(2\cos^2 x-1)=3-4\cos^2 x=\frac{-\cos 3x}{\cos x}$
Tích trên được biến đổi lại thành

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3\frac{\cos\frac{3\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}}\frac{\cos\frac{9\pi}{7}}{\cos\frac{3\pi}{7}}\frac{\cos\frac{27\pi}{7}}{\cos\frac{9\pi}{7}}=-\frac{1}{8}\frac{\cos\frac{27\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{8}.$$

b) Ta cũng có $1+2\cos 2x=1+2(1-2\sin^2 x)=3-4\sin^2 x=\frac{\sin 3x}{\sin x}$
Tích trên được viết lại thành

$$\frac{1}{2^4}\frac{\sin\frac{3\pi}{20}}{\sin\frac{\pi}{20}}\frac{\sin\frac{9\pi}{20}}{\sin\frac{3\pi}{20}}\frac{\sin\frac{27\pi}{20}}{\sin\frac{9\pi}{20}}\frac{\sin\frac{81\pi}{20}}{\sin\frac{27\pi}{20}}=\frac{1}{16}\frac{\sin\frac{81\pi}{20}}{\sin\frac{\pi}{20}}=\frac{1}{16}.$$

Bài toán 7. Chứng minh rằng

a) $\prod\limits_{n=1}^{24}\frac{1}{\cos\left(2^n\right)^0}=-2^{24}.\tan 2^0$ *b)* $\prod\limits_{n=2}^{25}\left(2\cos\left(2^n\right)^0-\frac{1}{\cos\left(2^n\right)^0}\right)=-1.$

Lời giải.
a) Ta có $\frac{1}{\cos x}=\frac{2\sin x}{2\sin x\cos x}=2\frac{\sin x}{\sin 2x}$
Áp dụng ta được

$$\prod_{n=1}^{24}\frac{1}{\cos\left(2^n\right)^0}=2^{24}\prod_{n=1}^{24}\frac{\sin\left(2^n\right)^0}{\sin\left(2^{n+1}\right)^0}=2^{24}\frac{\sin 2^0}{\sin\left(2^{25}\right)^0}$$

Ta cần chứng minh $\sin(2^25)^0=\cos 2^0$ hay cần chứng minh

$$2^25-2-90\ \vdots\ 180\Leftrightarrow 2^23-23\ \vdots\ 45=5.9$$

Ta có $2(2^2)^11-3=2(-1)^11-3=0\,(\mathrm{mod}\ 5)$

$4(2^3)^7-5=4(-1)^7-5=0(\mathrm{mod}\ 9)\Rightarrow 2^23-23\ \vdots\ 45\Rightarrow$ đpcm.
b) Ta có $2\cos x-\frac{1}{\cos x}=\frac{2\cos^2 x-1}{\cos x}=\frac{\cos 2x}{\cos x}$
Suy ra

$$\prod_{n=2}^{25}\left(2\cos\left(2^n\right)^0-\frac{1}{\cos\left(2^n\right)^0}\right)=\prod_{n=2}^{25}\frac{\cos\left(2^{n+1}\right)^0}{\cos\left(2^n\right)^0}=\frac{\cos\left(2^{26}\right)^0}{\cos 4^0}$$

Vậy ta cần chứng minh

$$\cos(2^26)^0=-\cos 4^0\Leftrightarrow 2^64-4\ \vdots\ 180\text{ và }2^26-\frac{4}{360}$$

Vì $2^26-4=4(2^24-1)$nên 2^26-4 chia hết cho 2^64-1 và cũng chia hết cho 2^6-1. Từ đó ta có được $2^26-4=k(4.5.9)=k180$ với k là một số lẻ $\Rightarrow$ đpcm.

2 Chứng minh bất đẳng thức - Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Bài toán 8. *Chứng minh*

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Lời giải. Đặt $x = \tan a$ và $y = \tan b$. Ta có ngay $-1 \leqslant \sin 2(a+b) \leqslant 1$.

Bài toán 9. *(USA MO 2002) Tìm GTLN của biểu thức*

$$S = (1-x_1)(1-y_1) + (1-x_2)(1-y_2)$$

Với ${x_1}^2 + {x_2}^2 = {y_1}^2 + {y_2}^2 = c^2$ *với* $c > 0$.

Lời giải. Ta thấy 2 điểm có tọa độ $(x_1; x_2)$ và $(y_1; y_2)$ nằm trên đường tròn (O;c) Ta có thể đặt $(x_1; x_2) = (c.\cos\varphi; c\sin\varphi)$ và $(y_1; y_2) = (c.\cos\psi; c.\sin\psi)$. Khi đó

$$S = 2 - c(\cos\varphi + \sin\varphi + \cos\psi + \sin\psi) + c^2(\cos\varphi.\cos\psi + \sin\varphi.\sin\psi)$$

$$S = 2 + c\sqrt{2}\left(-\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right)\right) + c^2\cos(\varphi - \psi)$$

$$S \leqslant 2 + 2c\sqrt{2} + c^2 = \left(c + \sqrt{2}\right)^2$$

Dấu "=' xảy ra khi $\varphi = \psi = \frac{5\pi}{4}$
Vậy $\max S = (c+\sqrt{2})^2$ khi $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.c$.

Bài toán 10. *Chứng minh* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, *ta có*

$$\frac{|a-b|}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}} \leqslant \frac{|a-c|}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+c^2}} + \frac{|b-c|}{\sqrt{1+b^2}\sqrt{1+c^2}}.$$

Lời giải. Đặt $a = \tan\alpha$; $b = \tan\beta$; $c = \tan\gamma$; $\alpha, \beta, \gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
Khi đó $a^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; $b^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\beta}$; $c^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\gamma}$
Bất đẳng thức trở nên đơn giản hơn

$$|\sin(\alpha - \beta)| \leqslant |\sin(\alpha - \gamma)| + |\sin(\beta - \gamma)|$$

Ta chứng minh bất đẳng thức này như sau

$$|\sin(\alpha - \beta)| = |\sin(\alpha - \gamma + \gamma - \beta)|$$

$$= |\sin(\alpha - \gamma)|\cos(\gamma - \beta) + \sin(\gamma - \beta)\cos(\alpha - \gamma)$$

$$\leqslant |\sin(\alpha - \gamma)|\,|\cos(\gamma - \beta) + \sin(\gamma - \beta)|\,|\cos(\alpha - \gamma)|$$

$$\leqslant |\sin(\alpha - \gamma)| + |\sin(\gamma - \beta)|.$$

(FIZMATLTT, Moscow, 2002)

Bài toán 11. Cho $a, b, c \in R$. Chứng minh rằng

$$(ab+bc+ca-1)^2 \leqslant \left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right).$$

Lời giải. Từ a^2+1; b^2+1; c^2+1 ta nghĩ đến việc đặt $a = \tan u$, $b = \tan \upsilon$ và $c = \tan \omega$ với $u, \upsilon, w \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
Bất đẳng thức trở thành

$$-1 \leqslant (\tan u \tan \upsilon + \tan \upsilon \tan \mathrm{w} + \tan \mathrm{w} \ \tan u - 1)\cos u.\cos \upsilon.\cos \mathrm{w} \leqslant 1$$

(103 Trigonometry Problems)

Bài toán 12. *Chứng minh rằng*

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Với $x+y+z = xyz$ *và* $x, y, z \in R$.

Lời giải. Đặt $x = \tan A$, $y = \tan B$, $z = \tan C$ với A, B, C là 3 góc của 1 Δ.
Bài toán được đưa về $\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
Bài toán được giải quyết dễ dàng bằng BĐT Jensen với $f(x) = \sin x$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Bài toán 13. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Với $0 < x, y, z < 1$ và $xy + yz + xz = 1$.

Lời giải. Nhân 2 cho hai vế, BĐT trở thành

$$\frac{2x}{1x^2} + \frac{2y}{1-y^2} + \frac{2z}{1-z^2} \geqslant 3\sqrt{3}$$

Từ điều kiện bài toán $xy + yz + yz = 1$ và $0 < x, y, z < 1$, ta nghĩ đến việc đặt $x = \tan \frac{A}{2}$; $y = \tan \frac{B}{2}$; $z = \tan \frac{C}{2}$ với A, B, C là 3 góc của một tam giác nhọn. Bài toán được đưa về dạng $\tan A + \tan B + \tan C \geqslant 3\sqrt{3}$ (đúng theo BĐT Jensen).

3 Giải phương trình - Bất phương trình

Bài toán 14. Tìm a sao cho tồn tại x thỏa mãn $\sqrt{1-x^2} \geqslant a - x$.

Lời giải. Đặt $x = \cos t$, $t \in [0, \pi] \Rightarrow \sqrt{1 - x^2} = \sin t$
Biểu thức trở thành: $\sin t + \cos t \geqslant a$, mà $\sin t + \cos t = \sqrt{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$
Vậy a không vượt quá $\sqrt{2}$

Bài toán 15. Cho 4 số phân biệt trong khoảng (0; 1). Chứng minh rằng tồn tại 2 số x, y thỏa mãn

$$0 < x\sqrt{1 - y^2} - y\sqrt{1 - x^2} < \frac{1}{2}.$$

Lời giải. Cho 4 số $a_i = \sin b_i$, góc b_i trong phần tư thứ nhất
Bài toán chỉ ra 2 chỉ số k, m sao cho $0 < \sin b_k \cos b_m - \sin b_m \cos b_k < \frac{1}{2}$
Vậy chỉ cần chứng minh tồn tại 2 chỉ số k, m sao cho $b_k > b_m$ và $b_k - b_m < \frac{\pi}{6}$
Điều này có được do nguyên lý Dirichlet sẽ có 2 số trong 4 số nằm trong 1 khoảng $(0, \frac{\pi}{6}]$, $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$,$(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$.

Bài toán 16. Giải phương trình $x^3 - 3x = \sqrt{x + 2}$ trên tập số thực.

Lời giải. Hệ số của x^3 là 1, biểu thức $x^3 - 3x$ làm ta liên tưởng $4\cos^3 x - 3\cos x$
Ta thấy $\forall x > 2$ thì $x^3 - 3x > 4x - 3x = x > \sqrt{x + 2}$
Vậy $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Ta đặt $x = 2\cos\alpha$ với $\alpha \in [0; \pi]$
Phương trình trở thành

$$2\cos 3\propto = \sqrt{2(1 + \cos\propto)} = 2\cos\frac{\propto}{2} \Leftrightarrow 2\sin\frac{72}{4}\sin\frac{52}{4} = 0$$

Suy ra $\propto = 0$; $\frac{4\pi}{7}$; $\frac{4\pi}{5}$. Vậy $x = 2$, $2\cos\frac{4\pi}{7}$; $-\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Bài toán 17. *(IMO Shortlisted 1995) Cho các số thực dương a, b, c. Xác định tất cả các số thực dương x, y, z sao cho*
$x + y + z = a + b + c$ *và* $4xyz - (a^2x + b^2y + c^2z) = abc$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có

$$4 = \frac{a^2}{yz} + \frac{b^2}{zx} + \frac{c^2}{xy} + \frac{abc}{xyz}$$

Đặt $x_1 = \frac{a}{\sqrt{yz}}$, $y_1 = \frac{b}{\sqrt{zx}}$, $z_1 = \frac{c}{\sqrt{xy}}$, ta được

$$4 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_1y_1z_1$$

Với $0 < x_1; y_1; z_1 < 2$. Xét phương trình trên như là một phương trình bậc 2 theo biến x_1, ta có định thức $\frac{4 - x_1^2}{4 - y_1^2}$
Điều này gợi ý ta đặt $x_1 = 2\sin u, y_1 = 2\sin v; 0 < u, v < \frac{\pi}{2}$. Khi đó phương trình trở thành

$4 = 4\sin^2 u + 4\sin^2 v + z_1^2 + 4\sin u \sin v . z_1$

$\Leftrightarrow (z_1 + 2\sin u \sin v)^2 = 4(1 - \sin^2 u)(1 - \sin^2 v)$

$\Leftrightarrow |z_1 + 2\sin u \sin v| = |2\cos u \cos v|$.

Vì z_1, $\sin u$, $\sin v$ đều là những số dương nên ta suy ra

$$z_1 = 2(\cos u \cos v - \sin u \sin v) = 2\cos(u+v)$$

Như vậy ta được

$$a = 2\sqrt{yz}\sin u, b = 2\sqrt{xz}\sin v, c = 2\sqrt{xy}\cos(u+v)$$

Từ giả thiết $x+y+z = a+b+c$ ta được :

$$\left(\sqrt{x}\cos v - \sqrt{y}\cos u\right)^2 + \left(\sqrt{x}\sin v - \sqrt{y}\sin u - \sqrt{z}\right)^2 = 0$$

Suy ra $\sqrt{z} = \sqrt{x}\sin v + \sqrt{y}\sin u = \sqrt{x}\frac{y_1}{2} + \sqrt{y}\frac{x_1}{2}$.
Do đó $\sqrt{z} = \sqrt{x}\frac{b}{2\sqrt{xz}} + \sqrt{y}\frac{a}{2\sqrt{yz}} \Rightarrow z = \frac{a+b}{2}$.
Tương tự ta cũng có $y = \frac{c+a}{2}, x = \frac{b+c}{2}$.
Rõ ràng $(x,y,z) = \left(\frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ thỏa mãn các điều kiện của đề bài và đó cũng là nghiệm duy nhất tìm được.

Bài toán 18. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^3 - 3x = y \\ y^3 - 3y = z \\ z^3 - 3z = x \end{cases}$$

Lời giải. Đặt $x = 2\cos u$, $y = 2\cos v$, $z = 2\cos w$; u, v, w $\in [0,\pi]$
Hệ phương trình cho ta $\cos 27u = \cos u$ có nghiệm
$u = \frac{k\pi}{14}, k = 0, 1, \cdots, 14, u = \frac{k\pi}{13}, k = 1, \cdots, 12$ nên
$x = 2\cos\frac{k\pi}{14}, y = 2\cos\frac{3k\pi}{14}, z = 2\cos\frac{9k\pi}{14}, k = 0, 1, \cdots, 14$
Và $x = 2\cos\frac{k\pi}{13}, y = 2\cos\frac{3k\pi}{13}, z = 2\cos\frac{9k\pi}{13}, k = 1, \cdots, 12$
Vì hệ phương trình đã cho chỉ có tối đa 27 nghiệm, nên 27 nghiệm trên là nghiệm của hệ.

Bài toán 19. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x \end{cases}$$

Lời giải. Xét $x = 1$, $x = -1$,
Xét $x \neq \pm 1$. Đặt $x = \tan a$, đưa đến phương trình $\tan 8a = \tan a$, a $\in (-\pi/2, \pi/2)$
Kết quả nghiệm của hệ là $(\tan\frac{k\pi}{7}, \tan\frac{2k\pi}{7}, \tan\frac{4k\pi}{7}), k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.$

Bài toán 20. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - 1/x_1 = 2x_2 \\ x_2 - 1/x_2 = 2x_3 \\ x_3 - 1/x_3 = 2x_4 \\ x_4 - 1/x_4 = 2x_1 \end{cases}$$

Lời giải. Liên hệ công thức $2\cot 2a = \cot a - \frac{1}{\cot a}$
Đặt $x_1 = \cot a$, đưa đến phương trình $\cot 16a = \cot a$, a $\in (0, \pi)$
Kết quả nghiệm của hệ là
$x_1 = \cot\frac{k\pi}{15}, x_2 = \text{t}\cot\frac{2k\pi}{15}, x_3 = \cot\frac{4k\pi}{17}, x_4 = \cot\frac{8k\pi}{15}), k = 1, 2, \cdots, 14.$

Bài toán 21. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} \dfrac{3x-y}{x-3y} = x^2 \\ \dfrac{3y-z}{y-3z} = y^2 \\ \dfrac{3z-x}{z-3x} = z^2 \end{cases}$

Lời giải. Nếu $x = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$ (loại)

Vậy $x, y, z \neq 0$. Hệ phương trình được viết lại thành $\begin{cases} y = \frac{3x-x^3}{1-3x^3} \\ z = \frac{3v-y^3}{1-3y^2} \\ x = \frac{3z-z^3}{1-3z^2} \end{cases}$
Đặt $x = \tan u (u \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
Suy ra $x = \tan u = \tan 27u$, suy ra $u = \frac{k\pi}{26}$.Với $-\frac{\pi}{2} < \frac{k\pi}{26} < \frac{\pi}{2}$ hay $k = \pm 1; \pm 2; .....; \pm 12$
Vậy hệ phương trình có nghiệm

$$x = \tan\frac{k\pi}{26};\ y = \tan\frac{3k\pi}{26};\ z = \tan\frac{9k\pi}{26}$$

Với $k = \pm 1; \pm 2; .....; \pm 12$.

4 Lượng giác và dãy số

Bài toán 22. (Romani TST 1986) Cho dãy a_n thỏa $\sqrt{a_{n+2} + 2} \leqslant a_n \leqslant 2, n \geqslant 1$. Tìm a_{1986}.

Lời giải. Đặt $\mathrm{a_n = 2\ cosb_n}$, $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$, do $0 \leqslant a_n \leqslant 2$
Từ bất đẳng thức bên trái ta liên hệ công thức $\cos 2a + 1 = 2\cos^2 a$, ta có $\cos\frac{b_{n+2}}{2} \leqslant \cos b_n$ suy ra $\frac{b_{n+2}}{2} \geqslant b_n \Rightarrow \frac{b_{n+2k}}{2^k} \geqslant b_n$ do quy nạp, và hàm cos giảm
Vì k tiến đến vô hạn nên $b_n = 0$ mọi n suy ra $a_n = 2$, mọi n.

Bài toán 23. *(AIME 1996) Cho dãy x_n thỏa $x_1 = x, x_{n+1} = \frac{1}{1-x_n} - \frac{1}{1+x_n}$, $\forall n \in N$*
Khi $x_n = 1$ hay $x_n = -1$ thì dãy kết thúc. Hỏi có bao nhiêu dãy có 8 số hạng như thế?

Đáp số: x = tan b, x8 = tan 128 b, Có 256 dãy thỏa điều kiện.

Bài toán 24. Cho dãy x_n thỏa

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{3}x_n - 1}{x_n + \sqrt{3}}, n \geqslant 1.$$

Chứng minh dãy tuần hoàn.

Lời giải. Liên hệ công thức $\tan(a-b)$, đặt $x_1 = \tan t$ suy ra $x_{n+6} = x_n$.

Bài toán 25. Cho $a_0 = \sqrt{2}; b_0 = 2$ và
$a_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}$; $b_{n+1} = \frac{2bn}{2+\sqrt{4+b_n^2}}$; $n \geqslant 0$
a) Chứng minh dãy $(a_n)_n$ và $(b_n)_n$ giảm và tiến về 0.
b) Chứng minh dãy $(2^n a_n)$ tăng, dãy $(2^n b_n)$ giảm và hai dãy này tiến đến cùng một giới hạn.

Lời giải.
a) Đặt $a_n = 2\sin t_n$, ta có

$$2\sin t_{n+1} = a_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 4\sin t_n^2}} = \sqrt{2 - 2\cos t_n} = 2\sin\frac{t_n}{2}$$

Suy ra $t_{n+1} = \frac{t_n}{2}$ với $t = \frac{\pi}{4}$, từ đó $t_n = \frac{\pi}{2n+2}$; $n \geqslant 0$. Vậy $a_n = 2\sin\frac{\pi}{2n+2}$ với $n \geqslant 0$
Đặt $b_n = 2\tan u_n$ $(n \geqslant 0,\ u_n \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right])$.
Ta được $2\tan u_{n+1} = b_{n+1} = \frac{2\tan u_n}{2+\sqrt{4+4\tan^2 u_n}} = \frac{4\tan u_n}{2+\frac{2}{\cos u_n}} = 2\frac{\sin u_n}{1+\cos u_n} = 2\tan\frac{u_n}{2}$
Suy ra $u_{n+1} = \frac{v_n}{2}$ và $n_0 = \frac{\pi}{4}$, từ đó được $u_n = \frac{\pi}{2^{n+2}} n \geqslant 0$.
Vậy $b_n = 2\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$ với $n \geqslant 0$.
Trở lại bài toán ta thấy 2 dãy$(a_n)_n$ và $(b_n)_n$ đều giảm và $\lim a_n = \lim b_n = 0$.
b) Ta có hàm $\frac{\sin x}{x}$ tăng và $\frac{\tan x}{x}$ giảm trên khoảng xét
Do đó $2^n a_n = \frac{\pi}{2}.\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+2}}}$ tăng và $2^n b_n = \frac{\pi}{2}.\frac{\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+2}}}$ giảm.
Ta cũng có $\lim\limits_{n->\infty} 2^n a_n = \frac{\pi}{2}\lim\limits_{n->\infty}.\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+2}}} = \frac{\pi}{2}\lim\limits_{n->0}\frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$
Tương tự $\lim\limits_{n->\infty} 2^n b_n = \frac{\pi}{2}$.

Bài toán 26. *Cho 2 dãy (x_n) và (y_n)*
$(x_1) = y_1 = \sqrt{3}$; $x_{n+1} = 2_n + \sqrt{1+x_n^2}$; $y_{n+1} = \frac{y_n}{1+\sqrt{1+y_n^2}}$; $n \geqslant 1$.
Chứng minh rằng $2 < x_n y_n < 3\ \forall n > 1$.

Lời giải. Đặt $x_n = \tan a_n + \sqrt{1+\tan^2 a_n} = \tan a_n + \frac{1}{\cos a_n}$
$= \frac{1+\sin a_n}{\cos a_n} = \tan\left(\frac{90^0 + a_n}{2}\right)$
Vì $a_1 = 60^0$, $a_2 = 75^0$; $a_3 = 82,5^0$ từ đó ta có $a_n = 90^0 - \frac{30^0}{2^{n-1}}$
Nên $x_n = \tan(90^0 - \frac{30^0}{2^{n-1}}) = \cot(\frac{30^0}{2^{n-1}}) = \cot\theta_n$ với $\theta_n = \frac{30^0}{2^{n-1}}$
Tương tự ta cũng có $y_n = \tan 2\theta_n = \frac{2\tan\ \theta_n}{1-\tan^2\theta_n}$
Suy ra $x_n y_n = \frac{z}{1-\tan^2\theta_n}$
Vì $0^0 < \theta_n < 45^0$ nên $0 < \tan^2\theta_n < 1$ và $x_n y_n > 2$
Với $n > 1$, ta có $\theta_n < 30^0$ nên $\tan^2\theta_n < \frac{1}{3}$ suy ra $x_n y_n < 3$. Vậy $2 < x_n y_n < 3$.

Bài toán 27. Với $n \geqslant 0$, cho $U_n = \arcsin\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}\sqrt{n+1}}$.
Chứng minh rằng tổng $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ có giới hạn xác định khi n tiến đến vô cùng.

Lời giải. Đặt $b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, ta có $\sin u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}\sqrt{n+1}} = b_n\sqrt{1-{b^2}_{n+1}} - b_{n+1}\sqrt{1-b_n^2}$

Vậy $S = \lim\limits_{n\to\propto} \sum\limits_{n=0}^{N} \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right) = \arcsin 1 - \lim\limits_{n\to\propto} \arcsin \frac{1}{\sqrt{N+2}} = \frac{\pi}{2}$.

Bài toán 28. *(MOSP 1996) Cho dãy a_n không giảm trong [-1, 1]. Chứng minh*

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{1 - a_i a_{i+1} \pm \sqrt{(1-a_i^2)(1-a_{i+1}^2)}} < \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Lời giải. Đặt $a_i = \cos a_i = \cos x_i$; $x_i \in [0,\pi]$, $i = 1, \ldots, n$.

Biến đổi vế trái thành $\sqrt{2} \sum\limits_{i=1}^{n-1} \sin \frac{x_{i+1}-x_i}{2}$

Do hàm sin lồi xuống trên đoạn $[0,\pi]$, nên áp dụng bất đẳng thức Jensen ta có

$$\sqrt{2}\sum_{i=1}^{n-1} \sin\frac{x_{i+1}-x_i}{2} \leqslant (n-1)\sqrt{2}\sin\frac{x_n-x_1}{2(n-1)} \leqslant \sqrt{2}(n-1)\sin\frac{\pi}{2(n-1)}, \text{do } x_n - x_1 \in (0;\pi)$$

Mà khi $x > 0$, ta lại có $\sin x < x$ nên ta có kết quả.

Bài toán 29. *(China MO 1996) Cho $x_0,\ x_i > 0$, $i = 1, .., n$ có tổng các số hạng bằng 1. Chứng minh* $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+x_0+\cdots+x_{k-1}}\sqrt{x_k+\cdots x_n}} < \frac{\pi}{2}$.

Lời giải. Đặt $x_0 + x_1 + \cdots + x_k = \sin a_k, k = 0, 1, \cdots, n,\ a_0 = 0 < a_1 < \cdots < a_n = \pi/2$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin a_k - \sin a_{k-1}}{\sqrt{1+\sin a_{k-1}}\sqrt{1-\sin a_{k-1}}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2\sin\frac{a_k-a_{k-1}}{2}\cos\frac{a_k+a_{k-1}}{2}}{\cos a_{k-1}} < \frac{\pi}{2}$$

Hàm $\cos x$ giảm trong phần tư thứ nhất và $\sin x < x$ nên ta có kết quả.

Bài toán 30. *Chứng minh* $\prod\limits_{n=0}^{N} \frac{1}{1-\tan^2 2^{-n}} = \tan 1$.

Lời giải. Ta có $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \tan 1$.

Suy ra $\prod\limits_{n=0}^{N} \frac{1}{1-\tan^2 2^{-n}} = \prod\limits_{n=0}^{N} \frac{\tan 2}{2\tan 2^{-n}} = \frac{2^{-N}}{\tan 2^{-N}} \tan 1$

Vì $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ nên $\frac{2^{-N}}{\tan 2^{-N}} > 1 \ \Rightarrow$ đpcm.

Tài liệu tham khảo

[1] T. Andresscu,R, Gelca ,2000, *Mathematical olympiad challenges*, Birkhauser.

[2] T. Andresscu,R, Gelca ,2007, *Putnam and beyond*, Springer.

SỬ DỤNG VÀNH CÁC SỐ NGUYÊN ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN SỐ HỌC

Nguyễn Trung Hưng, Trường THPT Chuyên Lê Qúy Đôn – Khánh Hòa

Trong tập số nguyên, khái niệm chia hết và khái niệm số nguyên tố là hai khái niệm quan trọng nhất. Bài viết này quan tâm đến việc giải một số bài toán Số học của tập số nguyên nhưng không đứng trong nó mà dựa trên việc xây dựng tính chất số học trên các vành. Nội dung chính là sử dụng tính chất: "sự phân tích duy nhất thành các phần tử bất khả qui của các phần tử trên các vành $\mathbb{Z}[i]$ và vành các số nguyên của $\mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right]$" để giải các bài toán liên quan.

1 Các khái niệm và một số tính chất

1.1 Nhắc lại về lý thuyết vành

Định nghĩa 1. Một vành là một tập hợp cùng với hai phép toán hai ngôi, phép cộng và phép nhân thỏa: a) $(R;+)$ là một nhóm Abel; b) $(R;.)$ là một vị nhóm; c) $(a+b)\,c = ac+bc,\ \ \forall a,b,c \in K$. Vành R được gọi là vành giao hoán nếu phép nhân có tính chấn giao hoán.

Định nghĩa 2. Một trường F là một vành giao hoán trong đó mọi phần tử khác không đều có phần tử khả nghịch, tức là với mỗi $x \in F,\ x \neq 0$, tồn tại $x^{-1} \in F$ sao cho:

$$x.x^{-1} = 1.$$

Định nghĩa 3. Cho vành R. Phần tử $a \in R,\ a \neq 0$ được gọi là ước của không nếu tồn tại $a \in R,\ a \neq 0$ sao cho: $ab = 0$ hoặc $ba = 0$. Vành giao hoán R được gọi là một miền nguyên nếu nó không có ước của không. Từ đây ta có khái niệm chia hết trên một miền nguyên R:

Định nghĩa 4. Cho $a, b \in R\ \ (b \neq 0)$. Ta nói a chia hết cho b, kí hiệu $a \,\vdots\, b$ (hoặc $b|a$)) nếu tồn tại $q \in R$ sao cho: $a = b.q$. Hai phần tử $a \neq 0,\ b \neq 0$ đươc gọi là liên kết, kí hiệu $a \sim b$, nếu và chỉ nếu $a|b$ và $b|a$.

Định nghĩa 5. Một phần tử $p \neq 0$ của R được gọi là bất khả qui nếu nó khác ước của đơn vị và không có ước thực sự trong R, tức là nếu $p = ab$ với $a, b \in R$ thì hoặc $a \sim p,\ b \sim 1$ hoặc $a \sim 1,\ b \sim p$.

Định nghĩa 6. Một phần tử $p \neq 0$ của R được gọi là nguyên tố nếu nó khác ước của đơn vị và $p|ab \Rightarrow p|a \vee p|b$.

Định nghĩa 7. Cho các phần tử $a_1, a_2, ..., a_n \in R$. Một ước chung của chúng là một phần tử chia hết mỗi phần tử đã cho. Ước chung d của $a_1, a_2, ..., a_n$ được gọi là ước chung lớn nhất của chúng, kí hiệu $d = (a_1, a_2, ..., a_n)$, nếu nó chia hết cho mọi ước chung của $a_1, a_2, ..., a_n$. Từ đây ta rút ra, nếu $d = (a_1, a_2, ..., a_n)$, thì chỉ có các phần tử liên kết với d là ước chung lớn nhất của $a_1, a_2, ..., a_n$.

Định nghĩa 8. Các phần tử $a_1, a_2, ..., a_n$. của R được gọi là nguyên tố cùng nhau nếu ước chung lớn nhất của chúng liên kết với đơn vị 1 của R. Tiếp theo ta sẽ nêu một số loại vành đặc biệt:

Định nghĩa 9. Một miền nguyên R được gọi là một vành nhân tử hóa nếu mọi phần tử khác không đều có sự phân tích duy nhất thành các phần tử bất khả qui, nghĩa là với mỗi $a \in R$, tồn tại ước của đơn vị u và các phần tử bất khả qui p_i $(i = 1, 2, ..., r)$ sao cho:$a = u\sum\limits_{i=1}^{r} p_i$.

Chú ý: Trong vành nhân tử hóa, nếu $ab = c^n$, với nguyên tố cùng nhau thì tồn tại các ước u_1, u_2 của đơn vị và các phần tử c_1, c_2 sao cho: $a = u_1 c_1^n,\ b = u_2 c_2^n$ với $u_1.u_2 = 1$

Định nghĩa 10. Một vành chính C là một miền nguyên mà tất cả các ideal đều là chính, tức là đều có dạng $xC = (x)$ với $x \in C$.

Định nghĩa 11. Miền nguyên E được gọi là một vành Euclide nếu tồn tại một ánh xạ $g : E^* \to$ sao cho:
a) $g(ab) \geq g(a)\,,\ \forall a, b \in E^*$ b) Với hai phần tử a và $b \neq 0$ của E, tồn tại hai phần tử q và r cũng của E sao cho:$a = bq + r$ với $r = 0$ hoặc $g(r) < g(b)$. Từ đây ta có các kết quả quan trọng:

Định lý 1. *Mọi vành chính đều là vành nhân tử hóa.*

Định lý 2. *Mọi vành Euclide đều là vành chính.*

1.2 Vành $\mathbb{Z}[i]$

Tập $[i] = \{a + ib | a, b \in\}$ được gọi là tập các số nguyên Gauss $a + ib$. Khi đó, $\mathbb{Z}[i]$ là một miền nguyên. Trên $\mathbb{Z}[i]$ ta xây dựng hàm chuẩn $N : [i] \to$ cho bởi: $N(z) = z.\overline{z}$ với mọi Do đó, với $z = a + ib$ thì $N(z) = a^2 + b^2$. Từ đây ta rút ra:

$$N(z_1.z_2) = N(z_1).N(z_2)\,, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]$$

Một số kết quả trong vành $\mathbb{Z}[i]$

Định lý 3. *Nếu $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]\,,\ z_2 \neq 0$ thì*
a) $N(z_1 z_2) \geq N(z_1)$
b) Tồn tại $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ sao cho $z_1 = qz_2 + r$ và $N(r) < N(z_2)$.
Vì vậy vành $\mathbb{Z}[i]$ là một vành Euclide.

Định lý 4. *Tập các ước của đơn vị trong $\mathbb{Z}[i]$ là $U([i]) = \{-i; -1;\ 1;\ i\}$.*

Định lý 5. *Các số nguyên tố trong $\mathbb{Z}[i]$ là:*
a) $1+i$;
b) Các số nguyên tố p của $\mathbb{N}$ có dạng $4k+3$
c) Các số $a+bi$ với $a,b\in\mathbb{Z}$ và a^2+b^2 là số nguyên tố.

1.3 Vành các số nguyên của trường $\mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right]$

Xét trường $\mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right]$ với d là số nguyên dương không chính phương. Với $z=a+b\sqrt{d}$, ta kí hiệu $\overline{z}=a-b\sqrt{d}$. Khi đó, hàm chuẩn $N:\mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right]\to\mathbb{N}$ cho bởi:

$$N(z)=|z.\overline{z}|=\left|a^2-db^2\right|.$$

Từ đây ta rút ra:
a) $N(z_1z_2)=N(z_1).N(z_2),\quad\forall z_1,z_2\in\mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right]$
b) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}.\overline{z_2},\quad\forall z_1,z_2\in\mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right]$.
Ta có kết quả quan trọng sau đây:

Định lý 6. *Nếu $d\equiv 2,3\pmod 4$, thì vành các số nguyên trong $\mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right]$ là $\left[\sqrt{d}\right]=\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{d}$. Nếu $d\equiv 1\pmod 4$, thì vành các số nguyên trong $\mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right]$ là $\mathbb{Z}\left[\frac{-1+\sqrt{d}}{2}\right]=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\left(\frac{-1+\sqrt{d}}{2}\right)$.*
Trường hợp $d<0$, ta có kết quả sau:

Định lý 7. *Vành các số nguyên trong $\mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right]$, với $d<0$, là một vành nhân tử hóa khi*

$$d\in\{-1;-2;-3;-7;-11;-19;-43;-67;-163\}.$$

Đối với $d>0$ ta chưa biết hết các trường hợp. Ta có thể nêu đại diện ở đây một số trường hợp chẳng hạn $d=2,3,5,6,7,11,...$

2 Một số bài toán số học

2.1 Sử dụng vành $\mathbb{Z}[i]$

Bài toán 1. *Giải phương trình tìm nghiệm nguyên:* $y^7-2x=x^2+2$

Lời giải. Viết phương trình ở dạng:

$$(x+1+i)(x+1-i)=y^7$$

Ta có nhận xét rằng y lẻ vì nếu ngược lại thì $(x+1)^2 \equiv -1 \pmod 4$: mâu thuẫn. Do đó, x lẻ và kéo theo $x+1+i,\ x+1-i$ là nguyên tố cùng nhau trong vành $\mathbb{Z}[i]$.
Vì $(x+1+i)(x+1-i) = y^7$ nên tồn tại $a, b \in \mathbb{Z}$ sao cho:

$$\begin{aligned} x+1+i &= u(a+ib)^7 \\ &= u\left[a\left(a^6 - C_7^2a^4b^2 + C_7^4a^2b^4 - C_7^6b^6\right) + ib\left(C_7^1a^6 - C_7^3a^4b^2 + C_7^5a^2b^4 - C_7^7b^6\right)\right], \end{aligned}$$

với u là ước của đơn vị. Suy ra $\left|a\left(a^6 - C_7^2a^4b^2 + C_7^4a^2b^4 - C_7^6b^6\right)\right| = 1$ hoặc

$$\left|b\left(C_7^1a^6 - C_7^3a^4b^2 + C_7^5a^2b^4 - C_7^7b^6\right)\right| = 1$$

$\Rightarrow a = 0;\ b = \pm 1$ hoặc $b = 0;\ a = \pm 1$. Vậy nghiệm nguyên của phương trình là: $(-1,\ 1)$.

Nhận xét: Điểm mấu chốt để giải bài toán này là chứng minh được$x+1+i$ và $x+1-i$ là nguyên tố cùng nhau. Do đó, sử dụng được sự phân tích duy nhất thành các phần tử bất khả qui trong $\mathbb{Z}[i]$ để từ đó rút ra dạng $x+1+i = u(a+ib)^7$.

Bài toán 2. *Giải phương trình tìm nghiệm nguyên: $x^2 + 9 = y^p$, với p là một số nguyên tố có dạng $4k+3$.*

Lời giải. Viết phương trình ở dạng:

$$(3+xi)(3-xi) = y^p.$$

Vì $(x+3i,\ x-3i) = 1$ nên $3 + xi = (a+ib)^p$. Khai triển nhị thức ta được:

$$3 = a^p - C_p^2a^{p-2}b^2 + ... + (-1)^{\frac{p-1}{2}}C_p^{p-1}ab^{p-1}.$$

Suy ra $a|3$ và $3 \equiv a^p \pmod p$.
Theo định lí Fermat nhỏ $a^p \equiv a \pmod p$, suy ra $a = 3$. Từ đó,

$$1 = 3^{p-1} - C_p^2 3^{p-3}b^2 + ... + (-1)^{\frac{p-1}{2}}C_p^{p-1}b^{p-1}.$$

Suy ra, $3^{p-1} - 1 = C_p^2 3^{p-3}b^2 - C_p^4 3^{p-5}b^4 + ... - (-1)^{\frac{p-1}{2}}C_p^{p-1}b^{p-1}$. (*)
Do $p = 4k+3$, nên từ (*) suy ra b^2 chẵn. Ta lại có $3^{p-1} - 1$ chia hết cho 2^3 và không chia hết cho 2^4 vô lí. Do đó, phương trình vô nghiệm.

Bài toán 3. *Cho a, b, c là các số nguyên thỏa: $a = b^2c$ và c không chia hết cho bất kì số nguyên tố $p \equiv 3 \pmod 4$. Chứng minh rằng a là tổng của hai số chính phương.*

Lời giải. Xét số nguyên tố p trong $\mathbb{Z}$ và gọi $\pi = a + ib$ là số nguyên tố trong $\mathbb{Z}[i]$ sao cho $\pi | p$. Khi đó, $N(\pi) | N(p) = p^2$. Suy ra, $N(\pi) = p$ hoặc $N(\pi) = p^2$ Và do đó,

$$a^2 + b^2 = p \text{ hoặc } a^2 + b^2 = p^2$$

Trường hợp $p \equiv 1 \pmod 4$, giả sử $p = 4k+1$, thì sử dụng định lí Wilson ta chứng minh được $p|\left(n^2+1\right)$, với $n = (2k)!$. Do đó, $\pi|\,(n+i)(n-i)$. Suy ra:

$$\pi | n+i \text{ hoặc } \pi | n-i.$$

Mặt khác, nếu $p|(n \pm i)$ thì $p|n$ và $p|1$: vô lí. Do đó, $N(p) \neq N(\pi)$. Suy ra,

$$a^2 + b^2 = p.$$

Trường $p = 2$ thì hiển nhiên p là tổng hai số chính phương. Do c không chia hết cho bất kì số nguyên tố $p \equiv 3 \pmod 4$, nên c là tích các số nguyên tố $p \equiv 1;2 \pmod 4$. Suy ra, tồn tại $t, r \in \mathbb{Z}$ sao cho: $c = N(t + ir) = t^2 + r^2$. Từ đó,

$$a = b^2 c = N(b).N(t + ir) = N(tb + irb) = (tb)^2 + (rb)^2.$$

2.2 Sử dụng vành các số nguyên của $\mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right]$

Bài toán 4. *Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) sao cho:* $13^x + 3 = y^2$

Lời giải. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\left(y - \sqrt{3}\right)\left(y + \sqrt{3}\right) = \left(4 - \sqrt{3}\right)^x \left(4 + \sqrt{3}\right)^x.$$

Trong vành $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$, giả sử có số nguyên tố $p \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ sao cho

$$p|\left(y - \sqrt{3}\right),\ p|\left(y + \sqrt{3}\right),$$

suy ra:

$$N(p)\,|N\left(y + \sqrt{3}\right) = \left|y^2 - 3\right| = 13^x$$

Mặt khác, $p|2\sqrt{3}$ nên $N(p)\,|N\left(2\sqrt{3}\right) = 12$. Từ đó, $N(p)\,|\,(12, 13^x) = 1$. Suy ra:$N(p) = 1$: vô lí. Vì vậy, $\left(y - \sqrt{3}, y + \sqrt{3}\right) = 1$, và do đó $y + \sqrt{3}$ là số bậc x.
Ngoài ra, $\left(4 - \sqrt{3}, 4 + \sqrt{3}\right) = 1$ nên

$$y + \sqrt{3} = \left(4 + \sqrt{3}\right)^x = \sum_{k=0}^{x} C_x^k 4^{x-k} \left(\sqrt{3}\right)^k$$

$$\Rightarrow 1 = \sum_{k} C_x^{2k+1} 3^k 4^{x-(2k+1)} = x4^{x-1} + \sum_{k \neq 0} C_x^{2k+1} 3^k 4^{x-(2k+1)} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 4.$$

Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là: $(1, 4)$.

Bài toán 5. *Giải phương trình tìm nghiệm nguyên:* $x^2 + x + 2 = y^3$

Lời giải. Viết phương trình ở dạng:

$$\frac{2x + 1 - \sqrt{-7}}{2} \cdot \frac{2x + 1 + \sqrt{-7}}{2} = y^3$$

Vì $\left(\frac{2x+1-\sqrt{-7}}{2}, \frac{2x+1+\sqrt{-7}}{2}\right) = 1$ trong vành các số nguyên của $\mathbb{Q}\left[\sqrt{-7}\right]$ nên có $a, b \in \mathbb{Z}$ sao cho:

$$\frac{2x+1+\sqrt{-7}}{2} = \left(\frac{a+b\sqrt{-7}}{2}\right)^3.$$

Do đó, $3a^2b - 7b^3 = 4 \Rightarrow b|4 \Rightarrow b = -1;\ a = \pm 1$. Vậy tất cả các nghiệm nguyên của phương trình là: $(2, 2)$ và $(-3, 2)$

Chú ý: Do $-7 \equiv 1 \pmod 4$ nên vành các số nguyên của $\mathbb{Q}\left[\sqrt{-7}\right]$ là $\mathbb{Z}\left[\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}\right]$

Bài toán 6. *(VMO, 2010) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, phương trình:* $x^2 + 15y^2 = 4^n$ *có ít nhất n nghiệm tự nhiên* (x, y).

Lời giải. Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp: Với $n = 1$ phương trình có nghiệm $(2, 0)$
Với $n = 2$ phương trình có nghiệm $(4, 0), (1, 1)$
Chú ý rằng, nếu (x_0, y_0) là nghiệm của phương trình $x^2 + 15y^2 = 4^n$ thì $(2x_0, 2y_0)$ là nghiệm của phương trình $x^2 + 15y^2 = 4^{n+1}$. Do đó, ta chỉ cần chứng minh phương trình có nghiệm tự nhiên lẻ với $n \geq 2$. Giả sử với $n \geq 2$, có cặp số nguyên dương lẻ (x_n, y_n) sao cho: $x_n^2 + 15y_n^2 = 4^n$. Xét vành $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-15}}{2}\right]$, ta có:

$$N\left(x_n + \sqrt{-15}y_n\right) = N\left(x_n - \sqrt{-15}y_n\right) = x_n^2 + 15y_n^2 = 4^n.$$

Mặt khác, $\mathbb{N}\left(\frac{1+\sqrt{-15}}{2}\right) = 4$

$$\Rightarrow N\left(\left(x_n + \sqrt{-15}y_n\right) \cdot \frac{1+\sqrt{-15}}{2}\right) = N\left(\left(x_n - \sqrt{-15}y_n\right) \cdot \frac{1+\sqrt{-15}}{2}\right) = 4^{n+1}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{x_n - 15y_n}{2}\right)^2 - 15\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right)^2 = \left(\frac{x_n + 15y_n}{2}\right)^2 - 15\left(\frac{x_n - y_n}{2}\right)^2 = 4^{n+1}$$

Do x_n, y_n cùng lẻ nên một trong 2 số $\frac{x_n+y_n}{2},\ \frac{x_n-y_n}{2}$ phải lẻ. Nếu $\frac{x_n+y_n}{2}$ lẻ thì $\frac{x_n-y_n}{2}$ chẵn và do đó $\frac{x_n-15y_n}{2}$ lẻ, tương tự cho trường hợp còn lại. Vậy trong các trường hợp, hoặc $\left(\left|\frac{x_n-15y_n}{2}\right|, \left|\frac{x_n+y_n}{2}\right|\right)$ hoặc $\left(\left|\frac{x_n+15y_n}{2}\right|, \left|\frac{x_n-y_n}{2}\right|\right)$ là nghiệm tự nhiên lẻ của phương trình:

$$x^2 + 15y^2 = 4^{n+1}.$$

Vậy phương trình đã cho có ít nhất n nghiệm tự nhiên.

Một số bài toán khác

Bài toán 7. *Giải các phương trình nghiệm nguyên sau:* $\begin{array}{l} a) x^5 - 1 = y^2 \\ b) x^2 + 2 = y^3 \end{array}$

Bài toán 8. *Giải các phương trình sau tìm nghiệm nguyên với n là một số nguyên lớn hơn 1:*

$$\begin{array}{l} a) x^2 + 1 = y^n \\ b) x^2 + 4 = y^n \\ c) x^2 + 11 = 3^n \end{array}$$

Bài toán 9. *Chứng minh rằng phương trình* $x^2+y^2=p$ *có nghiệm khi và chỉ khi* $p \equiv 1 \pmod 4$

Bài toán 10. *Giả sử rằng x, y, z là các số tự nhiên thỏa mãn* $xy = z^2+1$. *Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên dương a, b, c, d sao cho* $x = a^2+b^2,\ y = c^2+d^2$ *và* $z = ac+bd$.

Bài toán 11. *Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình* $x^2+y^2=z^2$.

Bài toán 12. *(American Mathematical Monthly) Cho* $p = 4m-1$ *là một số nguyên tố và x, y là các số nguyên tố cùng nhau sao cho*

$$x^2+y^2=z^{2m}.$$

với số nguyên z nào đó. Chứng minh rằng $p|xy$.

Bài toán 13. *(Romanian Mathematical Olympiad) Cho S là tập các số nguyên dương có dạng* a^2+2b^2, *với a, b là các số nguyên và* $b \neq 0$. *Chứng minh rằng nếu là một số nguyên tố và* $p^2 \in S$ *thì* $p \in S$

Bài toán 14. *Cho* $p \equiv 1 \pmod 6$, *chứng minh rằng tồn tại* $a, b \in \mathbb{Z}$ *sao cho*

$$p = a^2 - ab + b^2.$$

Bài toán 15. *(IMO, 2001) Cho* $a > b > c > d$ *là các số nguyên dương và giả sử rằng:*

$$ac+bd = (b+d+a-c)(b+d-a+c).$$

Chứng minh rằng $ab+cd$ *không là số nguyên tố.*

Bài toán 16. *Xét dãy số* (u_n) *cho bởi:* $u_1 = 2$ *và* $u_{n+1} = 2u_n^2 - 1, \quad \forall n \geq 1$. *Chứng minh rằng nếu có một số lẻ p sao cho* $p|a_n$, *thì* $p \equiv \pm 1 \pmod{2^{n+2}}$.

Tài liệu tham khảo

[1] M. Ram Murty, J. Esmonde, *in Algebraic Number Theory*, Springer, 2004.

[2] Serge Lang, *Đại số, Phần I*, Nhà xuất bản Đại học và Trung học Chuyên nghiệp, 1978.

[3] Ngô Thúc Lanh, *Đại số và số học, Tập 2*, Nhà xuất bản Giáo dục, 1986.

[4] T. Andreescu, D. Andrica, I. Cucurezeanu, *An introduction to Diophantine Equations,* , 2010.

NỘI SUY THEO YẾU TỐ HÌNH HỌC CỦA ĐỒ THỊ

Phạm Thị Thúy Hồng, Trường THPT Sào Nam, Quảng Nam

Bài toán xác định biểu thức của một hàm số khi biết giá trị của hàm số (hoặc giá trị của các đạo hàm của hàm số) tại một số điểm cho trước gọi là bài toán nội suy. Các bài toán nội suy và các vấn đề liên quan đến nó là một phần quan trọng của đại số và giải tích toán học. Các bài toán nội suy có vị trí đặc biệt quan trọng trong toán học không chỉ như những đối tượng để nghiên cứu mà còn đóng vai trò như một công cụ đắc lực của các mô hình liên tục cũng như các mô hình rời rạc của giải tích trong lý thuyết phương trình, lý thuyết xấp xỉ,. . .

Sử dụng hàm (đa thức) nội suy $P(x)$, ta dễ dàng tính được giá trị của hàm số $f(x)$ tại $x \in \mathbb{R}$ bất kỳ tương đối chính xác. Từ đó ta có thể tính gần đúng đạo hàm và tích phân của nó trên $\mathbb{R}$. Vì các đa thức đại số là hàm số đơn giản nhất, nên trước tiên ta nghĩ đến việc xây dựng $P(x)$ ở dạng đa thức đại số.

Tuy nhiên, ở trường phổ thông thì các bài toán nội suy còn rất mới mẻ và bỡ ngỡ ngay cả đối với giáo viên giảng dạy toán. Vì vậy, việc đi tìm lời giải bài toán nội suy là niềm say mê của không ít người, đặc biệt là những người dạy toán và học toán. Các bài toán nội suy đa dạng về đề tài, phong phú về chủng loại, và phù hợp cho mọi đối tượng ở mọi cấp học.

1 Các bài toán nội suy cổ điển

1.1 Nội suy Lagrange

Định lý 1 (Đồng nhất thức Lagrange)**.** *Nếu $x_1, x_2, \dots, x_m$ là m ($m > 1$) giá trị tùy ý, đôi một khác nhau và $f(x)$ là đa thức bậc nhỏ thua m thì ta có đồng nhất thức sau*

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_1)&\frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_m)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_m)}+\\ +f(x_2)&\frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_m)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_m)}\\ +\dots+f(x_m)&\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{m-1})}{(x_m-x_1)(x_m-x_2)\dots(x_m-x_{m-1})} \end{aligned} \tag{1}$$

1.2 Bài toán nội suy Lagrange

Bài toán 1 (Bài toán nội suy Lagrange)**.** Cho $x_{0i}, a_{0i} \in \mathbb{R}$, với $x_{0i} \neq x_{0j}$ $\forall i \neq j$, $(i, j = 1, 2, \dots, N)$. Hãy xác định đa thức $L(x)$ có bậc không quá $N-1$ ($\deg L(x) \leqslant N-1$) thỏa mãn điều kiện

$$Ł(x_{0i}) = a_{0i}, \quad \forall i = 1, 2 \dots, N. \tag{2}$$

1.3 Nội suy Taylor

Bài toán 2 (Bài toán nội suy Taylor)**.** Cho $x_0, a_k \in \mathbb{R}$, với $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Hãy xác định đa thức $T(x)$ có bậc không quá $N-1$ ($\deg P(x) \leqslant N-1$) và thỏa mãn các điều kiện:

$$T^{(k)}(x_0) = a_k, \ \ \forall k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{3}$$

Định lý 2 (Taylor)**.** *Giả sử $f : \mathbb{U}(a, \delta) \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục đến cấp $n-1$ trong δ- lân cận $\mathbb{U}(a, \delta)$ của điểm a và có đạo hàm hữu hạn cấp n tại điểm a. Khi đó, hàm f có thể biểu diễn dưới dạng*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n) \tag{4}$$

khi $x \to a$, trong đó $0! = 1$, $f^{(0)}(a) = f(a)$.

1.4 Nội suy Newton

Bài toán 3 (Bài toán nội suy Newton)**.** Cho $x_i, a_i \in \mathbb{R}$, với $i = 1, 2, \ldots, N$. Hãy xác định đa thức $N(x)$ có bậc không quá N ($\deg N(x) \leq N-1$) và thỏa mãn các điều kiện:

$$N^{(i-1)}(x_i) = a_i, \ \ \forall i = 1, 2, \ldots, N. \tag{5}$$

1.5 Nội suy Hermite

Trong một số trường hợp, ta cần tìm hàm đa thức không những đi qua các điểm cho trước mà còn phải thõa mãn điều kiện về đạo hàm tại các điểm đó. Ta gọi đa thức như vậy là đa thức nội suy Hermit.

Bài toán 4 (Nội suy Hermite)**.** Cho $x_i, a_{ki} \in \mathbb{R}$, với $i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 0, 1, \ldots, p_i - 1$ và $x_i \neq x_j \ \forall i \neq j$, trong đó $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = N$. Hãy xác định đa thức $H(x)$ có bậc $\deg H(x) \leq N-1$ thỏa mãn điều kiện

$$H^{(k)}(x_i) = a_{ki}, \ \ \forall i = 1, 2, \ldots, n; \ \ \forall k = 0, 1, \ldots, p_i - 1. \tag{6}$$

2 Nội suy theo hệ thống các điểm cực trị của đồ thị

Định lý 3. *Giả sử $f(x)$ khả vi đến cấp 2 liên tục trên một khoảng chứa x_0, $f''(x_0) \neq 0$ và $f'(x_0) = 0$. Khi đó*

Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0.

Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0.

Bài toán 5 (Mở rộng định lí)**.** *Giả sử $f(x)$ khả vi đến cấp n tại x_0 và giả sử*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{n-1}(x_0) = 0, \ \ f^n(x_0) \neq 0.$$

Khi đó

• *Nếu n chẵn thì $f(x)$ đạt cực trị tại x_0. Hơn nữa nếu $f^n(x_0) > 0$ thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0, nếu $f^n(x_0) < 0$ thì $f(x)$ đạt cực đại tại x_0.*
• *Nếu n lẻ thì $f(x)$ không đạt cực trị tại x_0.*

Nhận xét. Hàm $f(x)$ đạt cực trị tại $x = x_0$ thì $f'(x_0) = 0$ hoặc $f'(x_0)$ không tồn tại. Những điểm như thế được gọi là điểm dừng của hàm số.

2.1 Nội suy theo hệ thống các điểm dừng bậc một

Bài toán 6 (Điểm dừng đơn)**.** *Xác định đa thức $P(x)$ sao cho đồ thị của nó có các điểm dừng đơn tại $x_1, x_2, \ldots, x_n (x_1 < x_2 < \cdots < x_n)$*

$$P'(x_1) = P'(x_2) = \cdots = P'(x_n) = 0.$$

$(P''(x_1) \neq 0, \ldots, P''(x_n))$,, *tức là*

$$P'(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Giải. Ta viết

$$\begin{aligned} P'(x) &= a(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) \\ &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{cases} a_n = a \\ a_{n-1} = (-1)a(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \\ a_{n-2} = (-1)^2(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n) \\ \vdots \\ a_{n-k} = (-1)^k a(x_1x_2 \ldots x_k + x_1x_2 \ldots x_{k-1}x_{k+1} + \cdots + \\ \qquad\qquad + x_1x_{k+2} \ldots x_{n-1}x_n + x_2x_3 \ldots x_{k+1} + \cdots + x_{k+1}x_{k+2} \ldots x_n) \\ \vdots \\ a_1 = (-1)^{n-1}a(x_1x_2 \ldots x_{n-1} + x_1x_2 \ldots x_{n-2}x_n + \cdots + x_2x_3 \ldots x_n) \\ a_0 = (-1)^n a x_1 x_2 \ldots x_n. \end{cases}$$

Suy ra

$$P(x) = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C_1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} a_k x^{k+1} + C_1, C_1 : \text{ hằng số.}$$

Bài toán 7 (Điểm dừng bội)**.** *Xác định đa thức $P(x)$ sao cho đồ thị của nó có các điểm dừng tại $x_1, x_2, \dots, x_n (x_1 < x_2 < \dots < x_n)$, sao cho*

$$P'(x) = a(x-x_1)^{2\alpha_1+1}(x-x_2)^{2\alpha_2+1}\dots(x-x_n)^{2\alpha_n+1}.$$

Giải. Đặt $(2\alpha_1+1)+(2\alpha_2+1)+\dots+(2\alpha_n+1) = 2(\alpha_1+\dots+\alpha_n)+n = N$. Ta viết

$$\begin{aligned}
P'(x) &= a(x-x_1)^{2\alpha_1+1}(x-x_2)^{2\alpha_2+1}\dots(x-x_n)^{2\alpha_n+1}\\
&= a(x-t_1)\times\dots\times(x-t_{2\alpha_1+1})\times(x-t_{2\alpha_1+2})\times\dots\times(x-t_{2(\alpha_1+\alpha_2)+2)})\\
&\times(x-t_{2(\alpha_1+\alpha_2)+3)})\times\dots\times(x-t_{2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+3)})\times\dots\times\\
&\times(x-t_{2(\alpha_1+\dots\alpha_{n-1})+n})\times\dots\times(x-t_N)\\
&= a_0+a_1x+\dots+a_Nx^N = \sum_{k=0}^{N} a_kx^k,
\end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{cases}
t_1 = t_2 = \dots = t_{2\alpha_1+1} = x_1\\
t_{2\alpha_1+2} = t_{2\alpha_1+3} = \dots = t_{2(\alpha_1+\alpha_2)+2} = x_2\\
\vdots\\
t_{2(\alpha_1+\dots\alpha_{n-1})+(n-1)+1} = t_{2(\alpha_1+\dots\alpha_{n-1})+(n-1)+2} = \dots = t_N = x_n
\end{cases}$$

Suy ra

$$P(x) = \sum_{k=0}^{N}\frac{a_k}{k+1}x^{k+1} + C, C: \text{ hằng số},$$

với

$$\begin{cases}
a_0 = (-1)^N at_1\dots t_{\alpha_1}\dots t_N\\
a_1 = (-1)^{N-1}a(t_1t_2\dots t_{N-1}+t_1t_2\dots t_{N-2}t_N+\dots+t_2t_3\dots t_N)\\
\vdots\\
a_k = (-1)^{N-k}a(t_1t_2\dots t_{N-k}+t_1t_2\dots t_{N-k-1}t_{N-k+1}+\dots+t_2t_3\dots t_N)\\
\vdots\\
a_{N-1} = (-1)a(t_1+t_2+\dots+t_{\alpha_1}+\dots+t_{N-1}+t_N) =\\
\qquad = (-1)a(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_nx_n)\\
a_N = 1
\end{cases}$$

2.2 Áp dụng

Bài toán 8. *Xác định đa thức $P(x)$ bậc nhỏ nhất với hệ số bậc cao nhất bằng 1 sao cho đồ thị hàm số $y = P(x)$ nhận $x = 1, x = 2$ là các điểm cực trị.*

Bài toán 9. *Xác định đa thức $P(x)$ bậc nhỏ nhất với hệ số bậc cao nhất bằng 1 sao cho đồ thị hàm số $y = P(x)$ nhận $x = 1, x = 2, x = 3, x = 4$ là các điểm cực trị.*

Bài toán 10. *Xác định đa thức $P(x)$ bậc nhỏ nhất với hệ số bậc cao nhất bằng 1 sao cho đồ thị hàm số $y = P(x)$ nhận $x = 1, x = 2, x = 3, x = 4$ là các điểm cực trị và đi qua điểm $A(0, 1)$.*

Bài toán 11. *Xác định đa thức $P(x)$ bậc nhỏ nhất sao cho đồ thị hàm số $y = P(x)$ có các điểm cực đại, cực tiểu lần lượt tại $A(0, 1)$ và $B(1, 0)$.*

Bài toán 12. *Xác định đa thức bậc ba $P(x)$ thỏa mãn điều kiện nhận điểm $M(1; 1)$ làm tâm đối xứng và $A(0, 1)$ là điểm cực tiểu.*

Bài toán 13. *Xác định đa thức $P(x)$ bậc nhỏ nhất sao cho đồ thị hàm số $y = P(x)$ có hệ số cao nhất bằng 1 và các điểm cực tiểu lần lượt tại $A(0, 1)$ và $B(1, 1)$.*

Bài toán 14. *Xác định đa thức $P(x)$ bậc nhỏ nhất sao cho đồ thị hàm số $y = P(x)$ lần lượt đạt cực đại, cực tiểu tại $A(-2, 1)$ và $B(1, 3)$.*

Bài toán 15. *Xác định đa thức $P(x)$ bậc nhỏ nhất sao cho đồ thị hàm số $y = P(x)$ có hệ số cao nhất bằng 1 và các điểm cực tiểu lần lượt tại $A(0, 1)$ và $B(1, 1)$.*

Bài toán 16. *Xác định đa thức $P(x)$ bậc nhỏ nhất sao cho đồ thị hàm số $y = P(x)$ có các điểm cực đại lần lượt tại $A(-1, 0)$ và $B(2, 0)$.*

Bài toán 17. *Xác định đa thức $P(x)$ bậc nhỏ nhất sao cho đồ thị hàm số $y = P(x)$ có hệ số cao nhất bằng 1, đi qua điểm $A(2, 0)$ và có các điểm cực đại lần lượt tại $B(0, 0)$ và $C(1, 0)$.*

Bài toán 18. *Xác định đa thức $P(x)$ bậc nhỏ nhất sao cho đồ thị hàm số $y = P(x)$, đi qua điểm $A(2, 0)$ và có các điểm cực đại lần lượt tại $B(-1, 0)$ $C(0, 0)$ và $D(1, 0)$.*

3 Nội suy theo hệ thống các điểm uốn của đồ thị

Định nghĩa 1. Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên một khoảng chứa điểm x_0, $f''(x_0) = 0$ và $f''(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì $M(x_0; f(x_0))$ là một điểm uốn của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Bài toán 19. *Thay điểm dừng bậc 1 bởi điểm dừng bậc 2* $(P''(x_1) = 0, P''(x_2) = 0, \dots, P''(x_n)) = 0$.

TH1. Điểm dừng đơn.

$$P''(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Ta viết

$$\begin{aligned} P''(x) &= a(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \\ &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{cases} a_0 = (-1)^n a x_1 x_2 \dots x_n \\ a_1 = (-1)^{n-1} a(x_1 x_2 \dots x_{n-1} + x_1 x_2 \dots x_{n-2} x_n + \dots + x_2 x_3 \dots x_n) \\ \vdots \\ a_k = (-1)^{n-k} a(x_1 x_2 \dots x_{n-k} + x_1 x_2 \dots x_{n-k-1} x_n + \dots + x_2 x_3 \dots x_n) \\ \vdots \\ a_{n-1} = (-a)(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \\ a_n = a \end{cases}$$

Suy ra

$$P'(x) = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C_1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} a_k x^{k+1} + C_1,$$

hay

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{k+1} \frac{1}{k+2} x^{k+2} + C_1 x + C_2$$

TH2. Điểm dừng bội

$$P''(x) = a(x - x_1)^{2\alpha_1} (x - x_2)^{2\alpha_2} \dots (x - x_n)^{2\alpha_n}.$$

Giải. Đặt $2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + 2\alpha_n = 2(\alpha_1 + \dots + \alpha_n) = N$.
Ta viết

$$\begin{aligned} P'(x) &= a(x - x_1)^{2\alpha_1} (x - x_2)^{2\alpha_2} \dots (x - x_n)^{2\alpha_n} \\ &= a(x - t_1) \times \dots \times (x - t_{2\alpha_1}) \times (x - t_{2\alpha_1 + 1}) \times \dots \times (x - t_{2(\alpha_1 + \alpha_2)}) \\ &\times (x - t_{2(\alpha_1 + \alpha_2) + 1)}) \times \dots \times (x - t_{2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}) \times \dots \times \\ &\times (x - t_{2(\alpha_1 + \dots \alpha_{n-1}) + 1}) \times \dots \times (x - t_N) \\ &= a_0 + a_1 x + \dots + a_N x^N = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k, \end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{cases} t_1 = t_2 = \dots = t_{2\alpha_1} = x_1 \\ t_{2\alpha_1 + 1} = t_{2\alpha_1 + 2} = \dots = t_{2(\alpha_1 + \alpha_2)} = x_2 \\ \vdots \\ t_{2(\alpha_1 + \dots \alpha_{n-1}) + 1} = t_{2(\alpha_1 + \dots \alpha_{n-1}) + 2} = \dots = t_N = x_n \end{cases}$$

Suy ra

$$P'(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + C_1,$$

hay

$$P(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{1}{k+1}\frac{1}{k+2}x^{k+2} + C_1x + C_2,$$

với
$$\begin{cases} a_0 = (-1)^N at_1 \dots t_{\alpha_1} \dots t_N \\ a_1 = (-1)^{N-1}a(t_1t_2\dots t_{N-1} + t_1t_2\dots t_{N-2}t_N + \dots + t_2t_3\dots t_N) \\ \vdots \\ a_k = (-1)^{N-k}a(t_1t_2\dots t_{N-k} + t_1t_2\dots t_{N-k-1}t_{N-k+1} + \dots + t_2t_3\dots t_N) \\ \vdots \\ a_{N-1} = (-1)a(t_1 + t_2 + \dots + t_{\alpha_1} + \dots + t_{N-1} + t_N) = \\ \qquad = (-1)a(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \dots + \alpha_nx_n) \\ a_N = 1 \end{cases}$$

Bài toán 20. *Xác định đa thức $P(x)$ bậc nhỏ nhất sao cho đồ thị hàm số $y = P(x)$ có hệ số cao nhất bằng 1, đi qua $A(0,-1)$ và điểm uốn tại $A(-1,1)$.*

Bài toán 21. *Xác định đa thức $P(x)$ bậc nhỏ nhất sao cho đồ thị hàm số $y = P(x)$ đi qua điểm $A(-1,0)$ và điểm uốn tại $A(1,0)$.*

Bài toán 22. *Xác định đa thức $P(x)$ bậc nhỏ nhất sao cho đồ thị hàm số $y = P(x)$ đi qua điểm $A(-1,0)$ và có các điểm uốn lần lượt tại $B(0,0)$ và $C(0,1)$.*

Bài toán 23. *Xác định đa thức $P(x)$ bậc nhỏ nhất sao cho đồ thị hàm số $y = P(x)$ có các điểm uốn lần lượt tại $A(-2,0)$, $B(0,0)$, $C(3,0)$ và đi qua $D(1'0)$.*

4 Nội suy theo hệ thống các cực trị và điểm uốn của đồ thị

Bài toán 24. *Xác định đa thức $P(x)$ bậc nhỏ nhất sao cho đồ thị hàm số $y = P(x)$ có các điểm uốn và điểm cực tiểu lần lượt tại $A(0,0)$ và $B(1,0)$.*

Giải. Vì đồ thị hàm số $y = P(x)$ có điểm uốn và điểm cực tiểu lần lượt tại $x = 0$, $x = 1$ và từ giả thiết $P(0) = P(1) = 0$ nên theo định lí Rolle, ta tìm được trong khoảng $(0,1)$ điểm x_0 sao cho $P'(x_0) = 0$. Do vậy phương trình $P'(x) = 0$ phải có ít nhất 4 nghiệm. Suy ra $\deg P'(x) \geq 4$. Nếu $\deg P'(x) = 4$, thì phương trình $P(x) = 0$ có 5 nghiệm. Khi đó, theo giả thiết thì

$$\begin{cases} P(0) = P''(0) = 0 \\ P(1) = P'(1) = 0 \end{cases}$$

Khi đó theo bài toán nội suy Hermite

$$P(x) = ax^3(x-1)^2, a \neq 0.$$

Để đồ thị hàm số có điểm uốn và cực tiểu lần lượt tại A, B thì $a > 0$.
Vậy đa thức bậc năm có dạng

$$P(x) = ax^3(x-1)^2, a > 0.$$

Thử lại, ta thấy các điều kiện đảm bảo để đồ thị hàm số $y = P(x)$ có điểm uốn và điểm cực tiểu lần lượt tại $A(0,0)$ và $B(1,0)$ là thỏa mãn. Vậy đa thức $P(x)$ bậc nhỏ nhất sao cho đồ thị hàm số $y = P(x)$ có điểm uốn và điểm cực tiểu lần lượt tại $A(0,0)$ và $B(1,0)$ là đa thức

$$P(x) = ax^3(x-1)^2, a > 0.$$

Bài toán 25. *Xác định đa thức $P(x)$ bậc nhỏ nhất sao cho đồ thị hàm số $y = P(x)$ có các điểm uốn và điểm cực đại lần lượt tại $A(0,0)$ và $B(1,0)$.*

Giải. Vì đồ thị hàm số $y = P(x)$ có các điểm uốn và điểm cực đại lần lượt tại $x = 0$, $x = 1$ và từ giả thiết $P(0) = P(1) = 0$ nên theo định lí Rolle, ta tìm được trong khoảng $(0,1)$ điểm x_0 sao cho $P'(x_0) = 0$. Do vậy phương trình $P'(x) = 0$ phải có ít nhất 4 nghiệm. Suy ra $\deg P'(x) \geq 4$. Nếu $\deg P'(x) = 4$, thì phương trình $P(x) = 0$ có 5 nghiệm. Khi đó, theo giả thiết thì

$$\begin{cases} P(0) = P''(0) = 0 \\ P(1) = P'(1) = 0 \end{cases}$$

Khi đó theo bài toán nội suy Hermite

$$P(x) = ax^3(x-1)^2, a \neq 0.$$

Để đồ thị hàm số có điểm uốn và cực tiểu lần lượt tại A, B thì $a < 0$.
Vậy đa thức bậc năm có dạng

$$P(x) = ax^3(x-1)^2, a < 0.$$

Thử lại, ta thấy các điều kiện đảm bảo để đồ thị hàm số $y = P(x)$ có các điểm uốn và điểm cực tiểu lần lượt tại $A(0,0)$ và $B(1,0)$ là thỏa mãn. Vậy đa thức $P(x)$ bậc nhỏ nhất sao cho đồ thị hàm số $y = P(x)$ ó các điểm uốn và điểm cực tiểu lần lượt tại $A(0,0)$ và $B(1,0)$ là đa thức

$$P(x) = ax^3(x-1)^2, a < 0.$$

Bài toán 26. *Xác định đa thức $P(x)$ bậc nhỏ nhất sao cho đồ thị hàm số $y = P(x)$ có các điểm uốn tại $A(-2,0), B(1,0)$ và đạt cực đại tại $C(0,0)$.*

Bài toán 27. *Xác định đa thức $P(x)$ bậc nhỏ nhất sao cho đồ thị hàm số $y = P(x)$ có các điểm uốn tại $A(-2,0), B(1,0)$ và đạt cực tiểu tại các điểm $C(-1,0), D(0,0)$.*

5 Một số bài toán liên quan

Bài toán 28. *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b) và $f(a) = f(b) = 0$. Chứng minh rằng với mọi $k \in \mathbb{R}^*$, phương trình*

$$f(x) + kf'(x) = 0 \tag{7}$$

luôn có ít nhất một nghiệm $x \in (a, b)$.

Chứng minh. Xét hàm số

$$g(x) = e^{\frac{x}{k}} f(x).$$

Ta có $g(x)$ liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b) và $g(a) = g(b) = 0$. Theo định lí Rolle, phương trình $g'(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm $x \in (a, b)$. Mà

$$g'(x) = \frac{1}{k} e^{\frac{x}{k}} f(x) + e^{\frac{x}{k}} f'(x) = \frac{1}{k} e^{\frac{x}{k}} [f(x) + kf'(x)].$$

Vì $\frac{1}{k} e^{\frac{x}{k}} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + kf'(x) = 0.$$

Vậy phương trình (3.1) luôn có ít nhất một nghiệm $x \in (a, b)$. Đây là điều cần chứng minh. □

Bài toán 29. *Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ thì $f'(x)$ có số lượng các không điểm trong khoảng (a, ∞) không ít hơn so với $f(x)$ trên khoảng ấy. Kết quả vẫn đúng nếu thay $+\infty$ bởi $-\infty$.*

Bài toán 30. *Giả sử hàm số $f(x)$ có n không điểm trong khoảng $(a, +\infty)$. Chứng minh rằng với mọi số thực α hàm số*

$$\alpha f(x) + f'(x)$$

có ít nhất $n - 1$ không điểm trong khoảng đó. Hơn nữa, nếu thỏa mãn điều kiện

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\alpha x} f(x) = 0$$

thì hàm đã nêu có ít nhất là n không điểm.

Bài toán 31. *Nếu đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ có k nghiệm thực thì đa thức $f'(x)$ có ít nhất $(k - 1)$ nghiệm thực.*

Bài toán 32. *Cho $0 \leq x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Chứng minh bất đẳng thức sau:*

$$\sqrt[3]{\frac{1}{4}(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)}$$

$$< \sqrt{\frac{1}{6}(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)}$$

Bài toán 33. *Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$, thỏa mãn điều kiện*

$$f(a) = f(b) = 0, f(x) \neq 0, \forall x \in (a,b).$$

Chứng minh rằng tồn tại dãy $\{x_n\}$ với $x_n \in (a,b)$ sao cho

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f'(x_n)}{(\sqrt[n]{e}-1)(f(x_n)} = 2011 \tag{8}$$

Chứng minh. Xét hàm số

$$g_n(x) = e^{-\frac{2011x}{n}} f(x), x \in [a,b], n \in \mathbb{N}.$$

Rõ ràng hàm số $g_n(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a,b]$, khả vi trong khoảng (a,b). Hơn nữa, ta có $g_n(a) = g_n(b)$ nên theo định lí Rolle, tồn tại $x_n \in (a,b)$ sao cho $g'_n(x_n) = 0$.

Với mỗi n, tồn tại một x_n như thế. Điều đó có nghĩa là ta đã xây dựng một dãy $\{x_n\}$. Ta sẽ chứng minh rằng dãy này thỏa mãn đẳng thức (3.3).

Thật vậy, ta có

$$g'_n(x_n) = -\frac{2011}{n} e^{-\frac{2011x_n}{n}} f(x_n) + e^{-\frac{2011x_n}{n}} f'(x_n) = 0.$$

Vì thế

$$\frac{f'(x_n)}{f(x_n)} = \frac{2011}{n}.$$

Suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f'(x_n)}{(\sqrt[n]{e}-1)f(x_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2011}{e^{\frac{1}{n}}-1} = 2011 \text{ (đpcm)}.$$

□

Bài toán 34. *Giả sử*

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3),$$

với $x_1 < x_2 < x_3$. Chứng minh rằng

$$\frac{f''(x_1)}{f'(x_1)} + \frac{f''(x_2)}{f'(x_2)} + \frac{f''(x_3)}{f'(x_3)} = 0.$$

Bài toán 35. *Cho $c_0, c_1, \ldots, c_n$ là các số thực thỏa mãn điều kiện*

$$c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{3} + \cdots + \frac{c_n}{n+1} = c_0 + c_1 + \frac{c_2.2^2}{3} + \frac{c_3.2^3}{4} + \cdots + \frac{c_n.2^n}{n+1} = 0$$

Chứng minh rằng phương trình

$$c_1 + 2c_2x + \cdots + nc_nx^{n-1} = 0$$

có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0,2)$.

Bài toán 36 (Olympic Nga)**.** *Cho phương trình*

$$a_0x^n + a_1x^{n1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, a_0 \neq 0$$

có n nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng

$$(n-1)a_1^2 > 2na_0a_2.$$

Bài toán 37 (Olympic 30.4 - 2003)**.** *Tồn tại hay không các số thực a, b, c để phương trình sau có bốn nghiệm thực phân biệt.*

$$x + \frac{5}{6} = a.e^{3x} + b.e^{2x} + c.e^{x} - \frac{1}{4}.e^{-x}.$$

Bài toán 38. *Giả sử hàm $f(x)$ khả vi liên tục n lần trên $[a, b]$, và trên đoạn này có không ít hơn n không điểm tính cả bội. Chứng minh rằng:*

$$\max_{[a,b]} |f(x)| \leq \frac{(b-a)^n}{n!} \max_{[a,b]} \left| f^{(n)}(x) \right|$$

Bài toán 39 (Olympic sinh viên toàn quốc- 1993 vòng 1)**.** *Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm bậc hai liên tục và không đồng nhất bằng 0 trên bất kỳ đoạn nào của $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $ax + by + c = 0$ tại ba điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f''(x_0) = 0$ và $f''(x)$ đổi dấu qua $x = x_0$.*

Bài toán 40 (Olympic sinh viên toàn quốc- 1994)**.** *Cho n là số nguyên dương, $a_k, b_k \in \mathbb{R}(k = 0, 1, \ldots, n)$. Chứng minh rằng phương trình*

$$x + \sum_{k=1}^{n} (a_k \sin kx + b_k \cos kx) = 0$$

có nghiệm trong khoảng $(-\pi, \pi)$.

Bài toán 41 (Olympic sinh viên toàn quốc - 1999)**.** *Giả sử đa thức với hệ số thực*

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

có n nghiệm thực phân biệt. chứng minh rằng

$$a_{k-1}a_{k+1} < (a_k)^2, k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Bài toán 42 (Olympic sinh viên toàn quốc - 2001)**.** *Chứng minh rằng tồn tại số thực $x \in (0, 1)$ sao cho*

$$\int_x^1 \frac{t^{2000}dt}{(1+t)(1+t^2)\cdots(1+t^{2001})} = \frac{x^{2000}}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2001})}.$$

Bài toán 43 (Olympic sinh viên toàn quốc - 2003)**.** *Cho đa thức với hệ số thực $P(x)$ bậc $n(n \geq 1)$ có m nghiệm thực. Chứng minh rằng đa thức*

$$f(x) = (x^2 + 1)P(x) + P'(x)$$

có ít nhất m nghiệm thực.

Bài toán 44 (Olympic - 2006)**.** *Tìm tất cả các dãy số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$, với $n \geq 1, a_n \neq 0$, thỏa mãn tính chất sau:*

Nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm số khả vi cấp n và $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ là các số thực thỏa mãn

$$f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n) = 0$$

thì tồn tại $\xi \in (x_0, x_n)$ sao cho

$$a_0 f(\xi) + a_1 f'(\xi) + \cdots + a_n f^{(n)}(\xi) = 0.$$

Bài toán 45. *Kí hiệu $\mathbb{T}$ là tập hợp tất cả các đa thức bậc 2011 có đúng 11 nghiệm thực kể cả nghiệm bội. Với mỗi $P(x) \in \mathbb{T}$, đặt*

$$Q_P(x) = (x^{20} + 1)P(x) - P'(x)$$

và gọi S_P là số nghiệm thực của đa thức $Q_P(x)$. Tìm $\min\limits_{P \in \mathbb{T}} S_P$.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu, 2005, *Đa thức đại số và phân thức hữu tỷ,* NXB Giáo Dục.

[2] Nguyễn Văn Mậu, 2006, *Đa thức và áp dụng*, NXB Giáo Dục.

[3] Nguyễn Văn Mậu, 2007, *Nội suy và áp dụng*, NXB Giáo Dục.

[4] Nguyễn Văn Mậu,2006, *Tuyển tập Olympic sinh viên toàn quốc*, NXB Giáo Dục.

[5] Một số bài báo liên quan.

[6] Nguyễn Gia Tề - Đỗ Phi Nga, *Bài giảng toán cao cấp A1.*

BẤT BIẾN NHƯ LÀ MỘT PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH VÀ ỨNG DỤNG TRONG GIẢI TOÁN

Lê Sáng – Vũ Đức Thạch Sơn, Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Khánh Hòa

Ta thường làm quen với các phương pháp chứng minh trong toán học như: trực tiếp, quy nạp, phản chứng, nguyên tắc Dirichlet ,tập thứ tự và nguyên tắc cực hạn. Bất biến là sự không đổi của một đại lượng qua một hoặc nhiều phép biến đổi qua hữu hạn bước thực hiện. Chính yếu tố này cũng giúp ta có thể phản bác những tình huống không thể xảy ra của một đại lượng nào đó trong bài toán. Yếu tố bất biến rất thường gặp trong các cuộc thi toán học và thường là các bài toán đòi hỏi sự nhạy bén và lập luận chặt chẽ, dưới đây là một số bài toán như vậy. Ở đây bất biến và nửa bất biến được xét được xem như là một phương pháp chứng minh quan trọng, trong đó các dạng toán thi chọn học sinh giỏi được đề cập tương đối phong phú giúp có cái nhìn rõ hơn trong bài toán tổ hợp, đây là bài giảng cho đội tuyển Khánh Hòa.

1 Phương pháp đồng dư:

Mục đích của tính chất bất biến trong các dạng toán này là nghiên cứu tính chẵn lẻ hoặc đồng dư với 2, 3, 4 của các trạng thái bài toán khi thay đổi theo yêu cầu

Bài toán 1. *Trên một hòn đảo có ba giống thằn lằn: 133 con màu xám, 155 con màu đỏ và 177 con màu xanh. Nếu hai con thằn lằn khác màu gặp nhau thì chúng sẽ đồng thời chuyển sang màu thứ ba (ví dụ con màu xanh gặp con màu xám thì cả hai con sẽ cùng chuyển sang màu đỏ) còn nếu hai con cùng màu gặp nhau thì không chuyển màu. Liệu có khi nào xảy ra tình huống tất cả các con thằn lằn trên đảo cùng một màu không?*

Lời giải. Như vậy bất biến ở đây chính là số dư khi chia cho 3 của số thằn lằn mỗi màu là 0-1-2. Tổng số thằn lằn là $133 + 155 + 177 = 465$ chia hết cho 3 do đó nếu xảy ra tình huống tất cả con thằn lằn đều cùng màu thì số dư khi chia cho 3 của ba loại thằn lằn là 0-0-0 trái với tính bất biến 0-1-2. Như vậy không thể xảy ra tình huống đó.

Phương pháp đồng dư chính là ở sự phát hiện ra đại lượng bất biến gắn với số dư khi chia cho một số mà chủ yếu là modul 2 và modul 3. Bài toán "thằn lằn"trên đây chính là modulo 3, còn sau đây là một số bài toán sử dụng phương pháp đồng dư:

Bài toán 2. *Trên bảng có 2011 dấu cộng và 2012 dấu trừ . Một học sinh thực hiện trò chơi như sau : thay hai dấu bất kỳ trên bảng dấu cộng nếu hai số bị xóa đi cùng dấu và thay bằng dấu trừ nếu chúng trái dấu. Hỏi sau 4022 lần thực hiện như vậy dấu còn lại là dấu cộng hay dấu trừ ?*

Lời giải. Nếu thay :

(-) và (-) $\rightarrow$ (+)

(+) và (+) $\rightarrow$ (+)

(-) và (+) → (-)

Ta phát hiện được sự bất biến ở đây là sự không đổi đấu của tích các dấu trên bảng.

Mà lúc đầu trên bảng có 2011 (+) và 2012 (-) cho nên tích đó sẽ là dấu (+). Do đó dấu còn lại duy nhất trên bảng phải là dấu (+).

Bài toán 3. *Trên bảng cho ba số 2,2,2. Ta xóa đi một trong ba số và thay vào đó tổng của hai số còn lại trừ đi 1. Hỏi sau một số lần thực hiện ta có thể thu được các số 11,1,2011 được hay không?*

Lời giải. Hãy thử kiểm tra: 2,2,2 → 2,3,2

Lúc này trong bộ ba số này luôn có 1 số lẻ và 2 số chẵn. Nếu ta tiếp tục thực hiện thì:

Chẵn + Lẻ - 1 → Chẵn

Chẵn + Chẵn - 1 → Lẻ

Như vậy trong mọi trường hợp thì trong bộ ba số thu được luôn có 1 số lẻ và 2 số chẵn. Thế nhưng 11,1,2011 lại là 3 số lẻ do đó không thể xảy ra trường hợp này.

Bài toán 4. *Trong một giải đấu bóng đá, các đội đấu vòng tròn một lượt với nhau theo quy định một trận thắng được 2 điểm, hòa 1 điểm,thua 0 điểm. Hỏi có thể có hai đội lần lượt được 7 và 10 điểm trong cùng một thời điểm của giải đấu không?*

Lời giải. Ta thấy rằng sau một trận đấu bất kỳ nếu có một đội thắng thì số điểm hai đội đạt được là 0 và 2. Khi đó hiệu hai số điểm hai đội đạt được là 2 còn nếu hòa nhau thì hai đội được 1 điểm mỗi đội khi đó hiệu số là 0. Vậy thì rõ ràng hiệu hai điểm số bất kỳ của hai đội phải là số chẵn. Thế nhưng $10 - 7 = 3$ là số lẻ do đó sẽ không tồn tại hai đội cùng lúc đươc 7 và 10 điểm.

Bài toán 5. *Viết 2012 số từ 1 đến 2012, cứ mỗi lần xóa đi 2 số rồi thay bởi trị tuyệt đối của hiệu 2 số đó. Hỏi số cuối cùng là số chẵn hay lẻ?*

Lời giải. Gọi S(n) là tổng các số còn lại sau lần thứ n. S(0)là tổng 2012 số đầu tiên là 1 số chẳn. Mà S(n) bất biến modulo 2 do đó số cuối cùng phải là số chẵn.

Bài toán 6. *Trên bảng ta viết ba số nguyên. Sau đó ta xóa đi một số và viết vào đó tổng hai số còn lại trừ đi 1. Thao tác như vậy lặp lại một số lần và cuối cùng ta nhận được 3 số 29, 1876, 2011. Hỏi ba số đầu tiên có thể là 2,2,2 không?*

Lời giải. Sau bước đầu tiên từ ba số 2,2,2, ta nhận được 2,2,3, ba số này có hai chẵn và một lẻ. Từ bước thứ hai trở đi thì kết quả luôn luôn có hai số chẵn và một số lẻ dù ta thực hiện bắt đầu từ bất cứ số nào (vì những số chẵn bằng tổng của một số chẵn và một số lẻ trừ đi 1; số lẻ là tổng của hai số chẵn trừ đi 1). Nhưng trong kết quả đã cho có hai số lẻ, một số chẵn nên với thao tác đã cho và xuất phát từ 2,2,2 không thể cho kết quả.

Bài toán trên được giải nhờ phát hiện ra tính chẵn lẻ của ba số không thay đổi, nên từ trạng thái xuất phát không thể nhận được trạng thái kết quả.

Bài toán 7. *Trên đường tròn theo một thứ tự bất kì viết 4 chữ số 1, 5 chữ số 0, thực hiện viết chữ số 1 vào giữa hai chữ số giống nhau và chữ số 0 vào giữa hai chữ số khác nhau, các chữ số ban đầu bị xóa đi. Hỏi có thể đưa đường tròn về toàn chữ số 0 được không?*

Lời giải. Nhận thấy trên đường tròn sau mỗi quá trình trên luôn còn lại 9 chữ số. Do vậy số chữ số 0 và số chữ số 1 luôn khác tính chẵn lẻ. Giả sử sau 1 số lần lặp lại quá trình trên. Đường tròn còn lại toàn chữ số 0 suy ra trước đó trên đường tròn không có 2 chữ số nào giống nhau đứng cạnh nhau nên số chữ số 0 bằng số chữ số 1 (vô lí !), suy ra đpcm.

Bài toán 8. (Corolado MO 1997) *Mỗi ô của bảng 1997 X 1997 điền các số (+1) hoặc (-1). Mỗi hàng ta tính tích R_i các số trong hàng đó. Mỗi cột ta tính tích C_i các số trong cột đó. Chứng minh rằng $\sum\limits_{i=1}^{1997}(R_i+C_i)$ luôn khác không.*

Lời giải. Bất biến được sử dụng ở đây là số dư $\sum\limits_{i=1}^{1997}(R_i+C_i)$ cho 4, nói cách khác ta đang sử dụng bất biến theo modulo 4. Đại lượng này không đổi với bất kỳ một cự thay đổi dấu nào của một trong những dấu được viết trên bảng. Thật vậy, giả sử có sự thay đổi phần tử ở hàng thứ i và cột thứ j cho ta $-(R_i+C_i)$ thay vì (R_i+C_i). Vì (R_i+C_i) có giá trị 2, 0 hoặc -2 theo modulo 4 nên tổng ban đầu thay đổi một bội số của 4. Do đó bất biến không phụ thuộc vào cách chọn các số (+1) hoặc (-1). Cho nên ta chỉ cần xét trường hợp tất cả các ô đều điền (+1). Khi đó $\sum\limits_{i=1}^{1997}(R_i+C_i) \equiv 2 \pmod 4$. Vậy với mọi cách điền các số (+1) hoặc (-1) thì $\sum\limits_{i=1}^{1997}(R_i+C_i)$ luôn khác không.

Bài toán 9. (Hungary MO 1989) *Mỗi đỉnh của một hình vuông đặt một hòn sỏi. Thực hiện thay đổi số sỏi theo quy luật sau: ta có thể lấy đi một số sỏi ở một đỉnh và thêm vào một trong hai đỉnh kề bên một số sỏi gấp đôi. Hỏi có thể nhận được 1989, 1988, 1990, 1989 viên sỏi tại các đỉnh liên tiếp của hình vuông được hay không?*

Lời giải. Gọi 4 đỉnh liên tiếp của hình vuông là A, B, C, D ứng với số sỏi là a, b, c, d. Khi đó ở bước tiếp theo gọi x là số sỏi lấy đi, giả sử ở đỉnh A, do đó số sỏi ở 4 đỉnh là: $a-x, b+2x, c, d$ hoặc $a-x, b, c, d+2x$. Ta có $(b+d+2x)-(a+c-x) = b+d-a-c+3x$ Mà ban đầu số sỏi mỗi đỉnh là (1 , 1 , 1 , 1) nên từ đây ta có bất biến của bài toán này: hiệu giữa tổng số sỏi hai đỉnh A, C và hai đỉnh B, D luôn là bội của 3. Mà với (1989, 1988, 1990, 1989) thì hiệu này có số dư là 2 khi chia cho 3 do đó không xảy ra.

Bài toán 10. (VMO 1992) *Cho bảng hình chữ nhật 1991 1992 với 1991 hàng và 1992 cột. Kí hiệu ô vuông nằm ở giao của hàng thứ m (kể từ trên xuống) và cột thứ n(kể từ trái sang phải) là (m ; n). Tô màu các ô vuông của bảng theo cách sau: lần thứ nhất tô 3 ô (r ; s), (r + 1 ; s + 1), (r + 2; s + 2) với r; s là hai số tự nhiên cho trước thỏa mãn $1 \le r \le 1989$ và $1 \le s \le 1991$; từ lần thứ hai mỗi lần tô đúng 3 ô chưa có màu nằm cạnh nhau hoặc trong cùng một hàng hoặc trong cùng một cột. Hỏi bằng cách đó có thể tô màu được tất cả các ô vuông của bảng đã cho hay không?*

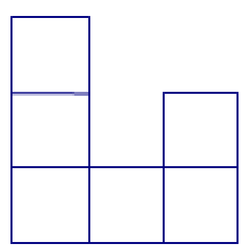
Lời giải. Ta hãy ghi vào mỗi ô vuông của bảng một số tự nhiên theo quy tắc sau: ở mỗi hàng, lần lượt từ trái sang phải, ghi các số tự nhiên từ 1 đến 1992. Như vậy ba số được ghi vào ba ô cạnh nhau trong cùng một hàng sẽ là ba số tự nhiên liên tiếp, trong cùng một cột sẽ là ba số tự nhiên bằng nhau. Suy ra, kể từ lần thứ hai, mỗi lần tô màu ta sẽ xóa đi ba số có tổng chia hết cho 3.Như thế ba số được ghi vào ba ô (r ; s), (r + 1 ; s + 1), (r + 2 ; s + 2) sẽ là s, s + 1 và s + 1 mà tổng của chúng là một số chia cho 3 dư 2. Vậy nếu tô màu được hết các ô vuông của bảng đã cho thì tổng S của tất cả các số đã được ghi vào bảng phải là một số chia cho 3 dư 2. Nhưng S = 1991.(1 + 2 + . . . +1992) = 1991.1993.993 chia hết cho 3, mâu thuẫn!. Do đó không thể tô màu được tất cả ô vuông của bảng đã cho.

2 Bảng biểu :

Bài toán 11. *Trên bàn cờ 8×8 có 32 quân trắng và 32 quân đen, mỗi quân chiếm một ô vuông. Tại mỗi bước đi người chơi thay tất cả các quân trắng thành quân đen và tất cả các quân đen thành quân trắng trên một hàng hoặc một cột nào đó . Hỏi sau hữu hạn bước có thể còn lại chính xác một quân trắng trên bàn cờ không?*

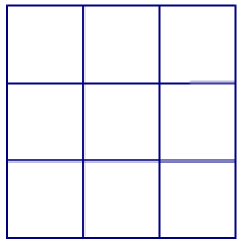
Lời giải. Nếu trước khi chuyển có chính xác k quân trắng trên hàng(cột) định chuyển thì số quân đen trên hàng(cột)ấy là 8 – k. Sau khi chuyển, 8 – k quân đen này sẽ trở thành 8 – k quân trắng và k quân trắng lại trở thành k quân đen. Như vậy số quân trắng trên bàn cờ sau khi chuyển sẽ thêm vào 8 – k và mất đi k quân, tức là số quân trắng thay đổi trên bàn cờ là (8 – k) – k = 8 – 2k . Số này là một số chẵn ,mà số quân trắng trên bàn cờ lúc đầu là 32 quân do đó số quân trắng trên bàn cờ luôn là số chẵn. Vậy không thể còn lại duy nhất trên bàn cờ một quân trắng.

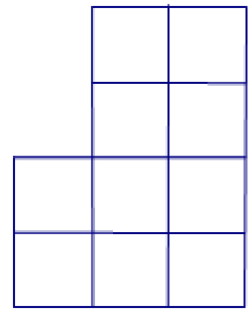
Bài toán 12. (IMO 2004) *Ta định nghĩa viên gạch hình móc câu là hình gồm 6 ô vuông đơn vị như hình vẽ dưới đây, hoặc hình nhận được do lật hình đó (sang trái, sang phải, lên trên, xuống dưới) hình nhận được do xoay hình đó đi một góc:*



Hãy xác định tất cả các hình chữ nhật $m \times n$ trong m, n là các số nguyên dương sao cho có thể lát hình chữ nhật đó bằng các viên gạch hình móc câu?

Chứng minh. Dễ thấy m,n $\notin \{1; 2; 5\}$. Chia hình chữ nhật đã cho thành các m $\times$ n ô vuông và đánh số các hàng, các cột từ dưới lên trên, từ trái sang phải. Ta gọi ô (p; q) là ô nằm ở giao của hàng thứ p và cột thứ q. Hai viên gạch hình móc câu chỉ có thể ghép lại để được một trong hai hình dưới đây:

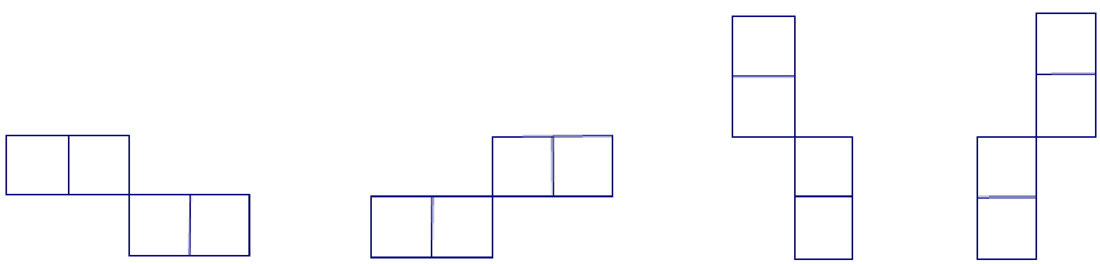




Do đó, để lát được hình chữ nhật m x n thì m.n phải chia hết cho 12. Nếu ít nhất một trong hai số m, n chia hết cho 4 thì có thể lát được. Thật vậy, giả sử được m chia hết cho 4. Ta có thể viết n dưới dạng: $n = 3a + 4b$, do đó có thể lát được.

Xét trường hợp $m \times n$ đều không chia hết cho 4. Ta chứng minh trường hợp này không thể lát được. Giả sử ngược lại, khi đó m , n đều chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4. Ta tạo bất biến như sau: Xét ô (p ; q). Nếu chỉ một trong hai tọa độ p , q chia hết cho 4 thì điền số 1 vào ô đó. Nếu cả hai tọa độ p, q chia hết cho 4 thì điền số 2. Các ô còn lại điền số 0. Với cách điền số như vậy ta thu được bất biến là tổng các số trong Hình 1 và tổng các số trong Hình 2 đều là số lẻ. Do m, n chẵn nên tổng các số trong toàn bộ hình chữ nhật m $\times$ n là số chẵn. Để lát được thì tổng số Hình 1 và Hình 2 được sử dụng phải là số chẵn. Khi đó, m $\times$ n chia hết cho 24, vô lý !.

Bài toán 13. (VMO 2006).*Xét bảng ô vuông*$m \times n$ $(m, n \geq 3)$. *Thực hiện trò chơi sau: mỗi lần đặt 4 viên bi vào 4 ô của bảng, mỗi ô một viên bi, sao cho 4 ô đó tạo thành một trong các hình dưới đây:*



Hỏi sau một số lần ta có thể nhận được bảng mà số bi trong các ô bằng nhau được không nếu:

a) m = 2004, n = 2006 ?

b) m = 2005, n = 2006 ?

Bài toán 14. *(VMO 1993)Cho đa giác lồi* $A_1A_2...A_{1993}$ *mà tại mỗi đỉnh đã ghi một dâu cộng (+) hoặc một dấu trừ (-) sao cho trong 1993 dấu đó có cả dấu (+) và (-)*

Thực hiện việc thay dấu như sau: mỗi lần, thay dấu đồng thời tại tất cả các đỉnh $A_i(i = 1, 2, .., 1993)$ *của đa giác theo quy tắc:*

- *Nếu dấu tại* A_i *và* A_{i+1} *là như nhau thì dấu tại* A_i *được thay bởi dấu (+)*

• *Nếu dấu tại A_i và A_{i+1} là khác nhau thì dấu tại A_i được thay bởi dấu (-) Quy ước coi A_{1994} là A_1.*

Chứng minh rằng tồn tại số nguyên $k \geq 2$ sao cho sau khi thực hiện liên tục k lần phép thay dấu nói trên, ta được đa giác $A_1A_2...A_{1993}$ mà dấu tại mỗi đỉnh $A_i(i = 1, 2, .., 1993)$ trùng với dấu tại chính đỉnh đó sau lần thay dấu thứ nhất.

Bài toán 15. *(Liên bang Nga 1998) Trên bảng cho một số nguyên, người ta ghi nhớ chữ số cuối cùng của số này, sau đó xóa đi và cộng thêm vào với số còn lại trên bảng 5 lần chữ số mới xóa. Giả sử ban đầu ghi số hỏi sau một số lần thực hiện có thể thu được số được hay không?*

3 Bất biến trong các bài toán Đại số -Giải tích:

Các đại lượng không đổi của các số hạng trong một dãy số có tính chất nào đó cần phát hiện . Dựa vào các đại lượng này mà ta có thể tìm được công thức tổng quát của dãy số, chứng minh được các tính chất cũng như tìm được giới hạn , xét tính hội tụ của dãy số .Đây cũng được tạm gọi là tính bất biến. Sau đây là một số bài toán :

Bài toán 16. *(German MO 1996) Từ điểm (1 , 1) di chuyển 1 hòn sỏi trên mặt phẳng tọa độ thỏa các điều kiện sau : (a) Từ điểm (a , b) có thể đến (2a , b) hoặc (a , 2b). (b) Từ điểm (a , b) có thể đến (a – b , b) nếu a > b hoặc (a , b – a) nếu a < b. Với những số nguyên dương x và y như thế nào thì hòn sỏi có thể đến điểm (x , y)?*

Lời giải. Ta sẽ chứng minh rằng điều kiện cần và đủ của bài toán này là (x , y) = 2^5 với s là số nguyên không âm, trong đó ký hiệu (x , y) là ước chung lớn nhất của hai số tự nhiên x và y. Thật vậy: Điều kiện cần : vì (p , q) = (p , q – p) ta thấy rằng số ước chung lẻ là bất biến sau hai phép biến đổi. Ban đầu số lượng này là 1, số dư là như nhau nên (x , y) là một lũy thừa của 2. Điều kiện đủ : giả sử (x , y) = 2^5 . Trong tất cả các cặp (p , q) có thể đến được (x , y) ta chọn một cặp sao cho p + q nhỏ nhất. Nếu p hoặc q là số chẵn thì một trong các điểm $\left(\frac{p}{2}, q\right)$ hoặc $\left(p, \frac{q}{2}\right)$ cũng thỏa mãn , mâu thuẫn với giả thiết về tính nhỏ nhất của cặp p và q. Nếu p > q thì cũng có thể nhận được từ điểm $\left(\frac{p+q}{2}, q\right)$ mâu thuẫn với giả thiết về tính nhỏ nhất của tổng p + q. Tương tự với trường hợp p < q ,mâu thuẫn. Do đó p = q mà (p , q) là lũy thừa của 2. Từ đó ta suy ra p = q = 1, nên (x , y) là điểm thỏa mãn. Điều kiện được chứng minh xong.

Bài toán 17. *Cho dãy số thỏa:* $\begin{cases} a_1 = 3, b_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^2 + 2b_n^2, b_{n+1} = a_nb_n \end{cases}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Chứng minh rằng a_n, b_n là các số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải. Ta chứng minh bằng quy nạp rằng $a_n^2 - 2b_n^2 = 1$ .Thật vậy: Với n = 1, ta có: $a_1^2 - 2b_1^2 = 3^2 - 2.2^2 = 1$

Với n = k, giả sử: $a_k^2 - 2b_k^2 = 1$

Với n = k+1, ta có: $a_{k+1}^2 - 2b_{k+1}^2 = (a_k^2 + 2b_k^2)^2 - 2(2a_kb_k)^2 = (a_k^2 - 2b_k^2)^2 = 1$

Vậy $a_n^2 - 2b_n^2 = 1, \ \forall n \in$. Gọi d là UCLN của a_n, b_n thì ta suy ra d cũng là ước số của 1 do đó $d = 1$.

Cho nên a_n, b_n là các số nguyên tố cùng nhau.

Bài toán 18. *Cho dãy số* $\{u_n\}$: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 8 \\ u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2} > 0, n \geq 3, S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \text{arccot}(u_i^2) \end{cases}$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Lời giải. Trước hết ta chứng minh $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = 4, \ \forall n \geq 2$. Thật vậy ta có:

$$\begin{aligned}
&u_n(4u_{n-1}) = u_{n-1}(4u_n) \Rightarrow u_n(u_n + u_{n-2}) = u_{n-1}(u_{n+1} + u_{n-1}) \\
&\Rightarrow u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = u_{n-1}^2 - u_n u_{n-2} \Rightarrow u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = ... = u_2^2 - u_1u_3 = 4 \\
&\Rightarrow \text{arc}\cot u_n^2 = \text{arc}\cot\left[u_n\left(\tfrac{4u_n}{4}\right)\right] = \text{arc}\cot\tfrac{u_n(u_{n+1}+u_{n-1})}{u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1}} \\
&= \text{arc}\cot\frac{\frac{u_{n+1}}{u_n}.\frac{u_n}{u_{n-2}}+1}{\frac{u_n}{u_{n-1}} - \frac{u_{n+1}}{u_n}} = \text{arc}\cot\tfrac{u_{n+1}}{u_n} - \text{arc}\cot\tfrac{u_n}{u_{n-2}} \Rightarrow S_n = \text{arc}\cot\tfrac{u_{n+1}}{u_n}
\end{aligned}$$

Hơn nữa $u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2} \Rightarrow 1 = \frac{4u_{n-1}}{u_n} - \frac{u_{n-2}}{u_{n-1}}.\frac{u_{n-1}}{u_n}$

Lại có $\begin{cases} 0 < \frac{u_{n-1}}{u_n} < 1 \\ \frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{u_{n-1}}{u_n} \end{cases} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}}$

Chuyển qua giới hạn ta được:

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \text{arc}\cot(2+\sqrt{3}) = \frac{\pi}{12}$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi}{12}$

Bài toán 19. *Chứng minh rằng phương trình sau có vô hạn nghiệm nguyên dương* $\frac{x^2+y^2}{xy-1} = 5$.

Lời giải. Đây là một bài toán Số học tuy nhiên ở đây ta sẽ sử dụng tính Bất biến trong dãy số để chứng minh phương vô số nghiệm nguyên dương. Ta xét dãy số (u_n) xác định bởi: $u_0 = 1, u_1 = 1, u_{n+1} = 5u_n - u_{n-1}, \ \forall n \geq 1$.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\tfrac{u_{n+1}+u_{n-1}}{u_n} = \tfrac{u_{n+2}+u_n}{u_{n+1}} = 5 \Leftrightarrow (u_{n+1}+u_{n-1})u_{n+1} = (u_{n+2}+u_n)u_n \\
&\Leftrightarrow u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 \Rightarrow u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = u_3u_1 - u_2^2 = 5 \\
&\Leftrightarrow (5u_n - u_{n-1})u_{n-1} - u_n^2 = 5 \Leftrightarrow u_n^2 + u_{n-1}^2 - 5u_nu_{n-1} + 5 = 0 \\
&\Leftrightarrow \tfrac{u_n^2+u_{n-1}^2}{u_nu_{n-1}-1} = 5.
\end{aligned}$$

Vậy (x, y) = (u_{n-1}, u_n) là nghiệm của phương trình đã cho với mọi $\forall n \geq 1$. Cũng với cách khai thác tính bất biến trong dãy số truy hồi bậc 2 như trên chúng ta sẽ có được một cách giải khác rất độc đáo cho các bài toán số học quen thuộc sau đây :

Bài toán 20. *Chứng minh rằng phương trình sau có vô hạn nghiệm nguyên dương :* $x^2+y^2+z^2 = 3xyz$.

Lời giải. Chọn z = 1 ta được: $x^2 + y^2 + 1 = 3xy$.

Xét dãy số (u_n) được xác định như sau :

$u_0 = 0, u_1 = 1, u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}, \ \forall n \geq 1$.

Ta có $u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = u_3u_1 - u_2^2 = -1$

Suy ra : $\begin{array}{l}(3u_n - u_{n-1})u_{n-1} - u_n^2 = -1 \\ \Leftrightarrow u_n^2 + u_{n-1}^2 + 1 = 3u_nu_{n-1}\end{array}$

Vậy $(x, y, z) = (u_{n-1}, u_n, 1)$ là nghiệm của phương trình đã cho với mọi $\forall n \geq 1$.

Bài toán 21. *Chứng minh rằng phương trình sau có vô hạn nghiệm nguyên dương :* $x^2+y^2+z^2 = xyz$.

Lời giải. Đặt $x = 3x_1, y = 3y_1, z = 3z_1$ ta có $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 3x_1y_1z_1$.

Xét dãy số (u_n) được xác định như sau :

$$u_0 = 1, u_1 = 1, u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}, \ \ \forall n \geq 1.$$

Theo bài toán 4 thì $(x_1, y_1, z_1) = (u_{n-1}, u_n, 1)$ là nghiệm của phương trình

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 3x_1y_1z_1.$$

Do đó $(x, y, z) = (3u_{n-1}, 3u_n, 3)$ là nghiệm của phương trình đã cho với mọi $\forall n \geq 1$.

Bài toán 22. *Chứng minh rằng phương trình sau có vô hạn nghiệm nguyên dương:* $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 4xyzt$.

Lời giải. Chọn z = t = 1 ta có $x^2 + y^2 + 2 = 4xy$.

Xét dãy số (u_n) được xác định như sau:

$$u_0 = 1, u_1 = 1, u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1}, \ \ \forall n \geq 1.$$

Ta có $u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = u_3u_1 - u_2^2 = -2$

Suy ra

$(4u_n - u_{n-1})u_{n-1} - u_n^2 = -2$

$\Leftrightarrow u_n^2 + u_{n-1}^2 + 2 = 4u_nu_{n-1}$

Vậy $(x, y, z, t) = (u_{n-1}, u_n, 1, 1)$ là nghiệm của phương trình đã cho với mọi $\forall n \geq 1$.

Bài toán 23. *Chứng minh rằng phương trình sau có vô hạn nghiệm nguyên dương :* $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = xyzt$.

Bài toán 24. *Chứng minh rằng phương trình sau có vô hạn nghiệm nguyên dương :* $x^2 + y^2 = 4(x + 1)(y - 1)$

Bài toán 25. *Chứng minh rằng phương trình sau có vô hạn nghiệm nguyên dương :* $\frac{x+2}{y} + \frac{3y+4}{x} = 10$

Bài toán 26. (Bulgari MO) *Chứng minh rằng với mọi $n \geq 3$ phương trình sau có ít nhất một nghiệm nguyên dương (x, y) thỏa mãn x, y đều lẻ và* $7x^2 + y^2 = 2^n$

Bài toán 27. (VMO 2010) *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n phương trình* $x^2 + 15y^2 = 4^n$ *có ít nhất n nghiệm tự nhiên.*

Bài toán 28. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n phương trình sau có ít nhất một nghiệm nguyên dương thỏa mãn* $(x, y, z) = 1$*:*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 7^{2^n}.$$

Bài toán 29. *Trên bảng cho 4 số 3,4,5,6. Mỗi lần xóa đi 2 số x, y bất kỳ trong 4 số và thay vào bằng hai số* $x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$ *và* $x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$*. Hỏi sau một số lần thực hiện trên bảng có thể xuất hiện một số nhỏ hơn 1 được không?*

4 Các bài toán khác :

Bài toán 30. *(Rusian MO 1995) Cho ba đống sỏi khác nhau. Sisyphus thực hiện di chuyển 1 viên sỏi từ 1 trong ba đống sỏi sang 1 trong 2 đống sỏi còn lại. Mỗi lần chuyển sỏi, Sisyphus nhận được từ Zeus một số tiền bằng hiệu số giữa số sỏi của đống sỏi lấy đi và đống sỏi nhận thêm trước khi di chuyển. Nếu số chênh lệch này âm thì Sisyphus cũng phải trả cho Zeus số tiền chênh lệch đó. Sau một số bước thực hiện thì số sỏi mỗi đống sẽ trở về như ban đầu. Hỏi khi đó số tiền tối đa mà Sisyphus nhận được là bao nhiêu?*

Lời giải. Ta chứng minh tổng sau là bất biến $\frac{a(a-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2} + \frac{c(c-1)}{2} + s$

Với a, b, c là số sỏi mỗi đống ban đầu và s là số tiền Sisyphus nhận được tại một thời điểm nào đó. Thật vậy ta chuyển 1 viên sỏi từ đống sỏi có a viên sỏi sang đống sỏi có b viên sỏi. Khi đó số tiền Sisyphus nhận được (hoặc mất đi) là a – b. Ta có :

$\frac{(a-1)(a-2)}{2} + \frac{b(b+1)}{2} + \frac{c(c-1)}{2} + s + a - b$

$= \frac{a(a-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2} + \frac{c(c-1)}{2} + s$

Do đó đến khi số sỏi trở về như ban đầu thì số tiền Sisyphus nhận được bằng số tiền ban đầu. Mà ban đầu Sisyphus không có tiền dó đó đến thời điểm này Sisyphus cũng không có tiền.

Bài toán 31. *(IMO Shortlisted 1994, Thụy Điển) Có 1994 cô gái ngồi quanh một bàn tròn, họ chơi chung một cỗ bài gồm n lá. Ban đầu, một cô giữ tất cả các lá bài. Cứ mỗi nước đi, nếu có ít nhất một cô gái giữ tối thiểu 2 lá bài, thì một trong các cô gái này phải chuyển 1 lá cho một trong hai cô gái bên cạnh cô ấy. Trò chơi kết thúc khi và chỉ khi mỗi cô gái chỉ giữ nhiều nhất 1 lá bài. a) Chứng minh rằng nếu* $n \geq 1994$ *thì trò chơi không thể nào kết thúc được. b) Chứng minh rằng nếu* $n < 1994$ *thì trò chơi bắt buộc phải kết thúc.*

Lời giải. a) Nếu n > 1994 theo nguyên tắc Đirichlet có ít nhất 1 cô gái giữ 2 lá bài, vì thế trò chơi không thể nào kết thúc được. Giả sử n = 1994 . Gọi các cô gái là $G_1, G_2, ..., G_{1994}$ và giả sử ban đầu G_1 giữa tất cả các lá bài. Ta định nghĩa giá trị tạm thời của một lá bài là i nếu G_i đang giữ nó, $1 \leq n \leq 1994$. Gọi S là tổng các giá trị tạm thời của lá bài. Ban đầu S = 1994. Nếu một cô gái khác với G_1 hoặc G_{1994} chuyển lá bài thì S không thay đổi. Nếu G_1 hoặc G_{1994} chuyển lá bài thì S sẽ tăng lên hoặc giảm đi 1994. Suy ra S = 1994h, với h lá số nguyên nào đó. Khi trò chơi kết thúc mỗi cô gái sẽ giữ đúng một là bài, do đó lúc này S = 997.1995. Nhưng như thế thì phải có 2h = 1995, điều này là không thể. Tóm lại nếu $n \geq 1994$ thì trò chơi không thể nào kết thúc được .

b) Khi một cô này chuyển 1 là bài cho cô kia ở lần thứ nhất, cả hai sẽ đánh dấu tên mình lên đó. Lần sau đó, nếu một trong hai người này phải chuyển bài, cô ta sẽ đưa đúng lá được đánh dấu đó cho người kia. Nếu làm như thế, lá bài được đánh dấu sẽ kẹt lại giữa hai cô gái kề nhau nói trên. Nếu n $<$ 1994, sẽ có 2 cô gái kề nhau không bao giờ chuyển lá bài cho nhau. Bây giờ, giả sử khi làm thế mà trò chơi không kết thúc được, thì phải tồn tại ít nhất 1 cô gái chuyển bài đến vô hạn lần. Từ đó suy ra có một cô chuyển bài đến vô hạn lần, trong khi một cô kề bên cô ta chỉ chuyển hữu hạn lần mà thôi. Khi cô kề bên nay thực sự không chuyển nữa (vì chỉ chuyển hữu hạn lần) thì đống bài của cô ấy vẫn tiếp tục tăng lên. Điều này rõ ràng mâu thuẫn.

Bài toán 32. *(Bungary MO 1999) Ba đống sỏi có 51, 49 và 5 viên. Ta thực hiện một trong hai nước đi như sau. Một nước đi là dồn hai đống tùy ý thành một đống. Nước đi khác là chọn đống có số chẵn viên sỏi để chia thành hai đống bằng nhau. Hỏi có thể thực hiện một dãy các nước đi như thế để chia ba đống sỏi thành 105 đống mà mỗi đống chỉ có một viên sỏi hay không?*

Lời giải. Ban đầu số sỏi trong ba đống là 51, 49 và 5 viên đều là số lẻ nên bước đi đầu tiên là phải dồn hai đống lại.

Trường hợp 1 : Dồn hai đống có 5 và 49 viên ta có hai đống là 51 và 54 viên, mỗi đống đều là bội của 3. Bước thứ hai ta chia đống có 54 viên thành 2 dống có 27 viên. Bây giờ số sỏi trong cả ba đống là 51, 27, 27 cùng chia hết cho 3. Vì cả ba đống có số lẻ viên nên bước thứ ba ta lại phải gộp hai đống 27 và 51 viên thành đống 78 viên. Vì hai số 27 và 51 đều chia hết cho 3 nên tổng (= 78) của chúng cũng chia hết cho 3. Tức là khi thực hiện các nước đi luân phiên thì số sỏi trong mỗi đống luôn là bội của 3. Đây chính là bất biến của trường hợp này. Thật vậy khi gộp hai đống sỏi có số sỏi chia hết cho 3 thì được một đống sỏi có số sỏi chia hết cho 3 và nếu chia một đống sỏi (là gộp của hai đống có số sỏi lẻ cùng chia hết cho 3) có số chẵn viên sỏi chia hết cho 3 thành hai phần bằng nhau thì số sỏi trong mỗi phần vẫn chia hết cho 3. Do đó số sỏi trong mỗi đống vẫn chia hết cho 3 và nhiều nhất có thể được là 35 đống, mỗi đống 3 viên.

Trường hợp 2 : Bước đầu tiên dồn hai đống có 5 và 51 viên, ta được hai đống có 49 và 56 viên, cả hai đều là bội của 7. Khi thực hiện các bước đi luân phiên số sỏi trong mỗi đống nhận được luôn là bội của 7. Do đó số đống với số sỏi nhỏ nhất chỉ có thể là 15 đống mỗi đống 7 viên.

Trường hợp 3 : Bước đầu tiên dồn hai đống có 49 và 51 viên, ta được hai đống là 5 và 100 viên, số sỏi trong mỗi đống đều là bội của 5. Khi thực hiện một trong hai nước đi, số sỏi trong mỗi đống nhận được luôn là bội của 5. Do đó số đống với số sỏi nhỏ nhất là 21 đống, mỗi đống 5 viên.

Kết luận : Không thể chia ba đống sỏi thành 105 đống mỗi đống 1 viên sỏi được.

Bài toán 33. *(Anh 2002) Một trò chơi dành cho hai người bắt đầu với một cột tiền n đồng xu: Người chơi thứ nhất chia cột tiền đã có thành hai cột tiền tùy ý. Người chơi thứ hai chọn một cột tiền (từ những cột tiền đã có trên bàn) và lại chia nó ra thfnh hai cột tiền tùy ý. Tiếp tục như vậy, người thắng cuộc là người chơi đến bước đi làm cho tất cả các cột tiền chỉ có một hoặc hai đồng tiền. Với giá trị ban đầu nào của n thì người đầu tiên sẽ thắng, giả sử hai người tài giỏi như nhau?*

Lời giải. Người chơi thứ nhất thắng khi và chỉ khi n = 3 hoặc n chẵn. Người chơi thứ hai thắng với mọi n lẻ và $n > 3$. Ta có thể kiểm tra kết luận trên đến n = 6 và sau đó chứng minh bằng quy nạp.

1) Nếu n > 6 là chẵn, người thứ nhất tạo ra cột cỡ 1 (có 1 đồng xu) và cột cỡ n – 1 (có n – 1 đồng xu). Vì n – 1 là lẻ nên người thứ nhất sẽ thắng theo giả thiết quy nạp (vì người chơi thứ nhất trở thành người chơi thứ hai và ở vị trí xuất phát có số lẻ đồng xu).

2) Nếu là số lẻ, người chơi thứ nhất tạo ra một cột có số chẵn đồng xu và một cột có số lẻ đồng xu. Người thứ hai lại chia cột có số chẵn đồng xu thành hai cột có số lẻ đồng xu. Tiếp tục như vậy, người chơi thứ hai luôn luôn đáp lại các bước đi của người chơi thứ nhất và đưa người thứ nhất vào tình thế chỉ có số cột với số lẻ đồng xu. Khi các cột tiến tới cỡ 1 (chỉ còn 1 đồng xu), chúng không còn liên quan đến bước chơi. Vấn đề nguy kịch cho người chơi là có cỡ 3 ở một cột tiền: chỉ có một cách duy nhất để người thứ hai có thể thua là nếu người chơi thứ hai tạo cho người chơi thứ nhất một cột duy nhất cỡ 3 và rất nhiều cột cỡ 1. Nhưng trong trường hợp như vậy người chơi thứ nhất phải tạo ra hoặc là một cột duy nhất hai đồng xu và một cột 3 đồng xu, hoặc là một cột duy nhất 4 đồng xu. Dù trong trường hợp nào, người chơi thứ hai thắng ở ngay bước đi tiếp theo bằng cách làm giảm đi: trong trường hợp thứ nhất, cột 3 đồng xu được chia ra thành cột 1 đồng xu và cột 2 đồng xu và trong trường hợp thứ hai, người thứ hai chia cột 4 đồng xu thành hai cột mỗi cột 2 đồng xu. Tóm lại chiến thuật thắng của người thứ hai là luôn luôn tạo ra toàn là những cột tiền lẻ trừ khi dẫn đến tình thế tất cả các cột chỉ một đồng xu và một cột duy nhất có 3 đồng xu, trong trường hợp như vậy thì chiến thuật thắng được thực hiện như mô tả tả ở trên đây.

Bài toán 34. (Tạp chí Kvant) *Cho dãy số 1, 0, 1, 0, 1,... Từ số hạng thứ 7 mỗi số bằng chữ số tận cùng của tổng 6 số hạng trước đó. Chứng minh rằng dãy số không chứa 6 số hạng liên tiếp 0, 1, 0, 1, 0, 1.*

Lời giải. Ta phát biểu lại bài toán như sau :

Một bộ 6 số $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ được biến đổi thành bộ $(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ với x_7 là chữ số tận cùng của tổng $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$. Hỏi có thể nhận được bộ (0, 1, 0, 1, 0, 1) từ bộ (1, 0, 1, 0, 1, 0) bằng cách áp dụng phép biến đổi trên qua hữu hạn bước thực hiện không?

Ta sẽ chứng minh rằng điều đó là không thể bằng cách thiết lập một bất biến không đổi qua phép biến đổi trên. Thật vậy gọi s $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ là chữ số tận cùng của tổng $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 10x_5 + 12x_6$.

Vì s$(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ - s $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$

$$= 2x_2 + 4x_3 + ... + 10x_6 + 12\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6\right) - 2x_1 - 4x_2 - ... - 12x_6$$

$$\equiv 10\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6\right) \equiv 0 (\bmod 10)$$

Từ đó cho thấy s $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ bất biến. Vì s(1, 0, 1, 0, 1, 0) = 18 và s(0, 1, 0, 1, 0, 1) = 24 nên không thể xuất hiện bộ (0, 1, 0, 1, 0, 1) trong dãy số.

5 Một số bài toán luyện tập về vấn đề này:

Bài toán 35. *Chứng minh rằng một hình chữ nhật* 4×11 *không thể phủ được bởi các mảnh chữ L* 3×2 *như hình dưới đây :*

Bài toán 36. *(IMO Shortlist 1998, Iran) Cho một bảng kích thước m x n. Một bộ bài gồm mn quân bài, mỗi quân có hai mặt trắng và đen. Ta thực hiện như sau : đặt tất cả các quân bài vào bảng, để mặt trắng ngửa lên ở tất cả các ô ngoại trừ duy nhất một ô ở góc bảng để ngửa mặt đen. Mỗi bước đi ta lấy một quân có mặt đen ra khỏi bảng đồng thời đổi mặt tất cả các quân nằm trong các ô chung đỉnh với ô vừa bị loại bỏ. Hãy xác định tất cả các cặp (m, n) để tất cả các quân bài đều bị loại bỏ khỏi bảng.*

Bài toán 37. *(IMO 1993) Trên một bàn cờ có vô hạn ô người ta quy ước một trò chơi như sau : Đầu tiên, mảnh được sắp xếp thành một khối n x n các hình vuông kề nhau, mỗi mảnh đặt trên một hình vuông. Một lần di chuyển (một nước đi) tức là một lần nhảy theo chiều ngang hoặc chiều đứng băng qua hình vuông chiếm chỗ kề nó để đến một hình vuông không bị chiếm chỗ tiếp liền theo sau. Mảnh nào đã bị nhảy qua cũng coi như đã dời chỗ. Trò chơi kết thúc khi chỉ còn một mảnh duy nhất trên bàn cờ. Tìm những giá trị n để trò chơi kết thúc.*

Bài toán 38. *(Anh 2000) Alice chơi một trò chơi một mình trên một bàn cờ 20 X 20. Khởi đầu Alice trải trên bàn cờ trong mỗi ô một đồng xu gồm các dạng sau đây: 100 penny, 100 nickel, 100 dime và 100 quarter. Alice chọn 59 đồng xu bất kỳ và lấy ra khỏi bàn cờ. Sau đó mỗi lần Alice lấy một đồng xu theo nguyên tắc sau đây:*

• *Một đồng penny có thể lấy đi được nếu có 4 hình vuông (trên, dưới , phải , trái) bỏ trống. Những ô ở ngoài bàn cờ không được tính là 4 ô trống theo nguyên tắc này. Ví dụ những ô ở góc bàn cờ hoặc ở bên cạnh bàn cờ, những ô này thậm chí có 3 ô bên cạnh trống thì đồng xu tại ô này cũng không được tính theo quy tắc.*

• *Một đồng Nikel có thể lấy đi nếu tồn tại ít nhất 3 ô trống bên cạnh (những ô ngoài bàn cờ không được tính là ô trống).*

• *Một đồng Dime có thể lấy đi nếu như có ít nhất 2 ô bên cạnh trống (những ô ngoài bàn cờ cũng không tính là ô trống).*

• *Một đồng Quarter có thể lấy đi chỉ khi có ít nhất 1 ô trống bên cạnh (những ô ngoài bàn cờ cũng không tính là ô trống). Alice thắng nếu như Alice lấy được tất cả đồng xu trên bàn cờ. Chứng minh rằng không có khả năng thắng của Alice.*

Tài liệu tham khảo

[1] T. Andreescu, R. Gelca, *Mathematical Olympiad Challenges,*, Birkhauser, 2000.

[2] Nguyễn Hữu Điển, *Giải Toán bằng phương pháp Đại lượng Bất biến*, NXB Giáo dục, 2005.

[3] Hoàng Ngọc Minh, *Một số phương pháp xây dựng nghiệm cho phương trình Diophante*, Tài liệu tập huấn giáo viên Chuyên Toán, Hà Nội, 2011.

[4] Tạ Duy Phượng, *Lý thuyết trò chơi. Kỷ yếu hội nghị*, Nam Định, 2010.

[5] T. Andresscu, R. Gelca, *Putnam and Beyond*, Springer, 2007.

MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN DÃY SỐ CÓ QUY LUẬT

Lê Thị Thanh Hằng, Nhà XBGD Việt Nam

Trong chương trình số học, ngoài các bài tập tính toán đơn giản dựa trên các quy tắc, tính chất cơ bản của các phép tính mà các học sinh được rèn luyện thông qua các bài tập trong SGK và SBT, còn có một dạng bài tập tính toán trên các dãy số, dãy phân số có quy luật mà dựa vào những quy luật tính toán đó, học sinh có thể giải toán một cách sáng tạo, lôgic, đem lại nhiều hứng thú say mê trong học học tập, phát triển tư duy, trí tuệ, phát huy năng lực sáng tạo, năng khiếu toán học của học sinh.

Trong chuyên đề này, đề cập một số dạng toán tính toán trên các dãy số, dãy phân số có quy luật và một vài trải nghiệm định hướng tư duy hoặc phát triển tư duy học sinh nhằm bồi dưỡng năng lực học toán cho các em học sinh có khả năng học giỏi toán.

1 Tìm số các số hạng của một dãy số có quy luật

Với dạng bài tập về dãy các số, dãy các phân số có quy luật, ta thường dùng các phương pháp sau:

- Phương pháp phân tích số hạng tổng quát rồi khử liên tiếp để tính tổng các dãy số, dãy phân số có quy luật, giải toán tìm x,và các bài toán có liên quan.

- Phương pháp làm trội để chứng minh bất đẳng thức và các bài toán liên quan. Với phương pháp này ta thường dùng tính chất của bất đẳng thức để đưa một vế của bất đẳng thức về dạng tính được tổng hữu hạn hoặc tích hữu hạn.

Để tính tổng

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Ta biểu diễn $a_i\left(i = \overline{i,n}\right)$, , qua hiệu hai số hạng liên tiếp của một dãy số khác. Chẳng hạn

$$a_1 = b_1 - b_2; a_2 = b_2 - b_3; \ldots ; a_n = b_{n-1} - b_n$$

$$\Rightarrow S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = b_1 - b_n$$

Để tính tích hữu hạn $P_n = a_1.a_2.a_3 \ldots a_n$ ta biến đổi các a_k về thương của hai số hạng liên tiếp nhau :

$$a_1 = \frac{b_1}{b_2};\ \ a_2 = \frac{b_2}{b_3}; \ldots ; a_n = \frac{b_{n-1}}{b_n}$$

$$\Rightarrow P_n = a_1.a_2, a_3. \ldots a_n = \frac{b_1}{b_2}.\frac{b_2}{b_3} \ldots \frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{b_1}{b_n}$$

Dưới đây là một số dạng toán về dãy phân số có quy luật đồng thời cũng nêu một số các dãy số có quy luật với cách tính số hạng tổng quát.

Bài toán 1. Tìm n sao cho tổng của $2n$ số hạng

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}+\frac{1}{2n(2n+2)}=\frac{14651}{19800}.$$

Giải. Đặt

$$A=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}+\frac{1}{2n(2n+2)}$$

Ta có $\dfrac{2}{k(k+2)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}$ với $k=\overline{1;n}$

$$2A=\Big(\frac{2}{1.3}+\frac{2}{3.5}+\cdots+\frac{2}{(2n-1).(2n+1)}\Big)+\Big(\frac{2}{2.4}+\frac{2}{4.6}+\cdots+\frac{2}{2n(2n+2)}\Big)$$
$$2A=\Big(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\Big)+\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\Big)$$
$$2A=\Big(1-\frac{1}{2n+1}\Big)+\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}\Big)=\frac{3}{2}\Big(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\Big)$$
$$A=\frac{14651}{19800}\Rightarrow\frac{3}{2}-\Big(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\Big)=\frac{14651}{19800}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}=\frac{199}{9900}$$
$$\Rightarrow\frac{4n+3}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{199}{9900}.$$

Do

$$(4n+3;2(2n+1))=(4n+3;4n+2)=1$$

và

$$(4n+3;2(2n+2))=(4n+3;4n+4)=1$$

$$\Rightarrow\frac{4n+3}{(2n+1)(2n+2)}$$

là phân số tối giản với n là số tự nhiên bất kỳ.

$$\Rightarrow\begin{cases}4n+3=199\\(2n+1)(2n+2)=9900\end{cases}\quad\Rightarrow n=49.$$

Bài toán 2. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn

$$2.2^2+3.2^3+4.2^4+5.2^5+\cdots+n.2^n=2^{n+10}$$

Giải. Ta có

$$2.2^2+3.2^3+4.2^4+5.2^5+\cdots+n.2^n=2^{n+10}$$

hay

$$1.2 + 2.2^2 + 3.2^2 + 4.2^4 + 5.2^5 + \cdots + n.2^n = 2^{n+10} + 2.$$

Vế trái có thể biến đổi như sau :

$$\begin{aligned}
2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n &= 2^{n+1} - 2 \\
2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n &= 2^{n+1} - 2^2 \\
2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n &= 2^{n+1} - 2^3 \\
\cdots \\
2^n &= 2^{n+1} - 2^n
\end{aligned}$$

nên

$$\begin{aligned}
&1.2 + 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + 5.2^5 + \cdots + n.2^n = n.2^{n+1} - (2^{n+1} - 2) \\
&= 2^{n+1}(n-1) + 2 \\
\Rightarrow &2^{n+1}(n-1) + 2 = 2^{n+10} + 2 \\
\Rightarrow &n - 1 = \frac{2^{n+10}}{2^{n+1}} = 2^9 \Rightarrow n = 2^9 + 1 = 513
\end{aligned}$$

Bài tập áp dụng

Bài toán 3. Cho

$$Q = \frac{1}{\sqrt{b_2} - \sqrt{b_1}} - \frac{1}{\sqrt{b_3} - \sqrt{b_2}} + \frac{1}{\sqrt{b_4} - \sqrt{b_3}} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{b_n} - \sqrt{b_{n-1}}}$$

Trong đó $b_1; b_2; b_3; b_4; \ldots; b_{n-1}; b_n$; là các số hạng của một cấp số cộng (dãy số cách đều).

a) Tính Q.

b) Biết công sai (khoảng cách giữa hai số hạng liên tiếp nhau) là 17, số hạng thứ nhất là bội của 17 trong khoảng từ 200 đến 500, hãy tính n sao cho $Q = 1$ hoặc $Q = -1$.

Giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{1}{\sqrt{b_2} - \sqrt{b_1}} - \frac{1}{\sqrt{b_3} - \sqrt{b_2}} + \frac{1}{\sqrt{b_4} - \sqrt{b_3}} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{b_n} - \sqrt{b_{n-1}}} \\
\Rightarrow Q &= \frac{\sqrt{b_2} + \sqrt{b_1}}{b_2 - b_1} - \frac{\sqrt{b_3} + \sqrt{b_2}}{b_3 - b_2} + \frac{\sqrt{b_4} + \sqrt{b_3}}{b_4 - b_3} - \cdots + (-1)^n \frac{\sqrt{b_n} + \sqrt{b_{n-1}}}{b_n - b_{n-1}} \\
\Rightarrow Q &= \frac{\sqrt{b_2} + \sqrt{b_1} - \sqrt{b_3} - \sqrt{b_2} + \sqrt{b_4} + \sqrt{b_3} - \cdots + (-1)^n(\sqrt{b_n} + \sqrt{b_{n-1}})}{d} \\
&\text{với } d = b_k - b_{k-1} \\
\Rightarrow Q &= \frac{\sqrt{b_{n-1}} + \sqrt{b_1}}{d} \text{ hoặc } Q = \frac{\sqrt{b_1} - \sqrt{b_{n-1}}}{d}
\end{aligned}$$

tùy theo n chẵn hoặc n lẻ.

b) Do $d = 17, b_1$ là bội của 17 trong khoảng từ 200 đến 500. Tính n sao cho $Q = 1$ hoặc $Q = -1$.

Bài toán 4. Viết tất cả các phân số sau thành dãy.

$$\frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{1}{2}; \frac{3}{1}; \frac{2}{2}; \frac{1}{3}; \frac{4}{1}; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \ldots$$

a) Hãy nêu quy luật viết của dãy và viết tiếp năm phân số nữa theo quy luật ấy.

b) Phân số $\dfrac{50}{31}$ là số hạng thứ mấy của dãy

Giải.

a) Quy luật của dãy là : Các phân số theo nhóm có tổng của TS và MS lần lượt là các số tự nhiên liên tiếp.

$$\frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{1}{2}; \frac{3}{1}; \frac{2}{2}; \frac{1}{3}; \frac{4}{1}; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \frac{5}{1}; \frac{4}{2}; \frac{3}{3}; \frac{2}{4}; \frac{1}{5}; \ldots$$

5 phân số tiếp theo của dãy là :

$$\frac{5}{1}; \frac{4}{2}; \frac{3}{3}; \frac{2}{4}; \frac{1}{5}$$

b) Phân số có tổng TS và MS là 81. Ta nhận thấy nếu tổng TS và MS là k thì số các phân số viết được là $(k-1)$. Số các phân số viết từ đầu đến khi có tổng TS và MS là 80 là :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 79 = \frac{(1+79).79}{2} = 40.79 = 3160$$

Các phân số có tổng TS và MS là 81 được bắt đầu như sau :

Như vậy đến phân số có 31 phân số được viết thêm nữa. Vậy phân số $\dfrac{50}{31}$ là số hạng thứ

$$(3160 + 31) = 3191$$

của dãy.

Bài toán 5. Cho

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^3}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{2^{2^{2009}}}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2^{2^n}}\right).$$

Tìm n?

2 Các dạng toán liên quan đến bất đẳng thức

Bài toán 6. So sánh

$$A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \text{ với } 1 \quad (n \geq 2)$$

Giải. Dựa vào $\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n^2-1}$ với $(\forall n \geq 2)$

$$\Rightarrow A < B = \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \cdots + \frac{1}{n^2-1}$$

Do

$$B = \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{1.3} + \frac{2}{2.4} + \frac{2}{3.5} + \cdots + \frac{2}{(n-1)(n+1)}\Big)$$
$$B = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\Big)$$

$$B = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\Big) - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\Big)$$
$$B = \Big(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) < \frac{1}{2}.\frac{3}{2} = \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow B < 1$$

Vậy $A < B < 1$ hay $A < 1$

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} \Rightarrow A < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$$

Bài toán 7. So sánh:

$$P = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \text{ với } \frac{1}{2}.$$

Giải. Ta có

$$P = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} < Q = \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2-1}$$

Do

$$\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$\Rightarrow 2Q = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \cdots + \frac{2}{(2n-1).(2n+1)}$$
$$\Rightarrow 2Q = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}$$
$$\Rightarrow 2Q = 1 - \frac{1}{2n+1} < 1 \Rightarrow Q < \frac{1}{2}.$$

Do $P < Q \Rightarrow P < \dfrac{1}{2}$ (đpcm).

Bài toán 8. So sánh

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{8}\cdots\frac{999999}{1000000} \text{ và } \frac{1}{1000}.$$

Giải. Ta có

$$A = \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{8}\cdots\frac{999997}{999998}.\frac{999999}{1000000} < A^* = \frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}.\frac{8}{9}\cdots\frac{999998}{999999}\frac{1000000}{1000000}$$

$$\Rightarrow A^2 < A.A^* = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{6}{7}.\frac{7}{8}.\frac{8}{9}\cdots\frac{999997}{999998}.\frac{999998}{999999}\frac{999999}{1000000}\frac{1000000}{1000000}$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{1}{1000^2} \Rightarrow A < \frac{1}{1000}$$

Từ bài tập này ta có thể chứng minh BĐT chặt chẽ hơn :

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{8}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \text{ với } n \geq 1$$

Bài toán 9. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ ta có :

$$A = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{n}{n+1}.$$

Bài toán 10. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ ta có :

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{25} + \frac{1}{41} + \cdots + \frac{1}{n^2+(n+1)^2} < \frac{9}{20}.$$

Bài toán 11. Chứng minh rằng

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^7} < 1$$

Bài toán 12. Chứng minh rằng

$$A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{101}{3^{101}} < \frac{3}{4}.$$

Giải. Ta có

$$2A = 3A - A = \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \cdots + \frac{100}{3^{99}} + \frac{101}{3^{100}}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{101}{3^{101}}\right)$$

$$\Rightarrow 2A < 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{100}} = 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{100}}\right) < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow A < \frac{3}{4}$$

Tổng quát :

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{n}{3^n} < \frac{3}{4}$$

với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Bài toán 13. Chứng minh rằng

$$S = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \cdots + \frac{100}{3^{101}} < \frac{1}{4}$$

Giải. Ta có

$$\Rightarrow 2S = 3S - S = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots + \frac{100}{3^{100}}\right) - \left(\frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \cdots + \frac{100}{3^{101}}\right)$$
$$\Rightarrow 2S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{3^{100}} - \frac{100}{3^{101}}$$
$$\Rightarrow 2S < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{3^{100}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{100}}\right) < \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow S = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \cdots + \frac{100}{3^{101}} < \frac{1}{4}$$

Tổng quát : Với mọi $n \in$
$mathbbN^*, a \in$
$mathbbN^*; a \neq 1$ ta có thể chứng minh được :

$$\text{a)} \quad S_1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \cdots + \frac{1}{a^n} < \frac{1}{a-1}$$
$$\text{b)} \quad S_2 = \frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \frac{3}{a^3} + \frac{4}{a^4} + \cdots + \frac{n}{a^n} < \frac{a}{(a-1)^2}$$
$$\text{c)} \quad S_3 = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^3} + \frac{3}{a^4} + \frac{4}{a^5} + \cdots + \frac{n}{a^{n+1}} < \frac{a}{(a-1)^2}$$

Bài toán 14. Cho

$$S_1 = 1 + \frac{1}{5};$$
$$S_2 = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2};$$
$$S_3 = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3}; \ldots;$$
$$S_n = S_{n-1} + \frac{1}{5^n}$$

Chứng minh rằng : .

$$\frac{1}{5S_1^2} + \frac{1}{5^2S_2^2} + \frac{1}{5^3S_3^2} + \cdots + \frac{1}{5^nS_n^2} < \frac{35}{36}$$

Bài toán 15. Biết rằng

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 1.$$

Chứng minh rằng : giá trị nhỏ nhất của $(a_i - a_j)^2 \;\; (1 \leq i \neq j \leq 5)$ không thể vượt quá $\dfrac{1}{10}$.

Bài toán 16. Chứng minh rằng

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \quad \text{với } n \in mathbbN$$

Từ đó chứng minh

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + + \frac{1}{\sqrt{1994}} < 2\sqrt{1994}$$

Giải. Ta có

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$$

hay

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \text{ (đpcm)}$$

Bài toán 17. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{2002^2+2003^2} < \frac{1}{2}.$$

Bài toán 18. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} \text{ với } n \in mathbbN; n \geq 1.$$

Bài toán 19. Cho biểu thức :

$$A = \frac{3}{4}+\frac{8}{9}+\frac{15}{16}+\cdots+\frac{9999}{10000}.$$

Chứng minh rằng $98 < A < 99$.

Tổng quát hóa bài toán, ta có

$$n-2 < \frac{3}{4}+\frac{8}{9}+\frac{15}{16}+\cdots+\frac{n^2-1}{n^2} < n-1 \text{ với } n \geq 2.$$

Bài toán 20. Cho tổng

$$S_n = 1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}.$$

Tìm số hữu tỷ s nhỏ nhất để $S_n < a$ với mọi $n \in$
$mathbbN^*$.

Bài toán 21. Cho

$$A = \frac{1}{14}+\frac{1}{29}+\cdots+\frac{1}{n^2+(n+1)^2+(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{1877}$$

Chứng minh rằng

$$0,15 < A < 0,25$$

Ngoài ra có thể chứng minh bài toán tổng quát :

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{3(k+2)} < \frac{1}{1^2+2^2+3^2}+\frac{1}{2^2+3^2+4^2}+\cdots+\frac{1}{k^2+(k+1)^2+(k+2)^2}$$
$$<\frac{1}{4}-\frac{1}{2(k+2)}$$

Bài toán 22. Tìm $\dfrac{A}{B}$ biết

$$\begin{aligned}A =& \frac{1}{2.32} + \frac{1}{3.33} + \cdots + \frac{1}{n(n+30)} + \cdots + \frac{1}{1973.2003}\\ B =& \frac{1}{2.1974} + \frac{1}{3.1975} + \cdots + \frac{1}{n(n+1972)} + \cdots + \frac{1}{31.2003}.\end{aligned}$$

Áp dụng (**??**) với $k = 30$ ta có

$$\begin{aligned}30A =& \frac{30}{2(2+30)} + \frac{30}{3(3+30)} + \cdots + \frac{30}{1973(1973+30)}\\ 30A =& \frac{1}{2} - \frac{1}{32} + \frac{1}{3} - \frac{1}{33} + \cdots + \frac{1}{1973} + \frac{1}{2003}\end{aligned}$$

$$30A = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{31}\right) - \left(\frac{1}{1974} + \frac{1}{1975} + \cdots + \frac{1}{2003}\right) \tag{1}$$

Áp dụng (**??**) với $k = 1972$ ta có

$$\begin{aligned}1972B &= \frac{1972}{2(2+1972)} + \frac{1972}{3(3+1972)} + \cdots + \frac{1972}{31(31+1972)}\\ 1972B &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1974}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{1975}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{2003}\right)\end{aligned}$$

$$1972B = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{31}\right) - \left(\frac{1}{1974} + \frac{1}{1975} + \cdots + \frac{1}{2003}\right) \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta có :

$$30A = 1972B \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{1972}{30} = \frac{986}{15}.$$

Bài toán 23. Chứng minh r»ng

$$A = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} - \cdots + \frac{1}{3^{4n+2}} - \frac{1}{3^{4n}} + \cdots - \frac{1}{3^{100}} < 0,1$$

Hãy tổng quát hóa bài toán trên.

Bài tập vận dụng

Bài toán 24. Chứng tỏ rằng tổng của 100 số hạng đầu tiên của dãy sau nhỏ hơn $\dfrac{1}{4}$.

$$\frac{1}{5}; \frac{1}{45}; \frac{1}{117}; \frac{1}{221}; \frac{1}{357}; \ldots$$

Bài toán 25. Chứng minh rằng

$$A = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \cdots + \frac{2499}{2500} > 48.$$

Bài toán 26. Chứng minh rằng

a) $n! > 2^{n-1}\ \ (n \geq 3)$

b) $1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n-1}}{1 - b}\ \ (b \neq 1)$

c) $1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!} < 3.$

Bài toán 27. Cho các số dương $a_1; a_2; \ldots; a_n$. Chứng minh rằng

$$C_n^2\Big(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_1a_3} + \frac{1}{a_1a_4} + \cdots + \frac{1}{a_1a_n} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_2a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}a_n}\Big) \geq$$

$$4\Big(\frac{1}{a_1+a_2} + \frac{1}{a_1+a_3} + \frac{1}{a_1+a_4} + \cdots + \frac{1}{a_1+a_n} + \frac{1}{a_2+a_3} + \frac{1}{a_2+a_4} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}+a_n}\Big)$$

Tìm điều kiện của $a_k(k = 1; 2; 3; 4; \ldots; n)$ để có đẳng thức.

Bài toán 28. Cho các số tự nhiên $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Chứng minh rằng tổng A:

$$A = \frac{\sqrt{a_2 - a_1}}{a_2} + \frac{\sqrt{a_3 - a_2}}{a_3} + \cdots + \frac{\sqrt{a_n - a_{n-1}}}{a_n} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

Bài toán 29. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2} \text{ với } n \in mathbbN; n > 1$$

Bài toán 30. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \text{ với } n \in mathbbN; n > 1$$

Bài toán 31. Chứng minh rằng

$$2(\sqrt{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n} - 1 \text{ với } n \in mathbbN$$

Bài toán 32. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4} \text{ với } n \in mathbbN; n \geq 1$$

Bài toán 33. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{25} + \frac{1}{41} + \cdots + \frac{1}{n^2 + (n+1)^2} < \frac{1}{2}$$

Bài toán 34. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{65} < \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{1}{2004^3} < \frac{1}{40}$$

Bài toán 35. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots + +\frac{n}{3^n} < \frac{3}{4}$$

Bài toán 36. Chứng minh rằng

$$S_n = \frac{3}{1^2.2^2} + \frac{5}{2^2.3^2} + \frac{7}{3^2.4^2} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2.(n+1)^2} + \frac{n^2}{4(1^3+2^3+\cdots+n^3)}$$

là một hằng số

Bài toán 37. Chứng minh rằng

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} < \frac{1}{3} \\ \text{b)} & \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \cdots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{16} \\ \text{c)} & \frac{1}{5^2} - \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} - \frac{4}{5^5} + \cdots + \frac{99}{5^{100}} - \frac{100}{5^{101}} < \frac{1}{36} \end{array}$$

Bài toán 38. So sánh tổng A gồm 11 số hạng sau với $\frac{1}{16}$

$$A = \frac{1}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \cdots + \frac{n}{5^{n+1}} + \cdots + \frac{11}{5^{12}}$$

Tổng quát bài toán, ta có: Với a, n là số tự nhiên khác $0, a > 1$ thì

$$A = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^3} + \frac{3}{a^4} + \cdots + \frac{n}{a^{-n+1}} < \frac{1}{(a-1)^2}.$$

Bài toán 39. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a^2} - \frac{a}{(1+a^2)^2} + \frac{a^2}{(1+a^2)^3} - \frac{a^3}{(1+a^2)^4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}.a^{n-1}}{(1+a^2)^n} + \cdots \leq \frac{3}{4}.$$

3 Các bài toán tổng hợp

1. Toán chia hết

Bài toán 40. Cho

$$A = 1.2.3.4.\ldots.1001;$$

$$B = 1002.1003.1004\ldots2002.$$

Hỏi $(A+B)$ có chia hết cho 2003 không ?

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}
&B = (2003-1001)(2003-1000)(2003-999)\dots(2003-1)\\
\Rightarrow &B = BS(2003) - 1.2.3.4\dots1001 = BS(2003) - A\\
\Rightarrow &A + B = BS(2003)
\end{aligned}$$

Vậy $(A+B)$ chia hết cho 2003.

Bài toán 41. Viết tổng

$$\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \dots + \frac{2^n}{n}$$

về dạng phân số $\dfrac{P}{S}$.

Chứng minh rằng $p \vdots 8$ với $n > 3$.

Bài toán 42. Cho tổng

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{18} = \frac{a}{b} \text{ với } (a;b) = 1.$$

Các mẫu số ở các số hạng của tổng là các số tự nhiên liên tiếp từ 2 đến 18.

Chứng minh rằng :

$$b \vdots 11.13.17$$

Tổng quát bài toán, ta có : Nếu p là số nguyên tố, n là số tự nhiên thỏa mãn $p < n < 2p$ và tổng

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = \frac{a}{b} \text{ với } (a;b) = 1$$

Thì $b \vdots p$

2. Toán tìm x

Bài toán 43. Tìm x biết

$$\left(\frac{2}{11.13} + \frac{2}{13.15} + \frac{2}{15.17}\right).561 - [3,6 : (x - 9,52) : 1,2] = 10$$

Giải.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2}{11.13} + \frac{2}{13.15} + \frac{2}{15.17}\right).561 - [3,6 : (x - 9,52) : 1,2] = 10\\
\Leftrightarrow &\left(\frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{15} - \frac{1}{17}\right).561 - 10 = [3,6 : (x - 9,52) : 1,2]\\
\Leftrightarrow &\left(\frac{1}{11} - \frac{1}{17}\right).561 - 10 = \left[\frac{18}{5} : (x - 9,52) : \frac{6}{5}\right]\\
\Leftrightarrow &\frac{6}{187}.561 - 10 = \left[\frac{18}{5}.\frac{5}{6} : (x - 9,52)\right]\\
\Leftrightarrow &18 - 10 = [3 : (x - 9,52)] \Leftrightarrow 8 = 3 : (x - 9,52) \Leftrightarrow (x - 9,52) = 3 : 8\\
\Leftrightarrow &x - 9,52 = 0,375 \Leftrightarrow x = 9,895
\end{aligned}$$

Bài toán 44. Tìm x biết

a) $\left(\frac{1}{11.13}+\frac{1}{13.15}+\frac{1}{15.17}+\cdots+\frac{1}{19.21}\right):\frac{0,75x+4}{x}=\frac{4}{231}$

b) $\left[\frac{17}{13}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{52}\right)\right]\left(x-\frac{66}{44}\right)=\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\frac{1}{10.13}$

c) $\frac{1}{5.8}+\frac{1}{8.11}+\frac{1}{11.14}+\cdots+\frac{1}{x(x+3)}=\frac{101}{1540}$

d) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{x(x+1):2}=1\frac{1991}{1993}$

e) $\left(\frac{1}{21.22}+\frac{1}{22.23}+\cdots+\frac{1}{29.30}\right).140+1,08:[0,3.(x-1)]=11$

f) $\left(\frac{2}{31.33}+\frac{2}{33.35}+\cdots+\frac{1}{39.41}\right).2542-[2,04.(x+1,05)]:0,12=19$

Bài toán 45. Tìm tỷ số của hai số A và B biết :

$$A=\frac{1}{1.1981}+\frac{1}{2.1982}+\frac{1}{3.1983}+\cdots+\frac{1}{n(1980+n)}+\cdots+\frac{1}{25.2005}$$

$$B=\frac{1}{1.26}+\frac{1}{2.27}+\frac{1}{3.28}+\cdots+\frac{1}{m(25+m)}+\cdots+\frac{1}{1980.2005}$$

Trong đó A có 25 số hạng, B có 1980 số hạng.

Bài toán 46. Tìm tỷ số của hai số A và B biết : A có $(n-1)$ thừa số và

$$A=\left(1-\frac{1}{1+2}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3}\right)\left(1-\frac{1}{1+2+3+4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$$

$$B=\frac{n+2}{n}.$$

Bài toán 47. Tính $\frac{M}{N}$ biết

$$M=\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+\cdots+\frac{1}{29.31}$$

$$N=\frac{1}{3.5.7}+\frac{1}{5.7.9}+\frac{1}{7.9.11}+\cdots+\frac{1}{27.29.31}$$

Bài toán 48. Tính $\frac{A}{B}$ biết

$$A=\frac{1}{2.32}+\frac{1}{3.33}+\cdots+\frac{1}{n(n+30)}+\cdots+\frac{1}{1973.2003}$$

$$B=\frac{1}{2.1974}+\frac{1}{3.1975}+\cdots+\frac{1}{n(n+1972)}+\cdots+\frac{1}{31.2003}.$$

Ngoài các bài tập nêu trên , còn rất nhiều bài tập khác về dãy số và dãy các phân số có quy luật. Các bạn có thể tham khảo thêm trong báo Toán học tuổi trẻ, báo Toán tuổi thơ, các sách Chuyên đề toán tham khảo.

Tài liệu tham khảo

[1] Phan Huy Khải(2004), "Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán trung học phổ thông ", *Các bài toán cơ bản của số học*, NXB Giáo dục.

[2] Hà Huy Khoái, "Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán trung học phổ thông",*Số học,* NXB Giáo dục.

[3] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), *Một số vấn đề số học chọn lọc,* NXB Giáo dục.

[4] Đặng Hùng Thắng (1995), *Bài giảng số học,* NXB Giáo dục.

[5] Đặng Hùng Thắng, Nguyễn Văn Ngọc, Vũ Kim Thủy(1997), *Bài giảng số học,*Tuyển tập 30 năm tạp chí toán học và tuổi trẻ, NXB Giáo dục.

[6] Vũ Dương Thụy (chủ biên)(2006), *Tuyển tập 40 năm Olympiads Toán học quốc tế(IMO 1959-2000),* NXB Giáo dục.

VẬN DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU TRONG CÁC BÀI TOÁN TÌM GIỚI HẠN DÃY SỐ VÀ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Trương Văn Điềm, Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn - Khánh Hòa

Trong nhiều năm qua, bài toán về giới hạn dãy số, phương trình, hệ phương trình là một dạng thường gặp trong các kỳ thi chọn học sinh giỏi quốc gia cũng như ở cấp tỉnh. Đây là một dạng rất cơ bản và phần lý thuyết cũng rất đơn giản, bài viết này đề cập đến việc vận dụng tính đơn điệu để giải quyết.

1 Lý thuyết cơ bản

Các bài toán về dãy số, giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình có nội dung khá đa dạng. Ở đây ta quan tâm các bài toán tìm giới hạn dãy số (bản chất giải tích) và các bài toán giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình được vận dụng tính đơn điệu của hàm số.

Với bài toán giới hạn dãy số , ta cần nắm vững định nghĩa của giới hạn dãy số và các định lý cơ bản về giới hạn dãy số, bao gồm:

1. Định lý Weierstrass: Dãy đơn điệu và bị chặn thì hội tụ.
2. Định lý kẹp: Nếu $x_n \le y_n \le z_n$ với mọi $n \ge n_0$ và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Một trong những dạng dãy số thường gặp nhất là dãy số xác định bởi $x_0 = a, x_{n+1} = f(x_n)$ với f là một hàm số nào đó. Và với loại dãy số này, câu hỏi thường gặp nhất là:

1. Chứng minh dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn
2. Tìm tất cả các giá trị của a sao cho dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn

Để giải các bài toán dạng này, ta có một số tính chất cơ bản sau

1. Nếu f là hàm số tăng thì dãy $\{x_n\}$ sẽ là dãy đơn điệu.
2. Nếu f là hàm số giảm thì các dãy $\{x_{2n}\}$ (dãy với chỉ số chẵn) và $\{x_{2n+1}\}$ (dãy với chỉ số lẻ) sẽ là các dãy đơn điệu.
3. Nếu với mọi x, y ta có $|f(x) - f(y)| \le q|x - y|$ với q là hằng số $0 < q < 1$ và $\{x_n\}$ bị chặn thì $\{x_n\}$ hội tụ. Đặc biệt nếu $|f'(x)| \le q < 1$ thì ta luôn có điều này.

Với dạng bài toán giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình ta chỉ cần nắm vững tính đơn điệu của hàm số (vận dụng đạo hàm) của một hoặc hai hàm số liên quan mà ta phải nhận biết thông đề bài toán

2 Một số bài toán minh họa

2.1 Các bài toán về dãy số

Bài toán 1. *Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $x_0 = \sqrt{2}$ và $x_{n+1} = \sqrt{2}^{x_n}$ với $n = 0, 1, 2, \ldots$ Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.*

Lời giải. Đặt $f(x) = (\sqrt{2})^{x_n}$ thì dãy số có dạng $x_0 = \sqrt{2}$ và $x_{n+1} = f(x_n)$. Ta thấy $f(x)$ là hàm số tăng và $x_1 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} > \sqrt{2} = x_0$. Từ đó, do $f(x)$ là hàm số tăng nên ta có $x_2 = f(x_1) > f(x_0) = x_1, x_3 = f(x_2) > f(x_1) = x_2, ...$ Suy ra $\{x_n\}$ là dãy số tăng. Tiếp theo, ta chứng minh bằng quy nạp rằng $x_n < 2$ với mọi n. Điều này đúng với $n = 0$. Giả sử ta đã có $x_k < 2$ thì rõ ràng $x_{k+1} = \sqrt{2}^{x_k} < \sqrt{2}^2 = 2$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, ta có $x_n < 2$ với mọi n.

Vậy dãy $\{x_n\}$ tăng và bị chặn trên bởi 2 nên dãy có giới hạn hữu hạn. Gọi a là giới hạn đó thì chuyển đẳng thức $x_{n+1} = \sqrt{2}^{x_n}$ sang giới hạn, ta được $a = \sqrt{2}^a$. Ngoài ra ta cũng có $a \leq 2$.

Xét phương trình $x = \sqrt{2}^x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \ln(\sqrt{2})$. Khảo sát hàm số $\frac{\ln x}{x}$ ta thấy rằng phương trình trên chỉ có 1 nghiệm $< e$ và một nghiệm lớn hơn e. Vì 2 là một nghiệm của phương trình nên rõ ràng chỉ có 1 nghiệm duy nhất của phương trình thoả mãn điều kiện ≤ 2. Từ đó suy ra $a = 2$.

Vậy giới hạn của $\{x_n\}$ khi n dần đến vô cùng là 2.

Bài toán 2. *(Đề dự bị VMO 2008) Cho số thực a và dãy số thực $\{x_n\}$ xác định bởi:*

$$x_1 = a \text{ và } x_{n+1} = \ln(3 + \cos x_n + sinx_n) - 2008 \quad \text{với mọi } n = 1, 2, 3, ...$$

Chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi n tiến đến dương vô cùng.

Lời giải. Đặt $f(x) = \ln(3 + \cos x_n + sinx_n) - 2008$ thì

$$f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{3 + \sin x + \cos x}$$

Từ đó, sử dụng đánh giá $|\cos x - \sin x| \leq \sqrt{2}, |\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$ ta suy ra

$$|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} = q < 1.$$

Áp dụng định lý Lagrange cho x, y thuộc $\mathbb{R}$, ta có

$$f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$$

Từ đó suy ra $|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$ với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$.
Áp dụng tính chất này với $m > n \geq N$, ta có

$$|x_m - x_n| = |f(x_{m-1}) - f(x_{n-1})| \leq q|x_{m-1} - x_{n-1}| \leq \cdots \leq q^{n-1}|x_{m-n+1} - x_1| \leq q^{N-1}|x_{m-n+1} - x_1|.$$

Do dãy $\{x_n\}$ bị chặn và $q < 1$ nên với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại N đủ lớn để $q^{N-1}|x_{m-n+1} - x_1| < \varepsilon$. Như vậy dãy $\{x_n\}$ thoả mãn điều kiện Cauchy do đó hội tụ.

Bài toán 3. *(Đề thi chọn HSG Nghệ An 2007) Chứng minh rằng với mọi số n nguyên dương , luôn tồn tại duy nhất một số thực x_n sao cho* $\dfrac{1}{2008^{x_n}} - x_n + n = 0$. *Xét dãy số (x_n), tìm* $\lim(x_{n+1} - x_n)$.

Lời giải. Với $n \in \mathbb{N}^*$, xét $f(x) = \frac{1}{2008^x} - x + n; x \in \mathbb{R}$.
$f'(x) = -\frac{\ln 2008}{2008^x} - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. (1).
Ta có $\begin{cases} f(n) = \frac{1}{2008^n} > 0 \\ f(x_{n+1}) = \frac{1}{2008^{n+1}} - 1 < 0 \end{cases}$
$\Rightarrow f(x) = 0$ có nghiệm $x_n \in (n, n+1)$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra đpcm.
Ta có $x_n - n = \frac{1}{2008^{x_n}} > 0 \Rightarrow x_n > n \Rightarrow 0 < x_n - n < \frac{1}{2008^n}$.
Mặt khác $\lim \frac{1}{2008^n} = 0 \Rightarrow \lim(x_n - n) = 0$. Khi đó $\lim(x_{n+1} - x_n) = \lim\{[x_{n+1} - (n+1)] - (x_n - n) + 1\} = 1$.

Bài toán 4. *Cho $a \in \mathbb{R}$ và xét dãy số thực $(x_n), n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ xác định bởi*

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_n = \sqrt[3]{6x_{n-1} - 6\sin(x_{n-1})} \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\forall a \in \mathbb{R}$, dãy số (x_n) luôn có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. Hãy tính $\lim(x_n)$.

Lời giải.
+) Trường hợp 1: Xét $a = 0$ thì $x_n = 0 \quad \forall n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Suy ra $\lim x_n = 0$.
+) Trường hợp 2: Xét $a > 0$. Ta luôn có

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x, \quad \forall x \geq 0 \quad (\text{Dấu} = \text{xảy ra khi } x = 0)$$

Vì $\sin x \leq x \Rightarrow x_n \geq 0, \forall n$ (Cm qui nạp)
Vì $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6} \Rightarrow \sin x_{n-1} > x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3}{6}, \forall n \geq 1$
$\Rightarrow 6x_{n-1} - 6\sin x_{n-1} < x_{n-1}^3 \quad \forall n \geq 1$
$\Rightarrow x_n = \sqrt[3]{6x_{n-1} - 6\sin x_{n-1}} < x_{n-1} \quad \forall n \geq 1$
Suy ra (x_n) là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 0, nên (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$
Đặt $\lim x_n = \alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha = \sqrt[3]{6\alpha - 6\sin\alpha} \Rightarrow \alpha = 0$
+) Trường hợp 3: Xét $a < 0$. Đặt $b = -a > 0$.
Xét dãy (y_n) xác định như sau: $\begin{cases} y_1 = b \\ y_{n+1} = \sqrt[3]{6y_n - 6\sin y_n} \end{cases}$ với $n = 0, 1, 2, \ldots$
Theo CM trên thì (y_n) có giới hạn hữu hạn bằng 0 . Suy ra $\lim x_n = 0$
Kết luận: $\forall a \in \mathbb{R}$, dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn và $\lim x_n = 0$.

Bài toán 5. *(Đề chọn HSG của Thanh Hóa 2006) Cho dãy (x_n) : $x_0 = 1, x_n = \frac{1}{1+x_{n-1}}$. Tính $\lim x_n$.*

Lời giải. Nhận ra dãy dương và: $x_0 = 1,\ x_2 = \frac{2}{3},\ x_4 = \frac{5}{8} \dots$ và $x_1 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{3}{5} \dots$
Chia dãy đã cho thành hai dãy con (x_{2n}) và x_{2n+1}.
Ta chứng minh bằng quy nạp (x_{2n}) giảm.
Ta có: $x_{2n+2} = \frac{1}{1+x_{2n+1}} = \frac{1+x_{2n}}{2+x_{2n}};\ \ x_{2n} = \frac{1+x_{2n-2}}{2+x_{2n-2}}$
Giả thiết $x_{2n} < x_{2n-2}$, cho ta $x_{2n+2} < x_{2n} \Leftrightarrow \frac{1+x_{2n}}{2+x_{2n}} < \frac{1+x_{2n-2}}{2+x_{2n-2}} \ \Leftrightarrow\ x_{2n} < x_{2n-2}$ đúng.
Lúc đó: $x_{2n+2} = \frac{1+x_{2n}}{2+x_{2n}} < x_{2n} \Leftrightarrow x_{2n} > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Tương tự với dãy (x_{2n+1}), ta được $1 = x_0 > ... > x_{2n} > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ và $\frac{1}{2} = x_1 < ... < x_{2n-1} < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
Suy các dãy (x_{2n}) và (x_{2n+1}) đơn điệu, bị chặn. Theo dấu hiệu Vaiơstrat, các dãy này có giới hạn. Khi đó gọi $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n},\ B = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}$.
Ta được hệ: $A = \frac{1}{1+B}$ và $B = \frac{1}{1+A}$. Giải hệ ta được :$A = B = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
Dãy đã cho gồm hợp của hai dãy trên có cùng giới hạn. Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Bài toán 6. *(đề đề nghị Olympic 30 – 4 năm 2001) Cho dãy số $\{x_n\}$ thoả mãn $x_1 = -\frac{5}{2}$ và $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n^2 + x_n - 2$ với mọi n là số nguyên dương. Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ hội tụ. Tìm giới hạn của nó.*

Lời giải. Từ công thức xác định dãy ta có: $x_{n+2} = \frac{1}{2}x_{n+1}^2 + x_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x_n^2 + x_n - 2\right]^2 + \frac{1}{2}x_n^2 + x_n - 4 = \frac{1}{8}x_n^4 + \frac{1}{2}x_n^3 - x_n - 2$
Xét hàm số: $f(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - x - 2 \quad \forall x \in (-2;-1)$ Ta có: $f'(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1$ và $f''(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1 < 0 \quad \forall x \in (-2;-1)$
Vậy $f'(x) > f'(-1) = 0$ (do $f'(x)$ nghịch biến trên $(-2;-1)$)
Do đó $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$, nên suy ra $f(-2) < f(x) < f(-1), \forall x \in (-2;-1)$, hay $-2 < f(x) < -\frac{11}{8} < -1, \forall x \in (-2;-1)$
Nhưng $x_{2n+2} = f(x_{2n})$, từ đó suy ra $-2 < x_{2n} < -1$, với $n = 1, 2, 3, \dots$
Mặt khác do $x_2 > x_4$ ta suy ra $f(x_2) > f(x_4)$ hay $x_4 > x_6, \dots$
Hoàn toàn tương tự ta có: $-1 > x_2 > x_4 > x_6 > ... > x_{2n} > ... > -2$.
Vậy dãy $\{x_{2n}\}$ giảm và bị chặn dưới nên hội tụ.
Đặt $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$, từ công thức xác định dãy, chuyển qua giới hạn ta có:

$$a = \frac{1}{8}a^4 + \frac{1}{2}a^3 - a - 2 \Leftrightarrow (a-2)(a+2)^3 = 0 \Leftrightarrow a = -2$$

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được dãy $\{x_{2n+1}\}$ tăng và bị chặn trên bởi – 2 và $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = -2$. Như vậy dãy $\{x_n\}$ hội tụ và có giới hạn bằng – 2.

Bài toán 7. *(đề đề nghị Olympic 30 – 4 năm 2002) Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi: $x_0 = 2,7; x_{n+1}^3 - 3x_{n+1}(x_{n+1} - 1) = x_n + 1$. Chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ hội tụ.*

Lời giải. Ta có: $x_{n+1}^3 - 3x_{n+1}(x_{n+1} - 1) = x_n + 1 \Leftrightarrow (x_{n+1} - 1)^3 = x_n \Leftrightarrow x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n} + 1$
Xét hàm số $g(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$, ta có $x_{n+1} = g(x_n)$. Ta có:

$$g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow 0 < g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} = q < 1,\ \ \forall x > 2$$

Do $x_0 = 2,7 \Rightarrow x_n > 2,\ \ \forall n \in$. Ta có $x = g(x) \Leftrightarrow x = 1+\sqrt[3]{x} \Leftrightarrow x-1 = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow x^3-3x^2+3x-1 = x \Leftrightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$
Ta có: $f'(x) = 3x^2-6x+2 = 3x(x-2)+2 > 0; \forall x > 2$. Mặt khác: $f(2) = -1 < 0; f(3) = 5 > 0$.
Do đó phương trình $x = g(x)$ có đúng một nghiệm $x = r \in (2;3)$. Ta chứng minh: $|x_n - r| \leq q^n,\ \ \forall n$.
Với $n = 0 : |x_0 - r| = |2,7 - r| < 1 = q^0$.
Giả sử $|x_k - r| \leq q^k$, ta có $|x_{k+1} - r| = |g(x_k) - g(r)|$
Áp dụng định lí Lagrange, ta có:

$$|x_{k+1} - r| = |g'(c)(x_k - r)| = |g'(c)|\,|x_k - r| \leq |g'(c)|\,.q^k$$

Do $x_k, r > 2 \Rightarrow c \in (x_k; r) \vee c \in (r; x_k) \Rightarrow c > 2 \Rightarrow 0 < g'(c) < q$.
Vậy $|x_{k+1} - r| \leq q^k.q = q^{k+1}$. Theo nguyên lí quy nạp ta có: $|x_n - r| \leq q^n,\ \ \forall n \in$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = r$ (do 0 < q < 1).

Bài toán 8. *(đề đề nghị Olympic 30 – 4 năm 2002) Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $x_1 = x_2 = 1$ và $x_{n+2} = \frac{2}{5\pi}x_{n+1}^2 + \frac{2\pi}{5}\sin x_n$; $\forall n \in N^*$. Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ có giới hạn và tính giới hạn của nó.*

Lời giải. Trước hết ta chứng minh: $x_n \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Thật vậy: $x_1 = x_2 = 1 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
Giả sử đã có $x_n \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \forall k \leq n$. Khi đó: $x_{n+1} < \frac{2}{5\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{2}$ với $x_n \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và $x_{n+1} > 0 \Rightarrow x_{n+1} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$
Theo nguyên lí quy nạp: $x_n \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Xét hàm $f(x) = \frac{2}{5\pi}x^2 + \frac{2\pi}{5}\sin x - x$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
$f'(x) = \frac{4}{5\pi}x + \frac{2\pi}{5}\cos -1$ và $f''(x) = \frac{4}{5\pi} - \frac{2\pi}{5}\sin x$
Ta có $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{5\pi} - \frac{2\pi}{5}\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \arcsin\frac{2}{\pi^2} = x_0$
Ta có bảng biến thiên của $f'(x)$:

x	0		x_0		$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0
$f'(x)$	$\frac{2\pi}{5} - 1$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\frac{3}{5}$

Từ bảng biến thiên suy ra $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x_1 \in \left(x_0; \frac{\pi}{2}\right)$ và $f'(x) > 0$ với $x \in (0; x_1)$,$f'(x) < 0$ với $x \in \left(x_1; \frac{\pi}{2}\right)$
Khi đó ta có bảng biến thiên của hàm f(x):

x	0		x_1		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Từ đó suy ra $f(x) > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và $f(x) = 0$ tại $x = 0; x = \frac{\pi}{2}$. Vậy dãy $\{x_n\}$ là dãy bị chặn (1)
Mặt khác từ công thức xác định dãy và bằng quy nạp, ta dễ dàng chứng minh được dãy là không giảm. Từ đó suy ra dãy có giới hạn.
Gọi $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Rightarrow 1 \le a \le \frac{\pi}{2}$ và a thỏa mãn $f(a) = 0$ suy ra $a = \frac{\pi}{2}$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$.

Bài toán 9. *(Phan Huy Khải) Dãy số thực xác định theo quy luật:* $x_1 = 2,9; x_{n+1} = \sqrt{3} + \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2-1}}$ *với* $n \ge 1$. *Hãy tìm một số thực nằm bên trái dãy con* $\{x_1, x_3, ...\}$ *và bên phải dãy con* $\{x_2, x_4, ...\}$ *của dãy số* $\{x_n\}$.

Lời giải. Quy luật dãy số suy ra rằng $x_n \ge \sqrt{3}$ với mọi số tự nhiên $n \ge 1$. Yêu cầu của bài toán là tìm số thực a sao cho $x_{2k} < a < x_{2k-1}$ với mọi số tự nhiên $k = 1, 2, 3, \dots$
Dự đoán a cần tìm là giới hạn của dãy số $\{x_n\}$ khi $n \to \infty$. Khi đó a là nghiệm của phương trình $x = \sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ với $x \ge \sqrt{3}$ $\quad (*)$
+) Giải phương trình (*). Vì $x \ge \sqrt{3}$ suy ra $0 < \frac{1}{x} < 1$ nên có thể đặt $x = \frac{1}{\sin\alpha}; \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó (*) trở thành $\frac{1}{\sin\alpha} = \sqrt{3} + \frac{1}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \sin\alpha - \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha = 0$. Giải phương trình lượng giác này ta tìm được $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\pm\sqrt{5} - 1\right)$ và do $\sin\alpha > 0$ nên chọn $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt{5} - 1\right) \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)$
+) Lấy $a = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)$ ta chứng minh $x_{2k} < a < x_{2k-1}$ với mọi số tự nhiên $k = 1, 2, 3, \dots$ bằng quy nạp
Dựa vào quy luật dãy số, xét hàm số $y = f(x) = \sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ $(x \ge \sqrt{3})$.
Hàm f liên tục và có đạo hàm trên $\left[\sqrt{3}; +\infty\right)$; $f'(x) = -\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} < 0; \quad \forall x \ge \sqrt{3}$, suy ra hàm f nghịch biến trên $\left[\sqrt{3}; +\infty\right)$. Ta có:
Với $k = 1$ thì $x_1 = 2,9$. Khi đó $a = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right) < 2,9 = x_1$ và $x_2 = f(x_1) = \sqrt{3} + \frac{2,9}{\sqrt{2,9^2-1}} < f(a) = a$. Vậy với $k = 1$ ta có $x_2 < a < x_1$ hay mệnh đề đúng với $k = 1$.
Giả sử mệnh đề đúng với $k = n$ ta chứng minh nó đúng với $k = n + 1$. Thật vậy, do giả thiết quy nạp $x_{2n} < a < x_{2n-1}$. Khi đó

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= f(x_{2n}) > f(a) = a \\ x_{2n+2} &= f(x_{2n+1}) < f(a) = a \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh: $x_{2n+2} < a < x_{2n+1}$.
Theo nguyên lí quy nạp ta có: $x_{2k} < a = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right) < x_{2k-1}$ đúng với mọi $k = 1, 2, \dots$ tức $a = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)$ là giá trị cần tìm.

Bài toán 10. *(Đề chính thức - Olympic 30 – 4 năm 2002)*

Cho phương trình $x^n + x^{n-1} + ... + x - 1 = 0$. *Chứng tỏ rằng với mỗi n nguyên dương thì phương trình có duy nhất một nghiệm dương* x_n *và tìm* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Lời giải. Đặt $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x - 1$t hì $f_n(x)$ là hàm số liên tục trên toàn trục số. Xét:

$$f_n(x_1) - f_n(x_2) = (x_1^n - x_2^n) + \left(x_1^{n-1} - x_2^{n-1}\right) + (x_1 - x_2)$$

Nếu $0 < x_2 < x_1$ thì $f_n(x_1) - f_n(x_2) > 0$ hay $f_n(x_1) > f_n(x_2)$ Do đó hàm số $f_n(x)$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$ (có thể dùng đạo hàm để chứng minh)

Hơn nữa $f_n(0) = -1 < 0, f_n(1) = n-1 > 0$ với $n \geq 2$ nên phương trình $f_n(x) = 0$ có nghiệm dương duy nhất x_n. Vì $1 = x_n + x_n^2 + ... + x_n^n$ nên khi n tăng thì x_n giảm, tức là dãy $\{x_n\}$ giảm và bị chặn dưới. Do đó tồn tại $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Mặt khác, $1 = \frac{1-x_n^n}{1-x_n} x_n$ và $0 < x_n < 1$ nên cho qua giới hạn ta có $\frac{x_0}{1-x_0} = 1$ hay $x_0 = \frac{1}{2}$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

Bài toán 11. *(VMO -2005) Xét dãy số thực $(x_n), n = 1, 2, 3, ...,$ xác định bởi: $x_1 = a$ và $x_{n+1} = 3x_n^3 - 7x_n^2 + 5x_n$ với mọi $n = 1, 2, 3, ...$,trong đó a là một số thực. Hãy xác định tất cả các giá trị của a để dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. Hãy tìm giới hạn của dãy số (x_n) trong các trường hợp đó.*

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 5x$. Khi đó, có thể viết hệ thức xác định dãy (x_n) dưới dạng $x_{n+1} = f(x_n)$ với mọi $n = 1, 2, 3, ...$

• Ta có $f'(x) = 9x^2 - 14x + 5$. Từ đó, ta có bảng biến thiên sau của hàm $f(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{5}{9}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{275}{243}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vì $f(x) - x = 3x^3 - 7x2 + 4x = x(x-1)(3x-4)$ nên

$f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$ hoặc $x = \frac{4}{3}$ (1)

$f(x) < 0$ khi $x < 0$ (2)

$f(x) > 0$ khi $x > \frac{4}{3}$ (3)

Hơn nữa, do $f(0) = 0, f(\frac{4}{3}) = \frac{4}{3}$ và $\frac{275}{243} < \frac{4}{3}$ nên từ sự biến thiên của hàm f trên $\mathbb{R}$ suy ra:

Với mọi $x \in (-\infty; 0)$ luôn có $f(x) \in (-\infty; 0)$ (4)

Với mọi $x \in (0; \frac{4}{3})$ luôn có $f(x) \in (0; \frac{4}{3})$ (5)

Với mọi $x \in (\frac{4}{3}; -\infty)$ luôn có $f(x) \in (\frac{4}{3}; -\infty)$ (6)

Xét các trường hợp sau:

• Trường hợp 1: $a < 0$. Khi đó:

$(4) \Rightarrow x_n \in (-\infty; 0) \quad \forall n \geq 1.$

$(2) \Rightarrow x_2 = f(x_1) < x_1.$

Từ đó, do hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$, dễ dàng chứng minh được rằng dãy (x_n) là một dãy số giảm. Kết hợp điều này với (1), suy ra nếu (x_n) là dãy hội tụ và $\lim x_n = \alpha$ thì phải có $\alpha \in \{0; 1; \frac{4}{3}\}$ và $\alpha < a$. Vì $a < 0$ nên không thể có số α thỏa mãn đồng thời hai điều kiện nêu trên. Điều này chứng tỏ dãy (x_n) không là dãy hội tụ.

• Trường hợp 2: $a > \frac{4}{3}$. Khi đó:

$(6) \Rightarrow x_n \in (\frac{4}{3}; +\infty) \quad \forall n \geq 1$

$(3) \Rightarrow x_1 < f(x_1) = x_2.$

Từ đó, do hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(\frac{4}{3};+\infty)$, dễ dàng chứng minh được rằng dãy (x_n) là một dãy số tăng. Kết hợp điều này với (1), suy ra nếu (x_n) là dãy hội tụ và $\lim x_n = \alpha$ thì phải có $\alpha \in \{0;1;\frac{4}{3}\}$ và $\alpha > a$.

Vì $a > \alpha$ nên không tồn tại số α thỏa mãn đồng thời hai điều kiện nêu trên. Điều này chứng tỏ dãy (x_n) không là dãy hội tụ.

• Trường hợp 3: $a = 0$. Khi đó, dãy (x_n) là dãy hằng: $x_n = 0 \quad \forall n \geq 1$. Vì vậy, (x_n) là dãy hội tụ và $\lim x_n = 0$.

• Trường hợp 3: $a = \frac{4}{3}$. Khi đó, dãy (x_n) là dãy hằng: $x_n = \frac{4}{3} \quad \forall n \geq 1$. Vì vậy, (x_n) là dãy hội tụ và $\lim x_n = \frac{4}{3}$.

• Trường hợp 5: $0 < a < \frac{4}{3}$. Khi đó, từ (5) suy ra $x_n \in (0;\frac{4}{3}) \quad \forall n \geq 2$. Ta có:

$$|x_{n+1} - 1| = |3x_n^3 - 7x_n^2 + 5x_n - 1| = (x_n - 1)^2|3x_n - 1| \quad \forall n \geq 1. \qquad (7)$$

Vì $x_n \in (0;\frac{4}{3}) \quad \forall n \geq 1$ nên $|3x_n - 1| < 1 \quad \forall n \geq 1$. Do đó, từ (7) suy ra

$$|x_{n+1} - 1| < (x_n - 1)^2 \quad \forall n \geq 1.$$

Từ đó, bằng quy nạp theo n, dễ dàng chứng minh được rằng

$$|x - n - 1| < (a - 1)^{2^{n-1}} \quad \forall n \geq 1 \qquad (8)$$

Vì $a \in (0;\frac{4}{3})$ nên $|a - 1| < 1$. Do đó $\lim(a - 1)^{2^{n-1}} = 0$. Vì thế, từ (8) suy ra dãy (x_n) là dãy hội tụ và $\lim x_n = 1$.

Vậy tóm lại, dãy (x_n) là dãy hội tụ khi và chỉ khi $a \in [0;\frac{4}{3}]$. Và khi đó:

- $\lim x_n = 0$ nếu $a = 0$.
- $\lim x_n = \frac{4}{3}$ nếu $a = \frac{4}{3}$.
- $\lim x_n = 1$ nếu $a \in (0;\frac{4}{3})$

2.2 Dạng 2: Phương trình, hệ phương trình

1> Nếu hàm số y=f(x) luôn luôn tăng(hoặc giảm) trên D thì phương trình f(x)=0 có nhiều nhất một nhiệm trên D

2>Nếu f(x)=0 có đổi dấu một lần thì phương trình f(x)=0 có nhiều nhất hai nghiệm trên D.

Bài toán 1. *Giải phương trình* $-2x^3 + 10x^2 - 17x + 8 = 2x^2\sqrt[3]{5x - x^3}$ (1)

Lời giải. $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên (1) $\Leftrightarrow$ $-2x^3 + \frac{10}{x} - \frac{17}{x^2} + \frac{8}{x^3} = 2\sqrt[3]{\frac{5}{x^2} - 1}$

Đặt $t = \frac{1}{x}$ $(t \neq 0)$.

$$8t^3 - 17t^2 + 10t - 2 = 2\sqrt[3]{5t^2 - 1}$$
$$\Leftrightarrow (2t - 1)^3 + 2(2t - 1) = 5t^2 - 1 - 2\sqrt[3]{5t^2 - 1} \ (2)$$

Xét $f(x) = x^3 + 2x \;\Rightarrow\; f''(x) = 3x^2 + 2 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$
suy ra f luôn tăng trên $\mathbb{R}$.
Từ (2), ta có:

$$\begin{aligned}
&f(2t-1) = f(\sqrt[3]{5t^2-1})\\
&\Leftrightarrow\; 2t-1 = \sqrt[3]{5t^2-1}.\\
&\Leftrightarrow 8t^3 - 12t^2 + 6t - 1 = 5t^2 - 1.\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \quad (\text{loại})\\ t = \frac{17\pm\sqrt{97}}{16}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình $x = \frac{17\pm\sqrt{97}}{12}$.

Bài toán 2. *Giải phương trình* $\frac{1}{2}\log_2(x+2) + x + 3 = \log_2\frac{2x+1}{x} + \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2}$

Lời giải. Điều kiện : $-2 < x < -\frac{1}{2};\ x > 0$
Phương trình tương đương

$$\log_2\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+2} + x + 2 = \log_2\left(2+\frac{1}{x}\right) + \left(2+\frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(2+\frac{1}{x}\right)$$

Đặt $f(t) = \log_2 t + t^2 - 2t\ \ (t > 0)$
Ta có

$$\begin{aligned}
&f'(t) = \frac{1}{t\ln 2} + 2t - 2\\
&f''(t) = 2 - \frac{1}{t^2\ln 2}\\
&f''(t) > 0 \;\Leftrightarrow\; 2 > \frac{1}{t^2\ln 2} \;\Leftrightarrow t > \frac{1}{\sqrt{\ln 4}}
\end{aligned}$$

t	0	$\frac{1}{\sqrt{\ln 4}}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Với $f\left(\frac{1}{\sqrt{\ln 4}}\right) = \frac{\sqrt{\ln 4}}{\ln 2} + \frac{2}{\sqrt{\ln 4}} - 2 = \frac{\ln 4 + 2\ln 2 - 2\ln 2\sqrt{\ln 4}}{\ln 2.\sqrt{\ln 4}}$
$f'\left(\frac{1}{\sqrt{\ln 4}}\right) = \frac{2\ln 4 - \ln 4}{\ln 2.\sqrt{\ln 4}} = \frac{\ln 4\left(2-\sqrt{\ln 4}\right)}{\ln 2.\sqrt{\ln 4}} > 0$
$\Rightarrow f'(t) > 0\,,\quad \forall t > 0 \;\Rightarrow\; f(t)$ đồng biến
Theo bài ra $f\left(\sqrt{x+2}\right) = f\left(2+\frac{1}{x}\right) \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x+2} = 2 + \frac{1}{x}\ \ (*)$
Đặt $t = \sqrt{x+2}\ \ (t > 0) \;\Rightarrow\; x = t^2 - 2$. Phương trình (*) trở thành

$$t = 2 + \frac{1}{t^2-2} \Leftrightarrow t^3 - 2t^2 - 2t + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1\\ t = \frac{1+\sqrt{13}}{2}\\ t = \frac{1-\sqrt{13}}{2}(\text{loại})\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình: $\left[\begin{array}{l} x = -1\\ x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.$

Bài toán 3. *Giải phương trình:* $x^2 + x - 1 = xe^{x^2-1} + (x^2-1)e^x(*)$

Lời giải.

$$(*) \Leftrightarrow -(x^2-1)(e^x-1) = x(e^{x^2-1}-1) \qquad (1)$$

Nếu $\left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = 0 \end{array}\right.$ thì $VT = 0 = VP \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = 0 \end{array}\right.$ là nghiệm của phương trình.

Khi $\left\{\begin{array}{l} x \neq 0 \\ x \neq \pm 1 \end{array}\right.$ thì (1) $\Leftrightarrow \frac{e^{x^2-1}-1}{x^2-1} = \frac{e^x-1}{x}$ (2)

Xét hàm số $f(x) = \frac{e^t-1}{t}$ $\quad D = R \backslash \{0\}$

$f'(x) = \frac{te^t - e^t + 1}{t^2}$

Xét $g(t) = te^t - e^t + 1$

$g'(t) = e^t + te^t - e^t = te^t$

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow g'(t) > 0, \quad \forall t \neq 0 \;\Rightarrow\; f(t)$ tăng trong từng khoảng xác định

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1 \;\|\; 1$	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó (2) $\Leftrightarrow f(x^2-1) = f(x) \;\Leftrightarrow\; x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Bài toán 4. *(Bình Định) Giải phương trình:*

$$-2x^3 + 10x^2 - 17x + 8 = 2x^2\sqrt[3]{5x - x^3}$$

Lời giải. Dễ thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia hai vế của phương trình cho x^3, ta được

$$-2 + \frac{10}{x} - \frac{17}{x^2} + \frac{8}{x^3} = 2\sqrt[3]{\frac{5}{x^2} - 1} \Leftrightarrow 8t^3 - 17t^2 + 10t - 2 = 2\sqrt[3]{5t^2 - 1} \; (1)$$

với $t = 1/x \quad (t \neq 0)$
Ta biến đổi phương trình (1) tiếp tục như sau

$$(1) \Leftrightarrow (2t-1)^3 + 2(2t-1) = 5t^2 - 1 + 2\sqrt[3]{5t^2-1}$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 2x$ thì $f' = 3x^2 + 2 > 0$ nên f là một hàm số tăng trên $\mathbb{R}$. Phương trình cuối cùng có thể viết lại thành

$$f(2t-1) = f(\sqrt[3]{5t^2-1})$$

Do f là hàm số tăng nên phương trình này tương đương với

$$2t - 1 = \sqrt[3]{5t^2-1} \Leftrightarrow 8t^3 - 12t^2 + 6t - 1 = 5t^2 - 1$$

Giải ra ta được $t = 0$ (loại), $t = \frac{17\pm\sqrt{97}}{16}$. Tương ứng ta tìm được $x = \frac{17\pm\sqrt{97}}{12}$.

Bài toán 5. *(Vĩnh Phúc đề xuất Olympic Đồng bằng Bắc bộ 2010) Giải phương trình*

$$(6^x - 3^x)(19^x - 5^x)(10^x - 7^x) + (15^x - 8^x)(9^x - 4^x)(5^x - 2^x) = 231^x$$

Lời giải. Nhận xét1: Với $a > b > c > 1$ thì $\begin{cases} a^x \geq b^x & \text{nếu } x \geq 0 \\ a^x \leq b^x & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$
Nhận xét 2: Hàm số $f(x) = a^x - b^x$ xác định đồng biến và liên tục trên tập $D = [0; +\infty)$ do $f'(x) = a^x \ln a - b^x \ln b > 0 \quad \forall a \geq 0$ với $a > b > 0$ cho trước.
Nhận xét 3: Tích hai hàm số đồng biến, nhận giá trị dương trên tập D là hàm đồng biến tổng hai hàm số đồng biến trên D là hàm số đồng biến.
Áp dụng
(+) nếu $x \leq 0$: $VT = (6^x - 3^x)(19^x - 5^x)(10^x - 7^x) + (15^x - 8^x)(9^x - 4^x)(5^x - 2^x) \leq 0$; $VP = 231^x > 0$. Suy ra phương trình không có nghiệm dương.
(+) Với $x > 0$ chia 2 vế phương trình cho $231^x = (3.7.11)^x$ ta được

$$(2^x - 1)\left(\left(\frac{19}{11}\right)^x - \left(\frac{5}{11}\right)^x\right)\left(\left(\frac{10}{7}\right)^x - 1\right) + \left(\left(\frac{15}{11}\right)^x - \left(\frac{8}{11}\right)^x\right)\left(\left(\frac{9}{7}\right)^x - \left(\frac{4}{7}\right)^x\right)\left(\left(\frac{5}{3}\right)^x - \left(\frac{2}{3}\right)^x\right) = 1$$

Từ nhận xét (2) và nhận xét 3 hàm số.

$$g(x) = (2^x - 1)\left(\left(\frac{19}{11}\right)^x - \left(\frac{5}{11}\right)^x\right)\left(\left(\frac{10}{7}\right)^x - 1\right) + \left(\left(\frac{15}{11}\right)^x - \left(\frac{8}{11}\right)^x\right)\left(\left(\frac{9}{7}\right)^x - \left(\frac{4}{7}\right)^x\right)\left(\left(\frac{5}{3}\right)^x - \left(\frac{2}{3}\right)^x\right)$$

là hàm số đồng biến trên $D = (0; +\infty)$ và $g(1) = 1$
phương trình đã cho $\Leftrightarrow g(x) = g(1) \Rightarrow x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài toán 6. *(Chọn HSG Khánh Hòa 2002) Giải hệ phương trình :*

$$\begin{cases} \left(1 + 4^{2x-y}\right) 5^{1-2x+y} = 1 + 2^{2x-y+1} & (1) \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. Đặt $t = 2x - y$. Khi đó hệ (I) :$\begin{cases} (1 + 4^{2x-y})\,5^{1-2x+y} = 1 + 2^{2x-y+1} & (1) \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 & (2) \end{cases}$

Ta có (1) $\Leftrightarrow (1 + 4^t)\,5^{-t+1} = 1 + 2^{t+1} \Leftrightarrow 5\left[\left(\frac{1}{5}\right)^t + \left(\frac{4}{5}\right)^t\right] = 1 + 2.2^t$

Đặt $f(t) = 5\left[\left(\frac{1}{5}\right)^t + \left(\frac{4}{5}\right)^t\right]; \quad g(t) = 1 + 2.2^t$

Ta có: $f(t)$ là hàm số giảm, $g(t)$ là hàm số tăng và $f(1) = g(1)$.

Do đó (3) $\Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow 2x - y = 1$

Vậy hệ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y + 1 \\ y^3 + 2y + 3 + \ln(y^2 + y + 1) = 0 \end{cases}$

Đặt $h(y) = y^3 + 2y + 3 + \ln(y2 + y + 1)$

Ta có $h'(y) = 3y^2 + 2 + \frac{2y+1}{y^2+y+1} = 3y^2 + \frac{2y^2+4y+3}{y^2+y+1} = 3y^2 + \frac{2(y+1)^2+1}{y^2+y+1} > 0$

$h'(y) > 0 \Rightarrow h(y)$ là hàm số tăng và $h(-1) = 0$. Vậy (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y + 1 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$

Bài toán 7. *(Đồng Nai) Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 & (1) \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. . Nếu $y = 0$ thì từ phương trình (1) suy ra $x = 0$, và phương trình (2) không được thoả mãn. Vậy $y \neq 0$. Chia hai vế của phương trình (1) cho y^5, ta được $\left(\frac{x}{y}\right)^5 + \frac{x}{y} = y^5 + y \quad (3)$. Xét hàm số $f(x) = x^5 + x$, ta có $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$, suy ra f là hàm số tăng trên $\mathbb{R}$. Phương trình (3) có thể viết lại thành $f(x/y) = f(y)$ và do f là hàm tăng nên tương đương với $x/y = y$, suy ra $x = y^2$. Thay vào phương trình (2), ta được $\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6 \quad (4)$.). Giải ra ta được $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (4). Từ đó hệ ban đầu có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$ và $(1; -1)$.

Bài toán 8. *(Nguyễn Trãi- Hải Dương đề xuất Olympic Đồng bằng Bắc bộ 2010) Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} (x+y)^4 + 3 = 4(x+y) \\ \frac{x^4-y^4}{64} + \frac{9\left(x^2-y^2\right)}{32} + \frac{7(x-y)}{8} + 3\ln\left(\frac{x-3}{y-3}\right) = 0 \end{cases}$$

Lời giải. Theo bđt Cauchy ta có $(x+y)^4 + 1 + 1 + 1 \geq 4\sqrt[4]{(x+y)^4.1.1.1} = 4|x+y| \geq 4(x+y)$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x + y = 1(*)$

Từ đó kết hợp với đk $\frac{x-3}{y-3} > 0 \Rightarrow -2 < x, y < 3$

Pt thứ hai của hệ $\Leftrightarrow \frac{x^4}{64} + \frac{9x^2}{32} + \frac{7x}{8} + 3\ln(3-x) = \frac{y^4}{64} + \frac{9y^2}{32} + \frac{7y}{8} + 3\ln(3-y)$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^4}{64} + \frac{9x^2}{32} + \frac{7x}{8} + 3\ln(3-x) \qquad$ (với $x < 3$)

$f'(x) = \frac{x^3}{16} + \frac{9x}{16} + \frac{7}{8} + \frac{3}{x-3} = \frac{\left(x^3+9x+14\right)(x-3)+48}{16(x-3)}$

$= \frac{x^4-3x^3+9x^2-13x+6}{16(x-3)} = \frac{(x-1)^2\left(x^2-x+6\right)}{16(x-3)} \leq 0$ Suy hàm số nghịch biến trên $(-2; 3)$, vậy $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y \quad$ (**).

Từ (*), (**) có $x = y = \frac{1}{2}$

Bài toán 9. *(THPT Chuyên Biên Hòa - Hà Nam đề xuất Olympic Đồng bằng Bắc bộ 2010)*
Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-y)\left(x^2+xy+y^2-2\right)=6\ln\left(\frac{y+\sqrt{y^2+9}}{x+\sqrt{x^2+9}}\right) \\ x^5y-3xy-1=0 \end{cases}$$

Lời giải. Từ $(x-y)\left(x^2+xy+y^2-2\right)=6\ln\left(\frac{y+\sqrt{y^2+9}}{x+\sqrt{x^2+9}}\right)$

$$\Leftrightarrow x^3-2x+6\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)=y^3-2y+6\ln\left(y+\sqrt{y^2+9}\right) \qquad (1)$$

Xét $f(t)=t^3-2t+6\ln\left(t+\sqrt{t^2+9}\right) \quad t\in\mathbb{R}$

$$f'(t)=3t^2-2+\frac{6}{\sqrt{t^2+9}}=3\left(t^2+\frac{2}{\sqrt{t^2+9}}-\frac{2}{3}\right)$$

Ta có

$$\begin{aligned} t^2+\tfrac{2}{\sqrt{t^2+9}}-\tfrac{2}{3} &= t^2+9+\tfrac{2}{\sqrt{t^2+9}}-\tfrac{29}{3}=\tfrac{t^2+9}{27}+\tfrac{1}{\sqrt{t^2+9}}+\tfrac{1}{\sqrt{t^2+9}}+\tfrac{26}{27}\left(t^2+9\right)-\tfrac{29}{3} \\ &\geq 1+\tfrac{26}{27}\left(t^2+9\right)-\tfrac{29}{3}\geq 1+\tfrac{26}{3}=\tfrac{29}{3}-\tfrac{29}{3}=0 \end{aligned}$$

Suy ra $f'(t)\geq 0 \quad \forall t\Rightarrow$ hàm số đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$. Mà $(1)\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$.

Thay vào phương trình còn lại của hệ ta có $x^6-3x^2-1=0 \;\; (2)$. Đặt $x^2=u(u\geq 0)$ suy ra $u^3-3u=1$ (3)

Xét $g(u)=u^3-3u-1$ với $u\geq 0$.

$g'(u)=3u^2-3,$ có $g'(u)=0\Leftrightarrow u=\pm 1$

Căn cứ vào BBT phương trình (3) có nghiệm duy nhất thuộc $(0;2)$.

Đặt $u=2\cos\alpha$ với $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

(3) trở thành $cos3\alpha=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{9} \;\Rightarrow x=\pm\sqrt{2\cos\frac{\pi}{9}}$

Vậy hệ có nghiệm $\left(\sqrt{2\cos\frac{\pi}{9}};\sqrt{2\cos\frac{\pi}{9}}\right)$; $\left(-\sqrt{2\cos\frac{\pi}{9}};-\sqrt{2\cos\frac{\pi}{9}}\right)$

Bài toán 10. *(Đề do Hải phòng đề xuất Olympic Đồng bằng Bắc bộ 2010)*
Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x=\cos\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}y\right) \\ y=\cos\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}z\right) \\ z=\cos\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}x\right) \end{cases}$$

Lời giải. Xét hàm số

$$f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}x\right)\Rightarrow f'(x)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}x\right)\Rightarrow\left|f'(x)\right|<1$$

Từ đó $|x-y|=|f(y)-f(z)|=\left|f'(\xi)\right|\left|(y-z)\right|\leq|y-z|$

Tương tự ta có $|x-y| \le |y-z| \le |z-x| \le |y-x| \Rightarrow |x-y| = |y-z| = |z-x|$
Giả sử $x = \max\{x,y,z\} \Rightarrow x = y = z$
Từ đó có $f(x) = x$. Xét hàm số:

$$g(x) = x - \cos\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}x\right) \Rightarrow g'(x) = 1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}x\right) > 0$$

Vậy $g(x)$ đồng biến mà $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$ nên hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bài toán 11. *(Chuyên Hưng Yên đề xuất Olympic Đồng bằng Bắc bộ 2010) Tìm nghiệm của hệ phương trình với $x \ge 0$*

$$\begin{cases} 2x - 2y + \sqrt{2x + y + 2xy + 1} = 1 \\ \sqrt[3]{3y+1} = 8x^3 - 2y - 1 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{cases} 2x - 2y + \sqrt{2x + y + 2xy + 1} = 1 \ (1) \\ \sqrt[3]{3y+1} = 8x^3 - 2y - 1 \ (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow (2x+1) - 2(y+1) + \sqrt{(2x+1)(y+1)} = 0$$

ĐK: $(2x+1)(y+1) \ge 0$. Mà $x \ge 0$ nên

$$\begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ y + 1 \ge 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+1} - \sqrt{y+1}\right)\left(\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{y+1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} - \sqrt{y+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 2x$$

Thay vào (2): $\sqrt[3]{6x+1} = 8x^3 - 4x - 1$

$$\Leftrightarrow (6x+1) + \sqrt[3]{6x+1} = (2x)^3 + 2x$$

Hàm số $f(t) = t^3 + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt[3]{6x+1} = 2x$$

$$\Leftrightarrow 4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$$

Nhận xét: $x > 1$ không là nghiệm của phương trình Xét $0 \le x \le 1$. Đặt $x = cos\alpha$ với $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \cos 3\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ \alpha = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \end{array} \right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Do $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{9}$
Vậy hệ có nghiệm $\left(\cos\frac{\pi}{9}; 2\cos\frac{\pi}{9}\right)$

Bài toán 12. *Giải hệ phương trình sau:*

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 6}\,.\log_3(6 - y) = x \\ \sqrt{y^2 - 2y + 6}\,.\log_3(6 - z) = y \\ \sqrt{z^2 - 2z + 6}\,.\log_3(6 - x) = z. \end{cases} \qquad (I)$$

Lời giải. Điều kiện xác định: $x, y, z < 6$.

Viết lại hệ đã cho dưới dạng tương đương

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+6}} = \log_3(6-y) \\ \frac{y}{\sqrt{y^2-2y+6}} = \log_3(6-z) \\ \frac{z}{\sqrt{z^2-2z+6}} = \log_3(6-x) \end{cases}$$

• Xét các hàm số $f(u) = \frac{u}{\sqrt{u^2-2u+6}}$ và $g(u) = \log 3(6-u)$ trên $(-\infty; 6)$.

Ta có: $f'(u) = \frac{6-u}{(u^2-2u+6)}\sqrt{u^2-2u+6} > 0$, với $u \in (-\infty; 6)$ và $g'(u) = \frac{-1}{(6-u})\ln 3 < 0$, với $u \in (-\infty; 6)$.

Suy ra $f(u)$ đồng biến và $g(u)$ nghịch biến trên $(-\infty; 6)$. (1)

• Giả sử (x, y, z) là một nghiệm của hệ (I). Do tính đối xứng vòng quanh của hệ (I) đối với x, y, z, không mất tổng quát có thể giả sử $x = \max x, y, z$. Khi đó, từ (I) và (1) ta có

$$g(y) = f(x) = maxf(x), f(y), f(z) = maxg(x), g(y), g(z)$$

$$\Rightarrow y = minx, y, z \Rightarrow g(z) = f(y) = minf(x), f(y), f(z) = ming(x), g(y), g(z)$$

$$\Rightarrow z = maxx, y, z \Rightarrow z = x \Rightarrow f(z) = f(x) \Rightarrow g(x) = g(y) \Rightarrow x = y \Rightarrow x = y = z.$$

Như vậy, hệ (I) chỉ có thể có nghiệm dạng $x = y = z$.

• Với $x = y = z$, từ hệ (I) ta có hệ

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(y) = g(y) \\ f(z) = g(z) \end{cases} \qquad (II)$$

Xét phương trình $f(u) = g(u)$. (2)

Do (1) nên phương trình (2) chỉ có tối đa một nghiệm trên $(\breve{}\infty; 6)$. Hơn nữa, bằng cách thử trực tiếp dễ thấy $u = 3$ là nghiệm của (2). Suy ra pt (2) có nghiệm duy nhất $u = 3$. Do đó hệ (II) có duy nhất nghiệm $x = y = z = 3$. Vậy, hệ đã cho có duy nhất nghiệm $x = y = z = 3$.

Bài toán 13. *Cho hệ*

$$\begin{cases} m(x^2 + \sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + 1) = \text{yx} \\ m(\sqrt[3]{x^8} + x^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1) + (m-1)\sqrt[3]{x^4} = 2y\sqrt[3]{x^4} \end{cases}$$

Tìm m để hệ có nghiệm

Lời giải. Nếu $m=0$ thì $\begin{cases} \text{yx} = 0 \\ 2y\sqrt[3]{x^4} = -\sqrt[3]{x^4} \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) = (0,c)\forall c \in \mathbb{R}$

$m \neq 0$ đặt $t = \sqrt[3]{x}$ ta có hệ $\begin{cases} m(t^6+t^4+t^2+1) = yt^3 \\ m(t^8+t^6+t^4+t^2+1) = (2y+1)t^4 \end{cases}$

Nhận xét t=0 không phải là nghiệm của hệ Đặt $u = t + \frac{1}{t}$ $(|u| \geq 2)$

$$\begin{cases} m(t^3+t+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^3}) = y \\ m(t^4+t^2+1+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^4}) = 2y+1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m(u^3-2u) = y \\ m(u^4-3u^2+1) = 2y+1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m(u^3-2u) = y \\ m(u^4-3u^2+1) = 2m(u^3-2u)+1(*) \end{cases}$$

Phương trình (*) $\quad \Leftrightarrow m(u^4-2u^3-3u^2+4u+1) = 1$

$$\Leftrightarrow u^4-2u^3-3u^2+4u+1 = \frac{1}{m}$$

Xét hàm số $\begin{array}{ll} f(u) = u^4-2u^3-3u^2+4u+1 & (|u| \geq 2) \\ f'(u) = 4u^3-6u^2-6u+4 & \end{array}$

Vậy hệ có nghiệm $\Leftrightarrow \frac{1}{m} \geq -3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -\frac{1}{3} \\ m > 0 \end{array}\right.$

Bài toán 14. *Giải hệ*

$$\begin{cases} e^x = ey - x + 1 \\ e^x = ex - y + 1 \end{cases} \quad (I)$$

Lời giải.

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = ey - x + 1 \\ e^x - e^y = e(y-x) + (y-x) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = ey - x + 1 & (1) \\ e^x - e^y = (y-x)(e+1) & (2) \end{cases}$$

Nếu $x > y$ thì $e^x - e^y > 0 > (y-x)(e+1)$
Nếu $x < y$ thì $e^x - e^y < 0 < (y-x)(e+1)$
Nên từ (2) $\Leftrightarrow$ $x = y$, thay vào (1):

$$e^x - ex + x - 1 = 0$$

Xét $f(x) = e^x - ex + x \quad D = \mathbb{R}$
$f'(x) = e^x - e + 1$
$f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ e^x = e - 1 \ \Leftrightarrow x = \ln(e-1)$

x	$-\infty$		$\ln(e-1)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	CT	$\nearrow$	

Do đó phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm, ngoài ra $f(0) = 0$, $f(1) = 0$.

Vậy hệ có đúng hai nghiệm $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

2.3 Dạng 3: Bất phương trình, hệ bất phương trình

Bài toán 1. *(Phan Huy Khải) Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm dương*

$$\begin{cases} x(3 - y^2) > m \\ y(3 - z^2) > m \\ z(3 - x^2) > m \end{cases}$$

Lời giải. Xét hàm số $f(t) = 3t - t^3$ với $t \geq 0 \Rightarrow f'(t) = 3 - 3t^2$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Từ đó suy ra nếu $m < 2$ thì bpt: $t(3 - t^2) > m$ có nghiệm $t > 0$. Do đó hệ đã cho có nghiệm $x = y = z = t_0$ với t_0 là nghiệm tùy ý của bpt : $3t - t^3 > m$.
Xét khi $m \geq 2$, giả sử hệ có nghiệm là $(a; b; c)$ thì :
$a > 0; b > 0; c > 0$ và : $a(3 - b^2) > m; b(3 - c^2) > m; c(3 - a^2) > m$ (1)
suy ra : $3 - a^2 > 0; 3 - b^2 > 0; 3 - c^2 > 0$. Nên: $0 < a; b; c < \sqrt{3}$
Nhân vế theo vế các bất đẳng thức dương cùng chiều của (1) Ta được : $a(3-a^2)b(3-b^2)c(3-c^2) > m^3$ (2)
Mặt khác vì: $0 < a; b; c < \sqrt{3}$, nên : $0 < f(a) \leq 2; 0 < f(b) \leq 2; 0 < f(c) \leq 2$
suy ra : $0 < f(a).f(b).f(c) \leq 2^3 \leq m^3$ (3)
Từ (2) và (3) suy ra vô lý. Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi $m < 2$.

Bài toán 2. *Cho $\alpha, \beta, \gamma \in [0; \frac{\pi}{2}]$. Chứng minh rằng:* $2^{\cos\alpha \sin\alpha} + 2^{\cos\alpha \cos\beta} + 2^{\sin\alpha} \geq 4$.

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = 2^x - x - 1 \quad \forall x \in [0; 1]$
Ta có: $f'(x) = 2^x \ln 2 - 1$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.
$f''(x) = 2^x (\ln 2)^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ nên $f'(x)$ là hàm tăng trên $\mathbb{R}$. Suy ra tồn tại duy nhất x_0 để $f'(x_0) = 0$. Ta có bảng biến thiên như sau:

x	0		x_0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	0

$\Rightarrow f(x) \geq 0, \quad \forall x \in [0;1]$ hay $2^x \geq x+1, \quad \forall x \in [0;1]$
Để ý rằng khi $\alpha, \beta, \gamma \in [0; \frac{\pi}{2}]$. thì $\cos\alpha \sin\beta, \cos\alpha\cos\beta, \sin\alpha \in [0;1]$
Áp dụng bổ đề suy ra

$$\begin{aligned} 2^{\cos\alpha\sin\alpha} + 2^{\cos\alpha\cos\beta} + 2^{\sin\alpha} &\geq \cos\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha + 3 \\ &\geq \cos^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta + 3 = 4 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn: $\cos\alpha = 0, \sin\alpha = 1$ tức là $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Bài toán 3. *(Đề chọn HSG Quốc Học Huế -2005)*
Giải bất phương trình: $e^x + (x^3 - x)\ln(x^2+1) \leq 3^{\sqrt[3]{x}} \qquad (*)$

Lời giải. Biểu thức $\ln(x2+1)$ luôn xác định .
$x = 0; x = 1; x = -1$ là các giá trị thỏa mãn bất phương trình .
Ta có : $x^3 - x = (x - \sqrt[3]{x})(x^2 + x\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})$.
Khi $x \notin \{0; 1; -1\}$ thì $x \neq \sqrt[3]{x}$. Theo định lý Lagrange thì tồn tại số c nằm giữa x và $\sqrt[3]{x}$ sao cho: $e^x - e^{\sqrt[3]{x}} = (x - \sqrt[3]{x})e^c$
Vậy

$$\begin{aligned} (*) &\Rightarrow (x - \sqrt[3]{x})[e^c + (x^2 + x\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})]\ln(x^2+1) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x - \sqrt[3]{x} \leq 0 \quad (\text{Vì } [e^c + (x^2 + x\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})]\ln(x^2+1) > 0) \\ &\Leftrightarrow x^3 - x \leq 0 \end{aligned}$$

Nghiệm của bất phương trình đã cho là :$x \in (-\infty; -1] \cup [0;1]$

Bài toán 4. *Cho* $1 \neq a > 0$*, chứng minh rằng :* $\frac{\ln a}{a-1} \leq \frac{1+\sqrt[3]{a}}{a+\sqrt[3]{a}}$

Lời giải. $\frac{\ln a}{a-1} \leq \frac{1+\sqrt[3]{a}}{a+\sqrt[3]{a}} \qquad (1)$ với $1 \neq a > 0$
Trường hợp 1: $a > 1$
$(1) \Leftrightarrow (a + \sqrt[3]{a})\ln a \leq (1 + \sqrt[3]{a})(a-1) \qquad (2) \qquad$ Đặt $x = \sqrt[3]{a} \Rightarrow x > 1$
$(2) \Leftrightarrow 3(x^3 + x)\ln x \leq (1+x)(x^3 - 1) \qquad \forall x > 1$
$\Leftrightarrow x^4 + x^3 - x - 1 - 3(x^3 + x)\ln x \geq 0 \quad (3) \qquad \forall x > 1$
Đặt $f(x) = x^4 + x^3 - x - 1 - 3(x^3 + x)\ln x \quad x \in [1; +\infty)$
Ta có $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1 - 3[(3x^2+1)\ln x + (x^3 + x)\frac{1}{x}] = 4x^3 - 4 - 3(3x^2+1)\ln x$
$f''(x) = 3(4x^2 - 3x - 6x\ln x - \frac{1}{x}); \quad f^{(3)}(x) = 3(8x + \frac{1}{x^2} - 6\ln x - 9)$
$f^{(4)}(x) = 3(8 - \frac{6}{x} - \frac{2}{x^3}) = \frac{6(4x^3 - 3x - 1)}{x^3} = \frac{6(x-1)(4x^2+4x+1)}{x^3} \geq 0, \quad \forall x \geq 1$
Suy ra $f^{(3)}(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$
$f^{(3)}(x) \geq f^{(3)}(1) = 0 \ldots$ tương tự $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 1$
$\Rightarrow f(x) > f(1) = 0 \quad \forall x > 1$ suy ra (3) đúng.
Trường hợp 2: $0 < a < 1$, đặt $a = \frac{1}{a_1}, a_1 > 1$ quay về trường hợp 1.

Bài toán 5. *Cho* $n \in \mathbb{N}^*$ *với* $n \geq 7\,;\ 2 \leq k < n$*. Chứng minh* $k^n > 2.n^k$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}&k^n > 2n^k \Leftrightarrow n\ln k > \ln 2 + k\ln n\\&\Leftrightarrow n\ln k - k\ln n > \ln 2 (*)\\&\text{Xét } f(x) = n\ln x - x\ln n \qquad \text{Trên } [1;+\infty)\\&f'(x) = \frac{n}{x} - \ln n; f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \left(\frac{n}{\ln n}\right)\end{aligned}$$

x	1	$\frac{n}{\ln n}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	

Do đk $2 \le k \le n-1$ nên khi $f(x)$ xét $[2;n-1]$ thì giá trị nhỏ nhất đạt tại $f(2)$ hay $f(n-1)$.

Ta chứng minh $\begin{cases} f(2) > \ln 2 \\ f(n-1) > \ln 2 \end{cases}$

$$f(2) > \ln 2 \Leftrightarrow n\ln 2 - 2\ln n > \ln 2 \Leftrightarrow (n-1)\ln 2 > 2\ln n$$
$$2^{n-1} > n^2 \quad (\text{bằng quy nạp với } \ n \ge 7 \quad \text{luôn đúng})$$

$$\begin{aligned}f(n-1) > \ln 2 &\Leftrightarrow n\ln(n-1) - (n-1)\ln n > \ln 2\\&\Leftrightarrow n\ln(n-1) > (n-1)\ln n + \ln 2\\&(n-1)^n > 2.n^{n-1} (2)\end{aligned}$$

Đặt $n-1 = t$ $(t \ge 6)$ Thì (2) trở thành: $\begin{array}{l} t^{t+1} \ge 2(t+1)^t \quad (3) \\ \Leftrightarrow t \ge 2\left(\frac{t+1}{t}\right)^t = 2\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \end{array}$

Ta đã có: $\left(1+\frac{1}{t}\right)^t < 3$, $\forall t$.

Do đó $\left(1+\frac{1}{t}\right)^t < 6 \le t$ với $t \ge 6$ Vậy (3) đúng $\Rightarrow$ (2)đúng $\Rightarrow$ (1) được chứng minh.

3 Bài tập đề nghị

Bài toán 1. *(VMO 2007) Cho số thực $a > 2$. Đặt $f_n(x) = a^10x^{n+10} + x^n + \cdots + x + 1$, $(n = 1, 2, ...)$. Chứng minh rằng với mỗi n phương trình $f_n(x) = a$ có đúng một nghiệm . Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$.*

Bài toán 2. *(Hà Tĩnh 2009) Cho dãy $\{x_n\}$ biết $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_{n+1} = \frac{x_n^2-1}{2}$ với mọi $n = 1, 2, 3, \ldots$ Tìm giới hạn của dãy $\{x_n\}$ khi n dần tới vô cùng.*

Bài toán 3. *(Bà Rịa Vũng Tàu 2009) Cho dãy số xác định bởi $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{2(x_n^2+1)} - 2008$. Chứng minh rằng $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi n dần đến vô cùng.*

Bài toán 4. *(PTNK 1999) Cho $a > 1$ và dãy số $\{x_n\}$ được xác định như sau: $x_1 = a$, $x_{n+1} = a^{x_n}$ với mọi $n \ge 1$. Hãy xác định tất cả các giá trị của a để dãy $\{x_n\}$ hội tụ.*

Bài toán 5. *(Bắc Ninh 2009) Cho dãy số* $\{x_n\}$ *xác định bởi*

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} \\ x_{n+1} = \frac{\pi + \cos 2x_n}{4} \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Bài toán 6. *Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n cho trước, phương trình* $x^{2n+1} = x+1$ *có đúng một nghiệm thực. Gọi nghiêm đó là* x_n*. Tìm* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$*.*

Bài toán 7. *Cho phương trình:* $x^{13} - x^6 + 3x^4 - 3x^2 + 1 = 0$*.*

1) Chứng minh rằng phương trình có đúng một nghiệm thực.

2) Đặt $x_1 = 1$ *và* $x_{n+1} = \left(x_n^{-7/3} + 1\right)^{-3/13}$ *với mọi số nguyên dương n. Chứng minh rằng dãy số* $\{x_n\}$ *có giới hạn và khi đặt* $x_0 = -\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ *thì* x_0 *là nghiệm nói trên.*

Bài toán 8. *Cho tam giác ABC không có góc tù thoả mãn hệ thức:*

$$\frac{1}{3}(cos3A + cos3B) - \frac{1}{2}(cos2A + cos2B) + cosA + cosB = \frac{5}{6}.$$

Hãy tính các góc của tam giác đó.

Bài toán 9. *Giải phương trình:* $2x^2 - 6x + 2 = \log_2 \left[\frac{2x+1}{(x\_1)^2}\right]$

Bài toán 10. *Giải phương trình:* $2^{2^x} + 3^{2^x} = 2^x + 3^{x+1} + x + 1$

Bài toán 11. *Giải phương trình* $2^x - \frac{x}{2} - 1 = 0$

Bài toán 12. *Giải phương trình* $3^x - \frac{2x}{3} - 1 = 0$

Bài toán 13. *Giải phương trình* $\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 3)$

Bài toán 14. *Tìm a để phương trình có nghiệm*

$$a\sqrt{\frac{x-3}{x}} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x-3} - \sqrt{x} - \sqrt{x+4} = 0$$

Bài toán 15. *Giải hệ*

$$\begin{cases} (4x^2+1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \end{cases}$$

Bài toán 16. *Giải hệ*

$$\begin{cases} 2x + \ln(x^2+x+1) = y \\ 2y + \ln(y^2+y+1) = z \\ 2z + \ln(z^2+z+1) = x \end{cases}$$

Bài toán 17. *Giải hệ*

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 2 + \ln(x^2+x+1) = y \\ y^2 + 3y + 2 + \ln(y^2+y+1) = z \\ z^2 + 3z + 2 + \ln(z^2+z+1) = x \end{cases}$$

Tài liệu tham khảo

[1] *Các đề thi HSGQG (VMO).*

[2] *Các đề thi Toán quốc tế và các nước.*

[3] Phan Huy Khải, *Dãy số và giới hạn*, Nhà xuất bản Hà Nội, (1996).

[4] GS-TSKH Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Thủy Thanh *Dãy số và giới hạn*, Nhà xuất bản Giáo dục, (2002).

[5] GS-TSKH Nguyễn Văn Mậu, *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình*, Nhà xuất bản Giáo dục, (1996).

[6] TS Trần Nam Dũng, *Tập các bài dãy số trong đề thi Olympic 30/4 của Các Tỉnh phía Nam.*

[7] *Các đề thi Olympic của Các Tỉnh Duyên Hải Bắc bộ*

[8] *Báo Toán học Tuổi trẻ.*

[9] *Nguồn Internet.*

ỨNG DỤNG MỘT SỐ ĐỊNH LÍ CƠ BẢN CỦA GIẢI TÍCH

Huỳnh Tấn Châu, Trường THPT Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên

Trong chương trình toán học bậc THPT các định lí cơ bản của giải tích về lớp hàm số liên tục và khả vi có nhiều ứng dụng khá thú vị, nhưng chưa được đề cập nhiều trong các sách tham khảo cho học sinh chuyên toán. Trong một số trường hợp dùng các định lí trên để giải quyết và hổ trợ cho các bài toán về phương trình, chứng minh bất đẳng thức, các bài toán liên quan đến dãy số, ... tỏ ra khá hiệu quả và thú vị so với các cách giải khác. Còn nhiều ứng dụng khác của các định lí trên, mong được trao đổi từ phía các Thầy cô giáo và các em học sinh yêu thích môn toán.

1 Một số định lí về tính liên tục của hàm số

Định lý 1. *Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì hàm số f bị chặn trên đoạn $[a;b]$, tức là tồn tại số $M > 0$ sao cho : $|f(x)| \le M, \ \forall x \in [a,b]$.*

Định lý 2. *Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì f đạt được giá trị lớn nhất và đạt được giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó, tức là tồn tại các điểm $x_1, x_2 \in [a;b]$ sao cho :*

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2), \ \forall x \in [a,b]$$

Định lý 3. *(Định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục) Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a) = A, f(b) = B$. Khi đó nếu C là một số bất kì nằm giữa A và B thì có ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ để $f(c) = C$.*

Hệ quả 1. *Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì f nhận mọi giá trị trung gian giữa giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của nó trên đoạn đó.*

Định lý 4. *(ĐỊNH LÍ BOLZANO – CAUCHY) Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì có ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ để $f(c) = 0$.*

2 Một số định lí cơ bản của phép tính vi phân

Định lý 5. *(Định lí Lagrange) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, khả vi trên khoảng $(a;b)$. Khi đó tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$.*

Hệ quả 2. *Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f'(x) = 0 \forall x \in [a;b]$ thì $f(x)$ là hằng số trên $[a;b]$.*

Định lý 6. *(Định lí Rolle) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, khả vi trên khoảng $(a;b)$ và $f(a) = f(b)$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho $f'(c) = 0$.*

Định lý 7. *(Định lí Cauchy) Cho φ và ψ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[ab]$, khả vi trên khoảng $(a;b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a;b)$ để $[\psi(b) - \psi(a)] \varphi'(c) = [\varphi(b) - \varphi(a)] \psi'(c)$*

3 Một số bài toán áp dụng

3.1 Các bài toán về phương trình

Bài toán 1. *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $x_1, x_2, ..., x_n$ là n giá trị bất kì thuộc $[a;b]$. Chứng minh rằng tồn tại số $\xi \in [a;b]$ sao cho : $f(\xi) = \frac{1}{n}\left[f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right) + ... + f\left(x_n\right)\right]$.*

Lời giải. Vì hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ nên tồn tại GTNN là m và GTLN là M trên $[a;b]$.
$\Rightarrow m \le \frac{1}{n}\left[f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right) + ... + f\left(x_n\right)\right] \le M$
Do đó theo định lí về giá trị trung gian thì tồn tại số $\xi \in [a;b]$ sao cho :

$$f(\xi) = \frac{1}{n}\left[f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right) + ... + f\left(x_n\right)\right]$$

Bài toán 2. *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thoả mãn điều kiện $f(0) = f(1)$ Chứng minh rằng phương trình : $f\left(x\right) = f\left(x + \frac{1}{2012}\right)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$.*

Lời giải. Xét hàm số $g\left(x\right) = f\left(x + \frac{1}{2012}\right) - f\left(x\right)$
Hàm số này xác định và liên tục trên $\left[0; \frac{2011}{2012}\right]$
Ta có $g\left(0\right) = f\left(\frac{1}{2012}\right) - f\left(0\right)$

$$g\left(\frac{1}{2012}\right) = f\left(\frac{2}{2012}\right) - f\left(\frac{1}{2012}\right); \cdots ; g\left(\frac{2011}{2012}\right) = f\left(1\right) - f\left(\frac{2011}{2012}\right)$$

Vậy $g\left(0\right) + g\left(\frac{1}{2012}\right) + ... + g\left(\frac{2011}{2012}\right) = f\left(1\right) - f\left(0\right) = 0$
Suy ra tồn tại $i, j \in \mathbb{N}$ và $i, j \le 2011$ sao cho $g\left(\frac{i}{2012}\right) \le 0$ và $g\left(\frac{j}{2012}\right) \ge 0$
Vì g là hàm số liên tục trên $\left[0; \frac{2011}{2012}\right]$, nên theo định lí Bolzano – Cauchy thì phương trình $g\left(x\right) = f\left(x + \frac{1}{2012}\right) - f\left(x\right) = 0$ có nghiệm trên $\left[0; \frac{2011}{2012}\right]$
do đó phương trình : $f\left(x\right) = f\left(x + \frac{1}{2012}\right)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$.

Bài toán 3. *Tìm mọi cặp số thực $(b;c)$ sao cho với bất kì số thực a thì phương trình $a\cos 2x + b\cos x + c = 0$ có nghiệm thực thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$*

Lời giải. Đặt $f\left(x\right) = a\cos 2x + b\cos x + c = 2a{\cos^2}x + b\cos x + c\check{\ } a$
Điều kiện cần : Giả sử (b,c) là cặp số thực thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- Nếu $b = 0$, ta lấy $a = 0$, suy ra $c = 0$.
- Nếu $b \ne 0$, lấy $a = -\frac{b}{2\sqrt{2}} \Rightarrow f\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{c}{b} = 0$
$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{c}{b} \ge 0 \Rightarrow \frac{c}{b} \ge -\frac{1}{\sqrt{2}}$
Lấy $a = -\frac{b}{2} \Rightarrow f\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \cos x\left(1 - \cos x\right) + \frac{1}{2} + \frac{c}{b} = 0$
$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{c}{b} = -\cos x\left(1 - \cos x\right) < 0, \ \ \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{c}{b} < -\frac{1}{2}$
Như vậy ta có : hoặc $b = c = 0$, hoặc $b \ne 0$ và $-\frac{1}{\sqrt{2}} \le \frac{c}{b} < -\frac{1}{2}\,(1)$
Điều kiện đủ :

- Nếu $b = c = 0$ ta có : $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,\ \ \forall a \in \mathbb{R}$
- Nếu $b \neq 0$ và $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{c}{b} < -\frac{1}{2}$, ta có $bf\left(\frac{\pi}{4}\right) = b^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{c}{b}\right) \geq 0\,(2)$

Với $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ta có :
$b\left[f\left(x\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = 2b^2\left[\frac{c}{b} + \frac{1}{2}\left(\text{sinx} + \cos x\right)\right] \to 2b^2\left(\frac{c}{b} + \frac{1}{2}\right)$khi $x \to 0$, do đó tồn $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ mà $bf\left(x_0\right) < 0\,(3)$.
Từ (2) và (3), theo định lí Bolzano – Cauchy đối với hàm số liên tục ta suy ra tồn tại nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ mà $f(x) = 0$.
Vậy các cặp số (b, c) thỏa mãn (1) là các cặp số cần tìm.

Bài toán 4. *(VMO – 2006) Cho hàm số $f\left(x\right) = -x + \sqrt{\left(x + a\right)\left(x + b\right)}$, trong đó a, b là hai số thực dương cho trước. Chứng minh rằng với mỗi số thực s thuộc khoảng $(0; 1)$ đều tồn tại duy nhất một số thực dương α sao cho : $f\left(\alpha\right) = \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}$.*

Lời giải. Ta có $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[0; +\infty)$. Ta sẽ chứng minh các khẳng định sau :
1. $f(x)$ tăng thực sự trên $[0; +\infty)$
Với $a \neq b$ và $0x \geq$ ta có : $f'\left(x\right) = -1 + \frac{2x+a+b}{2\sqrt{(x+a)(x+b)}} = \frac{\left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b}\right)^2}{2\sqrt{(x+a)(x+b)}} > 0$
Do đó $f(x)$ là hàm tăng trên $[0; +\infty)$.
2. $f\left(0\right) = \sqrt{ab}; \lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right) = \frac{a+b}{2}$
Mặt khác $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x^2 + (x+a)(x+b)}{x + \sqrt{(x+a)(x+b)}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a+b+\frac{ab}{x}}{1 + \sqrt{\left(\frac{a}{x}+1\right)\left(\frac{b}{x}+1\right)}} = \frac{a+b}{2}$
3. Với mọi $0 < s < 1$, ta có : $\sqrt{ab} < \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}} \leq \frac{a+b}{2}$
BĐT bên trái là đúng theo BĐT AM – GM.
Đặt $m = \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}, x = \frac{a}{m}, y = \frac{b}{m}$ thì $x^5 + y^5 = 1$.
Theo BĐT Bernoulli ta có :

$$x = \left(1 + x^s - 1\right)^{\frac{1}{s}} \geq 1 + \frac{x^s - 1}{s}; y = \left(1 + y^s - 1\right)^{\frac{1}{s}} \geq 1 + \frac{y^s - 1}{s};$$

(không đồng thời xảy ra đẳng thức).
Cộng theo từng vế ta được $x + y > 2$, suy ra BĐT bên phải của 3.
Từ các kết quả trên suy ra $\exists!\alpha \in (0; 1)$ sao cho :

$$f\left(\alpha\right) = \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}$$

Bài toán 5. (OLYMPIC SINH VIÊN VIỆT NAM – 1994) Cho n là số nguyên dương, $a_k, b_k \in \mathbb{R}\left(k = 1, 2, ..., n\right)$. Chứng minh rằng phương trình $x + \sum\limits_{k=1}^{n}\left(a_k \sin kx + b_k \cos kx\right) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-\pi; \pi)$.

Lời giải. Xét hàm $F\left(x\right) = \frac{x^2}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\frac{a_k}{k}\cos kx + \frac{b_k}{k}\sin kx\right), x \in\ mathbbR.$
Nhận xét $F(x)$ là hàm khả vi trên $\mathbb{R}$.

Xét $F'(x) = x + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \sin kx + b_k \cos kx) = 0$

Khi đó $F(-\pi) = \frac{\pi^2}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \left(-\frac{a_k}{k}(-1)^k\right); F(\pi) = \frac{\pi^2}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \left(-\frac{a_k}{k}(-1)^k\right)$

Do $F(-\pi) = F(\pi)$. Sử dụng định lí Rolle trong khoảng $(-\pi;\pi)$, ta nhận được điều phải chứng minh.

Bài toán 6. *Cho $a_0, a_1, ..., a_n$ là các số thực và thỏa mãn điều kiện*

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + ... + \frac{a_n}{n+1} = a_0 + a_1 + \frac{a_2.2^2}{3} + \frac{a_3.2^3}{4} + ... + \frac{a_n.2^n}{n+1} = 0$$

Chứng minh rằng phương trình : $a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + na_nx^{n-1} = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;2)$

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \frac{1}{3}a_2x^3 + ... + \frac{1}{n+1}a_nx^{n+1}$

Ta có $f(1) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + ... + \frac{a_n}{n+1}$

$f(2) = 2\left(a_0 + a_1 + \frac{a_2.2^2}{3} + \frac{a_3.2^3}{4} + ... + \frac{a_n.2^n}{n+1}\right)$

Theo giả thiết ta có $f(1) = f(2) = 0$. Hiển nhiên $f(0)$ Theo định lí Rolle, tồn tại các số $c_1, c_2 : 0 < c_1 < 1 < c_2 < 2$ sao cho :

$f'(c_1) = f'(c_2) = 0$

Áp dụng định lí Rolle với hàm số $f'(x)$ trên $[c_1;c_2]$, ta thấy tồn tại $x_0 \in (c_1;c_2)$ sao cho : $f''(x_0) = 0$

Do đó $x_0 \in (c_1;c_2) \subset (0;2)$ là nghiệm của phương trình $f''(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + na_nx^{n-1} = 0$. (đpcm)

Bài toán 7. *Giải phương trình :* $3^x = 1 + x + \log_3(1+2x)\,(1)$

Lời giải. ĐK: $1 + 2x > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow x + 3^x = (1+2x) + \log_3(1+2x)\\ &\Leftrightarrow 3^x + \log_3 3^x = (1+2x) + \log_3(1+2x(2)\end{aligned}$$

Đặt $\varphi(t) = t + \log_3 t, t > 0$

] Ta có $\varphi(t)$ là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow \varphi(3^x) = \varphi(1+2x)\\ &\Leftrightarrow 3^x = 1 + 2x \Leftrightarrow 3^x - 2x - 1 = 0\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = 3^x - 2x\breve{}1, x > -\frac{1}{2}$

$f'(x) = 3^x \ln 3\breve{}2$

Ta có $f'(x)$ là hàm đồng biến, nên theo định lý Rolle phương trình $f(x) = 0$ có không quá 2 nghiệm. Rõ ràng $f(0) = f(1) = 0$.

Vậy phương trình đã cho chỉ có 2 nghiệm $x = 0, x = 1$.

Bài toán 8. *Giải phương trình :* $(1+\cos x)\left(2+4^{\cos x}\right)=3.4^{\cos x}$

Lời giải. Đặt $y=\cos x, -1\le y\le 1$.
Ta có phương trình: $(1+y)\left(2+4^y\right)=3.4^y \Leftrightarrow \frac{3.4^y}{2+4^y}-y-1=0$
Đặt $f\left(y\right)=\frac{3.4^y}{2+4^y}-y-1$. Ta có $f'\left(y\right)=\frac{6\ln 4.4^y}{(2+4^y)^2}\check{}1$
$f'\left(y\right)=0\Leftrightarrow 6\ln 4.4^y=\left(2+4^y\right)^2$
Đây là phương trình bậc hai theo 4^y nên có không quá 2 nghiệm.
Vậy theo định lí Rolle thì phương trình $f(y)=0$ có không quá 3 nghiệm.
Mặt khác ta thấy $y=0; y=\frac{1}{2}; y=1$ là 3 nghiệm của phương trình $f(y)=0$.
Vậy phương trình đã cho có các nghiệm tương ứng $x=k.2\pi; x=\frac{\pi}{2}+k.\pi; x=\pm\frac{\pi}{3}+k.2\pi\,(k\in)$

Bài toán 9. *Cho* $a,b,c\in\mathbb{R}$ *và* $n\in\mathbb{N}^*$ *thỏa mãn điều kiện* $c=-\frac{6(a+b)}{5(n+2)}$. *Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm trong khoảng* $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$*:*

$$a\text{sin}^n x+b\text{cos}^n x+c\sin x+c=0$$

Lời giải. Đặt $f\left(x\right)=\frac{2a}{n+2}\text{sin}^{n+2}x-\frac{2b}{n+2}\text{cos}^{n+2}x+\frac{2c}{3}\text{sin}^3x-c\text{cos}^2x$
Ta có $f(x)$ xác định, liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ $f'\left(x\right)=2a\text{sin}^{n+1}x\cos x+2b\text{cos}^{n+1}x\sin x+2c\text{sin}^2x\cos x+2c\cos x\sin cx$
$f'\left(x\right)=2\sin x\cos x\left(a\text{sin}^n x+b\text{cos}^n x+c\sin x+c\right)$
Ta có $f\left(0\right)=-\frac{2b}{n+2}+\frac{6(a+b)}{5(n+2)}=\frac{6a-4b}{5(n+2)}$
$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2a}{n+2}-\frac{2}{3}.\frac{6(a+b)}{5(n+2)}=\frac{2a}{n+2}-\frac{4(a+b)}{5(n+2)}=\frac{6a-4b}{5(n+2)}$
$\Rightarrow f\left(0\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, nên theo định lý Rolle thì $\exists x_0\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right): f'\left(x_0\right)=0$
Hay $\exists x_0\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right): f'\left(x_0\right)=2\sin x_0\cos x_0\left(a\text{sin}^n x_0+b\text{cos}^n x_0+c\sin x_0+c\right)=0$
$\exists x_0\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right): a\text{sin}^n x_0+b\text{cos}^n x_0+c\sin x_0+c=0$
Do đó phương trình $a\sin^x+b\cos^n x+c\sin x+c=0$ có nghiệm trong khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Bài toán 10. *(VIỆT NAM TST – 1997) Hãy xác định tất cả các cặp số thực dương* a,b *sao cho với mọi* $n\in\mathbb{N}^*$ *và với mọi nghiệm thực* x_n *của phương trình* $4n^2x=\log_2\left(2n^2x+1\right)$ *ta luôn có:*

$$a^{x_n}+b^{x_n}\ge 2+3x_n$$

Lời giải. $4n^2x=\log_2\left(2n^2x+1\right)$. Đặt $y=2n^2x$,
PT trở thành: $2y=\log_2\left(y+1\right)\Leftrightarrow 4^y=y+\Leftrightarrow f(y)=4^y-y-1=01$
Ta có $f'(y)=4^y\ln 4-1, f(y)=4^y(\ln 4)^2>0$
Do đó phương trình $f(y)=0$ có không quá 2 nghiệm phân biệt.
Thật vậy, nếu phương trình $f(y)=0$ có 3 nghiệm phân biệt thì theo định lí Rolle, phương trình $f'(y)=0$ có 2 nghiệm phân biệt và phương trình $f''(y)=0$ có nghiệm, mâu thuẫn.
Ta có $f\left(0\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ nên $\left[\begin{array}{l} y=0\\ y=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow x_n=0\vee x_n=-\frac{1}{4n^2}$ • Nếu $x_n=0$ thì $\forall a,b>0$ ta có $a^0+b^0\ge 2+3.0$ là đúng.
• Nếu $x_n=-\frac{1}{4n^2}$. Ta cần tìm $a,b>0$ để $a^{-\frac{1}{4n^2}}+b^{-\frac{1}{4n^2}}\ge 2-\frac{3}{4n^2},\forall n\in\mathbb{N}^*(*)$
Đặt $f(x)=a^{-x}+b^{-x}+3x$.

Ta có : $f'(x) = 3 - a^{-x}\ln a - b^{-x}\ln b, f(0) = 2$
Hàm $\phi(x) = t^{-x}\ln t$ có $\phi'(x) = -t^{-x}(\ln t)^2 < 0$ nên $\phi(x)$ giảm $(0; +\infty)$
$\Rightarrow f'(x)$ tăng trên $[0, +\infty)$
- Nếu $f'(0) < 0$, do $f(x)$ liên tục nên $\exists\varepsilon > 0$ sao cho $f'(x) < 0, \forall x \in [0, \varepsilon)$
Suy ra $f(x)$ giảm trên $[0, \varepsilon)$
Luôn $\exists n \in \mathbb{N}^*$ để $\frac{1}{4n^2} \in [0, \varepsilon)$ nên $f\left(\frac{1}{4n^2}\right) < f(0) = 2$ và khẳng định (*) không thỏa mãn.
- Xét $f'(0) \geq 0$. Khi đó $f'(0) \geq 0, \forall x \in [0; +\infty)$. Suy ra $f(x)$ tăng trên $[0; +\infty)$. Do đó $f\left(\frac{1}{4n^2}\right) \geq f(0) = 2$ và (*) thỏa mãn.
Vậy $f'(0) \geq 0$ là điều kiện cần và đủ để ta có (*).
Do đó $3 \geq \ln a + \ln b = \ln ab \Leftrightarrow ab \leq e^3$

3.2 Chứng minh bất đẳng thức

Bài toán 1. *Cho $a < b < c$. Chứng minh rằng :*

$$3a < a + b + c - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca} < a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}$$

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$
Hàm số này thỏa mãn mọi điều kiện của định lí Lagrange trên đoạn $[a; c]$
Ta có $f(a) = f(b) = f(c) = 0$. Theo định lí Lagrange tồn tại $x_1; x_2 : a < x_1 < b < x_2 < c$ sao cho : $f(b) - f(a) = (b - a) f'(x_1)$ và $f(c) - f(b) = (c - b) f'(x_2)$
$\Rightarrow f'(x_1) = f'(x_2) = 0$
Mặt khác $f'(x) = 3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + bc + ca$
Vì $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ nên suy ra $x_1, x_2\,(x_1 < x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$

$$x_1 = \frac{a + b + c - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}}{3}; x_2 = \frac{a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}}{3}$$

Từ $a < x_1 < b < x_2 < c$ suy ra đpcm.

Bài toán 2. *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c, d ta đều có :*

$$\sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}} \leq \sqrt{\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}}$$

Lời giải. Do a, b, c, d có vai trò như nhau, không mất tính tổng quát giả sử $a \leq b \leq c \leq d$.
Xét hàm số $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$
Hàm số này thỏa mãn mọi điều kiện của định lí Lagrange trên $[a; b], [b, c], [c, d]$
Ta có $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 0$. Theo định lí Lagrange tồn tại x_1, x_2, x_3 :
$a \leq x_1 \leq b \leq x_2 \leq c \leq x_3 \leq d$ sao cho $f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = 0$
Do đó $f'(x) = 4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$
Số hạng không chứa x của $f'(x)$ là $-4x_1x_2x_3$
Hệ số của số hạng chứa x của $f(x)$ là : $-(abc + abd + acd + bcd)$
Suy ra : $-4x_1x_2x_3 = -(abc + abd + acd + bcd) \Leftrightarrow x_1x_2x_3 = \frac{abc+abd+acd+bcd}{4}$
Hệ số của số hạng chứa x của $f'(x)$ là : $4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$

] Hệ số của số hạng chứa x^2 của $f(x)$ là : $ab + ac + ad + bc + bd + cd$
Suy ra $4\left(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1\right) = 2\left(ab + ac + ad + bc + bd + cd\right)$
$\Rightarrow x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{2}$
Theo bất đẳng thức AM – GM : $\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{3} \geq \sqrt[3]{\left(x_1x_2x_3\right)^2}$

$$\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6} \geq \sqrt[3]{\left(\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}\right)^2}$$

Hay $\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}} \leq \sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}$ (đpcm).
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$.

Bài toán 3. *Cho $t > 0$. Chứng minh :* $\left(1 + \frac{1}{t+1}\right)^{t+1} > \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$

Lời giải. Xét hàm số $f\left(x\right) = x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x\left[\ln\left(x + 1\right) - \ln x\right]$với $x > 0$.
Ta có $f'\left(x\right) = \ln\left(x + 1\right) - \ln x + x\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) = \ln\left(x + 1\right) - \ln x - \frac{1}{x+1}\,(1)$
Xét hàm số $g\left(y\right) = \ln y$ trên đoạn $[x; x + 1]$. Theo định lí Lagrange tồn tại $c : x < c < x + 1$ sao cho :
$g\left(x + 1\right) - g\left(x\right) = \left(x + 1 - x\right)g'\left(c\right) \Rightarrow \ln\left(x + 1\right) - \ln x = \frac{1}{c} > \frac{1}{x+1}$
$\Rightarrow \ln\left(x + 1\right) - \ln x - \frac{1}{x+1} > 0\,(2)$
Từ (1) và (2) suy ra $f'\left(x\right) > 0,\ \ \forall x > 0$.
Vậy $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.
Như vậy với $t > 0$ ta có $f\left(t + 1\right) > f\left(t\right) \Rightarrow \left(t + 1\right)\ln\left(1 + \frac{1}{t+1}\right) > t\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)$
$\Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{t+1}\right)^{t+1} > \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{t+1}\right)^{t+1} > \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$ (đpcm)

Bài toán 4. *Giả sử* $S_1 = \sum\limits_{k=1}^{4n^2}\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$ *và* $S_2 = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\frac{1}{3}}}$*. Với những n nguyên dương nào ta có* $S_1 < S_2$

Lời giải. Xét hàm số $f\left(x\right) = x^{\frac{1}{2}}\,(x \geq 1)$.
Theo định lí Lagrange trên đoạn : $[n; n + 1]$ tồn tại số $c \in (n; n + 1)$ ta có :
$f\left(n + 1\right) - f\left(n\right) = f'\left(c\right) = \frac{1}{2}c^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{2}n^{-\frac{1}{2}}$
$\Rightarrow n^{-\frac{1}{2}} > 2\left[(n + 1)^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}\right]$
Cho n nhận các giá trị từ $1, 2, \ldots, 4n^2$, cộng lại ta nhận được :

$$S_1 > 2\left(-1 + \sqrt{4n^2 + 1}\right) > 4n - 2$$

Xét hàm số $g\left(x\right) = x^{\frac{2}{3}}\,(x \geq 1)$.
Theo định lí Lagrange trên đoạn : $[n; n + 1]$ tồn tại số $c \in (n; n + 1)$ ta có :
$g\left(n + 1\right) - g\left(n\right) = g'\left(c\right) = \frac{2}{3}c^{-\frac{1}{3}} > \frac{2}{3}(n + 1)^{-\frac{1}{3}}$
$\Rightarrow 2(n + 1)^{-\frac{1}{3}} < 3\left[(n + 1)^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{2}{3}}\right]$
Cho n nhận các giá trị từ $0, 2, \ldots, n\breve{}1$, cộng lại ta nhận được :

$$2S_2 < 3n^{\frac{2}{3}} < 3n < 8n - 4$$

Suy ra $2S_2 < 2S_1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó không tồn tại số n nguyên dương nào thỏa mãn bài toán.

3.3 Các bài toán dãy số

Bài toán 1. *Xét phương trình :* $x^n - x^2 - x - 1 = 0\,(n > 2)$
1. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $n > 2$ *thì phương trình trên có một nghiệm dương duy nhất. 2. Tìm* $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(x_n - 1\right)$*, trong đó* x_n *là nghiệm dương của phương trình trên.*

Lời giải. 1. Xét hàm $f\left(x\right) = x^n - x^2 - x - 1 = 0\,(n > 2)$.
Ta có $f\left(1\right) = -2 < 0; f\left(2\right) = 2^n - 7 > 0$, nên theo định lí Bolzano – Cauchy suy ra phương trình $f\left(x\right) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(1;2)$
Rõ ràng nếu x là nghiệm dương của phương trình trên thì $x > 1$. (do $x^n = x^2 = x + 1 > 1$).
Với $x > 1$ thì $f'\left(x\right) = nx^{n-1} - 2x - 1 > 0$, nên theo định lý Rolle phương trình $f(x) = 0$ chỉ có nhiều nhất một nghiệm. Suy ra điều phải chứng minh. Hơn nữa ta có $x_n \in (0;2)$.
2. Trước hết ta chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.
Thật vậy $1 < x_n = \sqrt[n]{x_n^2 + x_n + 1} \le \frac{x_n^2 + x_n + n}{n} < 1 + \frac{5}{n}]$ (BĐT AM – GM)
Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ (1)
Ta có $x_n^n = x_n^2 + x_n + 1 \Rightarrow n = \frac{\ln\left(x_n^2 + x_n + 1\right)}{\ln x_n}$
$\Rightarrow n\left(x_n - 1\right) = \frac{(x_n - 1)}{\ln x_n} \ln\left(x_n^2 + x_n + 1\right)$ (2)
Ta chứng minh : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - 1}{\ln x_n} = 1$ (3)
Thật vậy đặt $x_n - 1 = y_n$.
Ta $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln x_n}{x_n - 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + y_n\right)^{y_n} = \ln e = 1$ (do $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$)
Từ (1), (2) và (3) suy ra : $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(x_n - 1\right) = \ln 3$.

Bài toán 2. (VMO – 2002) Xét phương trình : $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + ... + \frac{1}{k^2x-1} + ... + \frac{1}{n^2x-1} = \frac{1}{2}]$ (1) trong đó n là tham số nguyên dương
1. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, phương trình nêu trên có duy nhất nghiệm lớn hơn 1. Kí hiệu nghiệm đó là x_n. 2. Chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn bằng 4 khi $n \to +\infty$

Lời giải. 1. (1) $\Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + ... + \frac{1}{n^2x-1} = 0$ (2)
Đặt $f_n(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + ... + \frac{1}{n^2x-1}$
Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, hàm số $f_n(x)$ liên tục và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to1^+} f_n(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = -\frac{1}{2}$, nên theo định lí Bolzano – Cauchy $\exists! x_n > 1 : f_n(x_n) = 0$
Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất lớn hơn 1.
2. Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có :

$$\begin{aligned} f(4) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + ... + \frac{1}{(2n)^2-1} \\ &= \frac{1}{2}\left(-1 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{-1}{2(2n+1)} < 0 = f_n\left(x_n\right) \end{aligned}$$

Do hàm $f_(x)$ nghịch biến trên $(1;+\infty)$ nên suy ra $x_n < 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (3)
Do với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, hàm $f_n(x)$ khả vi trên $[x_n;4]$, nên theo định lí Lagrange với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ tồn tại $t \in (x_n;4)$: $\frac{f_n(4)-f_n(x_n)}{4-x_n} = f_n^/(t) = \frac{-1}{(t-1)^2} + \frac{-4}{(4t-1)^2} + ... + \frac{-n^2}{(n^2t-1)^2} < -\frac{1}{9},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$
$\Rightarrow \frac{-1}{2(2n+1)(4-x_n)} < -\frac{1}{9},\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_n > 4 - \frac{9}{2(2n+1)},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ (4)
Từ (3) và (4) ta được $4 - \frac{9}{2(2n+1)} < x_n < 4$
Do đó theo định lí về giới hạn của dãy số kẹp giữa hai dãy số, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$

Bài toán 3. *Cho dãy số thực (x_n) với $n = 1, 2, \ldots,$ thỏa mãn $\ln(1+x_n^2) + nx_n = 1]$ với mọi số nguyên dương n. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(1-nx_n)}{x_n}$*

Lời giải. Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ ta đặt $f_n(x) = \ln(1+x^2) + nx - 1, x \in \mathbb{R}$.
Ta có $f_n{}'(x) = \frac{2x}{1+x^2} + n = \frac{(x+1)^2}{1+x^2} + n - 1 \geq 0$
$f_n{}'(x) = 0 \Leftrightarrow n = 1, x = -1]$. Do đó hàm số $f_n(x)]$ là hàm số tăng thực sự.
Chú ý $f_n(0) = -1 < 0; f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) > 0$, nên theo định lí Bolzano – Cauchy, suy ra có duy nhất một số $x_n \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $f_n(x_n) = 0$ và $0 < x_n < \frac{1}{n}$. Bởi vậy

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n(1-nx_n)}{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\ln(1+x_n^2)}{x_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(nx_n.\ln\left(1+x_n^2\right)^{\frac{1}{x_n^2}}\right) = 1$$

Do $\lim\limits_{x\to0} \ln(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}} = 1$ và $nx_n = 1 - \ln(1+x_n^2) \to 1$ khi $n \to +\infty$,
vì $x_n \to 0$ khi $n \to +\infty$. Chú ý $\frac{n(1+nx_n)}{x_n} = \frac{n}{x_n} + n^2 \to +\infty$ khi $n \to +\infty$
Kết luận : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(1-nx_n)}{x_n} = 1$

4 Bài tập áp dụng

Bài toán 1. *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và α, β là hai số dương bất kỳ. Chứng minh rằng phương trình: $f(x) = \frac{\alpha f(a)+\beta f(b)}{\alpha+\beta}$ có nghiệm trên đoạn $[a;b]$*

Bài toán 2. (ROMANIA – 1998) Cho các số thực a, b, c thoả mãn : $2a + 10b + 29c = 0$. Chứng minh rằng phương trình : $ax^3 + bx + c = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$

Bài toán 3. *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, nhận giá trị trong khoảng $(0;2)$. Chứng minh rằng tồn tại số $c \in (0;1)$ sao cho : $(1-c)^2 + [f(c) + 2^{1-c}]^2 = 1$*

Bài toán 4. *Chứng minh rằng với a, b, c là các số thực tuỳ ý cho trước, phương trình $a\cos 3x + a\cos 2x + c\cos x + \sin x = 0$ luôn có nghiệm trong khoảng $(0;2\pi)$*

Bài toán 5. *Cho $m > 0$, còn a, b, c thoả mãn điều kiện $\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0$ Chứng minh rằng khi đó phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.*

Bài toán 6. *Chứng minh rằng phương trình : $x^5 - 5x^4 + 15x^3 - x^2 + 3x - 7 = 0$ có nghiệm duy nhất.*

Bài toán 7. *Xác định số nghiệm của phương trình :* $2e^{2-x^2}\left(x^6-3x^4+5x^2-1\right)-2e-5=0$

Bài toán 8. *Chứng minh rằng với mọi a, b phương trình* $a\left(25\sin 5x-\sin x\right)+b\left(49\sin 7x-9\sin 3x\right)=0$ *có ít nhất 7 nghiệm trên* $[0;2\pi]$

Bài toán 9. *Cho* $P\left(x\right)=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)$*, với* $x_1<x_2<x_3$*. Chứng minh rằng :* $\frac{P''(x_1)}{P'(x_1)}+\frac{P''(x_2)}{P'(x_2)}+\frac{P''(x_3)}{P'(x_3)}=0$

Bài toán 10. (VIỆT NAM TST – 1994) Cho đa thức bậc bốn $P(x)$ có 4 nghiệm dương. Chứng minh rằng phương trình : $\frac{1-4x}{x^2}.P\left(x\right)+\left(1-\frac{1-4x}{x^2}\right)P'\left(x\right)-P''\left(x\right)=0$ cũng có 4 nghiệm dương.

Bài toán 11. *Giải phương trình :*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2\sin^2x}+\frac{1}{2}=\cos 2x+\log_4\left(4\cos^3 2x-\cos 6x-1\right)$$

Bài toán 12. *Giải phương trình :*

$$64^x-8.343^{x-1}=8+12.4^x.7^{x-1}$$

Bài toán 13. *Tìm nghiệm dương của phương trình:*

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}}-x^3\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1+\frac{1}{x^2}}=1-x$$

Bài toán 14. *(OLYMPIC SINH VIÊN VIỆT NAM – 1999) Cho hàm số* $f(x)$ *khả vi trên* $[0;1]$ *và thỏa mãn điều kiện* $f\left(0\right)=0;f\left(1\right)=1;0\le f\left(x\right)\le 1,\ \ \forall x\in\mathbb{R}$*. Chứng minh rằng tồn tại hai số* $a,b\in(0;1)$*,* $a\neq b$ *sao cho* $f'\left(a\right).f'\left(b\right)=1$

Bài toán 15. *(OLYMPIC SINH VIÊN VIỆT NAM – 1994) Cho hàm số* $f(x)$ *liên tục và có đạo hàm cấp một trên* $(0;+\infty)$ *và không phải là hàm hằng. Cho* a,b *là hai số thực thỏa mãn điều kiện* $0<a<b$*. Chứng minh rằng phương trình :* $xf'\left(x\right)-f\left(x\right)=\frac{\mathrm{af}(b)-bf(a)}{b-a}$ *có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng* $(a;b)$

Bài toán 16. (OLYMPIC SINH VIÊN VIỆT NAM – 2003) Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên đoạn $[a;b]$ và thỏa mãn điều kiện a) $f\left(a\right)=\frac{1}{2}\left(a-b\right)$ b) $f\left(b\right)=\frac{1}{2}\left(b-a\right)$ c) $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$ Chứng minh rằng tồn tại các số đôi một khác nhau $c_1,c_2,c_3\in(a;b)$ sao cho $f'\left(c_1\right).f'\left(c_2\right).f'\left(c_3\right)=1$

Bài toán 17. *Chứng minh rằng nếu* $0<b<a<\frac{\pi}{2}$ *thì ta có* $\frac{a-b}{cos^2b}<\tan a-\tan b<\frac{a-b}{cos^2a}$

Bài toán 18. *Chứng minh rằng với* $\forall x\in(0;1);\forall n\in\mathbb{N}^*$ *, ta có* $x^n\sqrt{1-x}<\frac{1}{\sqrt{2ne}}$

Bài toán 19. (VMO – 1996) Cho bốn số thực không âm a, b, c, d thỏa mãn điều kiện : $2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+abc+abd+acd+bcd=16$. Chứng minh rằng :

$$a+b+c+d\ge\frac{2}{3}\left(ab+ac+ad+bc+bd+cd\right)$$

. Hỏi dấu bằng xảy ra khi nào ?

Bài toán 20. (OLYMPIC 30 – 4 – 2002) Cho phương trình : $x^n + x^{n-1} + ... + x - 1 = 0$ Chứng minh rằng với mỗi n nguyên dương thì phương trình trên có duy nhất một nghiệm dương x_n. Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Bài toán 21. *Cho phương trình với tham số n nguyên dương :* $x + 2x^2 + ... + nx^n = \frac{3}{4}$.
1. Chứng minh rằng phương trình trên có nghiệm dương duy nhất với mọi n nguyên dương, kí hiệu là x_n. *2. Chứng minh rằng dãy số* (x_n) *có giới hạn hữu hạn khi* $n \to +\infty$. *Tính giới hạn đó.*

Bài toán 22. *Cho phương trình* $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-1} + ... + \frac{1}{x^n-1} = 0 (n \in \mathbb{N}^*)$
1. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ *, phương trình trên luôn có nghiệm duy nhất* $x_n \in (0;1)$
2. Chứng minh dãy số (x_n) *, với* x_n *xác định ở câu 1 có giới hạn. Tìm giới hạn đó.*

Bài toán 23. *Tìm* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Bài toán 24. (OLYMPIC SINH VIÊN VIỆT NAM – 2002) Cho dãy số thực $\{u_n\}$ được xác định như sau : $u_1 = a \in, u_{n+1} = \frac{1}{2}\ln(1 + u_n^2) - 2002, n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ là một dãy hội tụ.

Bài toán 25. *Cho dãy số thực* $(x_n), n = 1, 2, 3, ...$ *được xác định như sau :*

$$\begin{cases} x_1 = b \\ x_{n+1} = \frac{2006}{3}\ln\left(x_n^2 + 2006^2\right) - 2006^2, n = 1, 2, 3, ... \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) *có giới hạn hữu hạn khi* $n \to +\infty$.

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Văn Mậu, Phương trình và bất phương trình, Nhà xuất bản Giáo dục 1999.
2. Nguyễn Văn Mậu, Dãy số và áp dụng, Nhà xuất bản Giáo dục 2008.
3. Nguyễn Văn Mậu, Các đề thi Olympic Toán sinh viên, Nhà xuất bản Giáo dục 2006.
4. Phan Huy Khải, Toán nâng cao giải tích, Nhà xuất bản Hà Nội 2002
5. Nguyễn Khắc Minh, Nguyễn Việt Hải, Các Bài Thi Olympic Toán THPT Việt Nam (1990 – 2006)
6. Tuyển tập các đề thi Toán học Olympic truyền thống các Tỉnh phía nam
7. Các nguồn tài liệu trên Internet.
8. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ
9. G.H. Hardy, J.E.Littlewood, G.Polya, Bất đẳng thức, Nhà xuất bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội 2002.

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Lê Văn Thẩn, Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn - Khánh Hòa

Hệ phương trình đại số là mảng kiến thức quan trọng trong chương trình toán học phổ thông, nó thường gặp trong các kì thi tuyển sinh vào lớp 10; tuyển sinh đại học, cao đẳng; thi học sinh giỏi. Mặc dù học sinh được cọ sát phần này khá nhiều song phần lớn các em vẫn thường lúng túng trong quá trình tìm ra cách giải. Kinh nghiệm của tôi về mặt hình thức là không mới. Cái mới ở đây chính là sự phân loại có tính chất xuyên suốt chương trình nhưng vẫn bám vào các kĩ thuật quen thuộc, phù hợp với tư duy của học sinh. Thêm vào đó, với mỗi bài toán đều có sự phân tích lôgic, có sự tổng quát và điều đặc biệt là cho học sinh tìm ra cái gốc của bài toán, các bài toán từ đâu mà có, người ta đã tạo ra chúng bằng cách nào. Thông qua các việc làm thường xuyên này, học sinh đã dần dần thích nghi một cách rất tốt, có tư duy sáng tạo, có năng lực làm toán và tạo ra các bài toán mới. Học sinh thường hiểu sâu và thích nghi khi học phần này.

1 Phương pháp thế

- Cơ sở phương pháp. Ta rút một ẩn (hay một biểu thức) từ một phương trình trong hệ và thế vào phương trình còn lại.

- Nhận dạng. Phương pháp này thường hay sử dụng khi trong hệ có một phương trình là bậc nhất đối với một ẩn nào đó.

Ví dụ 1. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} 2x+3y=5 \quad (1) \\ 3x^2-y^2+2y=4 \quad\quad (2) \end{cases}$

Chứng minh. Từ (1) ta có $x=\frac{5-3y}{2}$ thế vào (2) ta được $3\left(\frac{5-3y}{2}\right)^2-y^2+2y-4=0$

$$\Leftrightarrow 3(25-30y+9y^2)-4y^2+8y-16 \Leftrightarrow 23y^2-82y+59=0 \Leftrightarrow y=1,\ y=\frac{59}{23}$$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $\left\{(1;1)\,;\ \left(-\frac{31}{23};\frac{59}{23}\right)\right\}$ $\square$

Ví dụ 2. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x^4+2x^3y+x^2y^2=2x+9 \quad\quad (1) \\ x^2+2xy=6x+6 \quad\quad (2) \end{cases}$

Phân tích. Phương trình (2) là bậc nhất đối với y nên ta dùng phép thế.

Chứng minh. $x=0$ không thỏa mãn (2) $x\neq 0,\ (2)\Leftrightarrow y=\frac{6x+6-x^2}{2x}$ thế vào (1) ta được

$$x^4+2x^3\left(\frac{6x+6-x^2}{2x}\right)+x^2\left(\frac{6x+6-x^2}{2x}\right)^2=2x+9$$

$$\Leftrightarrow x^4+x^2(6x+6-x^2)+\frac{\left(6x+6-x^2\right)^2}{4}=2x+9 \Leftrightarrow x(x+4)^3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-4 \end{array}\right.$$

Do $x \neq 0$ nên hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(-4; \frac{17}{4}\right)$. □

Chú ý.

+ Hệ phương trình này có thể thế theo phương pháp sau:

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2+xy\right)^2=2x+9 \\ x^2+xy=\frac{x^2+6x+6}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x^2+6x+6}{2}\right)^2=2x+9 \\ x^2+xy=\frac{x^2+6x+6}{2} \end{cases}$

+ Phương pháp thế thường là công đoạn cuối cùng khi ta sử dụng các phương pháp khác.

2 Phương pháp cộng đại số

- Cơ sở phương pháp. Kết hợp 2 phương trình trong hệ bằng các phép toán: cộng, trừ, nhân, chia ta thu được phương trình hệ quả mà việc giải phương trình này là khả thi hoặc có lợi cho các bước sau.

- Nhận dạng. Phương pháp này thường dùng cho các hệ đối xứng loại II, hệ phương trình có vế trái đẳng cấp bậc k.

Ví dụ 3. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} 3y=\frac{y^2+2}{x^2} \\ 3x=\frac{x^2+2}{y^2} \end{cases}$

Chứng minh. ĐK:$xy \neq 0$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y=y^2+2 & (1) \\ 3y^2x=x^2+2 & (2) \end{cases}$ Trừ vế hai phương trình ta được

$$3x^2y-3xy^2=y^2-x^2 \Leftrightarrow 3xy(x-y)+(x-y)(x+y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ 3xy+x+y=0 \end{array}\right.$$

TH 1. $x-y=0 \Leftrightarrow y=x$ thế vào (1) ta được $3x^3-x^2-2=0 \Leftrightarrow x=1$

TH 2. $3xy+x+y=0$ Từ $3y=\frac{y^2+2}{x^2} \Rightarrow y>0$, $3x=\frac{x^2+2}{y^2} \Rightarrow x>0$.

$\Rightarrow 3xy+x+y>0$ Do đó TH 2 không xảy ra.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(1;1)$. □

Ví dụ 4. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{2-\frac{1}{y}}=2 & (1) \\ \frac{1}{\sqrt{y}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}=2 & (2) \end{cases}$

Chứng minh. ĐK: $x \geq \frac{1}{2}$, $y \geq \frac{1}{2}$ Trừ vế hai pt ta được $\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}+\sqrt{2-\frac{1}{y}}-\sqrt{2-\frac{1}{x}}=0 \Leftrightarrow$

$$\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}+\frac{2-\frac{1}{y}-\left(2-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{2-\frac{1}{y}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}}=0 \Leftrightarrow \frac{y-x}{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}+\frac{y-x}{xy\left(\sqrt{2-\frac{1}{y}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}\right)}=0$$

TH 1.$y-x=0 \Leftrightarrow y=x$ thế vào (1) ta được $\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}=2$

Đặt $t=\frac{1}{\sqrt{x}},\ t>0$ ta được

$\sqrt{2-t^2}=2-t \Leftrightarrow \begin{cases} 2-t\geq 0 \\ 2-t^2=4-4t+t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\leq 2 \\ t^2-2t+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow x=1$ và $y=1$

TH 2. $\frac{1}{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}+\frac{1}{xy\left(\sqrt{2-\frac{1}{y}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}\right)}=0$. TH này vô nghiệm do ĐK

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(1;1)$. $\square$

Ví dụ 5. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} 3x^2+5xy-4y^2=38 \\ 5x^2-9xy-3y^2=15 \end{cases}$

Phân tích. Đây là hệ phương trình có vế trái đẳng cấp bậc hai nên ta sẽ cân bằng số hạng tự do và thực hiện phép trừ vế.

Chứng minh. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 45x^2+75xy-60y^2=570 \\ 190x^2-342xy-114y^2=570 \end{cases} \Rightarrow -145x^2+417xy+54y^2=0$

Giải phương trình này ta được $y=\frac{1}{3}x,\ y=-\frac{145}{18}x$ thế vào một trong hai phương trình của hệ ta thu được kết quả. $\square$

Chú ý. - Cách giải trên có thể áp dụng cho pt có vế trái đẳng cấp bậc cao hơn.

- Cách giải trên chứng tỏ rằng hệ phương trình này hoàn toàn giải được bằng cách đặt $y=tx,\ x\neq 0$ hoặc đặt $x=ty,\ y\neq 0$.

Ví dụ 6. *Tìm m để* $\begin{cases} 3x^2+2xy+y^2=11 \\ x^2+2xy+3y^2=17+m \end{cases}$ *có nghiệm*

Phân tích. Để có kết quả nhanh hơn ta sẽ đặt ngay $y=tx,\ x\neq 0$

Chứng minh. TH 1. $x=0 \Rightarrow \begin{cases} y^2=11 \\ 3y^2=m+17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=11 \\ y^2=\frac{m+17}{3} \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm $x=0 \Leftrightarrow \frac{m+17}{3}=11 \Leftrightarrow m=16$

TH 2. $x\neq 0$. Đặt $y=tx$. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+2tx^2+t^2x^2=11 \\ x^2+2tx^2+3t^2x^2=17+m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3+2t+t^2)x^2=11 \\ (1+2t+3t^2)x^2=17+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\frac{11}{3+2t+t^2} \\ (1+2t+3t^2).\frac{11}{3+2t+t^2}=17+m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\frac{11}{3+2t+t^2} \\ (m-16)t^2+2(m+6)t+3m+40=0 \quad (*) \end{cases}$$

Ta có $\frac{11}{3+2t+t^2}>0,\ \forall t$ nên hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ pt (*) có nghiệm. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $m=16$ hoặc $m\neq 16,\ \Delta'=(m+6)^2-(m-16)(3m+40)\geq 0$

$$\Leftrightarrow 5-\sqrt{363}\leq m\leq 5+\sqrt{363}$$

Kết luận. $5-\sqrt{363}\leq m\leq 5+\sqrt{363}$ $\square$

Ví dụ 7. *Tìm m để* $\begin{cases} 5x^2+2xy-y^2\geq 3 \\ 2x^2+2xy+y^2\leq \frac{m}{m-1} \end{cases}$ *có nghiệm*

Chứng minh. Nhân 2 vế của bpt thứ hai với -3 ta được $\begin{cases} 5x^2+2xy-y^2\geq 3 \\ -6x^2-6xy-3y^2\geq -3-\frac{1}{m-1} \end{cases}$

Cộng vế hai bpt cùng chiều ta được $-x^2-4xy-4y^2\geq -\frac{1}{m-1} \Leftrightarrow (x+2y)^2\leq \frac{1}{m-1}$

Điều kiện cần để hệ bpt có nghiệm là $\frac{1}{m-1}>0 \Leftrightarrow m>1$

Điều kiện đủ. Với $m>1$. Xét hệ pt $\begin{cases} 5x^2+2xy-y^2=3 \\ 2x^2+2xy+y^2=1 \end{cases}$ (II)

Giả sử $(x_0;y_0)$ là nghiệm của hệ (II). Khi đó

$$\begin{cases} 5x_0^2+2x_0y_0-y_0^2=3 \\ 2x_0^2+2x_0y_0+y_0^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_0^2+2x_0y_0-y_0^2\geq 3 \\ 2x_0^2+2x_0y_0+y_0^2\leq \frac{m}{m-1} \end{cases}$$

Vậy mọi nghiệm của hệ (II) đều là nghiệm của hệ (I).

$$(II)\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+2xy-y^2=3 \\ -6x^2-6xy-3y^2=-3 \end{cases} \Rightarrow -x^2-4xy-4y^2=0 \Leftrightarrow x+2y=0 \Leftrightarrow x=-2y$$

Thay $x=-2y$ vào pt thứ 2 của hệ (II) ta được

$$8y^2-4y^2+y^2=1 \Leftrightarrow 5y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow x=\mp\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Hệ (II) có nghiệm, do đó hệ (I) cũng có nghiệm. Vậy $m>1$. □

Ví dụ 8. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} \sqrt{3x}\left(1+\frac{1}{x+y}\right)=2 \\ \sqrt{7y}\left(1-\frac{1}{x+y}\right)=4\sqrt{2} \end{cases}$

Phân tích.Các biểu thức trong ngoặc có dạng $a+b$ và $a\breve{}b$ nên ta chia hai vế pt thứ nhất cho $\sqrt{3x}$ và chia hai vế pt thứ hai cho $\sqrt{7y}$.

Chứng minh. ĐK: $x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\neq 0$

Dễ thấy $x=0$ hoặc $y=0$ không thỏa mãn hệ pt. Vậy $x>0, y>0$.

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(1+\frac{1}{x+y}\right)=\frac{2}{\sqrt{3x}} \\ \left(1-\frac{1}{x+y}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=\frac{2}{\sqrt{3x}}+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \\ \frac{2}{x+y}=\frac{2}{\sqrt{3x}}-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3x}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}=1 \quad (1) \\ \frac{1}{\sqrt{3x}}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}=\frac{1}{x+y} \end{cases}$

Nhân theo vế hai pt trong hệ ta được $\left(\frac{1}{\sqrt{3x}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3x}}-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}\right)=\frac{1}{x+y}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3x}-\frac{8}{7y}=\frac{1}{x+y} \Leftrightarrow 7y^2-38xy-24x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=6x \\ y=-\frac{4}{7}x \end{array}\right.$$

TH 1. $y=6x$ thế vào pt (1) ta được

$$\frac{1}{\sqrt{3x}}+\frac{2}{\sqrt{21x}}=1 \Leftrightarrow x=\frac{11+4\sqrt{7}}{21} \Rightarrow y=\frac{22+8\sqrt{7}}{7}$$

TH 2.$y=-\frac{4}{7}x$ không xảy ra do $x>0, y>0$.

Vậy hệ pt có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\frac{11+4\sqrt{7}}{21};\frac{22+8\sqrt{7}}{7}\right)$. $\square$

Chú ý. Hệ phương trình có dạng $\begin{cases} a+b=m \\ a-b=n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+n=2a \\ m-n=2b \end{cases}$

Trong trường hợp này, dạng thứ nhất có vế phải chứa căn thức nên ta chuyển về dạng thứ hai sau đó nhân vế để mất căn thức.

Tổng quát ta có hệ sau: $\begin{cases} \frac{a}{\sqrt{bx}}=m+\frac{n}{px+qy} \\ \frac{c}{\sqrt{dy}}=m+\frac{n}{px+qy} \end{cases}$

Ví dụ 9. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x^2(y+z)^2=(3x^2+x+1)y^2z^2 \\ y^2(z+x)^2=(4y^2+y+1)z^2x^2 \\ z^2(x+y)^2=(5z^2+z+1)x^2y^2 \end{cases}$

Phân tích. Nếu chia hai vế của mỗi phương trình cho $x^2y^2z^2$ thì ta được hệ mới đơn giản hơn.

Chứng minh. TH 1. $xyz=0$. Nếu $x=0$ thì hệ $\Leftrightarrow y^2z^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=t,\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} z=0 \\ y=t,\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$

TH 2. $xyz\neq 0$. Chia hai vế của mỗi pt trong hệ cho $x^2y^2z^2$ ta được

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{z}+\frac{1}{y}\right)^2=3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} \quad (1) \\ \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)^2=4+\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2} \quad (2) \\ \left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)^2=5+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2} \quad (3) \end{cases}$$

Cộng vế 3 phương trình của hệ ta được

$$\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{y}\right)^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)^2=12+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4(4) \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-3(5) \end{array}\right.$$

Từ (4) và (1) ta có $\left(4-\frac{1}{x}\right)^2=3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{9}{x}=13 \Leftrightarrow x=\frac{9}{13}$.

Từ (4) và (2) ta có $y=\frac{3}{4}$. Từ (4) và (3) ta có $z=\frac{9}{11}$

Tương tự, từ (5), (1), (2), (3) ta có $x=-\frac{5}{6},\ y=-1,\ z=-\frac{5}{4}$

Vậy hệ có tập nghiệm là

$$S=\left\{(t;0;0);\ (0;t;0);\ (0;0;t);\ \left(\frac{9}{13};\frac{3}{4};\frac{9}{11}\right);\ \left(-\frac{5}{6};-1;-\frac{5}{4}\right),\ t\in\mathbb{R}\right\}$$

$\square$

Nhận xét. Qua ví dụ trên ta thấy: từ một hệ phương trình đơn giản, bằng cách đổi biến số (ở trên là phép thay nghịch đảo) ta thu được một hệ phức tạp. Vậy đối với một hệ phức tạp ta sẽ nghĩ đến phép đặt ẩn phụ để hệ trở nên đơn giản.

3 Phương pháp đặt ẩn phụ

Ví dụ 10. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x+y+xy=-1 \\ x^2+y^2-xy=7 \end{cases}$

Chứng minh. Đây là hệ đối xứng loại I đơn giản nên ta giải theo cách phổ biến.

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)+xy=-1 \\ (x+y)^2-3xy=7 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases}$ $(\exists x,\ y \Leftrightarrow S^2 \geq 4P)$ ta được $\begin{cases} S+P=-1 \\ S^2-3P=7 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S=1,\ P=-2 \\ S=-4,\ P=3 \end{array} \right.$

TH 1. $\begin{cases} S=1 \\ P=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1,\ y=2 \\ x=2,\ y=-1 \end{array} \right.$

TH 2. $\begin{cases} S=-4 \\ P=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-4 \\ xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1,\ y=-3 \\ x=-3,\ y=-1 \end{array} \right.$

Vậy tập nghiệm của hệ là

$$S=\{(-1;2);\ (2;-1);\ (-1;-3);\ (-3;-1)\}$$

□

Chú ý. - Nếu hệ pt có nghiệm là $x;y$ thì do tính đối xứng, hệ cũng có nghiệm là y,x . Do vậy, để hệ có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là $x=y$.

- Không phải lúc nào hệ đối xứng loại I cũng giải theo cách trên. Đôi khi việc thay đổi cách nhìn nhận sẽ phát hiện ra cách giải tốt hơn.

Ví dụ 11. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18 \\ xy(x+1)(y+1)=72 \end{cases}$

Phân tích. Đây là hệ đối xứng loại I

Hướng 1. Biểu diễn từng pt theo tổng $x+y$ và tích xy

Hướng 2. Biểu diễn từng pt theo x^2+x và y^2+y. Rõ ràng hướng này tốt hơn.

Chứng minh. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+x)+(y^2+y)=18 \\ (x^2+x)(y^2+y)=72 \end{cases}$ Đặt $\begin{cases} x^2+x=a,\ a \geq -\frac{1}{4} \\ y^2+y=b,\ b \geq -\frac{1}{4} \end{cases}$ ta được

$\begin{cases} a+b=18 \\ ab=72 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=6,\ b=12 \\ a=12,\ b=6 \end{array} \right.$

TH 1. $\begin{cases} a=6 \\ b=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+x=6 \\ y^2+y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2,\ x=-3 \\ y=3,\ y=-4 \end{cases}$

TH 2.Đổi vai trò của a và b ta được $\begin{cases} x=3,\ x=-4 \\ y=2,\ y=-3 \end{cases}$ Vậy tập nghiệm của hệ là

$S = \{(2;3);\ (2;-4);\ (-3;3);\ (-3;-4);\ (3;2);\ (-4;2);\ (3;-3);\ (-4;-3)\}$ $\square$

Nhận xét. Bài toán trên được hình thành theo cách sau

Xuất phát từ hệ phương trình đơn giản $\begin{cases} a+b=18 \\ ab=72 \end{cases}$ (I)

1. Thay $a = x^2 + x,\ b = y^2 + y$ vào hệ (I) ta được hệ

(1) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18 \\ xy(x+1)(y+1)=72 \end{cases}$ đó chính là ví dụ 11

2. Thay $a = x^2 + xy,\ b = y^2 - xy$ vào hệ (I) ta được hệ

$$(2)\begin{cases} x^2+y^2=18 \\ xy(x^2-y^2)=72 \end{cases}$$

3. Thay $a = x^2 + 2x,\ b = 2x + y$ vào hệ (I) ta được hệ

$$(3)\begin{cases} x^2+4x+y=18 \\ x(x+2)(2x+y)=72 \end{cases}$$

4. Thay $a = x + \frac{1}{x},\ b = y + \frac{1}{y}$ vào hệ (I) ta được hệ

$$(4)\begin{cases} (x+y)xy+x+y=18xy \\ (x^2+1)(y^2+1)=72xy \end{cases}$$

5. Thay $a = x^2 + 2xy,\ b = y^2 - xy$ vào hệ (I) ta được hệ

$$(5)\begin{cases} x^2+y^2+xy=18 \\ xy(x+2y)(y-x)=72 \end{cases}$$

- Như vậy, với hệ xuất (I), bằng cách thay biến ta thu được rất nhiều hệ pt mới.

- Thay hệ xuất phát (I) bằng hệ xuất phát (II) $\begin{cases} a+b=7 \\ a^2-b^2=21 \end{cases}$ và làm tương tự như trên ta lại thu được các hệ mới khác. Chẳng hạn

6. Thay $a = x^2 + y^2,\ b = xy$ vào hệ (II) ta được hệ

$$(6)\begin{cases} x^2+y^2+xy=7 \\ x^4+y^4+x^2y^2=21 \end{cases}$$

7. Thay $a = x + \frac{1}{x},\ b = y + \frac{1}{y}$ vào hệ (II) ta được hệ

$$(7)\begin{cases} x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=7 \\ x^2-y^2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=21 \end{cases}$$

8. Thay $a = x + \frac{1}{y},\ b = \frac{x}{y}$ vào hệ (II) ta được hệ

$$(8)\begin{cases} xy+x+1=7y \\ (xy+1)^2+x^2=21y^2 \end{cases}$$

9. Thay $a = x + y,\ b = \frac{1}{y}$ vào hệ (II) ta được hệ

$$(9)\begin{cases} (x+y)y + 1 = 9y \\ (x+y-2)^2y^2 - 21y^2 = 1 \end{cases}$$

10. Thay $a = x^2 + 2x,\ b = y^2 + 2x$ vào hệ (II) ta được hệ

$$(10)\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x = 7 \\ x^4 - y^4 + 4x(x^2 - y^2) = 21 \end{cases}$$

Như vậy, nếu chúng ta biết cách tạo ra bài toán thì chúng ta có thể nghĩ ra cách giải của những bài toán khác.

Ví dụ 12. *Giải các hệ pt sau*

$$a)\begin{cases} x(x+y+1) - 3 = 0 \\ (x+y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\frac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1+2x) = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases} \qquad d)\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x+y) = 7 \\ y(y-2x) - 2x = 10 \end{cases}$$

Chứng minh. a) ĐK. $x \neq 0$ Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 1 - 3.\frac{1}{x} = 0 \\ (x+y)^2 - 5.\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1 = 0 \end{cases}$

Đặt $x + y = a,\ \frac{1}{x} = b$ ta được hệ

$$\begin{cases} a + 1 - 3b = 0 \\ a^2 - 5b^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b - 1 \\ (3b-1)^2 - 5b^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2,\ b = 1 \\ a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 1 \\ x = 2,\ y = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

b) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+y) + xy(x^2+y+1) = -\frac{5}{4} \\ (x^2+y)^2 + xy = -\frac{5}{4} \end{cases}$ Đặt $x^2 + y = a,\ xy = b$ ta được

$$\begin{cases} a + b(a+1) = -\frac{5}{4} \\ a^2 + b = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - ab = 0 \\ b = -\frac{5}{4} - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0,\ b = -\frac{5}{4} \\ a = -\frac{1}{2},\ b = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

TH1. $\begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ xy = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{\frac{5}{4}} \\ y = -\sqrt[3]{\frac{25}{16}} \end{cases}$

TH2. $\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y = -\frac{1}{2} \\ xy = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{3}{2x} = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của hệ pt là $S = \left\{\left(1; -\frac{3}{2}\right);\ \left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}}; -\sqrt[3]{\frac{25}{16}}\right)\right\}$

c) ĐK: $x \geq -1, y \geq -1, xy \geq 0$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ x + y + 2 + 2\sqrt{(x+1)(y+1)} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ x + y + 2\sqrt{x + y + xy + 1} = 14 \end{cases}$

Đặt $x + y = a,\ \sqrt{xy} = b$ $a \geq -2,\ b \geq 0,\ a^2 \geq 4b^2$ ta được hệ pt

$$\begin{cases} a - b = 3 \\ a + 2\sqrt{a + b^2 + 1} = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 + b \\ 2\sqrt{b^2 + b + 4} = 11 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 + b \\ 3b^2 + 26b - 105 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$ (thỏa điều kiện)

d) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + (y+1)^2 = 9 \\ (y-x)^2 - (x+1)^2 = 9 \end{cases}$

Đặt $a = x + 1,\ b = y + 1 \Rightarrow b - a = y - x$ ta được hệ $\begin{cases} a^2 + b^2 = 9 \\ (b-a)^2 - a^2 = 9 \end{cases}$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = (b-a)^2 - a^2 \Leftrightarrow a^2 = -2ab \Leftrightarrow a = 0$ hoặc$a = -2b$

$a = 0 \Rightarrow b = \pm 3 \Rightarrow x = -1, y = 2$ hoặc $x = -1, y = -4$

$a = -2b \Rightarrow 5b^2 = 9 \Leftrightarrow b = \pm\frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow a = \mp\frac{6}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow x = -1 - \frac{6}{\sqrt{5}}, y = -1 + \frac{3}{\sqrt{5}}$ hoặc $x = -1 + \frac{6}{\sqrt{5}}, y = -1 - \frac{3}{\sqrt{5}}$

Vậy hệ có 4 nghiệm như trên. □

4 Phương pháp đưa về dạng tích

- Cơ sở phương pháp. Phân tích một trong hai phương trình của hệ thành tích các nhân tử. Đôi khi cần tổ hợp hai phương trình thành phương trình hệ quả rồi mới đưa về dạng tích.

- Cách thành lập hệ dạng này $\begin{cases} (ax + by + c)f(x;y) = 0 \\ g(x;y) = 0 \end{cases}$ trong đó $f(x,y)$ được chọn sao cho $\begin{cases} f(x;y) = 0 \\ g(x;y) = 0 \end{cases}$ vô nghiệm hoặc $\begin{cases} f(x;y) = 0 \\ g(x;y) = 0 \end{cases}$ giải được; $g(x,y)$ được chọn sao cho $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ g(x;y) = 0 \end{cases}$ giải được và thỏa mãn kết hợp được với $f(x,y)$

Ví dụ 13. *Giải hệ phương trình sau* $\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \ \ (1) \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \ \ (2) \end{cases}$

Phân tích. Rõ ràng, việc giải phương trình (2) hay kết hợp (1) với (2) không thu được kết quả khả quan nên chúng ta tập trung để giải (1).

Chứng minh. ĐK: $x \geq 1,\ y \geq 0$

(1) $\Leftrightarrow y(x+y) + (x+y) = x^2 - y^2 \Leftrightarrow (x+y)(y+1-x+y) = 0$

TH1. $x + y = 0$ (loại do$x \geq 1,\ y \geq 0$)

TH2. $2y + 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2y + 1$ thế vào pt (2) ta được

$(2y+1)\sqrt{2y} - y\sqrt{2y} = 4y + 2 - 2y \Leftrightarrow (y+1)\sqrt{2y} = 2(y+1)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y + 1 = 0 \\ \sqrt{2y} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = 2 \end{array}\right.$ Do $y \geq 0 \Rightarrow y = 2$ Vậy hệ có nghiệm $(x;y) = (5;2)$ □

Chú ý. Do có thể phân tích được thành tích của hai nhân tử bậc nhất đối y (hay x) nên có thể giải pt (1) bằng cách coi (1) là pt bậc hai ẩn y (hoặc x).

Ví dụ 14. *Giải hệ phương trình sau* $\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \ \ (1) \\ 2y = x^3 + 1 \ \ (2) \end{cases}$

Phân tích. Từ cấu trúc của pt (1) ta thấy có thể đưa (1) về dạng tích.

Chứng minh. ĐK: $xy \neq 0$ (1) $\Leftrightarrow x - y - \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0 \Leftrightarrow x - y + \frac{x-y}{xy} = 0 \Leftrightarrow (x-y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 0$

TH1. $x = y$ thế vào (2) ta được $x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ (TM)

TH2. $1 + \frac{1}{xy} = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{x}$ thế vào pt (2) ta được

$x^4 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - \frac{1}{2})^2 + (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{2} = 0$ Pt này vô nghiệm.

Vậy hệ có nghiệm $S = \left\{(1;1);\ \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right);\ \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$ □

Ví dụ 15. *Giải hệ phương trình sau* $\begin{cases} x - \frac{1}{x^3} = y - \frac{1}{y^3} & (1) \\ (x-4y)(2x-y+4) = -36 & (2) \end{cases}$

Chứng minh.

$x - \frac{1}{x^3} = y - \frac{1}{y^3} \Leftrightarrow (x-y) = \frac{(y-x)(y^2+xy+x^2)}{x^3y^3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ \frac{y^2+xy+x^2}{x^3y^3} = -1 \end{array}\right.$

TH1. $x = y$ thế vào (2) ta được $x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ x = 2 \end{array}\right.$

TH2. $\frac{y^2+xy+x^2}{x^3y^3} = -1 \Rightarrow xy < 0$

thế vào pt (2) ta được

(2) $\Leftrightarrow 2x^2 + 4y^2 - 9xy + 4x - 16y = -36 \Leftrightarrow 2(x+1)^2 + 4(y-2)^2 - 9xy = -18$

Trường hợp này không xảy ra do $xy < 0 \Rightarrow 2(x+1)^2 + 4(y-2)^2 - 9xy > 0$

Vậy hệ có nghiệm $S = \{(2;2);\ (-6;-6)\}$ □

Ví dụ 16. *Giải hệ phương trình sau* $\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{8xy}{x+y} = 16 & (1) \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y & (2) \end{cases}$

Phân tích. Rõ ràng, việc giải phương trình (2) hay kết hợp (1) với (2) không thu được kết quả khả quan nên chúng ta tập trung để giải (1)

Chứng minh. ĐK: $x + y > 0$ (1) $\Leftrightarrow (x^2+y^2)(x+y) + 8xy = 16(x+y)$

$\Leftrightarrow \left[(x+y)^2 - 2xy\right](x+y) + 8xy = 16(x+y)$

$\Leftrightarrow (x+y)\left[(x+y)^2 - 16\right] - 2xy(x+y-4) = 0$

$\Leftrightarrow (x+y-4)\left[(x+y)(x+y+4) - 2xy\right] = 0$

TH1. $x + y - 4 = 0$ thế vào (2) ta được $x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \Rightarrow y = 7 \\ x = 2 \Rightarrow y = 2 \end{array}\right.$

TH2.$(x+y)(x+y+4) - 2xy = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4(x+y) = 0$ Pt này vô nghiệm do điều kiện.

Vậy hệ có nghiệm $S = \{(-3;7);\ (2;2)\}$ □

5 Phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số

*** Cơ sở phương pháp.** Nếu $f(x)$ đơn điệu trên khoảng $(a;b)$ và $x, y \in (a;b)$ thì $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

* **Cách xây dựng hệ theo phương pháp này.**
- Lấy hàm số $f(t)$ đơn điệu trên khoảng $(a;b)$, $u(x;y), v(x;y) \in (a;b)$
- Lấy $g(x;y)$ sao cho hệ $\begin{cases} u(x;y) = v(x;y) \\ g(x;y) = 0 \end{cases}$ giải được trên tập xác định của chúng.
- Lập hệ phương trình $\begin{cases} f(u) = f(v) \\ g(x;y) = 0 \end{cases}$

Ví dụ 17. *Giải hệ phương trình sau* $\begin{cases} 2^x - 2^y = (y-x)(xy+2) \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

Phân tích. Nếu thay $2 = x^2 + y^2$ vào phương trình thứ nhất thì ta sẽ được hđt
Chứng minh. Thay $2 = x^2 + y^2$ vào phương trình thứ nhất ta được
$2^x - 2^y = (y-x)(xy + x^2 + y^2) \Leftrightarrow 2^x - 2^y = y^3 - x^3 \Leftrightarrow 2^x + x^3 = 2^y + y^3$ (1)
Xét hàm số $f(t) = 2^t + t^3, t \in \mathbb{R}$ có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 3t^2 > 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. (1) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ thế vào pt thứ hai ta được $x = y = \pm 1$. Vậy tập nghiệm của hệ là S $= \{(1;1);\ (-1;-1)\}$ □

Ví dụ 18. *Giải hệ phương trình sau* $\begin{cases} (4x^2+1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0 \quad (1) \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \quad (2) \end{cases}$

Chứng minh. ĐK: $\begin{cases} 3 - 4x \geq 0 \\ 5 - 2y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{4} \\ y \leq \frac{5}{2} \end{cases}$
(1) $\Leftrightarrow (4x^2+1)2x + (2y-6)\sqrt{5-2y} = 0$
$\Leftrightarrow \left[(2x)^2 + 1\right](2x) = \left[\left(\sqrt{5-2y}\right)^2 + 1\right]\sqrt{5-2y} \Leftrightarrow (2x)^3 + 2x = \left(\sqrt{5-2y}\right)^3 + \sqrt{5-2y}$
$\Leftrightarrow f(2x) = f(\sqrt{5-2y})$ với $f(t) = t^3 + t$ $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vậy $f(2x) = f(\sqrt{5-2y}) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{5-2y} \Leftrightarrow y = \frac{5-4x^2}{2}, x \geq 0$.
Thế vào phương trình thứ hai ta được $4x^2 + \left(\frac{5-4x^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3-4x} - 7 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$
Với $g(x) = 4x^2 + \left(\frac{5-4x^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3-4x} - 7, x \in \left[0; \frac{3}{4}\right]$ □

Ví dụ 19. *Giải hệ phương trình sau* $\begin{cases} x^3 - 3x = y^3 - 3y \quad (1) \\ x^2 + y^2 = 1 \quad (2) \end{cases}$

Phân tích. Ta có thể giải hệ trên bằng phương pháp đưa về dạng tích. Tuy nhiên ta muốn giải hệ này bằng phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số. Hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ không đơn điệu trên toàn trục số, nhưng nhờ có (2) ta giới hạn được x và y trên đoạn $[-1;1]$
Chứng minh. Từ (2) ta có $x^2 \leq 1, \ y^2 \leq 1 \Leftrightarrow x, \ y \in [-1;1]$
Hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ có $f'(t) = 3t^2 - 3 < 0, \ \forall t \in (-1;1) \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên đoạn $[-1;1]$.$x, \ y \in [-1;1]$ nên (1) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ thế vào pt (2) ta được $x = y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Vậy tập nghiệm của hệ là S $= \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right);\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$ □

Nhận xét. Trong trường hợp này ta đã hạn chế miền biến thiên của các biến để hàm số đơn điệu trên đoạn đó.

Ví dụ 20. *Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm*
$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 - 3x - 2 = 0 \\ x^2 + \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{2y-y^2} + m = 0 \end{cases}$$

Chứng minh. ĐK: $-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$

$(1) \Leftrightarrow x^3 - 3x = (y-1)^3 - 3(y-1)$

Hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$.

$x,\ y-1 \in [-1;1]$ nên $f(x) = f(y-1) \Leftrightarrow x = y-1 \Leftrightarrow y = x+1$

Thế vào pt(2) ta được $x^2 - 2\sqrt{1-x^2} = -m$ (3)

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ Pt (3) có nghiệm $x \in [-1;1]$

Xét $g(x) = x^2 - 2\sqrt{1-x^2}, x \in [-1;1], g'(x) = 2x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.g(0) = -2,\ g(\pm 1) = 1.\ g(0) = -2,\ g(\pm1) = 1$

Pt (3) có nghiệm $x \in [-1;1] \Leftrightarrow -2 \le -m \le 1 \Leftrightarrow -1 \le m \le 2$ □

Ví dụ 21. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x + \sqrt{x^2+1} = 3^y \\ y + \sqrt{y^2+1} = 3^x \end{cases}$

Chứng minh. Trừ vế hai pt ta được

$x + \sqrt{x^2+1} - \left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = 3^y - 3^x \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2+1} + 3^x = y + \sqrt{y^2+1} + 3^y$

$f(x) = f(y)$ nên $f(t) = t + \sqrt{t^2+1} + 3^t.f(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} + 3^t \ln 3 > 0,\ \ \forall \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Bởi vậy $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ thế vào pt thứ nhất ta được

$x + \sqrt{x^2+1} = 3^x \Leftrightarrow 1 = 3^x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) \Leftrightarrow g(0) = g(x)$

Với $g(x) = 3^x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right).g'(x) = 3^x \ln 3\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) + 3^x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)$

$= 3^x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\ln 3 - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) > 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}$. do $\sqrt{x^2+1} - x > 0$ và $\sqrt{x^2+1} \ge 1$

Suy ra $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Bởi vậy $g(x) = g(0) \Leftrightarrow x = 0$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = y = 0$. □

Ví dụ 22. *Chứng minh hệ* $\begin{cases} e^x = 2007 - \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} \\ e^y = 2007 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \end{cases}$ *có đúng 2 nghiệm* $x > 0, y > 0$

Chứng minh. ĐK: $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ y^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty) \\ y \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty) \end{cases}$ Do $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ nên $\begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases}$

Trừ vế hai pt ta được $e^x - e^y = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} \Leftrightarrow e^x - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = e^y - \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}$

Hay $f(x) = f(y)$ với $f(t) = e^t - \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}, t \in (1;+\infty)$

$f'(t) = e^t + \frac{1}{(t^2-1)\sqrt{t^2-1}} > 0, t \in (1;+\infty) \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$

Bởi vậy $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ thế vào pt thứ nhất ta được

$e^x = 2007 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \Leftrightarrow e^x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 2007 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$

Với $g(x) = e^x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 2007, x \in (1;+\infty)$. Ta có

$g'(x) = e^x - \frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}};\ g''(x) = e^x + \frac{3x(x^2-1)}{(x^2-1)^3\sqrt{x^2-1}} > 0,\ \ \forall x \in (1;+\infty)$

Suy ra $g'(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$. $g'(x)$ liên tục trên $(1;+\infty)$. và có

$$\lim_{x\to 1^+} g'(x) = -\infty, \ \lim_{x\to +\infty} g'(x) = +\infty$$

nên $g'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất trên $x_0 \in (1;+\infty)$ và

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > g'(x_0) \Leftrightarrow x > x_0.\ g'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < x_0$$

Từ BBT của $g(x)$ ta suy ra pt $g(x) = 0$ có đúng 2 nghiệm $x \in (1;+\infty)$. Vậy hệ phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm dương. □

Ví dụ 23. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} \ln(1+x) - \ln(1+y) = x - y \ \ (1) \\ x^2 - 12xy + 20y^2 = 0 \ \ (2) \end{cases}$

Chứng minh. ĐK: $x > -1,\ y > -1$

(1) $\Leftrightarrow \ln(1+x) - x = \ln(1+y) - y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ với

$f(t) = \ln(1+t) - t, t \in (-1;+\infty)$

$f'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{-t}{1+t} = 0 \Leftrightarrow t = 0 \in (-1;+\infty) \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(-1;0)$ và nghịch biến trên khoảng

TH 1. $x, y \in (-1;0)$ hoặc $x, y \in (0;+\infty)$ thì $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

Thế vào pt (2) ta được $x = y = 0$ (không thỏa mãn)

TH 2. $x \in (-1;0)$,$y \in (0;+\infty)$ hoặc ngược lại thì $xy < 0 \Rightarrow x^2 - 12xy + 20y^2 > 0$

TH 3. $xy = 0$ thì hệ có nghiệm $x = y = 0$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 0$. □

Một số đề xuất

Mỗi bài toán thường có cái gốc của nó, việc học sinh phát hiện ra bài toán gốc sẽ thấy toán học rất thực tế, tự nhiên và không khó như các em nghĩ đồng thời tạo niềm tin và hứng thú học tập với các em. Với tinh thần như vậy và theo hướng này các thày cô giáo và các em học sinh có thể tìm ra được nhiều kinh nghiệm hay với nhiều đề tài khác nhau. Chẳng hạn, các bài toán về tích phân, các bài toán về tổ hợp – xác suất, các bài toán về phương pháp tọa độ trong mặt phẳng, trong không gian.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu, *Phương trình hàm*, Nhà xuất bản Giáo dục, 1997.

[2] Pl. Kannappan, *Functional Equations and Inequalities with Applications*, Springer, 2009, 295-323.

[3] J. Bochnak and J. Sicial, *Analytic functions in topological vector spaces*, Studia Math., **39** (1971), 77-112.

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐA THỨC TRONG CÁC KÌ THI HỌC SINH GIỎI

Huỳnh Kim Linh - Tô Hùng Khanh, Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn - Khánh Hòa

1 Các bài toán có lời giải

Bài toán 1. *Tìm tất cả các đa thức $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, với a, b, c là các số thực thỏa phương trình $f(x) = 0$ có các nghiệm là a, b, c.*

Giải. Đa thức $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có các nghiệm là a, b, c được viết dưới dạng : $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$.

Đồng nhất các hệ số ta có : $\begin{cases} -(a+b+c) = a \\ ab + bc + ca = b \\ -abc = c \end{cases}$

Với $c = 0$, ta có 2 nghiệm $a = b = c = 0$ và $a = 1, b = -2, c = 0$.

Với $c \neq 0$ ta có $\begin{cases} -(a+b+c) = a \\ ab + bc + ca = b \\ -abc = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{b} \\ c = \frac{2}{b} - b \\ b^4 + b^3 - 2b^2 + 2 = 0 \end{cases}$

$b^4 + b^3 - 2b^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (b+1)(b^3 - 2b + 2) = 0 \Leftrightarrow b = -1$ hoặc $b^3 - 2b + 2 = 0$.

Với $b = -1$ thì $a = 1, c = -1$ Với $b^3 - 2b + 2 = 0$, bằng cách đặt $b = 2\sqrt{\frac{2}{3}}x$ ta đưa phương trình về dạng $4x^3 - 3x + \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = 0$, phương trình có nghiệm :

$$x = \frac{\sqrt[3]{-\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{27}{8} - 1}} + \sqrt[3]{-\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{27}{8} - 1}}}{2} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{19} - \sqrt{27}} - \sqrt[3]{\sqrt{19} + \sqrt{27}}}{2\sqrt{2}}$$

Từ đó suy ra $b = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{\sqrt{19}-\sqrt{27}} - \sqrt[3]{\sqrt{19}+\sqrt{27}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{19}-\sqrt{27}} - \sqrt[3]{\sqrt{19}+\sqrt{27}}}{\sqrt{3}}$.

Đặt $b_0 = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{19}-\sqrt{27}} - \sqrt[3]{\sqrt{19}+\sqrt{27}}}{\sqrt{3}}$ ta suy ra a_0, c_0 tương ứng.

Vậy có tất cả 4 đa thức thỏa mãn đề bài là $f_1(x) = x^3$; $f_2(x) = x^3 - 2x$; $f_3(x) = x^3 + x^2 - x - 1$; $f_4(x) = x^3 + a_0x^2 + b_0x + c_0$ với $\begin{cases} b_0 = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{19}-\sqrt{27}} - \sqrt[3]{\sqrt{19}+\sqrt{27}}}{\sqrt{3}} \\ a_0 = -\frac{1}{b_0} \\ c_0 = \frac{2}{b_0} - b_0 \end{cases}$

Bài toán 2. *Các đa thức $P(x) = x^5 - x - 1$ và $Q(x) = x^2 + ax + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$ có thể có nghiệm phức chung không ?*

Giải. Giả sử α là nghiệm chung của $P(x)$ và $Q(x)$,
Ta có : $\alpha^5 = \alpha + 1$ và $\alpha^2 = -a\alpha - b$.

$$\alpha + 1 = \alpha^5 = \alpha(\alpha^2)^2 = \alpha(-a\alpha - b)^2 = \alpha[\mathrm{a}^2(-a\alpha - b) + (2ab\alpha + b^2)].$$
$$= (2ab - a^3)(-a\alpha - b) + (b^2 - a^2b)\alpha = \cdots = (a^4 - 3a^2b + b^2)\alpha + a^3b - 2ab^2$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a^4 - 3a^2b + b^2 = 1 & (1) \\ a^3b - 2ab^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow b^2 = 1 - a^4 + 3a^2b$ thay vào (2) và rút gọn $b = \frac{2a^5-2a-1}{5a^3}$
Thay vào (1) ta được $a^{10} + 3a^6 - 11a^5 - 4a^2 - 4a - 1 = 0$ điều này trái với $a \in \mathbb{Q}$. Vì phương trình $a^{10} + 3a^6 - 11a^5 - 4a^2 - 4a - 1 = 0$ không có nghiệm hữu tỉ.

Bài toán 3. *Giả sử a, b là 2 trong 4 nghiệm của phương trình : $x^4 + x^3 - 1 = 0$ (1). Chứng minh rằng ab là nghiệm của phương trình $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1 = 0$ (2)*

Giải. Giả sử a, b, c, d là 4 nghiệm của phương trình (1)
Suy ra $P(x) = x^4 + x^3 - 1 = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) = 0$
Ta chứng minh : $(ab)^3 + (cd)^3 + ab + cd + 1 = 0$
Khi đó ta suy ra : $(ab)^6 + (ab)^4 + (ab)^3 - (ab)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow ab^3 - \frac{1}{(ab)^3} + ab - \frac{1}{ab} + 1 = 0$
Vì $abcd = -1$ hay $ab = -\frac{1}{cd}$.Thật vậy $P(a) = P(b) = 0$

$$\Rightarrow a^3 = \frac{1}{a+1},\ b^3 = \frac{1}{b+1} \Rightarrow (ab)^3 = \frac{1}{(a+1)(b+1)} = \frac{(1+c)(1+d)}{P(-1)}$$

Hay $(ab)^3 = -(1 + c)(1 + d)$. Tương tự $(cd)^3 = -(1 + a)(1 + b)$ Suy ra

$$\begin{aligned}(ab)^3 + (cd)^3 + ab + cd + 1 &= -(1 + c)(1 + d) - (1 + a)(1 + b) + \mathrm{ab} + \mathrm{cd} + 1 \\ &= -1 - a - b - c - d = 0 \text{ (Đúng vì } a + b + c + d = 1)\end{aligned}$$

Bài toán 4. *Giả sử a_n là dãy số Fibonaxi xác định bởi* $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ (n \in N) \end{cases}$ *Chứng minh rằng nếu đa thức $P(x)$ bậc 1005 thỏa điều kiện $P(k) = a_k$ với $k = 1007, \ldots, 2012$. Thì $P(2013) = a_2013 - 1$.*

Giải. Ta chứng minh quy nạp theo $n \in N$. Khẳng định tổng quát :
Nếu $P(x)$ có bậc n thỏa $P(k) = a_k$ với $k = n + 2, \ldots, 2n + 2$
Thì $P(2n + 3) = a_{2n+3} - 1$.
• $n = 1$ ta có $P(3) = 2, P(4) = 3 \Rightarrow P(x) \equiv x - 1$ và $P(5) = 4 = a_5 - 1$.
• Giả sử khẳng định đúng với $n - 1$. Ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với n.
Giả sử đa thức $P(x)$ bậc n thỏa $P(k) = a_k$ với $k = n + 2, \ldots, 2n + 2$.
Xét đa thức $Q(x) = P(x + 2) - P(x + 1)$ có bậc không vượt quá $n - 1$ thỏa $Q(k) = a_k$ với $k = n + 1, ..., 2n$
Vì $Q(k) = P(k + 2) - P(k + 1) = a_{k+2} - a_{k+1} = a_k$
Nghĩa là $Q(2n + 1) = a_{2n+1} - 1$ (theo giả thiết quy nạp)
Nhưng $Q(2n + 1) = P(2n + 3) - P(2n + 2)$
$\Rightarrow P(2n + 3) = P(2n + 2) + Q(2n + 1) = a_{2n+2} + a_{2n+1} \breve{} 1 = a_{2n+3} - 1$.

Bài toán 5. *Tìm số nguyên a sao cho đa thức* $f(x) = x^{13} + x + 90$ *chia hết cho đa thức* $g(x) = x^2 - x + a$.

Giải. Giả sử : $f(x) = g(x).Q(x) \Leftrightarrow x^{13} + x + 90 = (x^2 - x + a).Q(x)$
Vì $a \in Z$ nên ta xét :
• $a \leq 0$ khi đó $f(x) = x^{13} + x + 90$ và $g(x) = x^2 - x + a$ có nghiệm không âm. Vô lí $a > 0$, cho $x = -1, x = 0, x = 1$ ta được $\begin{cases} (a+2).Q(-1) = 88 \\ a.Q(0) = 90 \\ a.Q(1) = 92 \end{cases} \Rightarrow 2 \vdots a \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 2 \end{array} \right.$

Nếu a = 1 thì từ (1) suy ra $88 \vdots 3$ vô lí
Nếu a = 2 thì ta có

$$f(x) = \left(x^2 - x + a\right).\left(x^{11} + x^{10} - x^9 - 3x^8 - x^7 + 5x^6 + 7x^5 - 3x^4 - 7x^3 + 11x^2 + 23x + 45\right)$$

Vậy a = 2 thì $f(x)$ chia hết cho $g(x)$

Bài toán 6. *Lập đa thức bậc 3 có các nghiệm* x_1, x_2, x_3 *thỏa :* $\begin{cases} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -2 & (1) \\ \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = 1 & (2) \\ \frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4} + \frac{1}{x_3^4} = 1 & (3) \end{cases}$

Giải. Giả sử đa thức cần tìm có dạng $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

Theo định lí VIET : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b \\ x_1x_2x_3 = -c \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow -2 = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = -\frac{b}{c} \Rightarrow b = 2c$$

$$\begin{aligned}(2) \Leftrightarrow 1 &= \frac{x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2}{x_1^2x_2^2x_3^2} \\ &= \frac{(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)}{x_1^2x_2^2x_3^2} \\ &= \frac{b^2 - 2ac}{c^2} \Leftrightarrow b^2 - 2ac = c^2\end{aligned}$$

$$(3) \Leftrightarrow 1 = \frac{x_1^4x_2^4 + x_2^4x_3^4 + x_3^4x_1^4}{x_1^4x_2^4x_3^4} = \cdots = \frac{(b^2 - 2ac)^2 - 2c^2(a^2 - 2b)}{c^4}$$

$$\Leftrightarrow (b^2 - 2ac)^2 - 2c^2(a^2 - 2b) = c^4$$

Vậy a, b, c thỏa $\begin{cases} b = 2c \\ b^2 - 2ac = c^2 \\ (b^2 - 2ac)^2 - 2c^2(a^2 - 2b) = c^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{3} \\ b = \frac{32}{9} \\ c = \frac{16}{9} \end{cases}$

Bài toán 7. *Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các nghiệm* x_1, x_2, x_3, x_4 *của đa thức :* $P(x) = x^4 + 3x^3 + 6x^2 + mx + 4$ *thỏa* $x_1 = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$.

Giải. Ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 6 \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -m \\ x_1x_2x_3x_4 = 4 \\ x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = x_1x_2x_3x_4 \end{cases}$

Suy ra $4 = x_1x_2x_3x_4 = x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4 = 6-x_1\left(x_2 + x_3 + x_4\right) = 6-x_1\left(-3 - x_1\right) = 6+3x_1+x_1^2$

Hay $x_1^2 = -3x_1 - 2(*)$

$\Rightarrow x_1^3 = x_1x_1^2 = x_1\left(-3x_1 - 2\right) = -3x_1^2 - 2x_1 = -3\left(-3x_1 - 2\right) - 2x_1 = 7x_1 + 6$

$\Rightarrow x_1^4 = x_1x_1^3 = 7x_1^2 + 6x_1 = 7\left(-3x_1 - 2\right) + 6x_1 = -15x_1\breve{}14$

Hay $(m - 12)\,x_1 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{4}{m-12}\,(m \neq 12)$.

Thay $x_1 = \frac{4}{m-12}$vào (*) ta được : $\frac{16}{(m-12)^2} + 3\frac{4}{m-12} + 2 = 0(**)$

Giải phương trình (**) tìm được $m = 8$ hoặc $m = 10$.

Bài toán 8. *Cho $a, b \in R$. Tìm đa thức $P(x)$ thoả : $xP(x - a) = (x - b)P(x)$, $\forall x \in R$*

Giải.

- Xét $a = b = 0 \Rightarrow P(x)$ tuỳ ý.
- $a = 0, b \neq 0$ thì $P(x) = 0, \forall x \in R$.
- $a \neq 0, b = 0$ thì $P(x) =$ const
- $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì xét 2 trường hợp $\frac{b}{a} \notin N$ và $\frac{b}{a} \in N$.

Nếu $\frac{b}{a} \notin N$ khi thay $x = b$ thì $x = b - a$ là nghiệm

Tương tự khi thay $x = b - a$ thì $x = b - 2a$ là nghiệm, ...

Do đó $P(x) = x, \forall x \in R$.

Nếu $\frac{b}{a} \in N$ thì $P(x)$ có $x = a, x = 2a, \ldots, x = (n - 1)a$ là nghiệm

Do đó $P(x) = (x - a)(x - 2a)\ldots(x - (n - 1)a).Q(x)$

Thế vào điều kiện bài ra ta được $Q(x - a) = Q(x), \forall x \in R$ hay $Q(x) =$ const

Vậy $P(x) = (x - a)(x - 2a)\ldots(x - (n - 1)a)$.

Bài toán 9. *Hỏi có tồn tại hay không đa thức $f(x)$ bậc 2012 sao cho $f\left(x^2 - 2011\right)$ chia hết cho $f(x)$.*

Giải. Xét đa thức $f\left(x\right) = \left(x + a\right)^{2012}$

Ta $f\left(x^2 - 2011\right) = \left(x^2 - 2011 + a\right)^{2012} = \left[\left(x + a\right)^2 - 2a\left(x + a\right) + a^2 + a - 2011\right]^{2012}$

Nếu ta chọn a sao cho $a^2 + a - 2011 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-1\pm\sqrt{8045}}{2}$. thì $f\left(x^2 - 2011\right) = \left(x^2 - a^2\right)^{2012} = \left(x - a\right)^{2012}\left(x + a\right)^{2012}$ chia hết cho $f(x)$.

Vậy đa thức $f\left(x\right) = \left(x + \frac{-1\pm\sqrt{8045}}{2}\right)^{2012}$ thỏa điều kiện của bài toán.

Cách 2 : Xét đa thức $f\left(x\right) = \prod\limits_{k=1}^{2012}\left(x - a_k\right), \quad a_k \in R.$

Ta có : $f\left(x^2 - 2011\right) = \prod\limits_{k=1}^{2012}\left(x^2 - 2011 - a_k\right)$

Thì khi đó $f\left(x^2 - 2011\right) = \prod\limits_{k=1}^{2012}\left(x^2 - a_k^2\right) = f(x)\prod\limits_{k=1}^{2012}\left(x + a_k\right)$ chia hết cho $f(x)$.

Vậy đa thức $f(x) = \left(x - \frac{1\pm\sqrt{8045}}{2}\right)^{2012}$ thỏa điều kiện của bài toán.

Bài toán 10. *Cho $0 \le \alpha \le 1$. Chứng minh rằng : với mọi số phức a phương trình : $z^3 - az + a = 0$ có ít nhất 1 nghiệm z thỏa : $|z - \alpha| \le 2 - \alpha$.*

Giải. Gọi z_1, z_2, z_3 là 3 nghiệm của pt : $z^3 - az + a = 0$.

Ta có : $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = -a \\ z_1z_2z_3 = -a \end{cases}$

Suy ra $1 = 1 - (z_1 + z_2 + z_3) + (z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) - z_1z_2z_3 = (1 - z_1)(1 - z_2)(1 - z_3)$

Hay $|1 - z_1|\,|1 - z_2|\,|1 - z_3| = 1 \Rightarrow \exists z_i : |z_i - 1| \le 1$

Khi đó $2 - \alpha = 1 + 1 - \alpha \ge |z_i - 1| + |1 - \alpha| \ge |z_i - \alpha|$

Tức là có ít nhất 1 nghiệm z của phương trình thoả : $|z - \alpha| \le 2 - \alpha$.

Bài toán 11. *Cho $a, b, c, d, e \in R$. Chứng minh rằng nếu phương trình $\mathrm{a}x^2 + (b+c)x + d + e = 0$ có nghiệm $x_0 \in [1; +\infty)$ thì phương trình $\mathrm{a}x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ cũng có nghiệm thực.*

Giải. Ta có $\mathrm{a}x_0^2 + cx_0 + e = -(bx_0 + d)$

Xét f(x) $= \mathrm{a}x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ suy ra

$$\begin{aligned} \mathrm{f}\left(\sqrt{x_0}\right) &= (\mathrm{a}x_0^2 + cx_0 + e) + \sqrt{x_0}(bx_0 + d); \\ \mathrm{f}\left(-\sqrt{x_0}\right) &= (\mathrm{a}x_0^2 + cx_0 + e) - \sqrt{x_0}(bx_0 + d) \end{aligned}$$

Hay $\begin{aligned} \mathrm{f}\left(\sqrt{x_0}\right)\mathrm{f}\left(-\sqrt{x_0}\right) &= (\mathrm{a}x_0^2 + cx_0 + e)^2 - x_0(bx_0 + d)^2 \\ &= (\mathrm{a}x_0^2 + cx_0 + e)^2 - x_0(\mathrm{a}x_0^2 + cx_0 + e)^2 \\ &= (\mathrm{a}x_0^2 + cx_0 + e)^2(1 - x_0) \le 0 \end{aligned}$

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm $x \in \left[-\sqrt{x_0}; \sqrt{x_0}\right]$

Bài toán 12. *Cho đa thức $P(x)$ với hệ số thực bậc n $(n \le 1)$ có m nghiệm thực. Chứng minh rằng : đa thức $Q(x) = (x^2 + 1)P(x) + P'(x)$ có ít nhất m nghiệm thực*

Giải. Xét $f(x) = e^{\frac{x^3}{3} + x}P(x)$

Dễ thấy $f(x) = 0$ có tập hợp tất cả các nghiệm thực trùng với tập các nghiệm thực của $P(x)$.

Theo định lí Rolle thì phương trình $f'(x) = e^{\frac{x^3}{3} + x}\left[P'(x) + (x^2 + 1)P(x)\right] = 0$ có ít nhất $m - 1$ nghiệm thực.

Nếu m chẵn, n lẻ thì $P(x)$ có ít nhất $m + 1$ nghiệm thực, vô lí !

Do đó n chẵn. Khi đó $P'(x) + (x^2 + 1)P(x)$ có bậc là $n + 2$ là số chẵn và có $m - 1$ số lẻ nghiệm thực

Suy ra đa thức $Q(x) = (x^2 + 1)P(x) + P'(x)$ có ít nhất m nghiệm thực.

Bài toán 13. *Cho $f(x)$ khả vi trên đoạn $[0; 1]$ và thoả điều kiện :* $\begin{cases} f(0) = 0,\ f(1) = 1 \\ 0 \le f(x) \le 1,\ \forall x \in R \end{cases}$

Chứng minh rằng tồn tại $a, b \in (0; 1) : f'(a).f'(b) = 1$

Giải. Xét hàm $g(x) = f(x) + x - 1$ thì $g(x)$ khả vi trên đoạn $[0; 1]$ do $f(x)$ khả vi trên đoạn $[0; 1]$
Do $g(0) = -1$ và $g(1) = 1$ nên theo định lí Lagrange $\exists$c $\in (0; 1)$ sao cho $g(c) = 0$
Suy ra $f(c) + c - 1 = 0$ hay $f(c) = 1 - c$
Mặt khác theo định lí Lagrange đối với hàm $f(x)$ trên các đoạn $[0; c]$ và $[c; 1]$ ta có : $\frac{f(c)-f(0)}{c-0} = f'(a), \quad a \in (0; c) \oplus$ và $\frac{f(1)-f(c)}{1-c} = f'(b), \quad b \in (c; 1)$
Suy ra $f'(a).f'(b) = \frac{f(c)}{c}.\frac{1-f(c)}{1-c} = \frac{(1-c)c}{c(1-c)} = 1$

Bài toán 14. *(IMO 2006) Cho $P(x)$ là đa thức bậc $n > 1$ với hệ số nguyên, gọi k là một số nguyên dương. Xét đa thức $Q(x) = P(P(\ldots P(x))\ldots))$, P xuất hiện k lần. Chứng minh rằng có tối đa n số nguyên t sao cho $Q(t) = t$.*

Giải. Đầu tiên , ta chứng minh với mọi điểm cố định x của Q trong thực tế là 1 điểm cố định của $P \circ P$.
Xét dãy cho bởi $x_0 = x$ và $x_{i+1} = P(x_i)$ với $i \geq 0$.
Giả sử $x_k = x_0$, ta đã biết $P(u) - P(v)$ chia hết cho $u\breve{\ }v$ với mọi số nguyên u, v phân biệt . Hơn nữa
$$d_i = x_{i+1} - x_i P(x_{i+1}) - P(x_i) = x_{i+2} - x_{i+1} = d_{i+1}$$
với mọi i , kết hợp với $d_k = d_0$ ta suy ra $|d_0| = |d_1| = ... = |d_k|$.
Giả sử $d_1 = d_0 = d \neq 0$ thì $d_2 = d$ (nếu không thì $x_3 = x_1$ và x_0 không thể xuất hiện trong dãy một lần nữa). Tương tự $d_3 = d, \ldots$, vậy $x_i = x_0 + id \neq x_0$ với mọi i, điều này mâu thuẫn .
Mà $d_1 = -d_0$, suy ra $x_2 = x_0$. Vậy có thể giả thiết rằng $Q = P \circ P$
Nếu mọi số nguyên t với $P(P(t))$ cũng thoả mãn $P(t) = t$ thì dễ dàng nhận thấy số nghiệm của bài toán tối đa là $degP = n$.
Giả sử $P(t_1) = t_2, P(t_2) = t_1, P(t_3) = t_4, P(t_4) = t_3$, với $t_1 \neq t_{2,3,4}$ không nhất thiết $t_3 \neq t_4$) ,vì $t_2 - t_4 \vdots (t_1 - t_3)$ và điều ngược lại cũng đúng nên $t_1 - t_3 = \pm(t_2 - t_4)$ .Giả sử $t_1 - t_3 = t_2 - t_4$ hay nói cách khác $t_1 - t_2 = t_3 - t_4 = u \neq 0$. Vì ta cũng có $t_1 - t_4 = \pm(t_2 - t_3)$,
nên $t_1 - t_3 + u = \pm(t_1 - t_3 - u)$, điều này là vô lý !
Vậy phải có $t_1 - t_3 = t_4 - t_2$,hay $p(t_1) + t_1 = p(t_3) + t_3 = c$ .Suy ra mọi nghiệm nguyên t của phương trình $P(P(t)) = t$ đều thoả mãn $P(t)+$, vậy số số nguyên không vượt quá n.

Bài toán 15. *A1. Tìm tất cả những đa thức hệ số nguyên bậc hai sao cho tồn tại đa thức $q(x)$ hệ số nguyên thỏa là một đa thức có tất cả các hệ số ± 1.*

Lời giải 1: Chúng ta chứng minh rằng chỉ có những đa thức thỏa mãn yêu cầu là những đa thức $x^2 \pm x \pm 1$, $x^2 \pm 1$ và $x^2 \pm 2x + 1$.
Gọi $f(x)$ là đa thức bậc n có tất cả các hệ số ± 1. Giả sử z là nghiệm của phương trình với $|z| > 1$ vậy
$$|z|^n = \left|\pm z^{n-1} \pm z^{n-2} \pm ... \pm 1\right| \leq |z|^{n-1} + |z|^{n-2} + ... + 1 = \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1}$$

Điều đó kéo theo $|z|^n(|z|-2) \leq -1$; vậy $|z| < 2$. Như thế tất cả các nghiệm của $f(x) = 0$ có giá trị tuyệt đối bé hơn 2.
Rõ ràng, một đa thức $p(x)$ thỏa yêu cầu phải có dạng $p(x) = x^2 + ax \pm 1$ với $a \in Z$. Gọi x_1 và x_2 là các nghiệm của nó(không bắt buộc phải khác nhau). Vì $x_1x_2 = \pm 1$ nên ta có thể giả sử rằng $|x_1| \geq 1$ và $|x_2| \leq 1$. Vì x_1 và x_2 còn là nghiệm nguyên của là đa thức có hệ số ± 1, nên ta có $|x_1| < 2$. và như vậy $|a| = |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| < 2 + 1$ $a \in \{\pm 2, \pm 1, 0\}$.
Nếu $a = \pm 1$ thì $g(x) = 1$ cho ta lời giải.
Nếu $a = 0$ thì $g(x) = x + 1$ cho ta lời giải.
Nếu $a = \pm 2$, cả hai đa thức $x^2 \pm 2x - 1$ có nghiệm với giá trị tuyệt đối lớn hơn 2 nên chúng không thỏa yêu cầu. Cuối cùng, các đa thức $p(x) = x^2 \pm 2x + 1$ thỏa yêu cầu với $q(x) = \mp 1$.
Bình luận: Từ ngữ " nghiệm" có thể được hiểu là" nghiệm ảo" và không cần phải nói rõ. Vì số phức không cần phải chỉ rõ, $p(x) = x^2 + ax \pm 1$ có nghiệm thực nếu $|a| \geq 2$ và trường hợp $|a| \leq 1$ phải được xử lí riêng.
Chú ý cần quan tâm là cho dù có hệ số bằng 0 thì kết luận $|z| < 2$ vẫn đúng. Tuy vậy, có những lời giải đặc biệt là x^2 và $x^2 \pm x$

Lời giải 2: Giả sử đa thức $p(x) = a_0 + a_1x + x^2$ và $g(x) = b_0 + b_1x + ... + b_nx^n$ sao cho $p(x)g(x) = c_0 + c_1x + ...c_{n+2}x^{n+2}$ với mọi$c_k = \pm 1$.
Khi đó$|a_0| = |b_0| = |b_n| = 1$ và $a_0b_1 = c_1 - a_1b_0; a_0b_k = c_k - a_1b_{k-1} - b_{k-2}$; với $k = 2, \ldots, n$
Và như vậy $|b_1| \geq |a_1| - 1$; $|b_k| \geq |a_1b_{k-1}| - |b_{k-2}| - 1$ với $k = 2, \ldots, n$
Giả sử . Thì rõ ràng không thể hằng, với $n \geq 1$, và ta có $|b_1| \geq 2; |b_k| \geq 3|b_{k-1}| - |b_{k-2}| - 1$; với $k = 2, \ldots, n$
Từ bất đẳng thức cuối(viết lại) ta có

$$|b_{k-1}| - |b_{k-2}| \geq 2|b_{k-1}| - |b_{k-2}| - 1 \geq 2(|b_{k-1}| - |b_{k-2}|) - 1$$

Ta thấy dãy $d_k = |b_k| - |b_{k-1}|$, $(k = 1, \ldots, n)$, thỏa $d_k \geq 2d_{k-1} - 1$với$k \geq 2$(qui nạp). Vì $d_1 = |b_1| - 1 \geq 1$ kéo theo giả thiết qui nạp $d_k \geq 1$ với $k = 1, \ldots, n$. Tương đương $|b_k| \geq |b_{k-1}| + 1$với $k = 3, ..., n$ nên $|b_n| \geq |b_0| + n$ trái với giả thiết $|b_0| = |b_n| = 1, n \geq 1$
Điều đó kéo theo phải có dạng $a_0 + a_1x + x^2$ với $|a_0| = 1; |a_1| \leq 2$.
Nếu$|a_1| \leq 1$ hay$|a_1| = 2$ và $a_0 = 1$ thì đa thức g(x) tương ứng tồn tại (xem 8 ví dụ của lời giải 1)
Còn lại trường hợp $a_0 = 1, a_0 = -1$. Giả sử g(x) tồn tại và không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $b_0 = 1$ và $a_1 = 1$(nếu $b_0 = -1$ thì thay $q(x)$ bởi $-q(x)$ và với $a_1 = -2$ thì thay $q(x)$ bởi $q(-x)$.
Với $b_0 = 1$, $a_0 = -1$, $a_1 = 2$ công thức quy nạp đầu tiên thành $b_1 = 2 - c_1, b_k = 2b_{k-1} + b_{k-2} - c_k$ với $k = 2, \ldots, n$ Vậy $b_1 \geq 1, b_2 \geq 2b_1 + 1 - c_2 \geq 2$, và quy nạp cho thấy $b_k \geq 2$ với $k = 2, \ldots, n$ lại trái với giả thiết $|b_0| = 1$. Như vậy không có đa thức p(x) thỏa bài toán ngoại trừ 8 đa thức đã trình bày trong lời giải 1.

2 MỘT SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1 Tìm tất cả các đa thức f(x) với hệ số nguyên sao cho với mọi n nguyên dương ta có f(n) là ước của 2n − 1.

Hướng dẫn. Nếu f(x) là đa thức không hằng thì tồn tại n sao cho $|f(n)| > 1$. Gọi p là ước số nguyên tố của f(n). Ta có $p|f(n)|2^n - 1$. Mặt khác $p|f(n+p)|2^{n+p} - 1$. Suy ra $p|2^{n+p} - 2^n = 2^n(2^p - 1)$. Do $(2^n - 1, 2^n) = 1$ nên từ đây suy ra $p|2^p - 1$. Nhưng theo định lý Fermat thì $p|2^p - 2$. Như vậy từ đây suy ra $p|1$. Mâu thuẫn. Vậy f(x) phải là đa thức hằng. Đáp số $f(x) \equiv 1, f(x) \equiv -1$.

Bài 2. Chứng minh rằng đa thức $P(x) = x^n + 29x^{n-1} + 2009$ với n là số nguyên dương lớn hơn hay bằng 2 không thể phân tích thành tích của 2 đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hay bằng 1.
Hướng dẫn. Sử dụng tiêu chuẩn Eisenstein mở rộng như sau
Cho đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \in Z[x]$.Giả sử tồn tại số nguyên tố p và số nguyên dương k thoả mãn đồng thời các điều kiện sau
1) a_n không chia hết cho p
2) a_0 chia hết cho p nhưng không chia hết cho p^2
3) $a_1, a_2, \ldots, a_{n-k}$ chia hết cho p
Khi đó, nếu P(x) = Q(x).S(x) với Q(x), S(x) là các đa thức với hệ số nguyên thì một trong hai đa thức Q(x), S(x) có bậc nhỏ hơn k.

Bài 3. Tìm tất cả các đa thức P(x) thoả mãn điều kiện $P^2(x) - P(x^2) = 2x^4$.
Hướng dẫn. Đặt $P(x) = a_n x^n + R(x)$ với R(x) là đa thức bậc r < n. Khi đó
$P^2(x) - P(x^2) = (a_n^2 - a_n)x^{2n} + 2a_n x^n R(x) + R^2(x) - R(x^2)$. Từ đây suy ra $P^2(x) - P(x^2)$ có bậc là 2n nếu $a_n \neq 1$ và có bậc n+r nếu $a_n = 1$. Từ đó suy ra $2 \leq n \leq 4$. Hơn nữa, nếu
$n = 4$ thì $a_n = 1$ và $r = 0$
$n = 3$ thì $a_n = 1$ và $r = 1$
Từ đây, dùng phương pháp hệ số bất định, dễ dàng tìm được các nghiệm là: $x^4 + 1, x^3 + x, 2x^2$ và $-x^2$.

Bài 4. Tìm tất cả các đa thức P(x) với hệ số thực thoả mãn điều kiện $P^2(x) = P(x^2) - 2P(x)$.
Hướng dẫn. Đặt $Q(x) = P(x) + 1$ thì $Q^2(x) = Q(x^2)$. Chứng minh $Q(x) = x^n$ là đa thức bậc n duy nhất thoả mãn phương trình này. Từ đó suy ra nghiệm của bài toán là $x^n - 1$ cùng các đa thức đồng nhất hằng số $P(x) \equiv 0$ và $P(x) \equiv -1$.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu, *ĐA THỨC ĐẠI SỐ VÀ PHÂN THỨC HỮU TỈ,* Nhà Xuất Bản Giáo Dục, 2007.

[2] Nguyễn Văn Mậu(Chủ biên), Trịnh Đào Chiến, Trần Nam Dũng, Nguyễn Đăng Phất, Nhà Xuất Bản Giáo Dục, 2008.

[3] Nguyễn Hữu Điển, *ĐA THỨC VÀ ỨNG DỤNG,*Nhà Xuất Bản Giáo Dục, 2003

[4] *Tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ.*

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ CHIA HẾT ĐỐI VỚI CÁC ĐA THỨC ĐỐI XỨNG

Nguyễn Văn Ngọc, Viện Toán học

Trong tài liệu này giới thiệu một số bài toán về tính chia hết của các đa thức đối xứng và phản đối xứng. Một đa thức được gọi là đối xứng, nếu giá trị của nó không thay đổi khi ta đổi chỗ hai biến bất kỳ và được gọi là phản đối xứng, nếu nó đổi dấu khi ta đổi chỗ hai biến bất kỳ. Để giải các bài toán về tính chia hết giữa các đa thức ta thường sử dụng Định lý Bézout, hệ quả dưới đây và các kỹ năng phân tích thành nhân tử.

Định lý Bézout. *Số dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho $x - a$ bằng $f(a)$.*

Hệ quả. *Đa thức $f(x)$ chia hết cho $x - a$ khi và chỉ khi $f(a) = 0$, tức là, $x = a$ là nghiệm của $f(x)$.*

Xét một số bài toán sau đây.

Bài toán 1. *Chứng minh rằng $x^{2n} + x^n y^n + y^{2n}$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$ khi và chỉ khi n không phải là bội của 3.*

Lời giải. Sử dụng các công thức

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2),$$

$$x^k - y^k = (x - y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + ... + xy^{k-2} + y^{k-1})$$

dễ dàng thấy rằng $x^{3k} - y^{3k}$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$. Xét các trường hợp sau
1) $n = 3k$. Ta có

$$x^{2n} + x^n y^n + y^{2n} = x^{6k} + x^{3k}y^{3k} + y^{6k} = (x^{6k} - y^{6k}) + (x^{3k} - y^{3k}) + 3y^{6k}.$$

Từ đó suy ra $x^{2n} + x^n y^n + y^{2n}$ không chia hét cho $x^2 + xy + y^2$.
2) $n = 3k + 1$. Ta có

$$x^{2n} + x^n y^n + y^{2n} = x^{6k+2} + x^{3k+1}y^{3k+1} + y^{6k+2} =$$

$$= x^2(x^{6k} - y^{6k}) + xy^{3k+1}(x^{3k} - y^{3k}) + y^{6k}(x^2 + xy + y^2).$$

Suy ra trong trường hợp này $x^{2n} + x^n y^n + y^{2n}$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$.
3) $n = 3k + 2$. Ta có

$$x^{2n} + x^n y^n + y^{2n} = x^{6k+4} + x^{3k+2}y^{3k+2} + y^{6k+4} = x^4(x^{6k} - y^{6k}) +$$

$$+x^2y^{3k+2}(x^{3k} - y^{3k}) + y^{6k}(x^4 + x^2y^2 + y^4) =$$

$$= x^4(x^{6k} - y^{6k}) + x^2y^{3k+2}(x^{3k} - y^{3k}) + y^{6k}(x^2 + x^2y^2y^4)(x^2 - xy + y^2).$$

Suy ra $x^{2n} + x^n y^n + y^{2n}$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$. Vậy điều kiện cần và đủ để $x^{2n} + x^n y^n + y^{2n}$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$ là n không phải là bội của 3.

Bài toán 2. *Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, đa thức $x^{2n} - x^n y^n + y^{2n}$ không chia hết cho $x^2 + xy + y^2$.*

Lời giải. Giả sử $x^{2n} - x^n y^n + y^{2n}$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$, tức là

$$x^{2n} - x^n y^n + y^{2n} = (x^2 + xy + y^2)q(x, y),$$

trong đó $q(x, y)$ là đa thức đối xứng với hệ số nguyên (do hệ số chính của đa thức chia bằng 1, còn các hệ số của đa thức bị chia và đa thức chia là các số nguyên). Trong đẳng thức trên cho $x = y = 1$, ta được $1 = 3q(1, 1)$, vô lý vì $q(1, 1)$ là một số nguyên. Điều này chứng tỏ đa thức $x^{2n} - x^n y^n + y^{2n}$ không chia hết cho $x^2 + xy + y^2$.

Bài toán 3. *Với những $n \in Z^+$ nào, thì $x^{2n} + x^n y^n + y^{2n}$ chia hết cho $x^2 - xy + y^2$?*

Lời giải. Giả sử

$$x^{2n} + x^n y^n + y^{2n} = (x^2 - xy + y^2)q(x, y), \tag{1}$$

trong đó $q(x, y)$ là đa thức đối xứng với hệ số nguyên.

Ta xét hai trường hợp:
1) n là số lẻ. Trong đẳng thức (1) thay x bởi $-x$ ta được

$$x^{2n} - x^n y^n + y^{2n} = (x^2 + xy + y^2)q(-x, y).$$

Theo Bài toán 2 đẳng thức này không thể xảy ra.
2) n là số chẵn. Trong (7) thay x bởi $-x$, ta được

$$x^{2n} + x^n y^n + y^{2n} = (x^2 + xy + y^2)q(-x, y).$$

Theo Bài toán 1 thì đẳng thức trên đúng khi và chỉ khi $n = 3m + 1$ hoặc $n = 3m + 2$.
Nếu $n = 3m + 1$, thì do n là số chẵn, nên m phải là số lẻ, hay $m = 2k + 1$, do đó $n = 6k + 4$.
Nếu $n = 3k + 2$, thì do n là số chẵn, nên m phải là số chẵn, hay $m = 2k$, do đó $n = 6k + 2$.

Vậy $x^{2n} + x^n y^n + y^{2n}$ chia hết cho $x^2 - xy + y^2$ khi và chỉ khi $n = 6k + 2$ hoặc $n = 6k + 4$, với $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+$.

Bài toán 4. *Với $n \in \mathbb{Z}^+$ nào thì $x^{2n} - x^n y^n + y^{2n}$ chia hết cho $x^2 - xy + y^2$?*

Lời giải. Giả sử

$$x^{2n} - x^n y^n + y^{2n} = (x^2 - xy + y^2)q(x, y), \tag{2}$$

trong đó $q(x, y)$ là đa thức đối xứng với hệ số nguyên. Xét hai trường hợp của n.
1) n là số chẵn. Trong (2) thay x bởi $-x$, ta được

$$x^{2n} - x^n y^n + y^{2n} = (x^2 + xy + y^2)q(-x, y).$$

Theo Bài toán 2 đẳng thức này không thể xảy ra.
2) n là số lẻ. Trong (2) thay x bởi $-x$, ta được

$$x^{2n} + x^n y^n + y^{2n} = (x^2 + xy + y^2)q(-x, y).$$

Theo Bài toán 1 thì đẳng thức trên đúng khi và chỉ khi $n = 3m + 1$ hoặc $n = 3m + 2$.
Nếu $n = 3m + 1$, thì do n là số lẻ, nên m phải là số chẵn, tức là $m = 2k$ và khi đó $n = 6k + 1$.
Nếu $n = 3m + 2$, thì do n là số lẻ, nên m phải là số lẻ, tức là $m = 2k - 1$. Khi đó $n = 6k - 1$.

Vậy $x^{2n} - x^n y^n + y^{2n}$ chia hết cho $x^2 - xy + y^2$ khi và chỉ khi $n = 6k \pm 1$, $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+$.

Bài toán 5. *Xác định n để $(x+y)^n + x^n + y^n$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$*

Lời giải. Giả sử $(x+y)^n + x^n + y^n$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$. Khi đó ta có

$$(x+y)^n + x^n + y^n = (x^2 + xy + y^2)q(x,y), \tag{3}$$

trong đó $q(x,y)$ là đa thức đối xứng với hệ số nguyên. Trong (3) thay x, y tương ứng bởi x^2, y^2, ta có

$$\begin{aligned}(x^2+y^2)^n + x^{2n} + y^{2n} &= (x^4 + x^2y^2 + y^4)q(x^2, y^2),\\ &= (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)q(x^2,y^2).\end{aligned} \tag{4}$$

Đẳng thức (4) chứng tỏ $(x^2+y^2)^n + x^{2n} + y^{2n}$ phải chia hết cho $x^2 - xy + y^2$. Ta có

$$\begin{aligned}(x^2+y^2)^n - (xy)^n = (x^2+y^2-xy)[(x^2+y^2)^{n-1} + (x^2+y^2)^{n-2} + ...\\ +(x^2+y^2)(xy)^{n-2} + (xy)^{n-1}].\end{aligned} \tag{5}$$

Tiếp theo ta có

$$(x^2+y^2)^n + x^{2n} + y^{2n} = [(x^2+y^2)^n - (xy)^n] + (x^{2n} + x^ny^n + y^{2n}). \tag{6}$$

Từ (5) và (6) suy ra $(x^2+y^2)^n + x^{2n} + y^{2n}$ chia hết cho $x^2 - xy + y^2$ khi và chỉ khi $x^{2n} + x^ny^n + y^{2n}$ chia hết cho $x^2 - xy + y^2$. Theo Bài toán 3 điều này có được khi và chỉ khi $n = 6k+2$ hoặc $n = 6k+4$ với $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+$.

Ngược lại, giả thiết rằng $n = 2m$, với $m = 3k+1$ hoặc $m = 3k+2$. Thế thì

$$\begin{aligned}&(x+y)^n + x^n + y^n = (x+y)^{2m} + x^{2m} + y^{2m} =\\ &[(x+y)^{2m} - (xy)^m] + (x^{2m} + x^my^m + y^{2m}).\end{aligned}$$

Để ý rằng

$$\begin{aligned}&(x+y)^{2m} - (xy)^m = [((x+y)^2]^m - (xy)^m] =\\ &[(x+y)^2 - xy]p(x,y) = (x^2+xy+y^2)p(x,y),\end{aligned}$$

trong đó $p(x,y)$ là đa thức đối xứng với hệ số nguyên. Do đó $(x+y)^{2m} - (xy)^m$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$.

Mặt khác, vì $m = 3k+1,\ \ m = 3k+2$ nên theo Bài toán 1, đa thức $x^{2m} + x^my^m + y^{2m}$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$.

Kết luận: Đa thức $(x+y)^n + x^n + y^n$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$ khi và chỉ khi $n = 6k+2$ hoặc $n = 6k+4$, với $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+$.

Bài toán 6. *Chứng minh rằng $x^{2n} + x^ny^n + y^{2n}$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$ khi và chỉ khi m không phải là bội của 3.*

Lời giải. Sử dụng các công thức

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2),$$

$$x^k - y^k = (x-y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + ... + xy^{k-2} + y^{k-1})$$

dễ dàng thấy rằng $x^{3k} - y^{3k}$ chia hết cho x^2+xy+y^2. Xét các trường hợp sau
1) $n = 3k$. Ta có

$$x^{2n} + x^n y^n + y^{2n} = x^{6k} + x^{3k}y^{3k} + y^{6k} = (x^{6k} - y^{6k}) + (x^{3k} - y^{3k}) + 3y^{6k}.$$

Từ đó suy ra $x^{2n} + x^n y^n + y^{2n}$ không chia hét cho x^2+xy+y^2.
2) $n = 3k+1$. Ta có

$$x^{2n} + x^n y^n + y^{2n} = x^{6k+2} + x^{3k+1}y^{3k+1} + y^{6k+2} =$$

$$= x^2(x^{6k} - y^{6k}) + xy^{3k+1}(x^{3k} - y^{3k}) + y^{6k}(x^2+xy+y^2).$$

Suy ra trong trường hợp này $x^{2n} + x^n y^n + y^{2n}$ chia hết cho x^2+xy+y^2.
3) $n = 3k+2$. Ta có

$$x^{2n} + x^n y^n + y^{2n} = x^{6k+4} + x^{3k+2}y^{3k+2} + y^{6k+4} = x^4(x^{6k} - y^{6k}) +$$

$$+ x^2y^{3k+2}(x^{3k} - y^{3k}) + y^{6k}(x^4 + x^2y^2 + y^4) =$$

$$= x^4(x^{6k} - y^{6k}) + x^2y^{3k+2}(x^{3k} - y^{3k}) + y^{6k}(x^2 + x^2y^2y^4)(x^2 - xy + y^2).$$

Suy ra $x^{2n} + x^n y^n + y^{2n}$ chia hết cho x^2+xy+y^2. Vậy điều kiện cần và đủ để $x^{2n} + x^n y^n + y^{2n}$ chia hết cho x^2+xy+y^2 là n không phải là bội của 3.

Bài toán 7. *Chứng minh rằng vơíi mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, đa thức $x^{2n} - x^n y^n + y^{2n}$ không chia hết cho x^2+xy+y^2.*

Lời giải. Giả sử $x^{2n} - x^n y^n + y^{2n}$ chia hết cho x^2+xy+y^2, tức là

$$x^{2n} - x^n y^n + y^{2n} = (x^2+xy+y^2)q(x,y),$$

trong đó $q(x,y)$ là đa thức đối xứng với hệ số nguyên (do hệ số chính của đa thức chia bằng 1, còn các hệ số của đa thức bị chia và đa thức chia là các số nguyên). Trong đẳng thức trên cho $x = y = 1$, ta được $1 = 3q(1,1)$, vô lý ví $q(1,1)$ là một số nguyên. Điều này chứng tỏ đa thức $x^{2n} - x^n y^n + y^{2n}$ không chia hết cho x^2+xy+y^2.

Bài toán 8. *Với $n \in \mathbb{Z}^+$ nào thì $x^{2n} + x^n y^n + y^{2n}$ chia hết cho $x^2 - xy + y^2$?*

Lời giải. Giả sử

$$x^{2n} + x^n y^n + y^{2n} = (x^2 - xy + y^2)q(x,y), \tag{7}$$

trong đó $q(x,y)$ là đa thức đối xứng với hệ số nguyên.

Ta xét hai trường hợp:
1) n là số lẻ. Trong đẳng thức (7) thay x bởi $-x$ ta được

$$x^{2n} - x^n y^n + y^{2n} = (x^2 + xy + y^2)q(-x, y).$$

Theo Bài toán 2 đẳng thức này không thể xảy ra.
2) n là số chẵn. Trong (7) thay x bởi $-x$, ta được

$$x^{2n} + x^n y^n + y^{2n} = (x^2 + xy + y^2)q(-x, y).$$

Theo Bài toán 1 thì đẳng thức trên đúng khi và chỉ khi $n = 3m + 1$ hoặc $n = 3m + 2$.
Nếu $n = 3m + 1$, thì do n là số chẵn, nên m phải là số lẻ, hay $m = 2k + 1$, do đó $n = 6k + 4$.
Nếu $n = 3k + 2$, thì do n là số chẵn, nên m phải là số chẵn, hay $m = 2k$, do đó $n = 6k + 2$.

Vậy $x^{2n} + x^n y^n + y^{2n}$ chia hết cho $x^2 - xy + y^2$ khi và chỉ khi $n = 6k + 2$ hoặc $n = 6k + 4$, với $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+$.

Bài toán 9. *Với $n \in \mathbb{Z}^+$ nào thì $x^{2n} - x^n y^n + y^{2n}$ chia hết cho $x^2 - xy + y^2$?*

Lời giải. Giả sử

$$x^{2n} - x^n y^n + y^{2n} = (x^2 - xy + y^2)q(x, y), \tag{8}$$

trong đó $q(x, y)$ là đa thức đối xứng với hệ số nguyên. Xét hai trường hợp của n.
1) n là số chẵn. Trong (8) thay x bởi $-x$, ta được

$$x^{2n} - x^n y^n + y^{2n} = (x^2 + xy + y^2)q(-x, y).$$

Theo Bài toán 2 đẳng thức này không thể xảy ra.
2) n là số lẻ. Trong (8) thay x bởi $-x$, ta được

$$x^{2n} + x^n y^n + y^{2n} = (x^2 + xy + y^2)q(-x, y).$$

Theo Bài toán 1 thì đẳng thức trên đúng khi và chỉ khi $n = 3m + 1$ hoặc $n = 3m + 2$.
Nếu $n = 3m + 1$, thì do n là số lẻ, nên m phải là số chẵn, tức là $m = 2k$ và khi đó $n = 6k + 1$.
Nếu $n = 3m + 2$, thì do n là số lẻ, nên m phải là số lẻ, tức là $m = 2k - 1$. Khi đó $n = 6k - 1$.

Vậy $x^{2n} - x^n y^n + y^{2n}$ chia hết cho $x^2 - xy + y^2$ khi và chỉ khi $n = 6k \pm 1,\ k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+$.

Bài toán 10. *Xác định n để $(x + y)^n + x^n + y^n$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$*

Lời giải. Giả sử $(x + y)^n + x^n + y^n$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$. Khi đó ta có

$$(x + y)^n + x^n + y^n = (x^2 + xy + y^2)q(x, y), \tag{9}$$

trong đó $q(x, y)$ là đa thức đối xứng với hệ số nguyên. Trong (9) thay x, y tương ứng bởi x^2, y^2, ta có

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^n + x^{2n} + y^{2n} &= (x^4 + x^2y^2 + y^4)q(x^2, y^2), \\ &= (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)q(x^2, y^2). \end{aligned} \tag{10}$$

Đẳng thức (10) chứng tỏ $(x^2+y^2)^n + x^{2n} + y^{2n}$ phải chia hết cho $x^2 - xy + y^2$. Ta có

$$(x^2+y^2)^n - (xy)^n = (x^2+y^2-xy)[(x^2+y^2)^{n-1} + (x^2+y^2)^{n-2} + ... \\ +(x^2+y^2)(xy)^{n-2} + (xy)^{n-1}]. \quad (11)$$

Tiếp theo ta có

$$(x^2+y^2)^n + x^{2n} + y^{2n} = [(x^2+y^2)^n - (xy)^n] + (x^{2n} + x^n y^n + y^{2n}). \quad (12)$$

Từ (11) và (12) suy ra $(x^2+y^2)^n+x^{2n}+y^{2n}$ chia hết cho x^2-xy+y^2 khi và chỉ khi $x^{2n}+x^ny^n+y^{2n}$ chia hết cho x^2-xy+y^2. Theo Bài toán 3 điều này có được khi và chỉ khi $n = 6k+2$ hoặc $n = 6k+4$ với $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+$.

Ngược lại, giả thiết rằng $n = 2m$, với $m = 3k+1$ hoặc $m = 3k+2$. Thế thì

$$(x+y)^n + x^n + y^n = (x+y)^{2m} + x^{2m} + y^{2m} = [(x+y)^{2m} - (xy)^m] + \\ +(x^{2m} + x^m y^m + y^{2m}).$$

Để ý rằng

$$(x+y)^{2m} - (xy)^m = [(x+y)^2]^m - (xy)^m] = [(x+y)^2 - xy]p(x,y) = \\ = (x^2+xy+y^2)p(x,y),$$

trong đó $p(x,y)$ là đa thức đối xứng với hệ số nguyên. Do đó $(x+y)^{2m} - (xy)^m$ chia hết cho x^2+xy+y^2.

Mặt khác, vì $m = 3k+1, \;\; m = 3k+2$ nên theo ví dụ 1, đa thức $x^{2m} + x^m y^m + y^{2m}$ chia hết cho x^2+xy+y^2.

Kết luận: Đa thức $(x+y)^n + x^n + y^n$ chia hết cho x^2+xy+y^2 khi và chỉ khi $n = 6k+2$ hoặc $n = 6k+4$, với $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+$.

Bài toán 11. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, đa thức*

$$f(x,y,z) = (x+y+z)^{2n+1} - x^{2n+1} - y^{2n+1} - z^{2n+1}$$

chia hết cho đa thức

$$g(x,y,z) = (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3.$$

Lời giải. Trước hết ta phân tích $g(x,y,z)$ thành nhân tử. Vì khi $x=-y, x=-z, y=-z$ thì $g=0$, nên theo định lý Bezout đa thức $g(x,y,z)$ chia hết cho $(x+y)(x+z)(y+z)$. Mặt khác, vì bậc của g bằng 3, nên nó có dạng

$$g(x,y,z) = a(x+y)(x+z)(y+z)$$

Cho $x=y=z=1$ ta tìm được $a=3$. Vậy ta có

$$g(x,y,z) = (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(x+z)(y+z).$$

Bằng cách tương tự ta thấy $f(x,y,z)$ chia hết cho $(x+y)(x+z)(y+z)$ với mọi n nguyên dương, tức là $f(x,y,z)$ chia hết cho $g(x,y,z)$.

Bài toán 12. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \geq 2$, đa thức*

$$f(x,y,z) = (x+y+z)^{2n} + x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} - (x+y)^{2n} - (y+z)^{2n} - (z+x)^{2n}$$

chia hết cho đa thức

$$g(x,y,z) = (x+y+z)^4 + x^4 + y^4 + z^4 - (x+y)^4 - (y+z)^4 - (z+x)^4.$$

Lời giải. Đặt

$$\sigma_1 = x+y+z, \quad \sigma_2 = xy+yz+zx, \quad \sigma_3 = xyz, \quad s_k = x^k + y^k + z^k.$$

Khi đó ta có:

$$g(x,y,z) = \sigma^4 - (\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3) -$$
$$-4(\sigma_1\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2^2) - 6(\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3) = 12\sigma_1\sigma_3 = 12(x+y+z)xyz.$$

Tiếp theo chúng ta biến đổi $f(x,y,z)$ như sau

$$f(x,y,z) = (x+y+z)^4 + [x^{2n} - (y+z)^{2n}] + [y^{2n} - (x+z)^{2n}] + [z^{2n} - (x+y)^{2n}]$$

Ta có $x^{2n} - (y+z)^{2n}$ chia hết cho $x^2 - (y+z)^2 = (x+y+z)(x-y-z)$, do đó $x^{2n} - (y+z)^{2n}$ chia hết cho $x+y+z$. Tương tự, $y^{2n} - (x+z)^{2n}$ và $z^{2n} - (x+y)^{2n}$ chia hết cho $x+y+z$.

Mặt khác

$$f(0,y,z) = f(x,0,z) = f(x,y,0) = 0.$$

Do đó theo Định lý Bezout, $f(x,y,z)$ chia hết cho xyz. Do đó, $f(x,y,z)$ chia hết cho $(x+y+z)xyz$, suy ra $f(x,y,z)$ chia hết cho $g(x,y,z)$.

Bài toán 13. *Chứng minh rằng, nếu đa thức đối xứng $f(x,y,z)$ chia hết cho $x-y$, thì nó chia hết cho $(x-y)^2(x-z)^2(y-z)^2$.*

Lời giải. Giả sử rằng

$$f(x,y,z) = (x-y)g(x,y,z).$$

Vì

$$f(x,y,z) = f(y,x,z) = (y-x)g(y,x,z) = -(x-y)g(y,x,z),$$

nên

$$g(y,x,z) = -g(x,y,z),$$

suy ra $g(x,y,z)$ là đa thức phản đối xứng theo hai biến x,y. Vậy $g(x,y,z)$ chia hết cho $x-y$. Do đó $f(x,y,z)$ chia hết cho $(x-y)^2$. Vì $f(x,y,z)$ là đa thức đối xứng, nên vai trò của x,y,z là như nhau, cho nên $f(x,y,z)$ cũng chia hết cho $(x-z)^2$ và $(y-z)^2$. Vậy $f(x,y,z)$ chia hết cho $(x-y)^2(x-z)^2(y-z)^2$.

Bài toán 14. *Tìm điều kiện cần và đủ, để đa thức $x^3+y^3+z^3+kxyz$ chia hết cho $x+y+z$.*

Lời giải. Xét đa thức theo biến x

$$f(x) = x^3 + (kyz)x + (y^3 + z^3).$$

Theo Định lý Bezout, $f(x)$ chia hết cho $x + y + z = x - (-y - z)$ khi và chỉ khi $f(-y - z) = 0$
Ta có

$$f(-y - z) = -(y + z)^3 - kyz(y + z) + (y^3 + z^3) = (k + 3)yz(y + z) = 0,\ \forall y, z.$$

Từ đó suy ra $k = -3$.

Vậy, điều kiện cần và đủ để $x^3 + y^3 + z^3 + kxyz$ chia hết cho $x + y + z$ là $k = -3$.

Bài toán 15. *Cho a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng, nếu $x + y + z$ chia hết cho 6, thì $a^3 + b^3 + c^3$ cũng chai hết cho 6.*

Lời giải. Ta có

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz.$$

Theo giả thiết $x + y + z$ chia hết cho 6, nên trong ba số x, y, z phải có ít nhất một số chia hết cho 2. Từ đó suy ra $3xyz$ chia hết cho 6. Vậy, theo đẳng thức trên, thì $x^3 + y^3 + x^3$ chia hết cho 6.

Bài tập

1. Chứng minh rằng $(x + y)^n - x^n - y^n$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$ khi và chỉ khi $n = 6k \pm 1$.

2. Chứng minh rằng $(x + y)^{2n+1} + x^{n+2}y^{n+2}$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

3. Chứng minh rằng, nếu đa thức đối xứng $f(x, y)$ chia hết cho $x^2 - y^2$, thì nó chia hết cho $x^3 + y^3 - (x + y)xy$.

4. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên p, q thì đa thức

$$x^p y^q + y^p z^q + z^p x^q - x^q y^p - y^q z^p - z^q x^p$$

chia hết cho $(x - y)(x - z)(y - z)$.

5. Chứng minh rằng, với mọi các số tự nhiên k, m, n, thì đa thức

$$x^k y^m z^n + y^k z^m x^n + z^k x^m y^n - x^n y^m z^k - y^n z^m x^k - z^k x^m y^k$$

chia hết cho $(x - y)(x - z)(y - z)$.

6. Cho đa thức

$$f(x, y, z) = x^m y^n + y^m z^n + z^m x^n - x^n y^m - y^n z^m - z^n x^m.$$

Chứng minh rằng, nếu $f(x, y, z)$ chia hết cho $(x + y)(x + z)(y + x)$, thì nó chia hết cho $(x^2 - y^2)(x^2 - z^2)(y^2 - z^2)$.

7. Chứng minh rằng, đa thức

$$a^4(b^2 + c^2 - a^2)^3 + b^4(c^2 + a^2 - b^2)^3 + c^4(a^2 + b^2 - c^2)^3$$

chia hết cho $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2$.

NÉT ĐẸP HÀM SỐ TIỀM ẨN TRONG BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC – BÀI TOÁN TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Huỳnh Duy Thủy, Trường THPT Tăng Bạt Hổ - Bình Định

"Chứng minh bất đẳng thức ..."'"Tìm giá trị nhỏ nhất,giá trị lớn nhất của biểu thức..." Những cụm từ ấy hàm chứa một mảng kiến thức trọng tâm, "hóc búa" trong chương trình toán học ở phổ thông, mà phần nhiều thí sinh rất "ngại" khi "va chạm". Còn nữa đó cũng là phần kiến thức luôn "thời sự", "cuốn hút", "quyến rũ" người học nhất là với đối tượng khá, giỏi.
"... ví như dòng sông nào cũng bắt nguồn từ những con suối nhỏ, mỗi bài toán dù khó đến đâu cũng có nguồn gốc từ những bài toán đơn giản ...".
Tác giả của bài viết này rất mong góp một chút "suy nghĩ" trong việc tìm ra "con đường" đến với những "dòng suối nhỏ kia".
Bài viết được trình bày theo hướng giải quyết những câu hỏi "kinh điển".
- Bắt đầu từ đâu? - Khai thác, khám phá, phát hiện và kiến tạo vấn đề ra sao?
- Giải pháp nào là khả thi? ......
Điểm mấu chốt trong phương pháp vận dụng tính chất của hàm số, là xây dựng được hàm số "tương thích" với bài toán.

1 Loại 1.Chọn trực tiếp một tham số biến thiên làm biến số.

Bài toán 1 (USAMO)**.** *Cho a, b, c là các số thực thuộc đoạn* $[0; 1]$
Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1(1)$

Lời giải. - Vai trò của các số a, b, c là như nhau không mất tính toång quaùt, ta chọn a là biến số. Như vậy ta hình thành được hàm số f biến số a.
$y = f(a)$ vôùi $a \in [0; 1]$
Xét hàm số $f(a) = \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c)$ trên tập $[0, 1]$
$f'(a) = \frac{1}{b+c+1} - \frac{b}{(c+a+1)^2} - \frac{c}{(a+b+1)^2} - (1-b)(1-c)$
$f''(a) = \frac{2b}{(c+a+1)^3} + \frac{2c}{(a+b+1)^3} \geq 0, \ \ \forall a \in [0; 1]$
Suy ra hàm số $f'(a)$ đồng biến trên đoạn $[0; 1]$.
* Trường hợp 1: $f'(a) \geq 0, \ \ \forall a \in [0; 1]$.
Suy ra hàm số $f(a)$ đồng biến trên đoạn $[0; 1]$
Do ñoù $f(a) \leq f(1) = \frac{1}{b+c+1} + \frac{b}{c+1+1} + \frac{c}{1+b+1} \leq \frac{1}{b+c+1} + \frac{b}{c+b+1} + \frac{c}{c+b+1}$

$$= \frac{1+b+c}{1+b+c} = 1$$

* Trường hợp 2: $f'(a) < 0, \quad \forall a \in [0;1]$
Suy ra hàm số $f(a)$ nghịch biến trên đoạn $[0;1]$ Do đó:

$$\begin{aligned} f(a) \le f(0) &= \frac{b}{c+1} + \frac{c}{b+1} + (1-b)(1-c) \\ &= \frac{b(b+1) + c(c+1) + (1-b)(1-c)(c+1)(b+1)}{(c+1)(b+1)} \\ &= \frac{1+b+c+b^2c^2}{1+b+c+bc} \le \frac{1+b+c+bc}{1+b+c+bc} = 1 \end{aligned}$$

* Trường hợp 3: $f'(a)$ đổi dấu trên đoạn $[0;1]$
Mặt khác $f'(a)$ là hàm số liên tục và đồng biến trên đoạn $[0;1]$.
Từ đó suy ra phương trình $f'(a) = 0$ có nghiệm duy nhất $a = \alpha, \alpha \in (0;1)$.
Lập bảng biến thiên, ta nhận được $f(a) \le 1$.
Dấu đẳng thức xảy ra tại (a,b,c) là các hoán vị của $(1,1,0), (1,0,0), (1,1,1)$ hoặc $(0,0,0)$.

Bài toán 2. *Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:*

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3 \,(1)$$

(1)

Lời giải. - Không mất tính tổng quát, giả sử $0 < a \le b \le c < a+b$
Ta có: $(1) \Leftrightarrow c^3 - (a+b)c^2 - (a^2+b^2-2ab)c + (a^3+b^3-a^2b-ab^2) < 0$
Xét hàm số $f(c) = c^3 - (a+b)c^2 - (a^2+b^2-2ab)c + (a^3+b^3-a^2b-ab^2), \quad \forall c \in [b, a+b)$
$f'(c) = 3c^2 - 2(a+b)c - (a-b)^2$

$$f'(c) = 0 \Leftrightarrow 3c^2 - 2(a+b)c - (a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c_1 = \frac{(a+b) - \sqrt{(a+b)^2 + 3(a-b)^2}}{3} \\ c_2 = \frac{(a+b) + \sqrt{(a+b)^2 + 3(a-b)^2}}{3} \end{array} \right.$$

Nhận xét $c_1 \le 0, b < c_2 < a+b$
Bảng biến thiên
Vì $0 < a \le b$ nên $f(b) = a^2(a-2b) < 0$. Suy ra $f(c) < 0, \forall c \in [b; a+b)$.

2 Loại 2: Biến đổi quy về một trong các tham số biến thiên cho trước.

Bài toán 3. *: [IM025] Cho 3 số thực dương x, y, z thay đổi và thỏa mãn hệ thức $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy + yz + zx - 2xyz$.*

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x \ge y \ge z$. Từ giả thiết , suy ra $0 < z \le \frac{1}{3}$
Ta có:

$$\begin{aligned} P = xy(1\breve{\ }2z) + z(1\breve{\ }z) &\le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 (1-2z) + z(1-z) \\ &= \left(\frac{1-z}{2}\right)^2 (1-2z) + z(1-z) = -\frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- Xét hàm số $f(z) = -\frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{4},\ \ \forall z \in \left(0; \frac{1}{3}\right]$
$f'(z) = -\frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{2}z = -\frac{z}{2}(3z-1), f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{3}$ (vì $0 < z \le \frac{1}{3}$)
Lập bảng biến thiên, ta nhận được $P \le f(z) \le f(\frac{1}{3}) = \frac{7}{27}$
Kết luận: $\max P = \frac{7}{27}$ đạt được khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Bài toán 4. *a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác có chu vi bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$T = 3(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta giả sử: $0 < a \le b \le c$
Mặt khác $a + b + c = 3$ và $c < a + b$ nên $1 \le c < \frac{3}{2}$
Ta biến đổi:

$$\begin{aligned} T &= 3(a+b)^2 - 6ab + 3c^2 + 4abc = 3(3-c)^2 + 3c^2 + 2ab(2c-3) \\ &= 3(3-c)^2 + 3c^2 - 2(3-2c)ab \ge 3(3-c)^2 + 3c^2 - 2(3-2c)\left(\frac{3-c}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow T \ge c^3 - \frac{3}{2}c^2 + \frac{27}{2} \end{aligned}$$

Xét hàm số: $f(c) = c^3 - \frac{3}{2}c^2 + \frac{27}{2}$ với $1 \le c < \frac{3}{2}, f'(c) = 3c^2 - 3c$
$f'(c) = 0 \Leftrightarrow 3c(c-1) = 0 \Leftrightarrow c = 1$ (Vì $1 \le c < \frac{3}{2}$.)
Lập bảng biến thiên, ta nhận được: $T \ge f(c) \ge f(1) = 13$
Kết luận: $\min T = 13$ đạt tại $a = b = c = 1$.

3 Loại 3: Hình thành biến số mới.

Bài toán 5. *Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2}$*

Lời giải. - Áp dụng bất đẳng thức côsi, ta có:

$$P \ge (x^2 + y^2)\left[1 + \frac{4}{(x^2+y^2)^2}\right] = (x^2 + y^2) + \frac{4}{x^2 + y^2}$$

- Theo giả thiết, ta có: $x^2 + y^2 = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$
Áp dụng bất đẳng thức côsi, ta có:

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \le \frac{1}{2}(x^2 + 1 - y^2) + \frac{1}{2}(y^2 + 1 - x^2) = 1$$

Từ đó, ta có $0 < x^2 + y^2 \le 1$
Khi đó, ta có: $P \ge t + \frac{4}{t}, t = x^2 + y^2,\quad 0 < t \le 1$.
Xét hàm số: $f(t) = t + \frac{4}{t}$, trên tập $(0; 1]$

$$f'(t) = 1 - \frac{4}{t^2} < 0, \quad \forall t \in (0; 1]$$

Lập bảng biến thiên ta nhận được $P \geq f(1) = 5$
Kết luận: $\min P = 5$ đạt được $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài toán 6. *Cho các số thực a, b, c không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = (a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2)$.*

Lời giải. Dựa theo giả thiết ta giả sử rằng: $0 \leq a \leq b \leq c \leq 3$.
Suy ra: $\begin{cases} a^2 - ab \leq 0 \\ a^2 - ca \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - ab + b^2 \leq b^2 \\ a^2 - ca + c^2 \leq c^2 \end{cases}$
Từ đó ta nhận được:

$$P \leq b^2c^2\left(b^2 - bc + c^2\right) = b^2c^2\left[(b + c)^2 - 3bc\right]$$

Ta có: $b + c \leq 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{bc} \leq b + c \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq bc \leq 9/4$
Do đó: $P \leq b^2c^2(9 - 3bc) = 9b^2c^2 - 3b^3c^3$ Đặt $t = bc, 0 \leq t \leq \frac{9}{4}$. Khi đó: $P \leq 9t^2 - 3t^3$ Xét hàm số: $f(t) = 9t^2 - 3t^3,\ \ \forall t \in \left[0, \frac{9}{4}\right]$
$f'(t) = 18t - 9t^2$
$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t_1 = 0, t_2 = 2$
Lập bảng biến thiên , ta nhận được $P \leq f(t) \leq 12$
Kết luận: $\max P = 12$ đạt tại $a = 0, b = 1, c = 2$ và các hoán vị của (a, b, c).

4 Loại 4: Chọn hàm số đặc trưng, trường hợp các biến đã "phân li"

Bài toán 7 (Olimpic Hồng Kông). *Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng:*

$$6\left(a^3 + b^3 + c^3 + d^3\right) \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{1}{8}\,(1)$$

Lời giải. Ta có: $(1) \Leftrightarrow 6a^3 - a^2 + 6b^3 - b^2 + 6c^3 - c^2 + 6d^3 - d^2 \geq \frac{1}{8}$
Xét hàm số $f(x) = 6x^3 - x^2 - \frac{5}{8}x,\ \ \forall x \in (0, 1)$, $f'(x) = 18x^2 - 2x - \frac{5}{8}$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1/4 \in (0, 1), x_2 = -5/36$ (loại)
Lập bảng biến thiên , ta nhận được $6x^3 - x^2 - \frac{5}{8}x \geq -\frac{1}{8}\,(*),\ \ \forall x \in (0, 1)$
Dựa theo kết quả (*) ta có: $6a^3 - a^2 + 6b^3 - b^2 + 6c^3 - c^2 + 6d^3 - d^2 \geq 4\left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{5}{8}(a + b + c + d)$
$\Leftrightarrow 6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{1}{8}$
Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d = \frac{1}{4}$.

Bài toán 8. *Cho 3 số thực x, y, z thay đổi và thỏa mãn hệ thức $x + y + z = 1$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{z^2 + 1}$*

Lời giải. Xét hàm số $f(t) = \frac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}$. Tập xác định $D = \mathbb{R}$
Ta có: $f'(t) = \frac{1-3t}{\sqrt{(t^2+1)^3}}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = 1/3$
Lập bảng biến thiên , ta nhận được $f(t) \leq \sqrt{10},\ \ \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{t+3}{\sqrt{t^2+1}} \leq \sqrt{10},\ \ \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t + 3 \leq$

$\sqrt{10}\sqrt{t^2+1},\ \ \forall t \in \mathbb{R}(1)$
- Sử dụng kết quả (1), ta có.

$$\begin{cases} x+3 \le \sqrt{10}\sqrt{x^2+1} \\ y+3 \le \sqrt{10}\sqrt{y^2+1} \\ z+3 \le \sqrt{10}\sqrt{z^2+1} \end{cases}$$

Do đó

$$\begin{aligned} (x+y+z)+9 &\le \sqrt{10}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1}\right) \\ &\Leftrightarrow 1+9 \le \sqrt{10}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1}\right) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{10} \le \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.
Kết luận: $\min P=\sqrt{10}$, đạt được khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

5 Loại 5: Chọn hàm số đặc trưng, trường hợp các biến chưa "phân li"

Bài toán 9. *(Darij Grinberg – Old and new lnequalityl) Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh :*

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2} \ge \frac{9}{4(a+b+c)}$$

Lời giải. Do tính đẳng cấp, nên ta giả sử $a+b+c=3$ suy ra $a,b,c \in (0;3)$.
Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\frac{a}{(3-a)^2}+\frac{b}{(3-b)^2}+\frac{c}{(3-c)^2} \ge \frac{3}{4}$
Xét hàm số $f(x)=\frac{x}{(3-x)^2}-\frac{1}{2}x,\ \ \forall x \in (0;3),\ f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1 \in (0;3)$. Lập bảng biến thiên , ta có

$$f(x) \ge -\frac{1}{4},\ \ \forall x \in (0;3) \Leftrightarrow \frac{x}{(3-x)^2} \ge \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\,(*)\,,\ \ \forall x \in (0;3)$$

Vận dụng bất đẳng thức (*) ta nhận được.
$\frac{a}{(3-a)^2}+\frac{b}{(3-b)^2}+\frac{c}{(3-c)^2} \ge \frac{1}{2}(a+b+c)-\frac{3}{4}$
$\Leftrightarrow \frac{a}{(3-a)^2}+\frac{b}{(3-b)^2}+\frac{c}{(3-c)^2} \ge \frac{3}{4}$
Bất đẳng thức đã được chứng minh dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài toán 10 (USAMO)**.** *Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng:*

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \le 8.$$

Lời giải. - Do tính đẳng cấp nên giả sử $a+b+c=3$, suy ra $a,b,c \in (0;3)$.
Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết thành:

$$\frac{a^2+6a+9}{3a^2-6a+9}+\frac{b^2+6b+9}{3b^2-6b+9}+\frac{c^2+6c+9}{3c^2-6c+9} \le 8$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2+6x+9}{3x^2-6x+9} - \frac{4}{3}x,\ \ \forall x \in (0;3),\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in (0,3)$
Lập bảng biến thiên , ta có $\frac{x^2+6x+9}{3x^2-6x+9} - \frac{4}{3}x \leq \frac{4}{3},\ \ \forall x \in (0;3)\,(*)$
Vận dụng bất đẳng thức (*) ta nhận được.

$$\frac{a^2+6a+9}{3a^2-6a+9} + \frac{b^2+6b+9}{3b^2-6b+9} + \frac{c^2+6c+9}{3c^2-6c+9} \leq \frac{4}{3}(a+b+c) + 4 = 8$$

Bất đẳng đã được chứng minh, dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

6 Loại 6:Chọn hàm đặc trưng, sử dụng hệ thức phụ trợ.

Bài toán 11. *Cho các số thực x, y, z thuộc đoạn $[0;3]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.*

$$P = \frac{1}{4+2\ln(1+x)-y} + \frac{1}{4+2\ln(1+y)-z} + \frac{1}{4+2\ln(1+z)-x}$$

Lời giải. - Thật vậy với 2 lần vận dụng bất đẳng thức cô si, ta đánh giá và "phân li" được:

$$P \geq \frac{9}{12 + [2\ln(1+x)-x] + [2\ln(1+y)-y] + [2\ln(1+z)-z]}$$

. - Lúc này các số hạng ở vế phải được sắp xếp theo cùng một quy luật, điều này làm "hé lộ" hàm số đặc trưng: $f(t) = 2\ln(1+t)\breve{}t, \forall t \in [0;3]$.

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} 4+2\ln(1+x)-y > 0 \\ 4+2\ln(1+y)-z > 0 \\ 4+2\ln(1+z)-x > 0 \end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức cô si, ta có:

$$\begin{aligned} &[4+2\ln(1+x)-y] + [4+2\ln(1+y)-z] + [4+2\ln(1+z)-x] \\ &\geq 3\sqrt[3]{[4+2\ln(1+x)-y]\,[4+2\ln(1+y)-z]\,[4+2\ln(1+z)-x]} \end{aligned}$$

- Lại áp dụng bất đẳng thức cô si, ta có.

$$P \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{[4+2\ln(1+x)-y]\,[4+2\ln(1+y)-z]\,[4+2\ln(1+z)-x]}}$$

Nhân vế theo vế 2 bất đẳng thức trên, ta được.

$$\begin{aligned} &[4+2\ln(1+x)-y+4+2\ln(1+y)-z+4+2\ln(1+z)-x]\,.P \geq 9 \\ &\Leftrightarrow P \geq \frac{9}{12 + [2\ln(1+x)-x] + [2\ln(1+y)-y] + [2\ln(1+z)-z]} \end{aligned}$$

Xét hàm số:

$$f(t) = 2\ln(1+t)\breve{}t, \forall t \in [0;3],\ \ f'(t) = \frac{2}{1+t} - 1 = \frac{1-t}{1+t}\ \ f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Lập bảng biến thiên , ta nhận được : $0 \le f(t) \le 2\ln 2 - 1,\ \ \forall t \in [0;3]$
Sử dụng kết quả trên, ta có:

$$0 \le [2\ln(1+x) - x] + [2\ln(1+y) - y] + [2\ln(1+z) - z] \le 6\ln 2 - 3$$

Do đó: $P \ge \frac{9}{12+(6\ln 2-3)} = \frac{9}{9+6\ln 2} = \frac{3}{3+2\ln 2}$
Đẳng thức xảy ra khi: $x = y = z = 1$.
Kết luận: $\min P = \frac{3}{3+2\ln 2}$ đạt được tại $x = y = z = 1$.

Bài toán 12. *Cho A, B, C là các góc nhọn trong tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$T = \tan A + \tan B + \tan C + \frac{1}{\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}}$$

Lời giải. Trước hết ta chứng minh. $\mathrm{tanA} + \mathrm{tanB} + \mathrm{tanC} \ge \cot\frac{\mathrm{A}}{2} + \cot\frac{\mathrm{B}}{2} + \cot\frac{\mathrm{C}}{2}$
Mặt khác:

$$\begin{aligned}
\cot\frac{\mathrm{A}}{2} + \cot\frac{\mathrm{B}}{2} + \cot\frac{\mathrm{C}}{2} &= \frac{1}{\tan\frac{A}{2}} + \frac{1}{\tan\frac{B}{2}} + \frac{1}{\tan\frac{C}{2}} \\
&= \frac{\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}} \\
&= \frac{1}{\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}} = \cot\frac{\mathrm{A}}{2}.\cot\frac{\mathrm{B}}{2}.\cot\frac{C}{2}
\end{aligned}$$

Do đó: $\mathrm{tanA} + \mathrm{tanB} + \mathrm{tanC} \ge \cot\frac{\mathrm{A}}{2}.\cot\frac{\mathrm{B}}{2}.\cot\frac{\mathrm{C}}{2}$.
Từ đó, ta nhận được.

$$\mathrm{T} \ge \cot\frac{\mathrm{A}}{2}.\cot\frac{\mathrm{B}}{2}.\cot\frac{\mathrm{C}}{2} + \frac{1}{\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}}$$

Đặt $\mathrm{t} = \cot\frac{\mathrm{A}}{2}.\cot\frac{\mathrm{B}}{2}.\cot\frac{\mathrm{C}}{2} = \cot\frac{\mathrm{A}}{2} + \cot\frac{\mathrm{B}}{2} + \cot\frac{C}{2} \ge 3\sqrt[3]{\cot\frac{A}{2}.\cot\frac{B}{2}.\cot\frac{C}{2}}$.
Suy ra: $\cot\frac{\mathrm{A}}{2}.\cot\frac{\mathrm{B}}{2}.\cot\frac{C}{2} \ge 3\sqrt{3}$.
Xét hàm số: $f(t) = t + \frac{1}{t}$ với $t \ge 3\sqrt{3}$

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2-1}{t^2} > 0,\ \ \forall t \ge 3\sqrt{3},$$

Lập bảng biến thiên , ta nhận được: $T \ge f(t) \ge \frac{28}{3\sqrt{3}},\ \ \forall t \ge 3\sqrt{3}$
Kết luận: $\min T = \frac{28}{3\sqrt{3}}$ đạt được khi $A = B = C = \frac{\pi}{3}$.

7 Loại 7: Khảo sát hàm số phát sinh.

Bài toán 13. *Cho x, y, z là các số thực thuộc đoạn $[0;1]$. Chứng minh rằng:* $2(x^3+y^3+z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x) \le 3\,(1)$

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - yx^2 - z^2x + 2\left(y^3 + z^3\right) - y^2z$ trên tập $[0;1]$.
$f'(x) = 6x^2 - 2yx - z^2$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}\left(y \pm \sqrt{y^2 + 6z^2}\right)$
Khảo sát hàm số $f(x)$, ta nhận được. $\underset{x\in[0,1]}{Max} f(x) = Max\left\{f(0), f(1)\right\}$
Nhận xét: $f(0) = 2\left(y^3 + z^3\right) - y^2z \leq 2\left(y^3 + z^3\right) - y^2z + \left(2 - y - z^2\right) = f(1)$
Như vậy ta cần phải chứng minh. $f(1) \leq 3$
Thật vậy: Đặt

$$\begin{aligned} f(1) = g(y) &= 2\left(y^3 + z^3\right) - y^2z + \left(2 - y - z^2\right) \\ &= 2y^3\breve{}\, zy^2 - y + 2z^3 - z^2 + 2 \end{aligned}$$

$g'(y) = 6y^2 - 2zy\breve{}\,1$, $g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{6}\left(z \pm \sqrt{z^2 + 6}\right)$
Khảo sát hàm số $g(y)$ trên đoạn $[0;1]$, ta nhận được. $\underset{y\in[0,1]}{Max} g(y) = Max\left\{g(0), g(1)\right\}$

Ta lại có

$$\begin{aligned} g(0) &= 2z^3 - z^2 + 2 \leq 2z^3 - z^2 + 2 + (1 - z) = g(1) \\ &= z\left(z - 1\right)\left(2z + 1\right) + 3 \leq 3, \forall z \in [0;1] \end{aligned}$$

Bất đẳng thức (1) đã được chứng minh.

Bài toán 14. *Cho a, b, c là các số thực thuộc đoạn $[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức.* $P = \frac{a}{b^3+c^3+6} + \frac{b}{c^3+a^3+6} + \frac{c}{a^3+b^3+6}$.

Lời giải. Xét hàm số $[f(c) = \frac{a}{b^3+c^3+6} + \frac{b}{c^3+a^3+6} + \frac{c}{a^3+b^3+6}$ trên đoạn $[0;1]$.
$f'(c) = -\frac{3ac^2}{(6+b^3+c^3)^2} - \frac{3bc^2}{(c^3+a^3+6)^2} + \frac{1}{a^3+b^3+6}$
$f''(c) = -\frac{6ca\left(6+b^3-2c^3\right)}{(6+b^3+c^3)^3} - \frac{6bc\left(6+a^3-2c^3\right)}{(6+c^3+a^3)^3} \leq 0, \;\; \forall c \in [0;1]$
Suy ra hàm số $f'(c)$ nghịch biến trên đoạn $[0;1]$.
Do đó $f'(c) \geq f'(1) = \frac{1}{6+a^3+b^3} - \frac{3a}{(7+b^3)^2} - \frac{3b}{(7+a^3)^2} \geq \frac{1}{8} - 2.\frac{3}{49} > 0$
Suy ra hàm số $f(c)$ đồng biến trên đoạn $[0;1]$.
Do đó $f(c) \leq f(1) = \frac{a}{b^3+7} + \frac{b}{a^3+7} + \frac{1}{a^3+b^3+6}$
Ta lại xét hàm số. $g(a) = \frac{a}{b^3+7} + \frac{b}{a^3+7} + \frac{1}{a^3+b^3+6}$ trên đoạn $[0;1]$.
Khảo sát hàm số $g(a)$ trên đoạn $[0;1]$, ta nhận được. $P \leq g(a) \leq g(1) = \frac{2}{b^3+7} + \frac{b}{8}$
Ta lại xét hàm số $h(b) = \frac{2}{b^3+7} + \frac{b}{8}$ trên đoạn $[0;1]$.
Khảo sát hàm số $h(b)$ ta nhận được $h(b)$ đồng biến trên đoạn $[0;1]$.
Suy ra $P \leq h(b) \leq h(1) = \frac{3}{8}$
Kết luận: $\max P = \frac{3}{8}$ đạt được khi $a = b = c = 1$.

8 Một số bài tập

Bài toán 15. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh* $\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq 3$

Bài toán 16. *Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c \geq 3$. Chứng minh rằng:* $\frac{1}{a^2+b+c} + \frac{1}{b^2+c+a} + \frac{1}{c^2+a+b} \leq 1$

Bài toán 17. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$ Chứng minh* $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2+b^2+c^2$.

Bài toán 18. *Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:* $10\left(a^3+b^3+c^3\right) - 9\left(a^5+b^5+c^5\right) \geq 1$

Bài toán 19. *Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh:* $\tan A + \tan B + \tan C + 6(\sin A + \sin B + \sin C) \geq 12\sqrt{3}$.

Bài toán 20. *Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh:* $\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \leq \frac{9}{10}$

Bài toán 21. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:* $y = \frac{3+2\sin x}{\sqrt{1+\cos x}} + \sqrt{1-\cos x}$ *trên đoạn* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Bài toán 22. *Xét các tam giác ABC với 3 góc ở đỉnh đều nhọn. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.*

$$P = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C}$$

Bài toán 23. *Xét tam giác ABC tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.*

$$P = \cos A + \cos B + \cos C + \frac{4}{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}$$

Bài toán 24. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:* $P = x^4 + y^4 - x^2y^2$ *Trong đó: x, y là các số thực thỏa mãn điều* $x^2 + y^2 - xy = 1$.

THÊM MỘT PHƯƠNG PHÁP MỚI ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Nguyễn Tài Chung, Trường THPT Chuyên Hùng Vương - Gia Lai

1 Thêm một phương pháp mới để chứng minh bất đẳng thức

Chúng ta đều biết rằng thế giới Bất đẳng thức vô cùng rộng lớn và phong phú, là lĩnh vực phát triển nhất của Toán sơ cấp. Do vậy các phương pháp và kĩ thuật chứng minh bất đẳng thức ngày càng nhiều, và có nhiều phương pháp mới. Theo dõi các tài liệu trên Internet ta thấy trong thời gian gần đây Bất đẳng thức được quan tâm, trao đổi, thảo luận và phát triển rất nhiều, đã xuất hiện nhiều cao thủ về bất đẳng thức là các Học sinh, Sinh viên người Việt Nam, theo đó đã có một số phương pháp mới để tấn công các bài toán về Bất đẳng thức. Trong quá trình giảng dạy Bất đẳng thức cho các em học sinh giỏi, tôi thấy có một phương pháp mới lạ và rất độc đáo đó là sử dụng Dãy số để chứng minh Bất đẳng thức. Vấn đề này cũng khá rộng lớn, phải kể đến như dùng Giới hạn dãy số để chỉ ra hằng số tốt nhất làm cho Bất đẳng thức đúng, tìm tất cả các giá trị của tham số để Bất đẳng thức đúng, Bất đẳng thức trong Dãy số, dùng Giới hạn dãy số để chứng minh Bất đẳng thức ba biến đối xứng. Bài viết này đề cập đến kĩ thuật dùng Giới hạn dãy số để chứng minh một số Bất đẳng thức khó dạng ba biến đối xứng, đây là vấn đề mới mẻ nên các ví dụ mà tôi sưu tầm được còn ít. Hy vọng rằng sau khi đọc bài viết, bạn đọc sẽ phát triển thêm kĩ thuật này và sưu tầm, sáng tạo thêm nhiều bài toán giải được bằng kĩ thuật này.

1. Một số lưu ý về phương pháp. Tất cả các bất đẳng thức đối xứng ba biến số đều có thể quy về các hàm đối xứng cơ bản của

$$p = x + y + z,\ q = xy + yz + zx,\ r = xyz.$$

Sau khi đã viết bất đẳng thức cần chứng minh theo p, q, r ta chỉ cần khảo sát bất đẳng thức này theo ba biến mới p, q, r.

• Có thể thấy ngay lợi ích của phương pháp này là mối ràng buộc giữa các biến p, q, r mà các biến dương x, y, z ban đầu không có như

$$\boxed{p^2 \geq 3r,\ p^3 \geq 27r,\ q^2 \geq 3pr,\ pq \geq 9r...}$$

• Một số biểu diễn theo p, q, r :

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+z^2 &= p^2-2q\\
x^3+y^3+z^3 &= p^3-3pq+3r\\
x^4+y^4+z^4 &= \left(p^2-2q\right)^2-2\left(q^2-2pr\right)\\
(x+y)(y+z)(z+x) &= pq-r\\
xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x) &= pq-3r\\
x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 &= q^2-2pr\\
x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3 &= q^3-3pqr+3r^2\\
x^4y^4+y^4z^4+z^4x^4 &= q^4-4pq^2r+2p^2r^2+4qr^2.
\end{aligned}$$

Việc chứng minh các công thức trên là đơn giản. Sau đây là một vài chứng minh đó.

∘ Ta có

$$\begin{aligned}
x^4+y^4+z^4 &= \left(x^2+y^2+z^2\right)^2-2\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)\\
&= \left(p^2-2q\right)^2-2\left[(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)\right]\\
&= \left(p^2-2q\right)^2-2\left(q^2-2pr\right).
\end{aligned}$$

∘ Ta có

$$\begin{aligned}
&(x+y)(y+z)(z+x) = (p-x)(p-y)(p-z)\\
=&p^3-(x+y+z)p^2+(xy+yz+zx)p-xyz\\
=&p^3-p^3+pq-r = pq-r.
\end{aligned}$$

∘ Ta có

$$\begin{aligned}
&xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\\
=&xy(p-z)+yz(p-x)+zx(p-y)\\
=&p(xy+yz+zx)-3xyz = pq-3r.
\end{aligned}$$

∘ Do hằng đẳng thức

$$A^3+B^3+C^3-3ABC = (A+B+C)\left(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA\right)$$

nên

$$\begin{aligned}
&x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3\\
=&3x^2y^2z^2+(xy+yz+zx)\left[x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-xyz(x+y+z)\right]\\
=&3r^2+q\left(q^2-2pr-rp\right) = q^3-3pqr+3r^2.
\end{aligned}$$

• Bất đẳng thức Schur : Nếu x, y, z là các số thực dương và t là một số thực dương, thì

$$x^t(x-y)(x-z)+y^t(y-z)(y-x)+z^t(z-y)(z-x)\geq 0. \tag{1}$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử $x \ge y \ge z > 0$. Gọi P là vế trái của (1). Khi đó

$$\begin{aligned} P &\ge x^t (x-y)(x-z) + y^t (y-z)(y-x) \\ &= (x-y)\left[x^t (x-z) - y^t (y-z)\right] \\ &\ge (x-y)\left[y^t (x-z) - y^t (y-z)\right] = (x-y)^2 y^t \ge 0. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$ hoặc $x = y$ và $z = 0$ cùng các hoán vị của nó.
Lưu ý. Nếu t là số nguyên dương, chẳng hạn $t = 1$, $t = 2$ thì chỉ cần điều kiện của x, y, z không âm là bất đẳng (1) đúng. Bất đẳng thức (1) cũng đúng khi $t < 0$, thật vậy, nếu $t < 0$ thì với giả sử $x \ge y \ge z > 0$, ta có $z^t \ge y^t$, suy ra

$$\begin{aligned} P &\ge y^t (y-z)(y-x) + z^t (z-y)(z-x) \\ &= (y-z)\left[y^t (y-x) - z^t (z-x)\right] \\ &\ge (y-z)\left[z^t (y-x) - z^t (z-x)\right] = (y-z)^2 z^t \ge 0. \end{aligned}$$

• Hai trường hợp quen thuộc được sử dụng nhiều là $t = 1$ và $t = 2$. Với $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ ta có

$$x(x-y)(x-z) + y(y-z)(y-x) + z(z-y)(z-x) \ge 0. \tag{2}$$
$$x^2 (x-y)(x-z) + y^2 (y-z)(y-x) + z^2 (z-y)(z-x) \ge 0. \tag{3}$$

Các bất đẳng thức (2) và (3) còn được viết lại là

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \ge xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x). \tag{4}$$
$$x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x+y+z) \ge x^3 (y+z) + y^3 (z+x) + z^3 (x+y). \tag{5}$$

Còn nếu viết theo p, q, r thì từ (4) và (5) ta có

$$\boxed{p^3 - 4pq + 9r \ge 0,\ \ p^4 - 5p^2 q + 4q^2 + 6pr \ge 0.}$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} (4) &\Leftrightarrow p^3 - 3pq + 3r + 3r \ge xy(p-z) + yz(p-x) + zx(p-y) \\ &\Leftrightarrow p^3 - 3pq + 6r \ge p(xy+yz+zx) - 3xyz \Leftrightarrow p^3 - 4pq + 9r \ge 0 \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} (5) &\Leftrightarrow \left(p^4 - 4p^2 q + 2q^2 + 4pr\right) + pr \ge x^3 (p-x) + y^3 (p-y) + z^3 (p-z) \\ &\Leftrightarrow p^4 - 4p^2 q + 2q^2 + 5pr \ge \left(x^3 + y^3 + z^3\right) p - \left(x^4 + y^4 + z^4\right) \\ &\Leftrightarrow p^4 - 4p^2 q + 2q^2 + 5pr \ge \left(p^3 - 3pq + 3r\right) p - \left(p^4 - 4p^2 q + 2q^2 + 4pr\right) \\ &\Leftrightarrow p^4 - 5p^2 q + 4q^2 + 6pr \ge 0. \end{aligned}$$

2 Một số bài toán.

Bài toán 1. *Cho ba số dương a, b, c thoả mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng*

$$\begin{aligned}&(1-ab-bc-ca)(1-27abc)\\ \geq&6\left[1+3(ab+bc+ca)\right]\left[(ab+bc+ca)^2-3abc\right].\end{aligned}$$

Giải. Đặt $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$, $r=abc$. Khi đó $p=1$. Ta cần chứng minh

$$(1-q)(1-27r)\geq 6(1+3q)\left(q^2-3r\right). \tag{1}$$

Ta có $0\leq q=ab+bc+ca\leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{1}{3}$. Khi $0<q\leq\frac{1}{4}$, ta có

$$(1-q)(1-27r)\geq\frac{3(1-27r)}{4}. \tag{2}$$

$$6(1+3q)\left(q^2-3r\right)\leq 6\left(1+\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{16}-3r\right)=\frac{42}{4}\left(\frac{1}{16}-3r\right). \tag{3}$$

Vì

$$\frac{3(1-27r)}{4}\geq\frac{42}{4}\left(\frac{1}{16}-3r\right)\Leftrightarrow 3-81r\geq\frac{42}{16}-126r\Leftrightarrow 45r\geq-\frac{3}{8}\text{ (đúng)}$$

nên từ (2) và (3) suy ra (1) đúng. Tiếp theo ta xét $\frac{1}{4}\leq q\leq\frac{1}{3}$. Xét dãy số (a_n) như sau

$$a_1=\frac{1}{4}\ ;\ a_{n+1}=\frac{1+a_n}{5-3a_n},\quad \forall n=1,2,\ldots \tag{4}$$

Ta có $a_1\leq\frac{1}{3}$. Giả sử $a_k\leq\frac{1}{3}$. Xét hàm số $f(x)=\frac{x+1}{-3x+5}$, khi đó hàm f đồng biến vì

$$f'(x)=\frac{8}{(5-3x)^2}>0.$$

Vậy $a_{k+1}=f(a_k)\leq f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$. Theo nguyên lí quy nạp, suy ra

$$0\leq a_n\leq\frac{1}{3},\ \ \forall n=1,2,\ldots$$

Do đó

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1+a_n}{5-3a_n}-a_n=\frac{3a_n^2-4a_n+1}{5-3a_n}>0.$$

Vậy dãy số (a_n) tăng và bị chặn trên nên có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=L$. Từ (4) cho $n\to+\infty$, ta được

$$L=\frac{1+L}{5-3L}\Leftrightarrow 3L^2-4L+1=0\overset{\text{do } L\leq\frac{1}{3}}{\Rightarrow}L=\frac{1}{3}.$$

Vì dãy số (a_n) tăng về $\dfrac{1}{3}$ và $q \in \left[\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{3}\right]$, suy ra tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$\begin{aligned} &a_k \le q \le a_{k+1} \Rightarrow q \le \frac{1+a_k}{5-3a_k} \Rightarrow 5q - 3qa_k \le 1 + a_k \\ \Rightarrow &3q - 3qa_k + 1 - a_k \le 2 - 2q \Rightarrow \frac{1}{2}(1-a_k)(3q+1) \le 1 - q. \end{aligned}$$

Từ $a_k \le q \le \dfrac{1}{3}$, ta có

$$(q-a_k)\left(q-\frac{1}{3}\right) \le 0 \Leftrightarrow q^2 \le \frac{q}{3} + qa_k - \frac{a_k}{3} \Leftrightarrow q^2 \le q\left(\frac{1}{3}+a_k\right) - \frac{a_k}{3}.$$

Theo bất đẳng thức Schur, ta có $p^3 - 4pq + 9r \ge 0$, mà $p = 1$ nên $4q - 1 \le 9r$. Do đó

$$\begin{aligned} &q^2 \le \frac{1+9r}{4}\left(\frac{1}{3}+a_k\right) - \frac{a_k}{3} \Rightarrow q^2 \le \frac{(9r+1)(3a_k+1) - 4a_k}{12} \\ \Rightarrow &q^2 \le \frac{27ra_k + 9r + 3a_k + 1 - 4a_k}{12} \Rightarrow q^2 - 3r \le \frac{27ra_k - 27r + 1 - a_k}{12} \\ \Rightarrow &q^2 - 3r \le \frac{(1-a_k)(1-27r)}{12}. \end{aligned}$$

Vậy ta đã chứng minh được

$$\frac{1}{2}(1-a_k)(3q+1) \le 1 - q. \tag{5}$$

$$q^2 - 3r \le \frac{(1-a_k)(1-27r)}{12}. \tag{6}$$

Để ý rằng $1 - a_k > 0$, $3q - 1 \le 0$, $1 - q > 0$, $q^2 - 3r \ge 0$, $1 - 27r \ge 0$. Từ (6) suy ra

$$1 - a_k \ge \frac{12(q^2-3r)}{1-27r}$$

Thay vào (5) ta được

$$1 - q \ge \frac{1}{2}.\frac{12(q^2-3r)}{1-27r}(3q+1) \Rightarrow 6\left(q^2-3r\right)(3q+1) \le (1-q)(1-27r).$$

Phép chứng minh hoàn thành.
Lưu ý. Dãy số (a_n) được tìm ra như sau : Ta cần xây dựng dãy số (a_n) thoả mãn điều kiện $a_1 = \dfrac{1}{4}$ và dãy (a_n) tăng về $\frac{1}{3}$. Vì $\frac{1}{4} \le q \le \frac{1}{3}$ nên tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho $a_k \le q \le a_{k+1}$. Chú ý rằng điều kiện $a_k \le q$ tương đương với

$$(q-a_k)\left(q-\frac{1}{3}\right) \le 0 \Leftrightarrow q^2 \le \frac{q}{3} + qa_k - \frac{a_k}{3} \Leftrightarrow q^2 \le q\left(\frac{1}{3}+a_k\right) - \frac{a_k}{3}.$$

Vì $4q \leq 9r + 1$ nên

$$\begin{aligned}
&q^2 \leq \frac{1+9r}{4}\left(\frac{1}{3} + a_k\right) - \frac{a_k}{3} \Rightarrow q^2 \leq \frac{(9r+1)(3a_k+1) - 4a_k}{12}\\
\Rightarrow &q^2 \leq \frac{27ra_k + 9r + 3a_k + 1 - 4a_k}{12} \Rightarrow q^2 - 3r \leq \frac{27ra_k - 27r + 1 - a_k}{12}\\
\Rightarrow &q^2 - 3r \leq \frac{(1-a_k)(1-27r)}{12}.
\end{aligned}$$

Vậy để chứng minh $6(q^2 - 3r)(3q+1) \leq (1-q)(1-27r)$, ta cần chứng minh

$$\frac{1}{2}(1-a_k)(3q+1) \leq 1 - q \Rightarrow 5q - 3qa_k \leq 1 + a_k \Rightarrow q \leq \frac{1+a_k}{5-3a_k}.$$

Vì vậy, ta dẫn đến ý tưởng là chọn luôn $a_{k+1} = \dfrac{1+a_k}{5-3a_k}$ và xét dãy số (a_n) như trên.

Bài toán 2. *Xét ba số thực dương a, b, c thoả mãn $a + b + c = 1$, chứng minh rằng*

$$1 + 162a^2b^2c^2 \geq 27abc + 54\left(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3\right).$$

Giải. Đặt $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$. Khi đó $p = 1$ và

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = q^3 - 3pqr + 3r^2 = q^3 - 3qr + 3r^2.$$

Ta cần chứng minh

$$1 + 162r^2 \geq 27r + 54\left(q^3 - 3qr + 3r^2\right) \Leftrightarrow 54q\left(q^2 - 3r\right) \leq 1 - 27r. \tag{1}$$

Ta có $0 \leq q = ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3}$. Khi $0 < q \leq \frac{1}{4}$, ta có

$$54q\left(q^2 - 3r\right) \leq \frac{27}{2}\left(\frac{1}{16} - 3r\right) \tag{2}$$

$$\frac{27}{2}\left(\frac{1}{16} - 3r\right) \leq 1 - 27r \Leftrightarrow 27(1 - 48r) \leq 32 - 864r \Leftrightarrow 432r \geq -5 \ \left(\text{đúng}\right). \tag{3}$$

Từ (2) và (3) suy ra (1) đúng. Tiếp theo ta xét $\frac{1}{4} \leq q \leq \frac{1}{3}$. Xét dãy số (a_n) như sau

$$a_1 = \frac{1}{4}\ ;\ a_{n+1} = \frac{2}{9(1-a_n)}, \quad \forall n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Ta có $a_1 \leq \frac{1}{3}$. Giả sử $a_k \leq \frac{1}{3}$. Xét hàm số $f(x) = \frac{2}{9(1-x)}$, khi đó hàm f đồng biến vì $f'(x) > 0$. Vậy $a_{k+1} = f(a_k) \leq f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$. Theo nguyên lí quy nạp, suy ra

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{3}, \ \forall n = 1, 2, \ldots$$

Do đó
$$a_{n+1}-a_n=\frac{2}{9\left(1-a_n\right)}-a_n=\frac{9a_n^2-9a_n+2}{9\left(1-a_n\right)}\geq 0.$$
Vậy dãy số (a_n) tăng và bị chặn trên nên có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=L$. Từ (4) cho $n\to+\infty$, ta được
$$L=\frac{2}{9(1-L)}\Leftrightarrow 9L^2-9L+2=0\overset{\text{do } L\leq\frac{1}{3}}{\Rightarrow} L=\frac{1}{3}.$$
Vì dãy số (a_n) tăng về $\frac{1}{3}$ và $q\in\left[\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right]$, suy ra tồn tại $k\in\mathbb{N}^*$ sao cho
$$a_k\leq q\leq a_{k+1}\Rightarrow q\leq\frac{2}{9\left(1-a_k\right)}\Rightarrow 0\leq 1-a_k\leq\frac{2}{9q}.$$
Từ $a_k\leq q\leq\frac{1}{3}$, ta có
$$\left(q-a_k\right)\left(q-\frac{1}{3}\right)\leq 0\Leftrightarrow q^2\leq\frac{q}{3}+qa_k-\frac{a_k}{3}\Leftrightarrow q^2\leq q\left(\frac{1}{3}+a_k\right)-\frac{a_k}{3}.$$
Theo bất đẳng thức Schur, ta có $p^3-4pq+9r\geq 0$, mà $p=1$ nên $4q-1\leq 9r$. Do đó
$$\begin{aligned}
&q^2\leq\frac{1+9r}{4}\left(\frac{1}{3}+a_k\right)-\frac{a_k}{3}\Rightarrow q^2\leq\frac{(9r+1)\left(3a_k+1\right)-4a_k}{12}\\
\Rightarrow &q^2\leq\frac{27ra_k+9r+3a_k+1-4a_k}{12}\Rightarrow q^2-3r\leq\frac{27ra_k-27r+1-a_k}{12}\\
\Rightarrow &q^2-3r\leq\frac{\left(1-a_k\right)(1-27r)}{12}.
\end{aligned}$$
Vậy ta đã chứng minh được
$$1-a_k\leq\frac{2}{9q}. \tag{5}$$
$$q^2-3r\leq\frac{\left(1-a_k\right)(1-27r)}{12}. \tag{6}$$
Để ý rằng $1-a_k>0, 1-27r\geq 0$, nên từ (5) và (6) suy ra
$$q^2-3r\leq\frac{2}{9q}.\frac{1-27r}{12}\Rightarrow 54q\left(q^2-3r\right)\leq 1-27r.$$
Phép chứng minh hoàn thành.

Bài toán 3. *Xét ba số thực dương a,b,c thoả mãn $a+b+c=1$, chứng minh rằng*
$$7\left(ab+bc+ca\right)^2\geq 18abc+27\left(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\right).$$

Giải. Đặt $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$. Khi đó $p = 1$ và

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = q^3 - 3pqr + 3r^2 = q^3 - 3qr + 3r^2.$$

Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} &7q^2 \geq 18r + 27\left(q^3 - 3qr + 3r^2\right) \\ \Leftrightarrow &27q\left(q^2 - 3r\right) \leq 7q^2 - 18r - 81r^2 \\ \Leftrightarrow &27q\left(q^2 - 3r\right) \leq 7\left(q^2 - 3r\right) + 3r\left(1 - 27r\right) \\ \Leftrightarrow &\left(27q - 7\right)\left(q^2 - 3r\right) \leq 3r\left(1 - 27r\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Ta có $0 \leq q = ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}\left(a + b + c\right)^2 = \frac{1}{3}$. Khi $0 < q \leq \frac{1}{4}$, thì (1) đúng, do vế trái âm, còn vế phải không âm. Tiếp theo ta xét $\frac{1}{4} \leq q \leq \frac{1}{3}$. Xét dãy số (a_n) như sau

$$a_1 = \frac{1}{4}\ ;\ a_{n+1} = \frac{7a_n - 3}{27a_n - 11},\quad \forall n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Ta có $a_1 \leq \frac{1}{3}$. Giả sử $a_k \leq \frac{1}{3}$. Xét hàm số $f(x) = \frac{7x-3}{27x-11}$, khi đó hàm f đồng biến vì $f'(x) > 0$. Vậy $a_{k+1} = f\left(a_k\right) \leq f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$. Theo nguyên lí quy nạp, suy ra

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{3},\ \ \forall n = 1, 2, \ldots$$

Do đó

$$a_{n+1} - a_n = \frac{7a_n - 3}{27a_n - 11} - a_n = \frac{-\left(27a_n^2 - 18a_n + 3\right)}{27a_n - 11} = \frac{-3\left(3a_n - 1\right)^2}{27a_n - 11} \geq 0.$$

Vậy dãy số (a_n) tăng và bị chặn trên nên có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = L$. Từ (4) cho $n \to +\infty$, ta được

$$L = \frac{7L - 3}{27L - 11} \Leftrightarrow 3(3L - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow L = \frac{1}{3}.$$

Vì dãy số (a_n) tăng về $\frac{1}{3}$ và $q \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$, suy ra tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$\begin{aligned} &a_k \leq q \leq a_{k+1} \Rightarrow q \leq \frac{3 - 7a_k}{11 - 27a_k} \Leftrightarrow 11q - 27qa_k \leq 3 - 7a_k \\ \Leftrightarrow &a_k\left(27q - 7\right) \geq 11q - 3. \end{aligned} \tag{5}$$

Nếu $\frac{1}{4} \leq q \leq \frac{7}{27}$ thì (1) đúng. Tiếp theo xét $\frac{7}{27} < q \leq \frac{1}{3}$. Từ (5) ta được

$$a_k \geq \frac{11q - 3}{27q - 7} \Leftrightarrow 1 - a_k \leq 1 - \frac{11q - 3}{27q - 7} \Leftrightarrow 1 - a_k \leq \frac{16q - 4}{27q - 7}.$$

Từ $a_k \leq q \leq \frac{1}{3}$, ta có

$$(q - a_k)\left(q - \frac{1}{3}\right) \leq 0 \Leftrightarrow q^2 \leq \frac{q}{3} + qa_k - \frac{a_k}{3} \Leftrightarrow q^2 \leq q\left(\frac{1}{3} + a_k\right) - \frac{a_k}{3}.$$

Theo bất đẳng thức Schur, ta có $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$, mà $p = 1$ nên $4q - 1 \leq 9r$. Do đó

$$\begin{aligned}
&q^2 \leq \frac{1+9r}{4}\left(\frac{1}{3} + a_k\right) - \frac{a_k}{3} \Rightarrow q^2 \leq \frac{(9r+1)(3a_k+1) - 4a_k}{12} \\
\Rightarrow &q^2 \leq \frac{27ra_k + 9r + 3a_k + 1 - 4a_k}{12} \Rightarrow q^2 - 3r \leq \frac{27ra_k - 27r + 1 - a_k}{12} \\
\Rightarrow &q^2 - 3r \leq \frac{(1-a_k)(1-27r)}{12}.
\end{aligned}$$

Vậy ta đã chứng minh được

$$1 - a_k \leq \frac{16q-4}{27q-7}. \tag{6}$$

$$q^2 - 3r \leq \frac{(1-a_k)(1-27r)}{12}. \tag{7}$$

Từ (6) và (7) ta có

$$\begin{aligned}
(27q-7)\left(q^2 - 3r\right) &\leq (27q-7)\,.\frac{(1-a_k)(1-27r)}{12} \\
&\leq \frac{(16q-4)(1-27r)}{12} = \frac{(4q-1)(1-27r)}{3} \\
&\leq 3r(1-27r)\ \ (\text{do } 4q - 1 \leq 9r)\,.
\end{aligned}$$

Phép chứng minh hoàn thành.
Lưu ý. Các bài toán trên còn được giải bằng cách vận dụng "Phương pháp ABC" (một phương pháp mới, được đưa ra bởi Nguyễn Anh Cường), tuy nhiên khi đi thi Học sinh giỏi Quốc gia, nếu làm theo cách này thì phải chứng minh nhiều Định lí, Hệ quả phức tạp, điều đó không thích hợp do thời gian hạn hẹp trong phòng thi. Còn nếu giải theo phương pháp dùng giới hạn dãy số như ở trên thì ta chỉ cần chứng minh kết quả $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$, điều này rất ngắn gọn, đơn giản, chỉ vài dòng là xong.

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ PHÉP NGHỊCH ĐẢO TRONG MẶT PHẲNG VÀ ỨNG DỤNG

Tố Nguyên, Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn - Khánh Hòa

Phép nghịch đảo là một mảng hình học phẳng hay và khó. Bài viết này cho dù tôi cố gắng đến mấy vẫn chưa thể lột tả hết được vẻ đẹp của phép biến hình này. Trong bài này, tôi sẽ trình bày một vấn đề về phép biến hình nghịch đảo cũng như ứng dụng của phép này trong một số bài tập về hình học. phẳng, khuôn khổ của chương trình giảng dạy ở các trường chuyên, lớp chọn bồi dưỡng cho học sinh giỏi các cấp. Phần lớn thì các lời giải trong bài này theo hướng suy luận chủ quan nên không thể tránh được nhiều thiếu sót. Do đó các em học sinh sau khi nghiên cứu bài này nên tập giải theo hướng khác nhưng vẫn dựa trên phép biến hình này để cải thiện khả năng tư duy sáng tạo, và biết mạnh dạn đột phá, tìm tòi cái mới hơn. Nhằm bảo đảm về tính hệ thống, một số kiến thức, mặc dù đã được trình bày trong một số tài liệu vẫn phải nêu lại trong bài viết này.

1 Định nghĩa

Định nghĩa 1. Cho điểm I và số thực $R^2 \neq 0$. Một phép biến hình đi từ mặt phẳng P vào mặt phẳng P sao cho mỗi điểm M thuộc P ứng với điểm M' cũng thuộc P thỏa: $\overline{IM}.\overline{IM'} = R^2$ (*) gọi là phép biến hình nghịch đảo cực I, phương tích R^2 và kí hiệu: $N(I, R^2)$

Đẳng thức (*) còn nói lên một điều: ảnh, tạo ảnh và cực luôn thẳng hàng. Hơn nữa cực luôn nằm ngoài đoạn thẳng nối ảnh và tạo ảnh. Thường thì ta hay ký hiệu: ảnh của M là M' hoặc M*

Chú ý :

Đường tròn (O, R) là đường tròn nghịch đảo qua $N(O, R^2)$ cũng là tập hợp các điểm kép trong phép nghịch đảo này.

$\overline{OM}.\overline{OM'} = \overline{OH}.\overline{OH'} = \mathrm{OT}_1^2$

2 Ảnh của một hình qua phép nghịch đảo N(I,k)

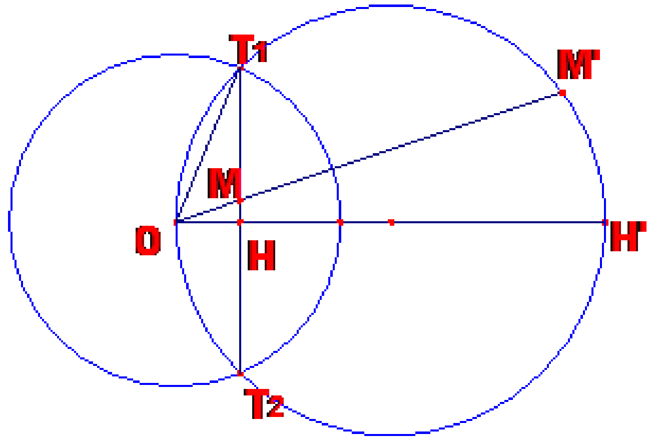
Qua một phép nghịch đảo thì:

1/ Đường thẳng qua cực biến thành chính nó .

2/ Đường thẳng không qua cực biến thành đường tròn qua cực và ngược lại, hơn nữa tâm đường tròn nằm trên đường thẳng qua cực vuông góc với đường thẳng đã cho

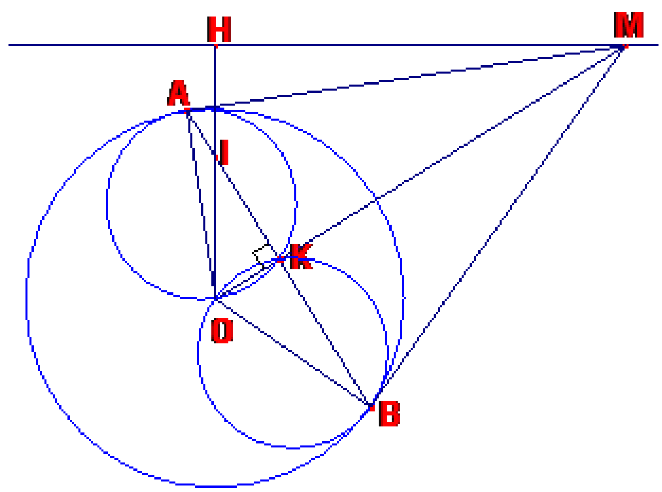
Chú ý :

Nếu $N(O, R^2) : A \to B$ thì A và B là tương ứng một đối một nên tiếp điểm giữa đường thẳng với đường tròn, đường tròn với đường tròn biến thành tiếp điểm giữa 2 ảnh của nó.



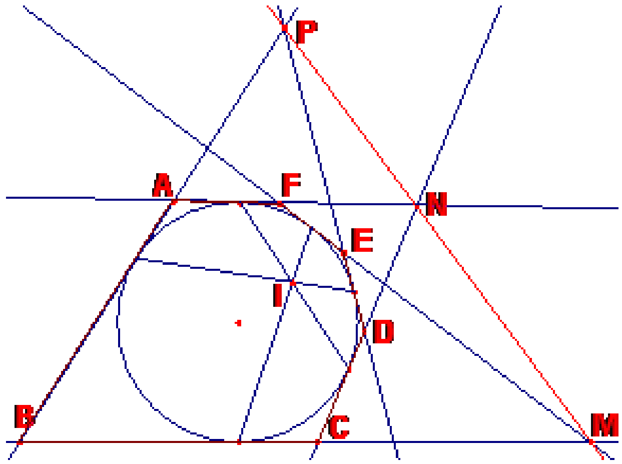
Hình 2:

Ví dụ 1. *Cho điểm I cố định nằm trong đường tròn (O,R). Một dây AB di động quanh I. Tìm tập hợp giao điểm M của 2 tiếp tuyến tại A,B với đường tròn.*



Hình 3:

Lời giải. Đặt $k = R^2$. Dùng phép nghịch đảo $N(O, k)$:
Đường tròn (O,R) biến thành chính nó. 2 tiếp tuyến tại A và B biến thành 2 đường tròn đường kính OA,OB.
Vậy M là giao của 2 tiếp tuyến biến thành K là giao của 2 đường tròn , nên $\widehat{OKA} = \widehat{OKB} = 90^0$ $\Rightarrow K \in AB$. Vì : O,I cố định, suy ra K là đường tròn đường kính kính OI. $\Rightarrow$ M là đường thẳng vuông góc đường kính OI tại H cố định là ảnh của I qua phép nghịch đảo N(O,k) . (đpcm)
Bài tập tương tự với bài trên. Chứng minh rằng trong một lục giác không có cặp cạnh đối nào

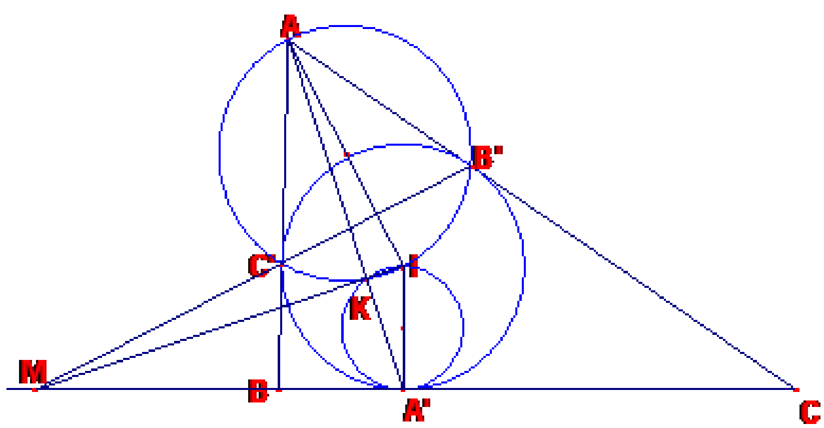


Hình 4:

song song với nhau mà ngoại tiếp một đường tròn thì 3 dây cung nối bởi 2 tiếp điểm của 2 cạnh đối đồng quy khi và chỉ khi giao các cặp cạnh đối thẳng hàng.

Ví dụ 2. *Đường tròn nội tiếp (I,r) tiếp xúc các cạnh BC,CA,AB của tam giác ABC tại A', B', C'.Gọi M là giao của BC và B'C'. CM: A'A vuông góc với MI.*

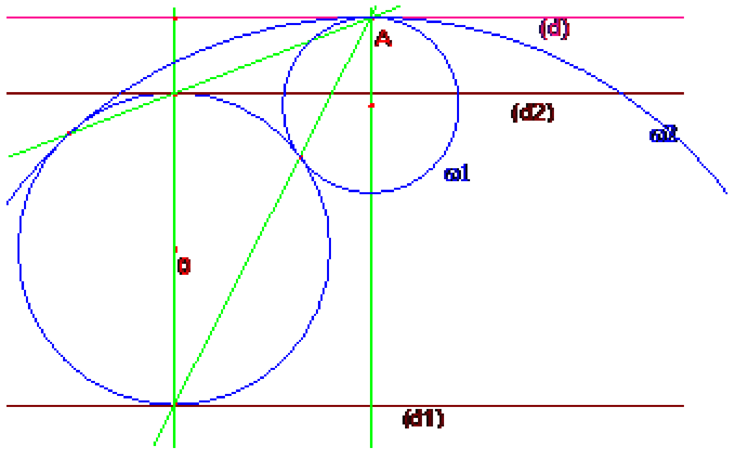
Lời giải. Xét phép nghịch đảo $N(I, r^2)$. Khi đó: B'C' biến thành (AC'IB') BC biến thành



Hình 5:

đường tròn đường kính IA' . M biến thành K là giao của: (AC'IB') và đường tròn đường kính IA' ⇒ M,K I thẳng hàng.
Mặt khác do:$\widehat{IKA} = \widehat{IKA'} = 90^0$ ⇒A,K, A' thẳng hàng.
Vậy $MI \perp AA'$. (đpcm)

Ví dụ 3. *Cho đường tròn (O,r) và một đường thẳng d cố định nằm ngoài (O).Hãy chỉ ra cách dựng đường tròn (Ω) tiếp xúc đường thẳng d tại A cố định cho trước đồng thời tiếp xúc (O,r)*



Hình 6:

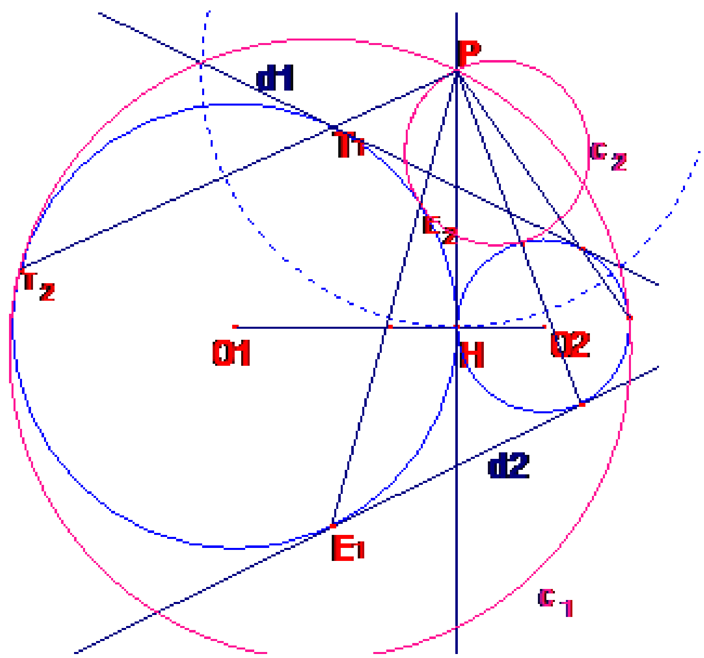
Lời giải. Xét phép nghịch đảo N(A,k) với k = P (A/(O).Khi đó: $d \to d$, $(O) \to (O)$, $(\omega) \to d_1$ hoặc $d_2//d$ và tiếp xúc với (O) tại A_1 và A_2. Từ đó suy ra cách dựng.

Ví dụ 4. *Cho 2 đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài với nhau tại H. Trên tiếp tuyến với chung với nha tại H lấy điểm P cố định. Hãy dựng đường tròn qua P tiếp xúc với 2 đường tròn đã cho.*

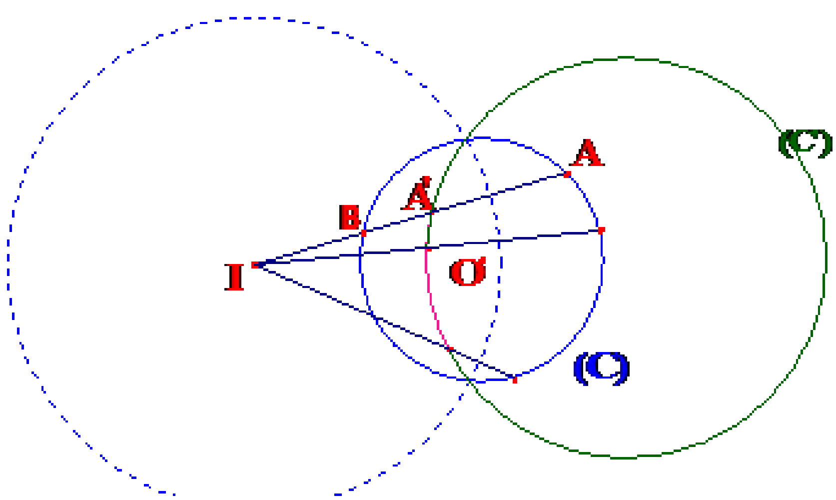
Lời giải. Vì P thuộc trục đẳng phương của 2 vòng , ta đặt k là phương tích của P đối với 2 vòng đó. Sử dụng phép nghịch đảo cực P, phương tích k thì 2 vòng tròn biến thành chính nó. 2 vòng tròn qua P tiếp xúc với 2 vòng tròn đã cho biến thành 2 tiếp tuyến chung ngoài của chúng. Tiếp điểm của đường tròn qua P với (O_1) là T_2, E_2 trở thành tiếp điểm của tiếp tuyến với (O_1) là T_1, E_1. Việc dựng tiếp tuyến chung ngoài với 2 đường tròn là bài toán quen thuộc và cơ bản. Từ đó dễ dàng dựng được 2 vòng tròn qua P thỏa yêu cầu bài toán.

2.1 Đường tròn không qua cực biến thành đường tròn không qua cực, nhưng tâm không biến thành tâm.

Lời giải. Giả sử phép nghịch đảo N(I,k) biến (C) thành (C'). A thành A': $\overline{IA}.\overline{IA'} = k$ (1)
Gọi p là phương tích của I đối với (O) khi đó ta có: $\overline{IA}.\overline{IB} = p$ (2)
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overline{IA'} = \frac{k}{p}\overline{IB} \Rightarrow A' = V_I^{\frac{k}{p}}\ (B)$ Khi B vạch nên (C) thì A' cũng vạch nên (C'). Vậy qua phép N(I,k) thì (C) biến thành (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm I tỷ số $\frac{p}{k}$, cũng là ảnh của (C) qua phép nghịch đảo N(I,k) . (đpcm)



Hình 7:



Hình 8:

2.2 Độ dài đoạn thẳng ảnh

a. Nếu A'B' là ảnh của AB qua $N(O, R_2)$ thì: AB = $R^2.\frac{AB}{OA.OB}$ b. Nếu đường tròn bán kính r' là ảnh của đường tròn bán kính r tâm I thì:

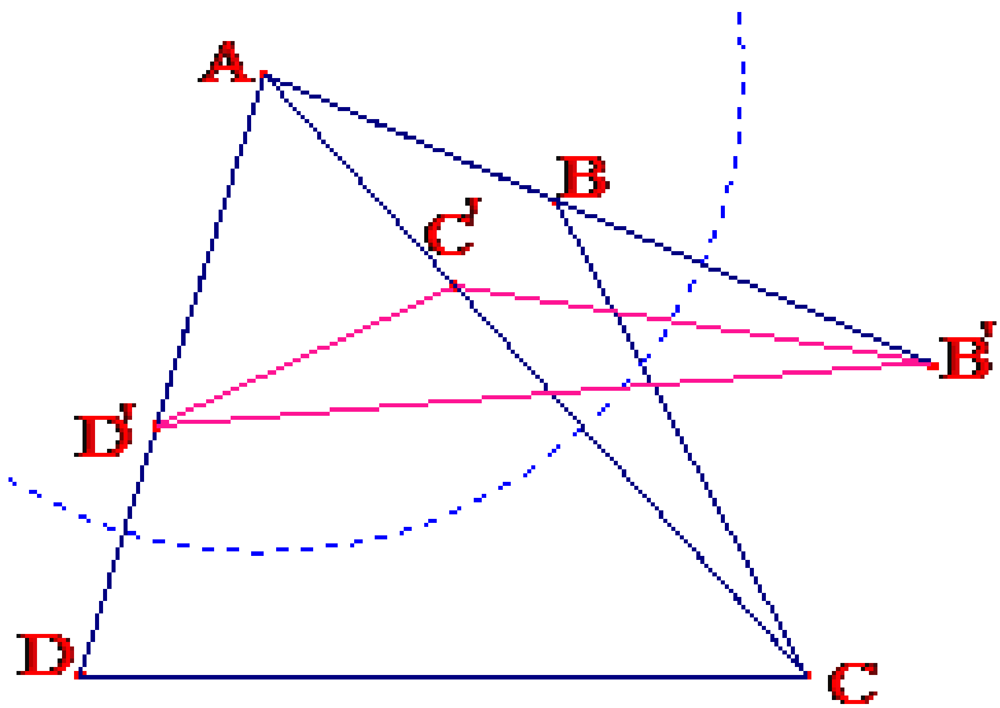
Chứng minh. a/ Áp dụng tam giác đồng dạng bạn đọc dễ dàng chứng minh được điều này. b/ Giả sử AB là đường kính của vòng (I,r) nằm trên đường thẳng OI. D là khỏng cách OI. Theo bài trên thì:

$$\mathrm{AB} = \mathrm{R}^2.\frac{AB}{OA.OB} \Leftrightarrow 2\mathrm{r} = \mathrm{R}^2\frac{2r}{|d-r|.(d+r)} \Leftrightarrow \mathrm{r} = \mathrm{R}^2\frac{r}{|d^2-r^2|}$$

□

Ví dụ 5. *Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng: $AB.CD + BC.DA \geq AC.BD$. Dấu bằng xảy ra khi nào?*

Lời giải. Xét phép nghịch đảo N(A,k) , k > 0 thì 3 điểm B,C,D biến thành 3 điểm B', C', D'



Hình 9:

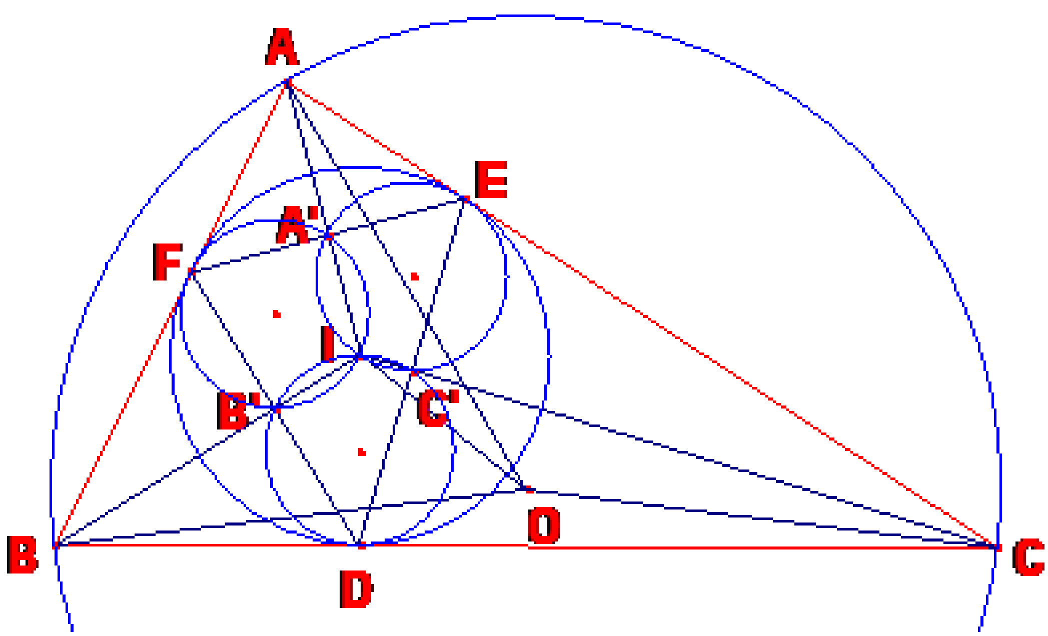
Áp dụng bất đẳng thức giữa 3 cạnh của tam giác B'C'D':

$$B'C' = k.\frac{BC}{AB.AC},\ \ B'D' = k.\frac{BD}{AB.AD},\ \ C'D' = k.\frac{CD}{AC.AD}$$

Vì $B'C' + C'D' \geq B'D' \Rightarrow AB.CD + BC.DA \geq AC.BD$. Dấu bằng xảy ra khi B',C', D' thẳng hàng.
Do qua phép nghịc đảo, đường thẳng không qua cực biến thành đường tròn qua cực nên A,B,C,D cùng thuộc một đường tròn hay tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn. (đpcm)

Ví dụ 6. *Gọi d là khỏang cách 2 tâm của vòng tròn nội tiếp và ngoại tiếp trong một tam giác . r,R tương ứng là bán kính của chúng thì : $d^2 = R^2$˘$2Rr$ (Euler).*

Lời giải. Gọi I và O là tâm vòng tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC. D,E,F là tiếp điểm



Hình 10:

của vòng tròn nội tiếp với BC,CA,AB. Thực hiện phép nghịch đảo qua đường tròn nội tiếp thì A, B, C biến thành A', B', C' là trung điểm các dây cung EF, FD,DE. Đường tròn qua A',B',C' có bán kính r/2
Mặt khác theo tính chất 4 thì ảnh của vòng tròn ngoại tiếp có bán kính r = r^2.$\frac{R}{|d^2-R^2|}$
Từ đó ta có:r^2.$\frac{R}{|d^2-R^2|} = \frac{r}{2} \Leftrightarrow d^2 = R^2 - 2Rr$

2.3 Phép nghịch đảo bảo toàn góc

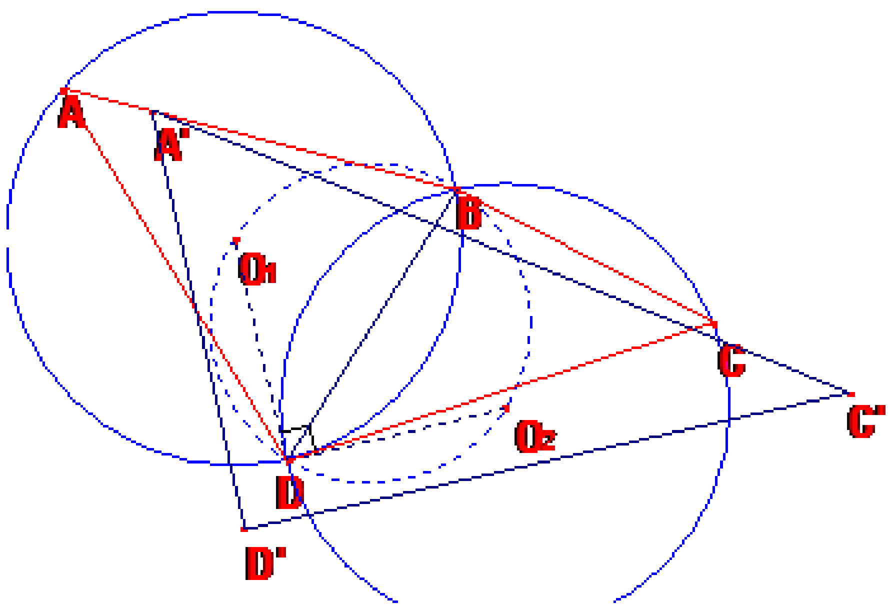
Cho 2 đường tròn (C_1) và (C_2) cắt nhau tại A và tại đây chúng có 2 tiếp tuyến. Ta gọi góc giữa 2 tiếp tuyến là góc giữa 2 đường tròn đã cho. Khi 2 tiếp tuyến vuông góc thì ta nói 2 đường tròn là trực giao.

Bổ đề 2. *Cho phép nghịch đảo $N(O, k)$ biến đường cong (C) thành đường cong (C'). Nếu $A \in (C)$, $A' \in (C')$ là ảnh của A qua phép $N(O, k)$ và tại đây chúng có các tiếp tuyến thì các tiếp tuyến này đối xứng nhau qua trung trực AA'.*
Thật vậy: Ta có : $M'A'.|k|\frac{MA}{IA.IM}$.
Khi $M \to A$ thì $M' \to A'$ cát tuyến trở thành tiếp tuyến, đường tròn qua 4 điểm AMM'A' trở thành đường tròn (γ) tiếp xúc với 2 đường cong trên. 2 tiếp tuyến này là 2 tiếp tuyến của đường tròn (γ). Vì vậy giao 2 tiếp tuyến này nằm trên trung trực AA'. Từ đó ta suy ra định lý sau

Định lý 1. *Phép nghịch đảo là phép bảo toàn góc.*

Ví dụ 7. *Cho tứ giác ABCD có 2 góc A và C phụ nhau. Chứng minh rằng: $AB^2.CD^2 + BC^2.DA^2 = AC^2.BD^2$*

Lời giải. Xét phép nghịch đảo N(B,k) , k > 0 thì 3 điểm A,C,D biến thành 3 điểm A', C', D'



Hình 11:

Áp dụng bất đẳng thức giữa 3 cạnh của tam giác B'C'D':

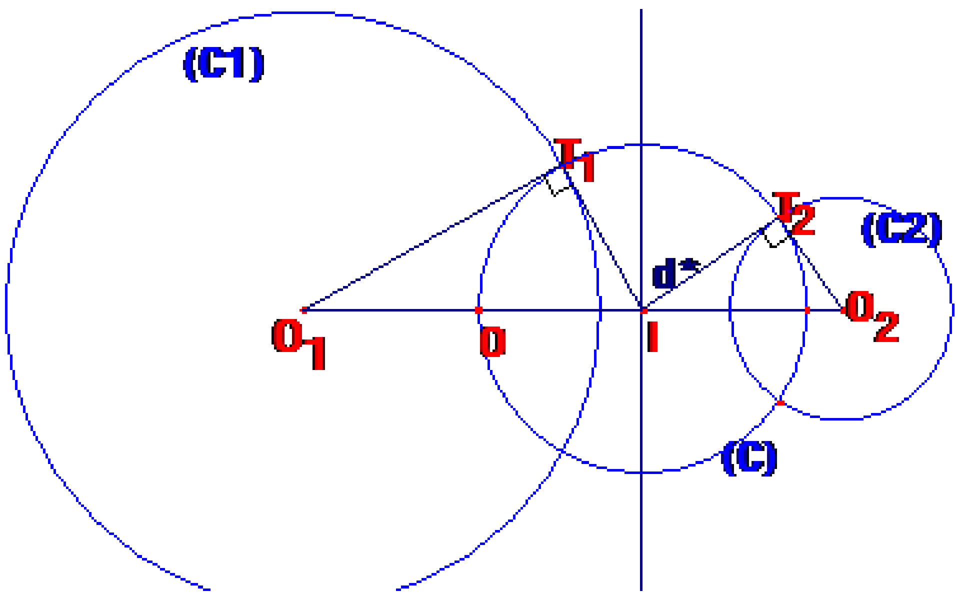
$$A'C' = k.\frac{AC}{BA.BC}, \;\; A'D' = k.\frac{AD}{BA.BD}, \;\; C'D' = k.\frac{CD}{BC.BD}$$

Vì 2 góc A và C phụ nhau nên tâm của 2 vòng tròn ngoại tiếp 2 tam giác ABD và CBD cùng với B và D tạo thành tứ giác nội tiếp.

Từ đó suy ra: $\widehat{O_1BO_2} = \widehat{O_1DO_2} = 90^0$. Vậy cho nên 2 vòng tròn (ABD) và (CBD) trực giao với nhau suy ra ảnh của chúng cũng vuông góc nhau.
Do đó : $A'D'^2 + C'D'^2 = A'C'^2 \Rightarrow AD^2BC^2 + CD^2BA^2 = AC^2BD^2$ (đpcm)

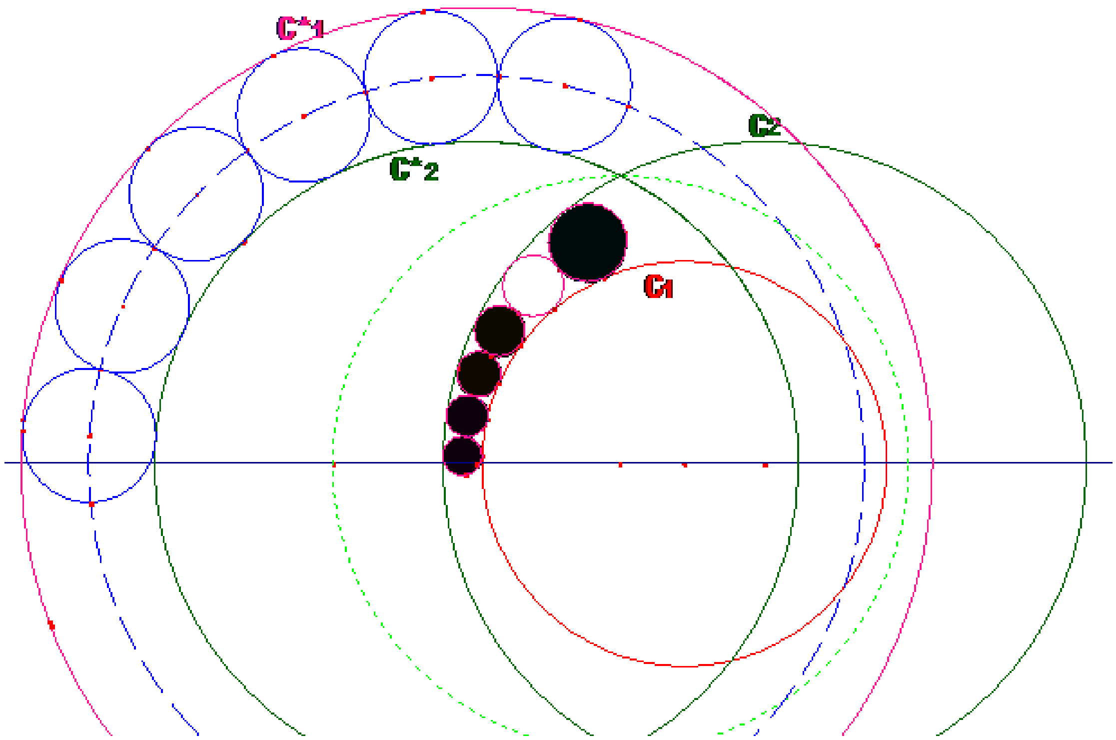
Ví dụ 8. *Cho 2 đường tròn không bằng nhau và không đồng tâm. Chứng minh luôn tồn tại một phép nghịch đảo biến chúng thành 2 vòng tròn đồng tâm.*

Lời giải. Giả sử đó là 2 vòng tròn (C_1) và (C_2).



Hình 12:

Trước hết gọi d^* là trục đẳng phương của 2 vòng (C_1) và (C_2). D^* vuông góc với O_1O_2 tại I. Dựng tiếp tuyến IT_1 với (C_1). Đường tròn (C) tâm I bán kính IT_1 cắt O_1O_2 tại 2 điểm O và J. Gọi P là phương tích của I đối với 2 vòng trên , khi đó: (C) trực giao với (C_1) và (C_2).
Qua phép nghịch đảo cực O, phương tích P thì (C) biến thành đường thẳng d^* vuông góc với C_1^* và C_2^*.
Vì (C) vuông góc với (C_1) và (C_2). nên d^* vuông góc với (C_1^*) và (C_2^*) vì vậy d^* phải qua tâm của (C_1^*) và (C_2^*). Do 2 tâm của (C_1^*) và (C_2^*) nằm trên O_1O_2 nên 2 tâm này phải trùng nhau. Vậy luôn tồn tại một phép nghịch đảo biến chúng thành 2 vòng tròn đồng tâm. (đpcm) Chẳng hạn qua bài trên ta chợt nhận ra ý tưởng cách dựng các đường tròn nối đuôi tiếp xúc nhau và cùng tiếp xúc với 2 đường tròn cho trước như hình vẽ trên.



Hình 13:

3 Phép nghịch đảo đối với 2 đường tròn

3.1 Trường hợp tổng quát

Nếu 2 đường tròn (C) và (C') không bằng nhau không tiếp xúc nhau và không đồng tâm. Khi đó có 2 phép vị tự : $V_o^{\frac{R'}{R}}$ và $V_o^{-\frac{R'}{R}}$ biến đường tròn (C) thành đường tròn (C'). Các tâm vị tự không nằm trên 2 đường tròn nên cũng có 2 phép nghịch đảo biến đường tròn (C) thành đường tròn (C').

a/ Phép nghịch đảo cực O phương tích $k = \frac{R'}{R}.p$ với p là phương tích của O đối với (C).

b/ Phép nghịch đảo cực O' phương tích $k = -\frac{R'}{R}.p'$ với p' là phương tích của O' đối với (C)

3.2 Trường hợp đặc biệt

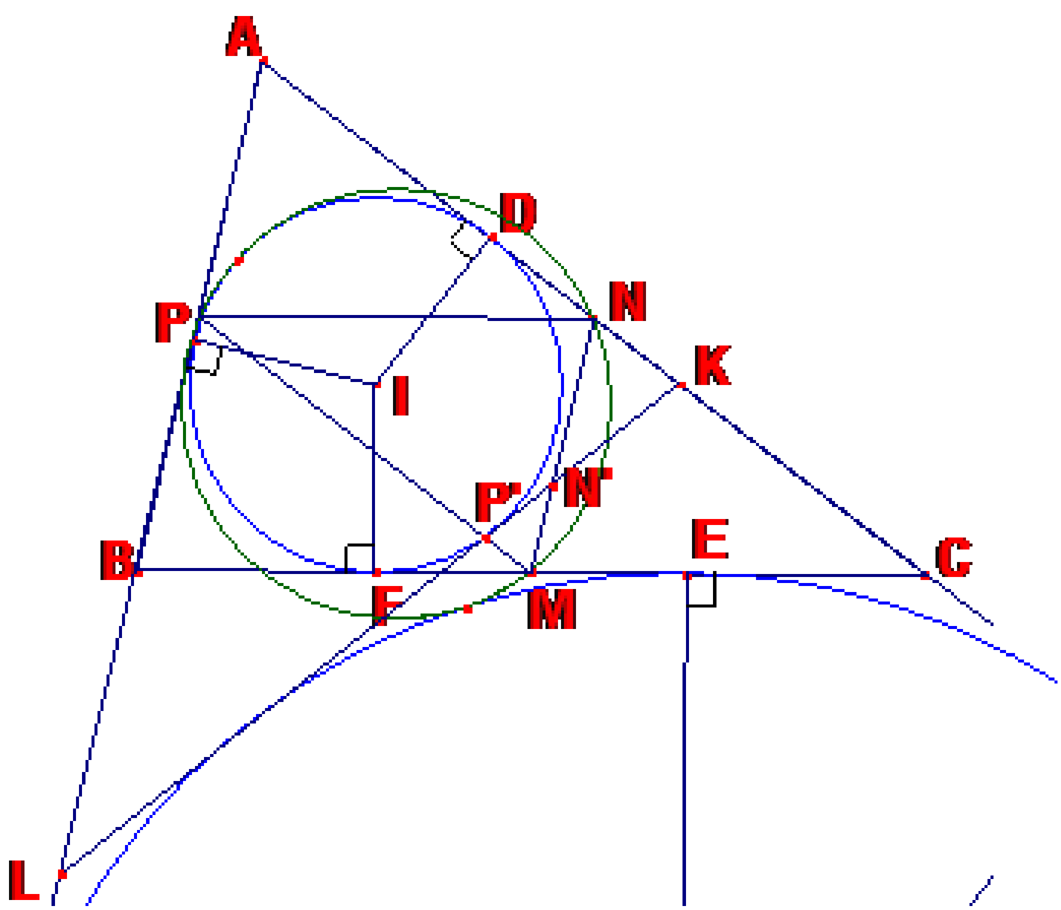
a/ Nếu 2 đường tròn (C) và (C') bằng nhau mà không tiếp xúc nhau thì có một phép vị tự tâm O' biến đường tròn này thành đường tròn kia.Nên ta chỉ có một phép nghịch đảo cực (O') với phương tích $k' = \breve{}p'$ trong đó p' là phương tích của O' đối với (C) bằng phương tích của O' đối với (C').

b/ Nếu 2 đường tròn (C) và (C') không bằng nhau mà tiếp xúc nhau thì tiếp điểm là tâm vị tự

nhưng không phải là cực nghịch và chỉ có tâm vị tự còn lại là cực O của một phép nghịch đảo.
c/ Nếu 2 đường tròn (C) và (C') bằng nhau mà tiếp xúc nhau thì không có phép nghịch đảo nào biến đường tròn này thành đường tròn kia.

Ví dụ 9. *Chứng minh rằng: đường tròn đi qua các trung điểm các cạnh tam giác tiếp xúc với đường tròn nội tiếp và 3 đường tròn bàng tiếp.*

Lời giải. Giả sử đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc các cạnh BC,CA tại F,



Hình 14:

D. Đường tròn bàng tiếp góc A tiếp xúc BC, AB tại E và H. M, N, P là trung điểm 3 cạnh BC, CA, AB. Gọi BC = a, AC = b, AB = c . Đặt p là nửa chu vi tam giácABC. Ta đều biết rằng:$AH = p, BF = CE = p\breve{\ } b$.
Suy ra: $ME = MF$. Do vậy mà M thuộc trục đẳng phương của 2 vòng nội tiếp và bàng tiếp

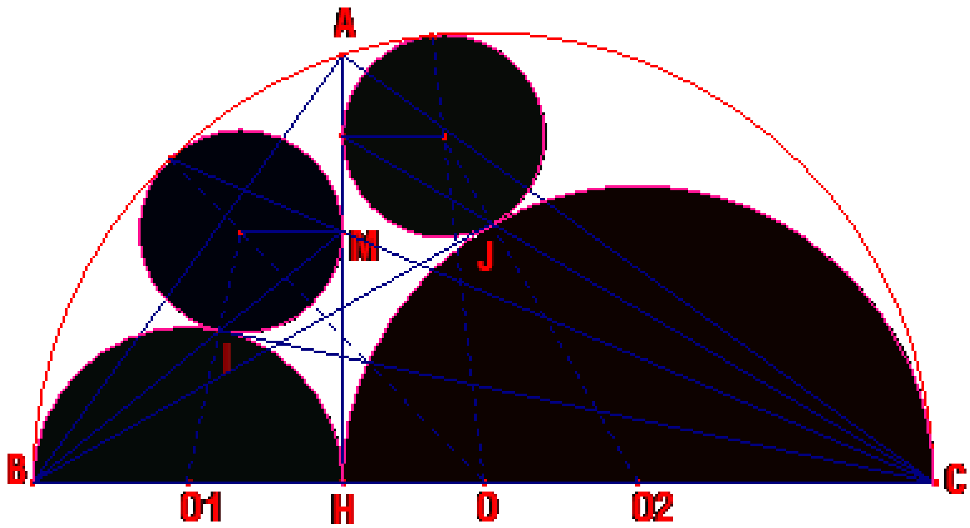
góc A. Gọi k là phương tích của M đối với 2 vòng này thì :
Phép nghịch đảo cực M phương tích k biến 2 vòng này thành chính nó.Còn đường tròn qua M,N,P là đường tròn qua cực thì biến thành đường thẳng không qua cực M . Nếu ta chứng minh được ảnh của đường tròn qua M,N,P là tiếp tuyến với 2 vòng nội tiếp và bàng tiếp góc A là xong. Do vậy ta dựng tiếp tuyến chung trong với 2 vòng này là KL ($K \in AC, L \in AB$) rồi chứng minh nó là ảnh của vòng (MNP) qua phép nghịch đảo N(M,k).
Thật vậy gọi N',P' là giao của KL với MN và MP. Ta có:
KL và BC đều là 2 tiếp tuyến chung trong với 2 vòng trên. AI là trục đối xứng của 2 vòng này nên: KL = BC, AK = AB = c, AL = AC = b, PL = $b - \frac{c}{2}$. Ta lại có: $\frac{PP'}{AK} = \frac{LP}{LA} \Rightarrow PP' = c.\frac{(2b-c)}{2b} = \frac{c(2b-c)}{2b}$ Từ đó mà: MP = $|\mathrm{MP} - -\mathrm{PP}'| = \left|\frac{b}{2} - \frac{c(2b-c)}{2b}\right| = \frac{(b-c)^2}{2b}$ Suy ra: $MP'.MP = \frac{(b-c)^2}{4}$ (1)
Biểu thức $\frac{(b-c)^2}{4}$ có b và c bình đẳng với nhau nên hoàn toàn tương tự ta cũng vẫn có:$MN'.MN = \frac{(b-c)^2}{4}$ (2)
Từ (1) và (2) ta có: $MP'.MP = MN'.MN = \frac{(b-c)^2}{4}$
Hay vòng tròn (MNP) biến thành tiếp tuyến LK qua phép nghịch đảo N(M,k). (đpcm)

Ví dụ 10. *A là điểm tùy ý thuộc nửa đường tròn (C) đường kính BC. Hạ đường cao AH của tam giác ABC. Gọi (C_1) và (C_2) là 2 nửa đường tròn đường kính HB và HC cùng phía với nửa đường tròn (C).*
a/ Hãy nêu cách dựng 2 đường tròn (γ_1) và (γ_2) lần lượt tiếp xúc với (C), đường cao AH, (C_1) và (C_2).
b/ Chứng tỏ rằng bán kính của 2 vòng (γ_1) và (γ_2) bằng nhau.

Lời giải. a/ Gọi O, O_1, O_2, K là tâm các vòng tròn đường kính BC, BH, CH và $(\gamma_1), T_1, I$ và M tương ứng là tiếp điểm của vòng (γ_1) với (C), (C_1) và AH. Khi đó: T,K,O thẳng hàng , O_1, I, K thẳng hàng từ đó dễ dàng $\Rightarrow C, M, T_1$ thẳng hàng và B,I,M thẳng hàng.
Lại có: $CM.CK = CH.CB = CA^2 \Rightarrow$ C thuộc trục đẳng phương của (C_1) và (γ_1). Vậy CI là tiếp tuyến chung của 2 vòng (C_1) và (γ_1). Hơn nữa ta cũng được : $CI = CA$. Từ các dữ liệu về sự thẳng hàng của 3 điểm và độ dài bằng nhau ta bắt đầu hình thành cách dựng (γ_1) như sau:
I là giao của vòng tròn tâm C,bán kính CA với vòng (C_1).BI cắt AH tại M.CM gặp (C) tại T_1.
Dĩ nhiên tâm K là giao của OT_1 với O_1I. Do tính bình đẳng giữa 2 vòng (γ_1) và (γ_2) trong bài toán mà (γ_2) được dựng hoàn toàn tương tự.
b/ Gọi R, r_1, r_2, r lần lượt là các bán kính của 4 vòng tròn $(C), (C_1), (C_2)$và γ_1. Dễ thấy rằng: $r_1 + r_2 = R$. Do tính bình đẳng với nhau giữa 2 vòng (γ_1) và (γ_2) trong bài toán so với các vòng $(C), (C_1), (C_2)$
Theo điều kiện tiếp xúc của 2 vòng (γ_1) và (C_1) và hệ thức lượng trong tam giác vuông BMH mà ta có:
$\frac{r}{r_1} = \frac{IM}{IB} = \frac{IM.IB}{IB^2}$ và $IM.IB = IH^2 \Rightarrow \frac{r}{r_1} = \frac{IM}{IB} = \frac{IH^2}{IB^2}$ (1)
Từ 2 tam giác đồng dạng là: CIB và CHI ta lại có:

$$\frac{IH}{IB} = \frac{IC}{BC} \Rightarrow \left(\frac{IH}{IB}\right)^2 = \left(\frac{IC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 (2)$$

Mà theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC thì: $CA^2 = CH.CB = 4R.r^2$. (3)
Từ (1) , (2) và (3) ta có: $r = \frac{4r_1.r_2R}{BC^2} = \frac{r_1.r_2}{R}$



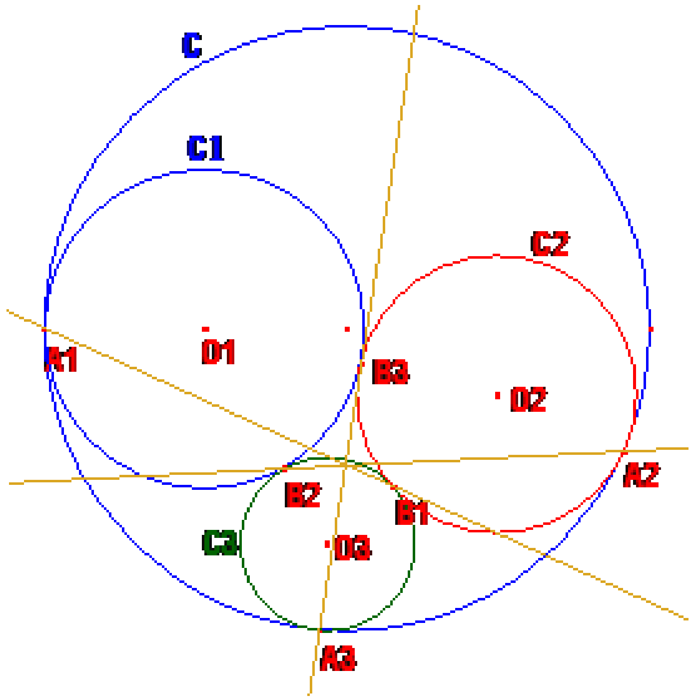
Hình 15:

Vậy 2 vòng tròn (γ_1) và (γ_2) bằng nhau. (đpcm)

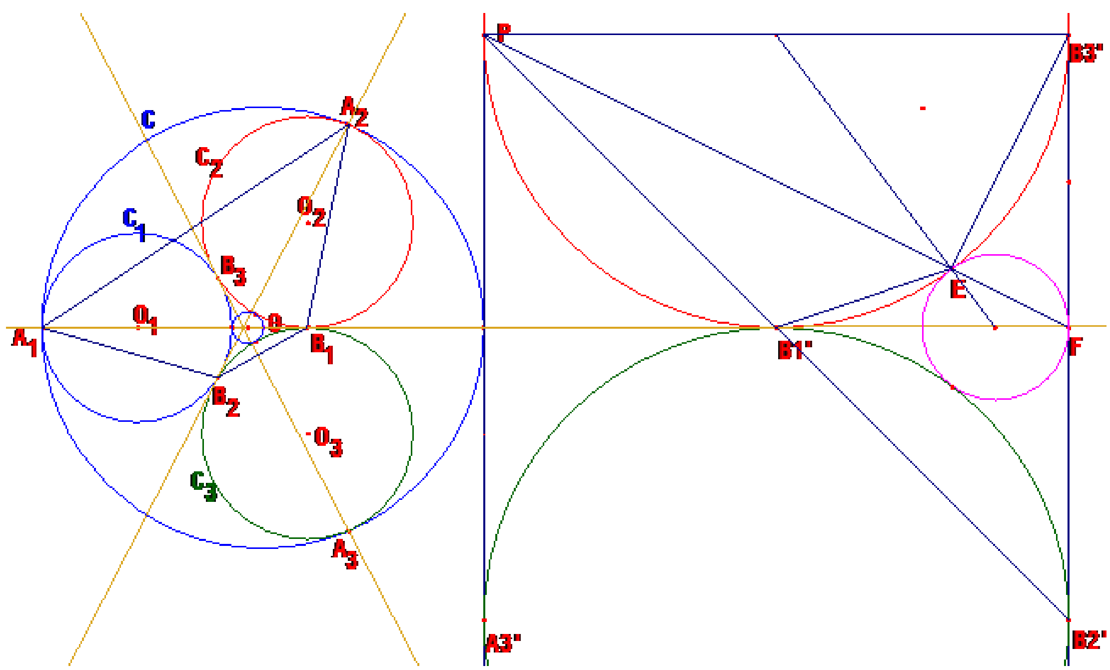
Ví dụ 11. *Giả sử các đường tròn C_1, C_2, C_3 cùng tiếp xúc trong với đường tròn $C(O, R)$ lần lượt tại A_1, A_2, A_3 và đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. B_1, B_2, B_3 là tiếp điểm của C_2 và C_3, C_1 và C_3, C_2 và C_1 . Chứng minh: A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 đồng quy.*

Lời giải. Dùng phép nghịch đảo tâm A_1, phương tích $k = 4R^2$. Thì vòng (C_1) và (C) thành 2 đường song song. 2 vòng (C_2) và (C_3) thành 2 vòng tiếp xúc nhau và cùng tiếp xúc với 2 đường thẳng song song đó. Khi đó A_2, B_1, B_2có ảnh là P, B_1', B_2' (như hình vẽ dưới) thẳng hàng nên suy ra tứ giác $A_1A_2B_1B_2$ nội tiếp đường tròn. $\Rightarrow A_1B_1$ là trục đẳng phương của cùa 2 vòng $(A_3A_1B_3B_1)$ và $(A_1A_2B_1B_2)$.
Do trục đẳng phương của 2 vòng đôi một trong 3 vòng tròn không đồng tâm thì đồng quy tại tâm đẳng phương. Từ đó $\Rightarrow$ 3 đường thẳng A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 đồng quy tại một điểm. (đpcm) Chú ý rằng: Giả sử (Ω) là vòng tròn tiếp xúc ngoài với các vòng C_1, C_2 và C_3 . Ta gọi C_1, C_2, C_3 lần lượt là tiếp điểm của (Ω) với C_1, C_2, C_3 và C_3, C_2 và C_1 . Khi đó ta cũng vẫn có: B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 đồng quy.
Mở rộng bài toán Edose

Bên trong tam giác ABC lấy điểm O tùy ý. Gọi các khoảng cách từ O đến các cạnh BC,



Hình 16:

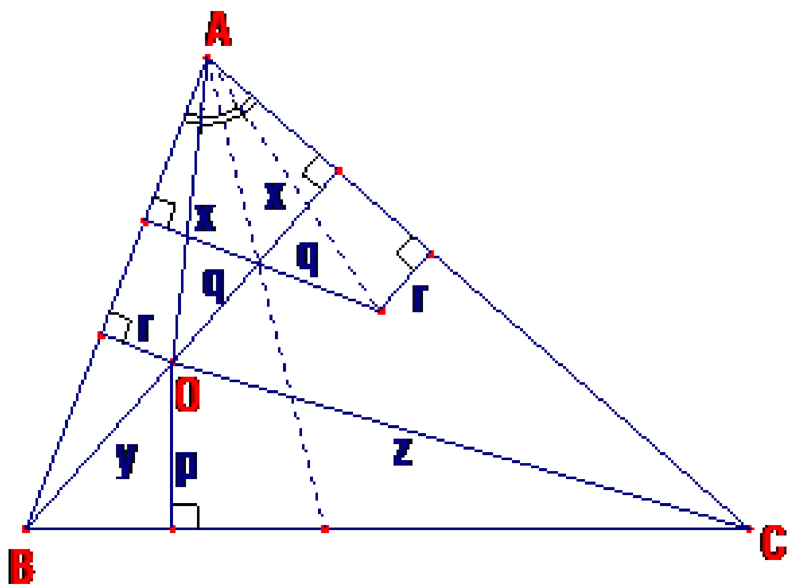


Hình 17:

CA, AB là p, q, r. và đến các đỉnh A, B, C là x, y, z. Chứng minh:

$$\begin{aligned}
&\text{a}/\text{a}x \geq \text{bq} + \text{cr} \ \ , \ \text{a}x \geq \text{br} + \text{cq} \quad (\text{I}) \\
&\text{b}/\text{a}x + by + cz \geq 4S \quad (\text{II}) \\
&c/(x + y + z) \geq 2(p + q + r) \quad (\text{III}) \\
&d/xyz \geq (p + q)(q + r)(r + p) \quad (\text{IV})
\end{aligned}$$

Ta có: $2S = ap + bq + cr$



Hình 18:

Mặt khác:

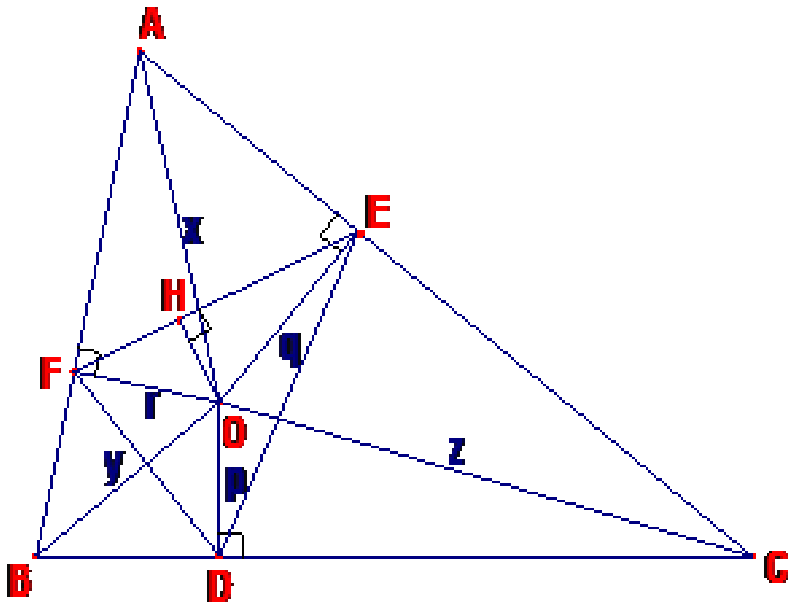
$$x + p \geq h_a \Rightarrow ax + ap \geq 2S \Rightarrow ax + 2S_1 \geq 2S \Rightarrow ax \geq qb + rc$$

Gọi O' là điểm đối xứng của O qua phân giác trong góc A $\Rightarrow ax \geq rb + qc \Rightarrow x \geq \frac{b}{a}r + \frac{c}{a}q$,

tương tự như thế ta có: (*) $\begin{cases} x \geq \frac{b}{a}r + \frac{c}{a}q \\ y \geq \frac{c}{b}p + \frac{a}{b}r \\ z \geq \frac{a}{c}q + \frac{b}{c}p \end{cases}$

$\Rightarrow x + y + z \geq (\frac{a}{b} + \frac{b}{a})r + (\frac{a}{c} + \frac{c}{a})q + (\frac{c}{b} + \frac{b}{c})p \geq 2(p + q + r)$ Trong tam giác DEF, hạ OH vuông góc EF thì đường cao này có vai trò tương tự như OP trong tam giác ABC. Ta có :

$$OH.EF = OE.OF \sin A = qr \sin A = qr = 2S(OEF).$$



Hình 19:

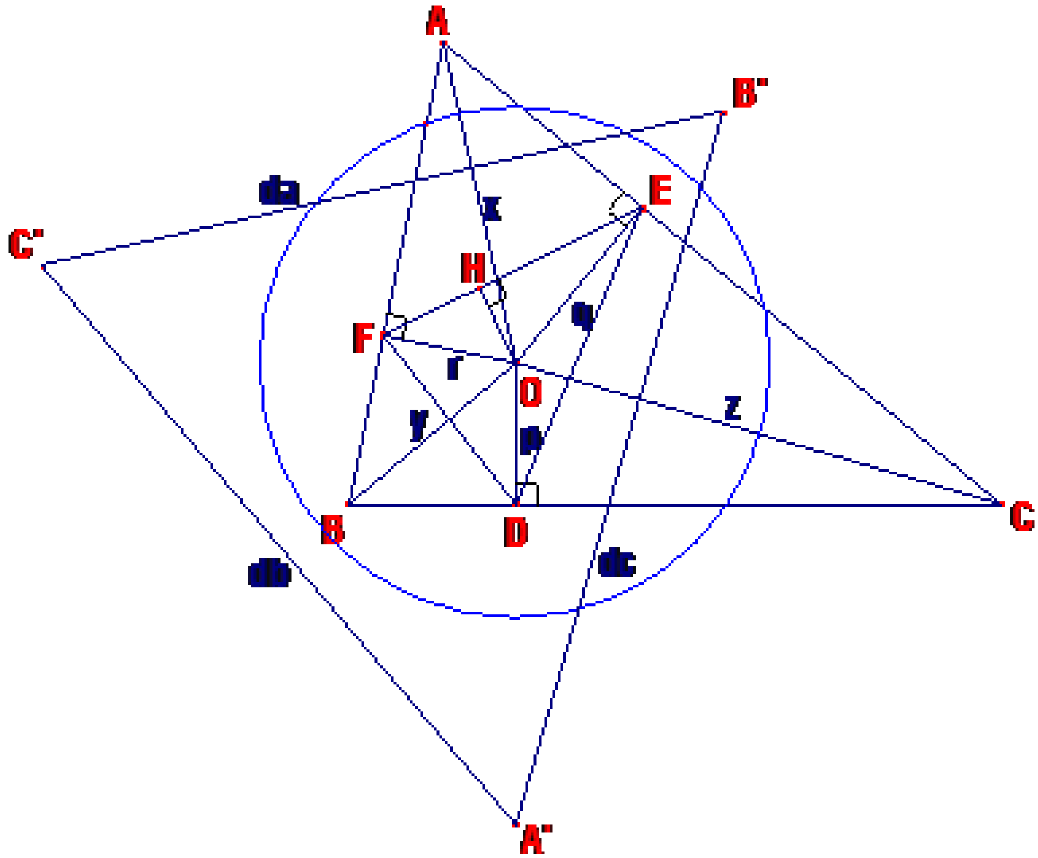
Mặt khác: $EF = AO \sin A = x \sin A = \frac{ax}{2R}$, từ đó $\Rightarrow OH = \frac{qr}{x}$, Vì vậy tương tự với bđt (III) ta có:

$$p + q + r \geq 2\left(\frac{qr}{x} + \frac{rp}{y} + \frac{pq}{z}\right)$$

Hay: $\frac{1}{pq} + \frac{1}{qr} + \frac{1}{rp} \geq 2(\frac{1}{px} + \frac{1}{qy} + \frac{1}{rz})$ (VI)
Từ bđt: $ax \geq bq + cr$, $ax \geq br + cq \Rightarrow 2ax \geq (b+c)(q+r)$

$$\Rightarrow 8abcxyz \geq (a+b)(b+c)(c+a)(p+q)(q+r)(r+p) \Rightarrow xyz \geq (p+q)(q+r)(r+p)$$

Và ngoài ra ta còn có: $xyz \geq 8pqr$
Tương tự với bđt (IV) ta có: $pqr \geq (\frac{qr}{x} + \frac{rp}{y})(\frac{rp}{y} + \frac{pq}{z})(\frac{pq}{z} + \frac{qr}{x})$
Hay: $1 \geq (\frac{1}{px} + \frac{1}{qy})(\frac{1}{qy} + \frac{1}{rz})(\frac{1}{rz} + \frac{1}{px})$(VII)
Bây giờ thực hiện phép nghịch đảo cực O phương tích k, khi đó đường tròn (OEAF) biến thành đường thẳng da vuông góc OA, đường tròn (OFBD) biến thành đường thẳng db vuông góc OB, đường tròn (ODCE) biến thành đường thẳng dc vuông góc OC. 3 đường thẳng này lập thành tam giác A'B'C'.
Theo phép nghịch đảo:
$B'C' = \frac{EF.k}{OE.OF}, OA' = \frac{k}{p}$. OA cắt B'C' tại K thì $OK = \frac{k}{p}$ Từ bđt (III) ta có: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} \geq 2(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})$ (VIII)



Hình 20:

Từ bđt (IV) ta có: $\frac{1}{pqr} \geq 2(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})(\frac{1}{y}+\frac{1}{z})(\frac{1}{z}+\frac{1}{x})$ (IX)

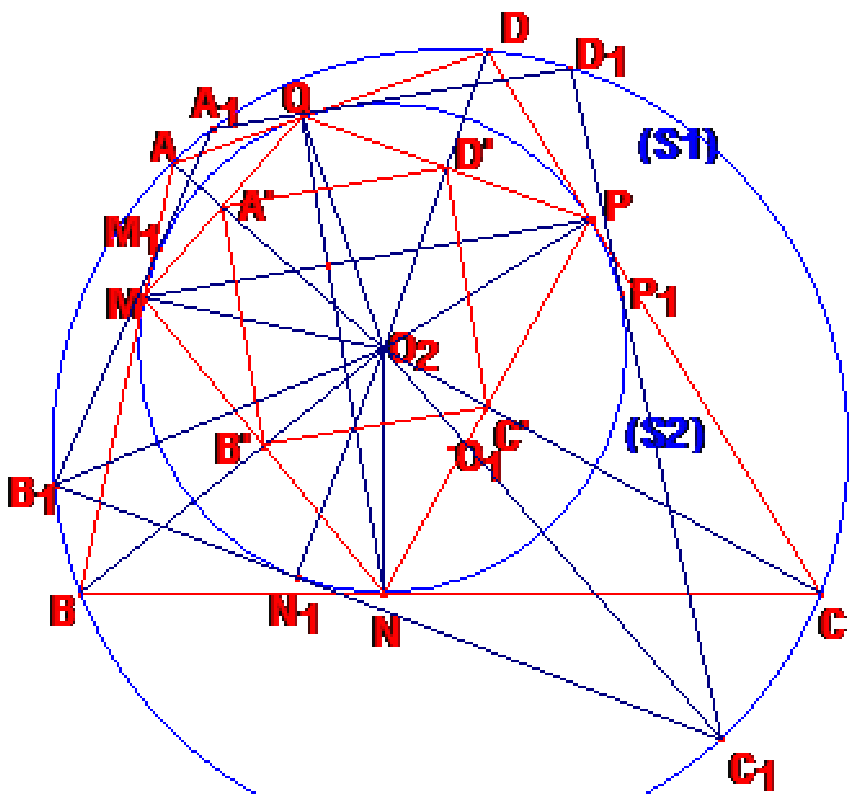
• Có thể thấy sự tương ứng các yếu tố của 3 tam giác trong bảng sau đây:

ΔABC	a	b	c	x	Y	z	p	q	R
ΔDEF	$\frac{ax}{2R}$	$\frac{by}{2R}$	$\frac{cz}{2R}$	p	Q	r	$\frac{qr}{x}$	$\frac{rp}{y}$	$\frac{pq}{z}$
ΔA'B'C'	$\frac{k}{2R}-\frac{ax}{qr}$	$\frac{k}{2R}-\frac{by}{rp}$	$\frac{k}{2R}-\frac{cz}{pq}$	$\frac{k}{p}$	$\frac{k}{q}$	$\frac{k}{r}$	$\frac{k}{x}$	$\frac{k}{y}$	$\frac{k}{z}$

Hình 21:

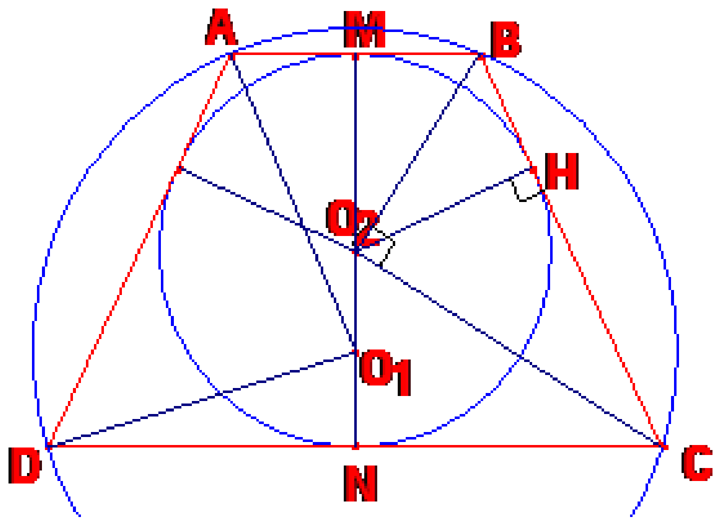
Ví dụ 12. *Cho đường tròn (S_2) nằm trong đường tròn (S_1). Gọi d là khoảng cách 2 tâm, R_1 và R_2 là 2 bán kính của vòng (S_1) và (S_2). Chứng minh rằng: a/ Nếu tồn tại tứ giác nội tiếp trong (S_1) và ngoại tiếp quanh (S_2) thì các đoạn thẳng nối các tiếp điểm của các cạnh đối nhau với (S_2) luôn vuông góc với nhau.*
b/ Có vô số tứ giác cùng tính chất như vậy.
c/ $\frac{1}{(R_1+d)^2} + \frac{1}{(R_1-d)^2} = \frac{1}{R_2^2}$

Lời giải. a/ Giả sử tồn tại tứ giác ABCD thỏa điều kiện bài toán như hình vẽ. Gọi M,N,P,Q



Hình 22:

là tiếp điểm của AB, BC, CD, DA với vòng (S_2).Thực hiện phép nghịch đảo theo đường tròn (S_2) khi đó A, B, C, D biến thành trung điểm A',B',C',D' của các dây MQ, MN, NP, PQ. Và chính các điểm này đang nằm trên vòng tròn (S_1^*) là ảnh của (S_1) qua phép nghịch đảo trên.
Ta biết rằng trung điểm các cạnh của tứ giác là đỉnh của hình bình hành có các cạnh song song với 2 đường chéo, nên A'B'C'D' là hình bình hành nội tiếp đường tròn. Suy ra A'B'C'D' là hình chữ nhật .
Vậy MP vuông góc NQ. (đpcm)



Hình 23:

b/ Mỗi điểm N_1 tùy ý trên (S_2) ta dựng dây B_1C_1 của (S_1) tiếp xúc với (S_2) tại N_1. Sau đó ta dựng dây B_1A_1 và C_1D_1 tiếp xúc (S_2) tại M_1 và P_1. Qua N_1 dựng dây N_1Q_1 vuông góc P_1P_1 . Thế thì do A_1, Q_1, D_1 đều có ảnh là các điểm của vòng tròn đường kính O_2Q_1 nên chúng phải thuộc đường thẳng vuông góc với O_2Q_1 tại Q_1. Tức là A_1D_1 tiếp xúc (S_2) tại Q_1. (đpcm).
c/ Để chứng tỏ: $\frac{1}{(R_1+d)^2} + \frac{1}{(R_1-d)^2} = \frac{1}{R_2^2}$ ta nhận xét rằng khi làm thay đổi hình dạng tứ giác nội tiếp trong (S_1) và ngoại tiếp (S_2) thì đẳng thức cần chứng minh không hề thay đổi. Vậy ta nên chọn tứ giác đặc biệt như hình thang cân ABCD
(AB //CD) chẳng hạn để giải quyết bài toán đơn giản hơn.

Đối với hình thang cân ABCD thì đường thẳng O_1O_2 là trung trực 2 đáy AB và CD.
Đặt $AB = 2a, CD = 2b$ và $O_1O_2 = d$. M, N là trung điểm AB và CD. Hạ O_2H vuông góc BC.
Do định lý: 2 tiếp tuyến xuất phát từ một điểm ngoài đường tròn ta dễ dàng suy ra tam giác BO_2C vuông tại O_2. Vì vậy bán kính $O_2H = R_2$.
Nên ta có: $BH.CH = O_2H^2 = R_2^2 \Leftrightarrow a.b = R_2^2$.
Mặt khác: Từ 2 tam giác vuông AO_1B và DO_1N, ta có: $R_1^2 = a^2+(R_2+d)^2, R_1^2 = b^2+(R_2-d)^2$
Từ đó :

$$a^2b^2 = [R_1^2 - (R_2+d)^2].[R_1^2 - (R_2-d)^2] \Leftrightarrow R_2^4 = [R_1^2 - (R_2+d)^2].[R_1^2 - (R_2-d)^2]$$

$$R_2^4 = [R_1^2 - (R_2 + d)^2].[R_1^2 - (R_2 - d)^2] \Leftrightarrow \frac{1}{(R_1+d)^2} + \frac{1}{(R_1-d)^2} = \frac{1}{R_2^2}$$

Các bài tập đề nghị

1. Cho 4 đường tròn S_1, S_2, S_3, S_4. Giả sử S_1 cắt S_2 tại A_1 và A_2, S_2 cắt S_3 tại B_1 và B_2, S_3 cắt S_4 tại C_1 và C_2, S_4 cắt S_1 tại D_1 và D_2, CM: nếu các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 nằm trên một đường tròn S(hoặc đường thẳng) thì các điểm A_2, B_2, C_2, D_2 cũng nằm trên một đường tròn S'(hoặc đường thẳng).

2. Cho 2 đường tròn (O_1) và (O_2) trực giao tại A và B. $C \in (O_1)$, $D \in (O_2)$. CM:(ACD) trực giao với (BCD).

3. Trong mặt phẳng cho đường tròn (O,R) và đường thẳng (Δ) không cắt nó cách O một khỏang bằng d. 2 điểm M,N di động trên (Δ) sao cho đường tròn đường kính MN tiếp xúc (ngoài hoặc trong) với đường tròn đã cho. CM: trên mặt phẳng có 1 điểm P cố định luôn nhìn MN dưới góc không đổi.

4. Từ một điểm M nằm trong tam giác ABC dựng các đường tròn đối xứng của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác : MAB,MBC,MCA lần lượt qua AB, BC, CA. CM: các đường tròn này giao nhau tại một điểm.

5. Dựng đường tròn tiếp xúc với đường tròn (O) cho trước và tiếp xúc đường thẳng (Δ) cho trước tại A cho trước. CM: đường nối các tiếp điểm của các đường tròn đó với đường tròn (O) luôn qua điểm cố định khi (Δ) quay quanh A.

6. Trên tiếp tuyến tại T của một đường tròn lấy 2 đoạn TM và TN biến thiên sao cho $\overline{TM}.\overline{TN} =$ const . Gọi T' là điểm xuyên tâm đối của T trên đường tròn đó.
a/ CM: đoạn nối giao điểm của các đường thẳng T'M và T'N với đường tròn đã cho đi qua điểm cố định.
b/ Giải bài này cho đường thẳng nối các tiếp điểm của các tiếp tuyến với đường tròn đã cho vẽ qua MN.
c/ Tìm tập hợp giao điểm của 2 tiếp tuyến này.

7. Cho 2 đường tròn (O,R) và (O',4R) tiếp xúc trong nhau tại A.
a/ Hãy nêu cách dựng đường tròn (I,r) tiếp xúc ngoài với (O) và tiếp xúc trong với (O').
b/ Tìm tập hợp tâm các đường tròn như vậy.

8. Cho 2 đường tròn đường kính AB và AC tiếp xúc ngoài nhau tại A. kẻ 2 tiếp tuyến tại B và C với 2 đường tròn. Hãy nêu cách dựng các đường tròn tiếp xúc với 2 đường tròn đó và tiếp xúc với 2 tiếp tuyến trên.

9. Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng. P nằm ngoài đường thẳng AC. CM: các tâm của các đường tròn (ABP), (BCP), (CAP) và P cùng thuộc một đường tròn.

10. Dựng đường tròn qua 2 điểm đã cho tiếp xúc với một đường tròn (đường thẳng) đã cho.

11. Qua một điểm cho trước dựng đường tròn tiếp xúc với 2 đường tròn (hoặc đường thẳng với đường tròn) cho trước.

12. Dựng đường tròn tiếp xúc với 3 đường tròn cho trước.(Apoloniut)

13. Đường tròn S tiếp xúc ngoài với đường tròn (S_1) và (S_2) tại các điểm A và B. CM: đường thẳng AB đi qua tâm của phép vị tự biến (S_1) thành (S_2).

14. Cho 3 điểm A, C, B thẳng hàng theo thứ tự. lấy 3 đoạn này dựng 3 nửa đường tròn cùng

phía so với AB.
a/ đường tròn S tiếp xúc với 3 nửa đường tròn đó. CM: đường kính của S bằng khoảng cách từ tâm của S đến đường thẳng AB.
b/ Qua C dựng nửa đường thẳng vuông góc AB. Trong các tam giác cong ACD và BCD nội tiếp các đường tròn (S_1) và (S_2). CM: (S_1) và (S_2) bằng nhau.
c/ CM: tiếp tuyến chung của nửa đường tròn đường kính AC và (S_1) luôn qua điểm cố định khi C di động trên AB.
15. Cho 2 đường tròn tiếp xúc trong nhau (O_1) và(O_2). Một chuỗi các đường tròn $S_0, S_1, \ldots S_n$ nối đuôi nhau liên tiếp và tiếp xúc nhau và cùng tiếp xúc với 2 đường tròn trên mà tâm của S_0, O_1, O_2 thẳng hàng. Các đường tròn này cùng nằm một phía so với OO'. Gọi dn là khoảng cách từ tâm Sn đến OO'. CM: $d_n = 2nr_n$.
16. Chứng minh: tỷ số kép của 4 điểm A, B, C, D không thay đổi qua phép nghịch đảo.
17. Qua 2 điểm A và B của đường tròn S kẻ 2 tiếp tuyến cắt nhau tại C. D là trung điểm AB. CM: C và D là ảnh của nhau qua phép nghịch đảo qua đường tròn S.
18. Lấy 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. CM: nếu các tiếp tuyến của đường tròn tại A và C cắt nhau trên BD thì các tiếp tuyến của đường tròn tại B và D cắt nhau trên AC.
19. Hai đường tròn di động (S_1) và (S_2) tiếp xúc ngoài nhau và cùng tiếp xúc với dây và cung của hình viên phân. Chứng minh rằng:
a/ Tiếp điểm giữa (S_1) và (S_2) chạy trên đường cố định và đường nối tâm tiếp xúc đường cong cố định.
b/ Tiếp tuyến chung trong giữa (S_1) và (S_2) đi qua điểm cố định.
20. Hãy chỉ ra cách dựng 2 đường tròn (S_1) và (S_2) như trên.
21. Cho đa giác đều $A_1A_2 \ldots A_n$. M là điểm tùy ý trên cung A_1A_n, $d_i = MA_i$. CM rằng:
a/ $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{1}{d_i d_{i+1}} = \frac{1}{d_1 d_n}$ b/ Nếu n lẻ thì: $d_1 + d_3 + d_5 \ldots + d_n = d_2 + d_4 + d_6 + \ldots d_{n\check{}1}$.
2. Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng với d là trung trực AB. Một đường tròn (O) thay đổi đi qua A, B cắt d ở D và E. Các đường CD, CE cắt (O) ở D' và E'. Tìm tập hợp các điểm D' và E'
23. Hai đường tròn tiếp xúc nhau tại A. Một tiếp tuyến tại M của đường tròn thứ nhất cắt đường tròn thứ hai ở B và C. CM: đường thẳng AM là phân giác của góc tạo bởi 2 đường AB và AC.
24. Đa giác $2n$ cạnh $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ ngoại tiếp đường tròn (O). Giả sử $p_1, p_2, \ldots p_{2n}$ là khoảng cách từ M trên đường tròn đến các cạnh $A_1A_2, A_2A_3, \ldots A_{2n}A_1$. CM : $p_1p_3p_5 \ldots p_{2n\check{}1} = p_2p_4p_6 ... p_{2n}$.
25. A là điểm tùy ý thuộc nửa đường tròn (C) đường kính BC (không trùng trung điểm cung (BC)). Gọi O là tâm của (C).Hạ AH vuông góc BC. Tiếp tuyến với nửa đường tròn đường kính BC tại A cắt BC tại H'. $(C_1), (C_2)$ và (C_3) là 3 nửa đường tròn đường kính H'B, H'C, H'O cùng phía với nửa đường tròn (C).
a/ Nêu cách dựng đường tròn (γ_1) tiếp xúc (C), (C_1), (C_3) và (γ_2) tiếp xúc với (C), (C_2) và (C_3).
b/ Chứng tỏ rằng 2 vòng (γ_1) và (γ_2) bằng nhau.

Tài liệu tham khảo

[1] Các bài toán về hình học phẳng của V.V Praxolov.

[2] Tuyển tập 30 năm Tạp chí Toán học tuổi trẻ.

SỬ DỤNG MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA ÁNH XẠ ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH HÀM SỐ

Trần Văn Trung, Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn – Ninh Thuận

Kỹ thuật để giải một bài toán về phương trình hàm số được trình bày trong nhiều tài liệu (xem [1]). Trong bài viết này tôi muốn giới thiệu một cách có hệ thống về kỹ thuật ứng dụng tính đơn ánh, toàn ánh, song ánh và điểm bất động của ánh xạ để giải một bài toán phương trình hàm.

A. Kỹ thuật sử dụng tính đơn ánh-toàn ánh-song ánh.

* Một số lưu ý :
a/ Nếu $f : X \to Y$ là đơn ánh thì từ $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
b/ Nếu $f : X \to Y$ là toàn ánh thì với mỗi $y \in Y$ tồn tại $x \in X$ để $f(x) = y$.
c/ Nếu $f : X \to Y$ là song ánh thì f vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh và đặc biệt là có ánh xạ ngược.
- Nếu hàm số f là đơn ánh thì ta thường dùng kỹ thuật tác động f vào 2 vế.
- Nếu hàm số f là toàn ánh thì sử dụng tồn tại x_0 sao cho $f(x_0) = 0$ và sau đó tìm .
Đặc biệt hàm số f là song ánh thì ta có thêm một kỹ thuật nữa là tìm hàm số ngược.

Bài toán 1. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện*
$f(x + y + f(y)) = f(f(x)) + 2y; \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1)

Bài giải. Trước hết ta chứng minh f đơn ánh. Từ điều kiện của bài toán ta hoán vị vai trò x và y cho nhau ta có :
$f(y + x + f(x)) = f(f(y)) + 2x; \forall x, y \in \mathbb{R}$ (2)
* Giả sử f(x) = f(y) từ (1) và (2) ta có :

$$f(f(x)) + 2y = f(f(y)) + 2x \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$$

f là đơn ánh.
Thay $y = 0$ vào (1) ta có :

$$f(x + f(0)) = f(f(x)); \forall x \in \mathbb{R}$$

Do f là đơn ánh nên : $f(x) = x + f(0)$, tức là $f(x) = x + a, a \in \mathbb{R}$.

Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn.

Vậy $f(x) = x + a, \quad a \in \mathbb{R}$ □

Bài toán 2. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(f(n) + m) = n + f(m + 2012); \forall m, n \in \mathbb{Z}^+$$

Bài giải.

Trước hết ta chứng minh f đơn ánh. Thật vậy nếu $f(n_1) = f(n_2)$ thì
$f(f(n_1) + m) = f(f(n_2) + m)$ (1)

$$\Rightarrow n_1 + f(m+2012) = n_2 + f(m+2012) \Rightarrow n_1 = n_2$$

Trong (1) thay $m = f(1)$ ta có :

$$f\left(f(n) + f(1)\right) = n + f\left((f(1) + 2012\right)$$
$$\Leftrightarrow f\left(f(n) + f(1)\right) = n + 1 + f\left(2012 + 2012\right)$$
$$\Leftrightarrow f\left(f(n) + f(1)\right) = f\left((f(n+1) + 2012\right)$$

Vì f đơn ánh nên : $f(n) + f(1) = f(n+1) + 2012$,

hay $f(n+1) = f(n) + f(1) - 2012 \Rightarrow f(n+1) - f(n) = f(1) - 2012$. suy ra $f(n)$ là cấp số cộng có công sai $d = f(1) - 2012$ và số hạng đầu $n_1 = f(1)$, vậy nên

$$f(n) = f(1) + (n-1)[f(1) - 2012]$$
$$\Leftrightarrow f(n) = f(1) + nf(1) - f(1) - 2012n + 2012$$
$$\Leftrightarrow f(n) = [f(1) - 2012]n + 2012$$

tức là $f(n) = an + b$.

Thay vào quan hệ hàm ta có : $f(n) = n + 2012; \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$ □

Bài toán 3. *(IMO – 2002) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f\left(f(x) + y\right) = 2x + f\left(f(y) - x\right); \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Bài giải.

Ta chứng minh: f là toàn ánh. Thật vậy thay $y = -f(x)$ vào (1) ta có :

$$f\left(f(-f(x)) - x\right) = f(0) - 2x; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Do vế phải là hàm bậc nhất với x nên tập giá trị của f là $\mathbb{R} \Rightarrow f$ toàn ánh.

Vì f là toàn ánh nên $\exists a \in \mathbb{R}$ sao cho : $f(a) = 0$

Thay $x = a$ vào (1) ta có

$$f\left(f(a) + y\right) = 2a + f\left(f(y) - a\right)$$
$$\Rightarrow f(y) = 2a + f\left(f(y) - a\right)$$
$$\Leftrightarrow f(y) - a = f\left(f(y - a\right) + a$$

Vì f toàn ánh nên : $f(x) = x - a$

Thử lại, ta thấy $f(x) = x - a$ thỏa mãn. □

Bài toán 4. *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện :*

$$f\left(x + f(y)\right) = 2y + f(x); \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Bài giải.

a/ Chứng minh$f$ là đơn ánh thật vậy nếu $f(x_1) = f(x_2)$ thì :

$$\begin{cases} f\left(x + f(x_1)\right) = 2x_1 + f(x) \\ f\left(x + f(x_2)\right) = 2x_2 + f(x) \end{cases}$$
$$\Rightarrow 2x_1 + f(x) = 2x_2 + f(x) \Rightarrow x_1 = x_2$$

b/ Từ đk (1) $\quad \Rightarrow f$ là toàn ánh (vì tập giá trị của f là $\mathbb{R}$)

Do f là toàn ánh nên $\exists a \in \mathbb{R}$ để $f(a) = 0$. Ta chứng minh $a = 0$

Thế $y = a$ vào (1)

$$\Leftrightarrow f\left(x + f(a)\right) = 2a + f(x) \Leftrightarrow f(x) = 2a + f(x)$$
$$\Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$$

Từ (1) thay $x = 0$ ta có : $f\left(f(y)\right) = 2y + f(0) = 2y$

Trong (1) thay x bởi $f(x)$ ta có :

$$f\left(f(x)+f(y)\right)=2y+f\left(f(x)\right)$$
$$\Rightarrow f\left(f(x)+f(y)\right)=2y+2x$$
$$\Rightarrow f\left(f(x)+f(y)\right)=2(x+y)$$
$$\Rightarrow f\left(f(x)+f(y)\right)=f\left(f(x+y)\right)$$
$$\Rightarrow \left(f(x)+f(y)\right)=f(x+y)\text{ (do } f \text{ đơn ánh)}$$

Do f liên tục $\Rightarrow f(x)=kx$.
Thay vào (1) $\quad\Rightarrow k=\pm\sqrt{2}$
Thử lại ta có hai hàm số $f(x)=\pm\sqrt{2}x$, thỏa điều kiện bài toán. □

Bài toán 5. *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa :*

$$f\left(xf(y)+x\right)=xy+f(x);\forall x,y\in\mathbb{R}\quad(1)$$

Bài giải.
Thay $x=1$ vào (1) ta có :

$$f\left(f(y)+1\right)=y+f(1)$$

Dễ dàng ta chứng minh được f song ánh.
Thay x = 1, y = 0 vào (1) ta có

$$f\left(f(0)+1\right)=f(1)\Rightarrow f(0)+1=1\text{ (Do } f \text{ là đơn ánh)}$$
$$\Rightarrow f(0)=0$$

Với $x\neq 0$ đặt $y=-\frac{f(x)}{x}$ khi đó (1) trở thành

$$f\left(xf(y)+x\right)=0=f(0)$$
$$\Rightarrow xf(y)+x=0\text{ (vì } f \text{ đơn ánh)}$$
$$\Rightarrow f(y)=-1\text{ (Vì x} \neq 0)$$

Vì f là toàn ánh nên $\exists b\in\mathbb{R}$ để $f(b)=-1$
Vậy $f\left(-\frac{f(x)}{x}\right)=f(b)\Rightarrow -\frac{f(x)}{x}=b\Rightarrow f(x)=-bx\ \forall x\neq 0$
Kết hợp với $f(0)=0$ ta có $f(x)=-bx\quad\forall x\in\mathbb{R}$ Thay $f(x)=-bx$ vào (1) $\Rightarrow b=\pm 1$
Vậy $f(x)=\pm x$ □

Bài toán 6. *Tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong R và thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau :*
1/ f là toàn ánh từ $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
2/ f là hàm số tăng trên $\mathbb{R}$.
3/ $f\left(f(x)\right)=f(x)+12x;\quad\forall x\in\mathbb{R}$

Bài giải.
Nếu $f(x)=f(y)$ thì $f(f(x))=f(f(y))$
$\Rightarrow f(x)+12x=f(y)+12y\Rightarrow 12x=12y\Rightarrow x=y$
$\Rightarrow f$ là đơn ánh. Theo đề bài f là toàn ánh từ $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ suy ra f là song ánh
$\exists$ hàm số ngược f^{-1} và f^{-1} là hàm số tăng trên $\mathbb{R}\Rightarrow f^{-1}$ cũng là hàm tăng trên $\mathbb{R}$.
Thay $x=0$ vào phương trình hàm ta được $f(f(0))=f(0)$.
Do f song ánh nên $f(0)=0\Rightarrow f^{-1}(0)=0$

Đặt ${f_n}^{-1}(x) = \underbrace{f^{-1}\left(f^{-1}\left(...f^{-1}(x)\right)\right)}_{n \text{ lần}};$

Ta cũng có ${f_n}^{-1}$ là tăng nên ${f_n}^{-1}(0) = 0$

Xét dãy số (a_n) với $\begin{cases} a_0 = f(x) \\ a_1 = x \\ a_n = f^{-1}(a_{n-1}); \quad n \geq 2 \end{cases}$

Thay x bởi $f^{-1}(a_{n-1})$ vào $f\left(f(x)\right) = f(x) + 12x$ ta có $a_{n-2} = a_{n-1} + 12a_n$

Giải phương trình ta tìm được

$${f_n}^{-1}(x) = a_{n+1} = \frac{4x - f(x)}{7}(-3)^{-n} + \frac{3x + f(x)}{7}4^{-n}$$

Xét $x > 0$ cố định, khi đó ${f_n}^{-1}(x) > 0; \quad \forall n$ (do ${f_n}^{-1}$ tăng) $3x + f(x) > 0$. Cho $n = 2k, 2k+1$ ta được :

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-2k-1} > \frac{4x - f(x)}{3x + f(x)}\ ;\ \left(\frac{4}{3}\right)^{-2k} > \frac{fx - 4x}{3x + f(x)}$$

Cho $k \to +\infty$ ta được $4x \leq f(x) \leq 4x \Rightarrow f(x) = 4x$

Khi $x < 0 \Rightarrow {f_n}^{-1}(x) < 0; \quad \forall n, \quad 3x + f(x) < 0.$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có $f(x) = 4x$ với $x < 0$.

Vậy $f(x) = 4x; \quad \forall x$ □

B. Ứng dụng điểm bất động

Cho ánh xạ $f : X \to Y$ $a \in X$mà $f(a) = a$ ta gọi a là điểm bất động của f. Việc nghiên cứu điểm bất động cho ta một số kỹ thuật để tìm hàm số đó.

Bài toán 7. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho :*

$$f\left(f(x)\right) = x^2 - 2; \forall x \in \mathbb{R}$$

Bài giải.

Đặt: $g(x) = f\left(f(x)\right) = x^2 - 2; g(x)$ có 2 điểm bất động là - 1, 2

$g_o g(x) = g\left(g(x)\right) = \left(x^2 - 2\right)^2 - 2$ có 4 điểm có bất động – 1, 2, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Ta có: $g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ và $g\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Giả sử tồn tại $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $f_o f = g$ thì $f_o g = f_o f_o f = g_o f$

Khi đó $f(-1) = f\left(g(-1)\right) = f_o g(-1) = g_o f(-1) = g\left[f(-1)\right] \Rightarrow f(-1)$ là điểm bất động của g.

Tương tự $f(2)$ là điểm bất động của g.

Vậy $\{f(-1), f(2)\} = \{-1; 2\}$

và ta có: $\left\{f(-1), f(2), f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right), f\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\} = \left\{-1, 2, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$

* Xét $f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Nếu $f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = -1 \Rightarrow f(-1) = f\left(f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) = g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Điều này mâu thuẫn và $f(-1) \in \{-1, 2\}$.

Tương tự :

$f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \neq 2$, mặt khác $f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \neq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

và $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ không phải là điểm bất động của g.
Do vậy chỉ có khả năng $f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
Nhưng khi đó thì
$f\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = f\left[f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right] = g\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
Điều này mâu thuẫn với $g\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\,\{a,b\}$
Vậy không thể tồn tại một hàm f thỏa mãn các điều kiện nói trên. □

* **Ta có thể chứng minh một kết quả tổng quát hơn:** Cho S là một tập hợp và $g : S \to S$ là một hàm số có chính xác 2 điểm cố định $\{a, b\}$ và $g_o g$ có chính xác 4 điểm cố định $\{a, b, c, d\}$ thì không tồn tại hàm số $g : S \to S$ để $g = f_o f$

* CHỨNG MINH: Giả sử $g(c) = y$. Thì $c = g(g_o g) = g(y)$, nên $y = g(c) = g(g(y))$. Do vậy y là một điểm cố định của $g_o g$. Nếu $y = c$ thì $c = g(y) = g(c)$, tức c là điểm cố định của g, mâu thuẩn.
Từ đó suy ra $y = d$, tức $g(c) = d$, và tương tự thì $g(d) = c$.
Giả sử tồn tại $f : S \to S$ sao cho $f_o f = g$. Thì $f_o g = f_o f_o f$.
Khi đó $f(a) = f(g(a))$, nên $f(a)$ là một điểm cố định của g.
Bằng việc kiểm tra từng trường hợp ta kết luận $f\{a, b\} = \{a, b\}$, $f\{a, b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$
Xét $f(c)$. Nếu $f(c) = a$, thì $f(a) = f(f(c)) = g(c) = d$, mâu thuẫn do $f(a)$ nằm trong $\{a, b\}$.
Tương tự cũng không thể xảy ra $f(c) = b$. Ngoài ra ta cũng không thể có $f(c) = c$ vì c không là điểm cố định của g.
Do vậy chỉ có khả năng là $g(c) = d$. Nhưng khi đó thì $f(d) = f(f(c)) = g(c) = d$.
Mâu thuẫn, vì điều này không thể xảy ra do d không phải là điểm cố định của g. Do vậy không thể tồn tại hàm f thỏa mãn yêu cầu của bài toán.
* Bài toán trên là trường hợp đặc biệt của bài toán này. □

Bài toán 8. *.(IMO 1994) Giả sử S là tập hợp các số thực lớn hơn -1. Tìm tất cả các hàm số $f : S \to S$ sao cho các điều kiện sau đây được thỏa mãn*
a) $f[x + f(y) + xf(y)] = y + f(x) + yf(x) \quad \forall x, y \in S$
b) $\frac{f(x)}{x}$ là hàm thực sự tăng với $-1 < x < 0$ và với $x > 0$.

Bài giải.

a) Tìm điểm bất động.
Từ điều kiện (b) ta nhận thấy phương trình điểm bất động $f(x) = x$ có nhiều nhất là 3 nghiệm (nếu có) : một nghiệm nằm trong khoảng $(-1; 0)$, một nghiệm bằng 0, một nghiệm nằm trong khoảng $(0; +\infty)$.

b) Nghiên cứu điểm bất động của hàm số Giả sử $u \in (-1; 0)$ là một điểm bất động của f.
Trong điều kiện (a) cho $x = y = u$ ta được
$$f(2u + u^2) = 2u + u^2$$
Hơn nữa $2u + u^2 \in (-1; 0)$ và $2u + u^2$ là một điểm bất động nữa của hàm số trong khoảng $(-1; 0)$
Theo nhận xét trên thì phải có
$$2u + u^2 = u \Rightarrow u = -u^2 \in (-1; 0)$$

Hoàn toàn tương tự, không có điểm bất động nào nằm trong khoảng $(0;+\infty)$. Như thế 0 là điểm bất động duy nhất của hàm số (nếu có).

c) Kết luận hàm Cho $x=y$ vào (a) ta được
$$f\left[x+f(x)+xf(x)\right]=x+f(x)+xf(x)\ \forall x\in S$$
Như vậy với mọi $x\in S$ thì $x+(x+1)f(x)$ là điểm bất động của hàm số. Theo nhận xét trên thì
$$x+(x+1)f(x)=0,\quad \forall x\in S\Rightarrow f(x)=-\tfrac{x}{1+x},\quad \forall x\in S$$
Thử lại thấy hàm này thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài toán 9. *.(IMO 1983)- Tìm các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn hai điều kiện:*
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0 \text{ và } f\left(xf(y)\right)=yf(x),\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}^+$$

Bài giải.

a) Tính $f(1)$.

Cho $x=y=1$, ta được $f\left(f(1)\right)=f(1)$. Lại cho $y=f(1)$ ta được
$$f\left(xf\left(f(1)\right)\right)=f(1)f(x)\Rightarrow f\left(xf(1)\right)=f(1)f(x).$$
Mặt khác $f\left(xf(1)\right)=f(x)$ nên ta được
$$f(x)=f(x)f(1)\Rightarrow f(1)=1 \text{ (do } f(x)>0)$$

b) Điểm cố định của hàm số

Cho $x=y$ vào quan hệ hàm ta được
$$f(xf(x))=xf(x),\ \ \forall x\in\mathbb{R}^+.$$
Suy ra $xf(x)$ là điểm bất động của hàm số f.

c) Một số đặc điểm của tập điểm cố định.

Nếu x và y là hai điểm cố định của hàm số, thì
$$f(xy)=f(xf(y))=yf(x)=xy$$
Chứng tỏ xy cũng là điểm bất động của hàm số. Như vậy tập các điểm bất động đóng đối với phép nhân. Hơn nữa nếu x là điểm bất động thì
$$I=f(1)=f\left(\tfrac{1}{x}f(x)\right)=xf(\tfrac{1}{x})\Rightarrow f\left(\tfrac{1}{x}\right)=\tfrac{1}{x}$$
Nghĩa là $\frac{1}{x}$ cũng là điểm bất động của hàm số. Như vậy tập các điểm bất động đóng với phèp nghịch đảo.

Như vậy ngoài 1 là điểm bất động ra, nếu có điểm bất động nào khác thì hoặc điểm bất động này lớn hơn 1, hoặc nghịch đảo của nó lớn hơn 1.

Do đó lũy thừa nhiều lần của điểm này lớn hơn 1 cũng sẽ là điểm bất động. Điều này trái vối điều kiện thứ 2 trong quan hệ hàm.

d) Vậy 1 là điểm bất động duy nhất của hàm số, do $xf(x)$ là điểm bất động của hàm số với mọi x >0 nên từ tính duy nhất ta suy ra $f(x)=\frac{1}{x}$.

Dễ thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

BÀI TẬP

Bài 1 Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện
$$f\left(xf(x)+f(y)\right)=\left(f(x)\right)^2+y;\forall x,y\in\mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Bài 2}}$ Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f\left(x^2+f(y)\right)=\left(f(x)\right)^2+y;\forall x,y\in\mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Bài 3}}$ (Đề nghị IMO 2002) Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa

$$f\left(f(x)+y\right)=2x+f\left(f(y)-x\right);\forall x,y\in\mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Bài 4}}$ (THPT – T8/360) Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa

$$f(x).f(y)=f\left(x+y(f(x)\right);\forall x,y\in\mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Bài 5}}$ Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$f\left(f(n)+m\right)=m+f(m+2012);\forall m,n\in\mathbb{Z}^+$$

$\boxed{\text{Bài 6}}$ (APMO 1989) Xác định tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn 3 điều kiện sau đây :

1/ f có tập giá trị $\mathbb{R}$

2/ f tăng nghiêm ngặt

3/ $f(x)+f'(x)=2x;\quad\forall x\in\mathbb{R}$

$\boxed{\text{Bài 7}}$ (IMO 1996) Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ sao cho

$$f\left(m+f(n)\right)=f\left(f(m)+f(n)\right);\forall m,n\in\mathbb{N}$$

Tài liệu tham khảo

- Bài toán Hàm số qua các kỳ thi Olympic của Nguyễn Trọng Tuấn
- Các tài liệu bồi dưỡng hè cho giáo viên chuyên của Trường Đại học Khoa học tự nhiên – Đại học Quốc gia Hà Nội tổ chức.
- Chuyên đề bồi dưỡng về Phương trình hàm của Trường chuyên Quang Trung – Bình Phước.
- Báo Toán học Tuổi trẻ.
- Tuyển tập Các đề thi Olympic 30/4.
- Các đề thi HSG Quốc gia và Quốc tế.
- Nguồn Internet.

TỨ GIÁC LƯỠNG TIẾP

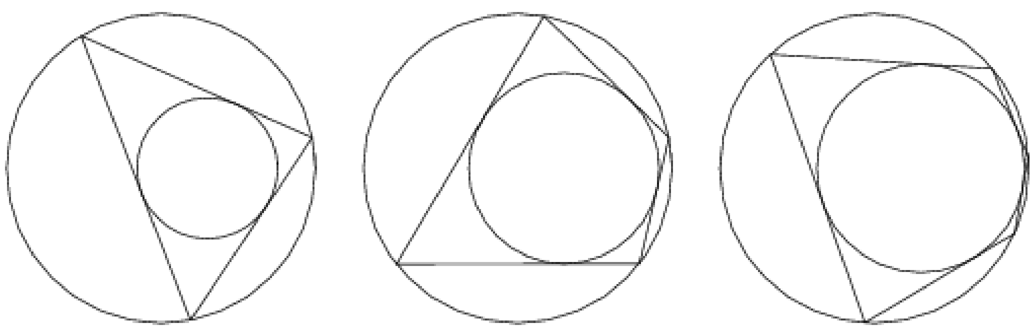
Nguyễn Hữu Tâm, Hoàng Tố Quyên, Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn – Bình Định

1 Mở đầu

Nicolas Fuss (1755-1826), nhà toán học người Đức, ông là người đã dành trọn cuộc đời ở thành phố Pê-téc-bua, nước Nga, trong công việc thư kí cho nhà khoa học Leonhard Euler. Trong thời gian làm việc tại Viện hàn lâm Petersburg, ông đã viết nhiều bài báo về các chủ đề khác nhau như (spherical) hình học, (differential) hình học, phương trình và nhiều lĩnh vực khác. Tuy nhiên, độc lập với những chủ đề trên, N. Fuss đã khảo cứu về "đa giác lưỡng tâm", được định nghĩa là một đa giác có cả đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp, hay nói cách khác là nó vừa là đa giác ngoại tiếp, vừa là đa giác nội tiếp. Ông đã tìm ra mối liên hệ giữa 2 bán kính và đường nối tâm của 2 đường tròn trong trường hợp tứ giác, ngũ giác, lục giác, thất giác và bát giác. Bài viết này, chúng tôi đề cập đến tứ giác lưỡng tiếp và một số tính chất của nó.

2 Tứ giác lưỡng tiếp và định lý Fuss

Tứ giác lưỡng tiếp là tứ giác có cả đường tròn ngoại tiếp (đi qua tất cả các đỉnh của tứ giác) và đường tròn nội tiếp (tiếp xúc với tất cả các cạnh tứ giác). Tất cả các tam giác đều lưỡng



Hình 24:

tiếp với một đường tròn nội tiếp và một đường tròn ngoại tiếp. Euler đã đưa ra biểu thức thể hiện mối quan hệ giữa bán kính nội tiếp r, bán kính ngoại tiếp R và độ dài đường nối tâm d như sau :

$$d^2 = R^2 - 2Rr$$

Mở rộng ra với tứ giác lưỡng tiếp, ta có định lý sau:

Định lý 2. *(Định lý Fuss) Giả sử có một tứ giác nội tiếp đường tròn (C) bán kính R và ngoại tiếp đường tròn (C') bán kính r. Khoảng cách giữa hai tâm là d, khi đó ta có*

$$(R^2 - d^2)^2 = 2r^2(R^2 + d^2) \tag{1}$$

Việc tìm ra mối quan hệ này đã được đánh giá là một trong 100 vấn đề toán học sơ cấp vĩ đại nhất trong lịch sử. Bên cạnh đó, Fuss cũng tìm ra mối quan hệ tương tự cho một số trường hợp khác, chẳng hạn như: Với trường hợp lục giác ta có công thức:

$$3p^4q^4 - 2p^2q^2r^2(p^2 + q^2) = r^4(p^2 - q^2)^2 \tag{2}$$

Với bát giác, ta có

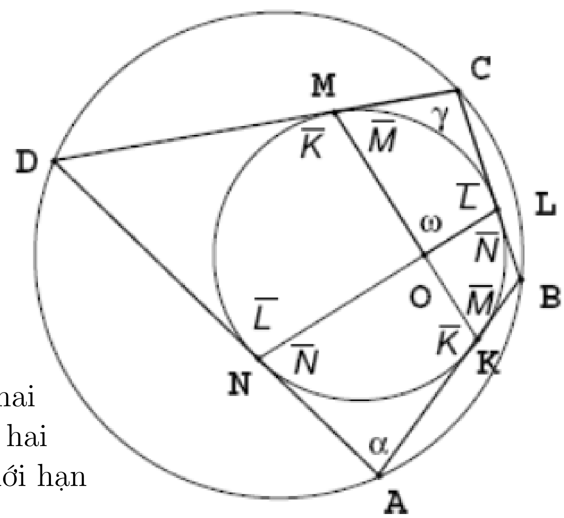
$$\left(r^2(p^2 + q^2) - p^2q^2\right)^4 = 16p^4q^4r^4(p^2 - r^2)(q^2 - r^2) \tag{3}$$

Trong đó, $p = R + d, q = R - d$.

Việc xây dựng các công thức (2), (3) khá phức tạp, ở đây ta chỉ xây dựng công thức (1) cho trường hợp tứ giác.

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau :

Bổ đề 3. *Trong tứ giác lưỡng tiếp, hai đường thẳng nối các cặp tiếp điểm đối nhau thì vuông góc với nhau.*



Hình 25

Thật vậy, giả sử có tứ giác $ABCD$ lưỡng tiếp, α v các góc được kí hiệu như hình vẽ. Gọi góc tạo bởi hai

$\alpha + \overline{K} + \overline{N} + \omega = 360^0$

$\gamma + \overline{M} + \overline{L} + \omega = 360^0$.

Suy ra $\alpha + \gamma + \overline{K} + \overline{N} + \overline{M} + \overline{L} + 2\omega = 720^0$

Từ đó suy ra $\omega = 90^0$.

Nhận xét: Từ tính chất trên ta có cách dựng tứ giác lưỡng tiếp như sau: Trong một đường tròn vẽ hai dây cung vuông góc với nhau. Từ các đầu mút của hai dây cung vẽ các tiếp tuyến với đường tròn. Phần giới hạn bởi bốn tiếp tuyến là một tứ giác lưỡng tiếp.

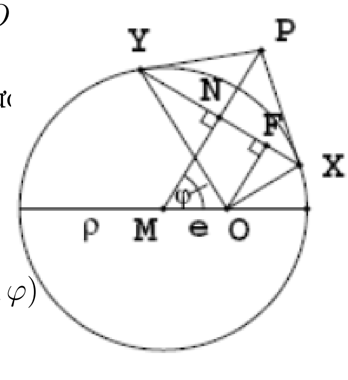
Quan sát hình vẽ, ta có các nhận xét: Đường thẳng KM và LN chia tứ giác lưỡng tiếp $ABCD$ thành bốn tứ giác $AKON, BLOK, CMOL$ và $DNOM$ có tính chất giống nhau. Ta sẽ nghiên cứu dạng tứ giác này bằng cách khảo sát quỹ tích của một điểm P được xây dựng như sau.

Cho đường tròn (C), và điểm O nằm trong đường tròn; X, Y là các điểm trên đường tròn sao cho $\widehat{XOY} = 90^0$ vuông, P là giao điểm của hai tiếp tuyến của (C) tại X và Y. Câu hỏi đặt ra là, quỹ tích của P khi X, Y chuyển động trên đường tròn là gì?

Câu trả lời là, quỹ tích điểm P là một đường tròn. Việc chứng minh kết quả này sẽ dẫn đến việc xây dựng công thức (1) ***Chứng minh.***

Vẽ MP, gọi N là giao điểm của MP với XY. Ta có $MP \perp XY$, vẽ O
Đặt $\widehat{OMP} = \varphi, OM = e, MP = p$ và r là bán kính đường tròn (C).
Xét tam giác vuông OXY ta có $OF^2 = FX.FY(*)$. Vì MP là trung trự
NY và $\widehat{MNY} = 90^0$. Từ đó ta có $NF = e\sin\varphi$.

Do đó $OF = MN - e\cos\varphi, FX = NX - e\sin\varphi$,
$FY = NX + e\sin\varphi$. Thế các đẳng thức trên vào (*) ta được



Hình 26

$$(MN - e\cos\varphi)^2 = (NX - e\sin\varphi)(NX + e\sin\varphi)$$

$$\Leftrightarrow MN^2 - 2.MN.e\cos\varphi + e^2 = NX^2$$

Mà $MX = r, MX^2 = MX^2 - MN^2, MX^2 = MP.MN = p.MN$, nên từ đây ta được

$$\frac{2r^4}{r^2 - e^2} = \frac{2r^2e}{r^2 - e^2}.p\cos\varphi + p^2 \tag{4}$$

Ta thấy, p và φ là những giá trị phụ thuộc vào vị trí của điểm P; r và e là hằng số không đổi. Khi đó giả sử P nằm trên một đường tròn bán kính $R = SP$ và tâm S nằm trên MO. Đặt $d = SM$ là khoảng cách giữa hai tâm đường tròn. Xét tam giác SMP ta có

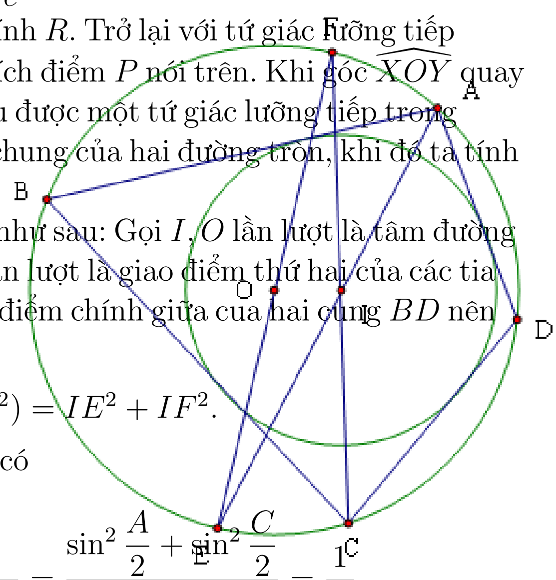
$$R^2 = d^2 + r^2 + 2dp\cos\varphi \tag{5}$$

So sánh (4) và (5) ta thấy R là hằng số khi $d = \dfrac{r^2e}{r^2 - e^2}$.

Do vậy quỹ tích điểm P là đường tròn tâm S, bán kính R. Trở lại với tứ giác lưỡng tiếp $ABCD$ thì đường tròn ngoại tiếp tứ giác chính là quỹ tích điểm P nói trên. Khi góc $\widehat{XOY}$ quay đến vị trí mà OX hoặc OY trùng với đường kính, ta thu được một tứ giác lưỡng tiếp trong trường hợp đặc biệt, có một đường chéo là đường kính chung của hai đường tròn, khi đó ta tính được e theo d, R, r và từ đó thu được công thức (1).
Công thức (1) cũng có thể được chứng minh cách khác như sau: Gọi I, O lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ và gọi E, F lần lượt là giao điểm thứ hai của các tia AI và CI với đường tròn tâm O. Ta thấy E và F là các điểm chính giữa của hai cung BD nên EF đi qua tâm O.

Ta có $IO^2 = \dfrac{IE^2 + IF^2}{2} - \dfrac{EF^2}{4}$. Suy ra $2(d^2 + R^2) = IE^2 + IF^2$.

Mặt khác, $IA.IC = IE.IF = R^2 - d^2$. Do vậy ta có



$$\frac{2(d^2 + R^2)}{(R^2 - d^2)^2} = \frac{IE^2 + IF^2}{(R^2 - d^2)^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IC^2} = \frac{\sin^2\dfrac{A}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2}}{r^2} = \frac{1}{r^2}$$

Hình 27

□

3 Định lý Poncelet

Việc chứng minh công thức liên hệ đã hoàn tất. Song hẳn bạn đọc sẽ quan tâm đến tính đúng đắn của mệnh đề đảo: Ta có định lý sau đây:

Định lý 3. *Cho hai đường tròn (C) và (C') có bán kính lần lượt là R và r, (C') nằm trong (C), d là khoảng cách giữa hai tâm đường tròn sao cho thỏa mãn biểu thức*

$$(R^2 - d^2)^2 = 2r^2(R^2 + d^2)$$

Khi đó tồn tại một tứ giác vừa nội tiếp (C) vừa ngoại tiếp (C'). Có vô số tứ giác như vậy.

Chứng minh. Gọi O và I lần lượt là tâm của (C) và (C'). Lấy một điểm A bất kì thuộc đường tròn tâm O, các dây cung AB, BC, CD cùng tiếp xúc với đường tròn tâm I. Ta cần chứng minh AD cũng tiếp xúc với (I).

Kéo dài CI cắt (O) tại F, vẽ đường kính FE, kéo dài EI cắt (O) tại A' . Từ đẳng thức trên ta có

$$\frac{2(d^2 + R^2)}{(R^2 - d^2)^2} = \frac{1}{r^2} \Leftrightarrow \frac{IE^2 + IF^2}{IC^2.IF^2} = \frac{\sin^2 \dfrac{A}{2} + \sin^2 \dfrac{C}{2}}{r^2}$$

Do đó

$$\frac{IE^2}{IC^2.IF^2} + \frac{1}{IC^2} = \frac{\sin^2 \dfrac{A}{2}}{r^2} + \frac{1}{IC^2} \Leftrightarrow \frac{IE}{IC.IF} = \frac{\sin \dfrac{A}{2}}{r}$$

Mà $IC.IF = IE.IA'$ nên suy ra

$$r = IA'.\sin\frac{A}{2} = r.\sin\frac{\widehat{BAD}}{2} = r.\sin\widehat{BA'I} = d(I, A'B)$$

Như vậy $A'B$ tiếp xúc với đường tròn (I), do đó $A \equiv A'$. Khi đó A, I, E thẳng hàng. Mà E là điểm chính giữa cung BD chứa C, nên $d(I, AB) = d(I, AD) = r$ hay AD tiếp xúc với đường tròn tâm I. Điều này cho thấy sự tồn tại (và tồn tại vô số) tứ giác vừa nội tiếp đường tròn (C), vừa ngoại tiếp đường tròn (C'). □

Việc mở rộng cho $n-$ giác quả thật không đơn giản. Poncelet đã đưa ra "Định lý kín Poncelet" có liên quan mật thiết đến đa giác lưỡng tiếp và giải quyết được một phần quan trọng của bài toán trên.

Xét hai đường tròn (C) và (C') trong mặt phẳng, (C') nằm trong (C). Từ một điểm P bất kì trên (C) ta vẽ tiếp tuyến đến (C'), kéo dài tiếp tuyến trên cắt (C), từ giao điểm vừa cắt, tiếp tục vẽ tiếp tuyến đến (C'), và thực hiện thao tác tương tự cho đến khi tạo thành đường cong kín (có một giao điểm trùng với P). Khi đó ta nhận được một $n-$ giác, được gọi là đường gấp khúc Poncelet.

Định lý Poncelet có thể được phát biểu như sau:

Định lý 4. *Nếu một đường gấp khúc Poncelet n cạnh được xây dựng trên hai conic cho trước là kín với một điểm bắt đầu bất kì thì cũng kín với mọi điểm bắt đầu.*

Do đó, nếu có một đa giác lưỡng tiếp có (C) là đường tròn ngoại tiếp và (C') là đường tròn nội tiếp, khi đó có vô số đa giác lưỡng tiếp không xác định nhận (C) và (C') là đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp.

Việc chứng minh Định lý Poncelet cho $n-$ giác (đối với Hình học Euclide và tổng quát trong Hình học xạ ảnh) không tiện trình bày ở đây, hy vọng sẽ được trình bày trong một bài viết khác.

Vấn đề mà hiện nay vẫn chưa được giải quyết trọn vẹn là tìm công thức liên hệ giữa d, R, r để tồn tại một n lưỡng tiếp hai đường tròn cho trước.

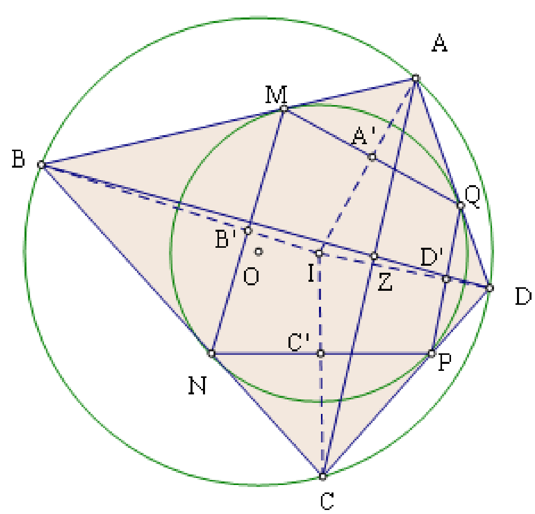
4 Một số bài toán liên quan đến tứ giác lưỡng tiếp

Bài toán 1. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$ và ngoại tiếp đường tròn $(I;r)$ có khoảng cách giữa hai tâm là d. Giả sử M, N, P, Q theo thứ tự là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng*

1) MP vuông góc với NQ;

2) I và O thẳng hàng với trọng tâm G của tứ giác $MNPQ$, hơn nữa $\overrightarrow{IG} = \dfrac{r^2}{d^2 - R^2}.\overrightarrow{IO}$;

3) I và O thẳng hàng với giao điểm Z của các đường chéo AC và BD, hơn nữa $\overrightarrow{IZ} = \dfrac{2r^2}{d^2 - R^2}.\overrightarrow{IO}$;



Hình 28:

Lời giải. 1) Giả sử A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của QM, MN, NP, PQ. Khi đó các đường thẳng AA', BB', CC', DD' cùng đi qua I. Vì $IA.IA' = IB.IB' = IC.IC' = r^2$ nên phép nghịch đảo cực I phương tích r^2 biến A thành A' , B thành B', C thành C', D thành D'; do đó phép nghịch đảo này biến đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ thành đường tròn ngoại tiếp tứ giác $A'B'C'D'$. Như vậy, hình bình hành $A'B'C'D'$ có đường tròn ngoại tiếp nên nó là hình chữ nhật. Do đó $A'B' \perp B'C'$ suy ra $NQ \perp MP$.

2) Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $A'B'C'D'$, từ phép nghịch đảo nên trên ta có I, O, O' thẳng hàng và ta cũng nhận được hệ thức sau

$$\overrightarrow{IO'} = \frac{r^2}{P_{I/(O)}}.\overrightarrow{IO} = \frac{r^2}{d^2 - R^2}.\overrightarrow{IO}$$

Do $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật nên O' trùng với trọng tâm của hình chữ nhật này và cũng trùng với trọng tâm G của tứ giác MNPQ. Như vậy, I, O, G thẳng hàng và ta có

$$\overrightarrow{IG} = \frac{r^2}{d^2 - R^2}.\overrightarrow{IO}$$

3) Theo một kết quả quen thuộc về tứ giác ngoại tiếp thì bốn đường thẳng AC, BD, MP, NQ đồng quy; do vậy Z cũng là giao điểm của MP và NQ. Để ý rằng tứ giác nội tiếp $MNPQ$ có hai đường chéo vuông góc với nhau và cắt nhau tại Z nên tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm G, và Z thẳng hàng, hơn nữa $\overrightarrow{IZ} = 2\overrightarrow{IG}$.

Như vậyI, O, Z thẳng hàng và ta có

$$\overrightarrow{IZ} = \frac{2r^2}{d^2 - R^2}.\overrightarrow{IO}.$$

Bài toán 2. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$ và ngoại tiếp đường tròn $(I; r)$ có khoảng cách giữa hai tâm là d. Chứng minh các đẳng thức sau:*

1) $\dfrac{AB}{IA.IB} = \dfrac{CD}{IC.ID}, \dfrac{AD}{IA.ID} = \dfrac{BC}{IB.IC}$.

2) $\dfrac{AC}{IA.IC} = \dfrac{BD}{IB.ID} = \dfrac{2R}{R^2 - d^2}$.

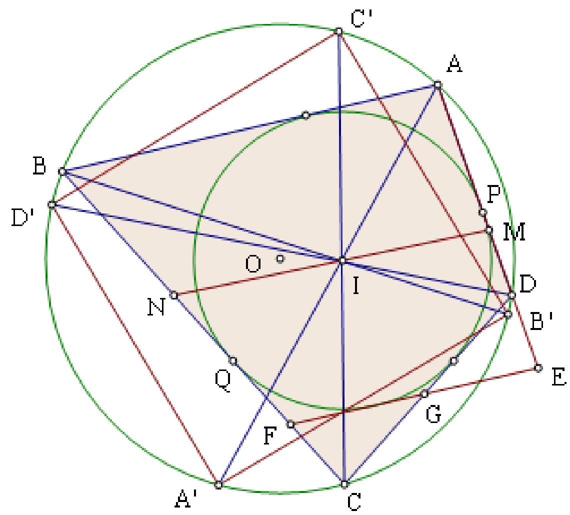
3) $\dfrac{1}{IA^2} + \dfrac{1}{IC^2} = \dfrac{1}{IB^2} + \dfrac{1}{ID^2}$.

4) $\dfrac{AC^2}{IA^2 + IC^2} = \dfrac{BD^2}{IB^2 + ID^2}$.

5) $8Rr\left(\dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{BD}\right) = AB + BC + CD + DA$.

Lời giải. Lấy $A'B'C'D'$ theo thứ tự là giao điểm thứ hai của các đường thẳng AI, BI, CI, DI với đường tròn tâm O. Ta thấy A' và C' là điểm chính giữa của hai cung trương bởi dây BD, B' và D' là điểm chính giữa của hai cung trương bởi dây AC; do vậy $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật và $A'C' = B'D' = 2R$.

Đặt $IA.IA' = IB.IB' = IC.IC' = ID.ID' = k$. Ta có $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{IA'}{IB} = \dfrac{k}{IA.IB}$. Suy ra $\dfrac{AB}{IA.IB} = \dfrac{A'B'}{k}$. Tương tự, $\dfrac{CD}{IC.ID} = \dfrac{C'D'}{k}$. Mà $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật nên $A'B' = C'D'$. Từ đó $\dfrac{AB}{IA.IB} = \dfrac{CD}{IC.ID}$.



Hình 29:

Chứng minh tương tự ta cũng có $\dfrac{AD}{IA.ID} = \dfrac{BC}{IB.IC}$.

Ta có $\dfrac{AC}{IA.IC} = \dfrac{A'C'}{k} = \dfrac{2R}{R^2 - d^2}$ và $\dfrac{BD}{IB.ID} = \dfrac{B'D'}{k} = \dfrac{2R}{R^2 - d^2}$. Từ đây ta nhận được đẳng thức (2).

Bây giờ, vì $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật nên $IA'^2 + IC'^2 = IB'^2 + ID'^2 \Leftrightarrow \dfrac{k^2}{IA^2} + \dfrac{k^2}{IC^2} = \dfrac{k^2}{IB^2} + \dfrac{k^2}{ID^2}$. Từ đây ta nhận được đẳng thức (3).

Đẳng thức (4) được suy ra từ (2) và (3). Ta chứng minh đẳng thức cuối cùng như sau:

Qua I vẽ đường thẳng song song với AB, cắt AD và BC tại M và N. Gọi P và Q theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của I trên AD và BC. Ta có,

$$MN = IM + IN = \frac{IP}{\sin\widehat{IMP}} + \frac{IQ}{\sin\widehat{INQ}} = \frac{r}{\sin A} + \frac{r}{\sin B}$$

Mà $BD = 2R\sin A, AC = 2r\sin B$ nên $MN = 2Rr(\dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{BD})$.

Kẻ một tiếp tuyến song song với AB của đường tròn tâm I, cắt AD, BC, CD lần lượt tại E, F, G. Ta có $2MN = AB + EF(*)$.

Dễ thấy tam giác GCF và tam giác GED đồng dạng, hơn nữa chúng đều nhận (I) là đường tròn bàng tiếp của hai góc tương ứng tại đỉnh E và đỉnh$C$, do vậy hai tam giác này bằng nhau. Vậy ta có $CG = EG, DG = FG$, suy ra $CD = EF(**)$.

Từ (*) và (**) ta nhận được

$$MN = \frac{1}{2}(AB + CD) = \frac{1}{4}(AB + BC + CD + DA)$$

Do đó

$$2Rr(\frac{1}{AC} + \frac{1}{BD}) = \frac{1}{4}(AB + BC + CD + DA) = MN$$

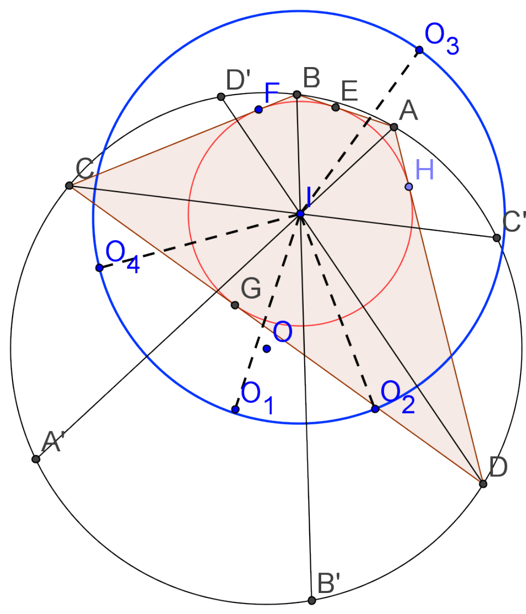
Đây là đpcm.   Từ chứng minh trên ta thấy MN là hằng số với mọi trường hợp song song với các cạnh của tứ giác.

Bài toán 3. *Giả sử các đường thẳng AI, BI, CI, DI cắt đường tròn tâm (O) tại điểm thứ hai là $A'B'C'D'$; gọi O_1, O_2, O_3, O_4 theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác $IA'B', IB'C', IC'D', ID'A'$; gọi E, F, G, H theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của I trên AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng*

1) Tứ giác $A'B'C'D'$ là một hình chữ nhật, hai đường chéo của nó là đường kính của đường tròn tâm O và chúng lần lượt vuông góc với hai đường chéo của tứ giác $ABCD$.

2) Bốn điểm O_1, O_2, O_3, O_4 cùng nằm trên đường tròn tâm I bán kính $\dfrac{R^2-d^2}{2r}$.

3) Tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ là ảnh của tứ giác $EFGH$ qua phép vị tự tâm I tỉ số $-\dfrac{R^2-d^2}{2r^2}$.



Hình 30:

Lời giải. 1) Vì I là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$ nên A' là điểm chính giữa cung BCD, C' là điểm chính giữa cung BAD; do vậy $A'C'$ là đường kính của đường tròn (O) và vuông góc với AC. Như vậy $A'B'C'D'$ là một hình chữ nhật.

Đặt $k = IA.IA' = IB.IB' = IC.IC' = ID.ID' = R^2 - d^2$, ta có

$$IO_1 = \frac{A'B'}{2\sin\widehat{A'IB'}} = \frac{A'B'}{2\sin\widehat{AIB}}$$

Mà $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{IA'}{IB} = \dfrac{k}{IA.IB}$ nên

$$IO_1 = \frac{kAB}{2IA.IB.\sin\widehat{AIB}} = \frac{k}{2IE} = \frac{R^2-d^2}{2r}$$

Như vậy O_1 nằm trên đường tròn tâm I bán kính $\dfrac{R^2-d^2}{2r}$. tương tự thì O_2, O_3, O_4 cũng nằm trên đường tròn này.

2) Ta có $\widehat{O_1IB'} = 90^0 - \widehat{IA'B'} = 90^0 - \widehat{IAB} = \widehat{EIB}$. Suy ra E, I, O_1 thẳng hàng. Tương tự ta cũng có F, I, O_2 thẳng hàng; G, I, O_3 thẳng hàng. Từ đây suy ra tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ là ảnh của tứ giác $EFGH$ qua phép vị tự tâm I tỉ số $-\dfrac{R^2-d^2}{2r^2}$.

Trước khi đến với bài toán tiếp theo, ta có một số nhận xét sau đây.

Nhận xét. Giả sử $A_1A_2A_3A_4$ là tứ giác nội tiếp đường tròn (O, R) và ngoại tiếp đường tròn (I, R). Các tiếp điểm trên $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ lần lượt là M, N, P, Q. Đặt $MA_1 = t_1, MA_2 = t_2, PA_3 = t_3, PA_4 = t_4$, khi đó

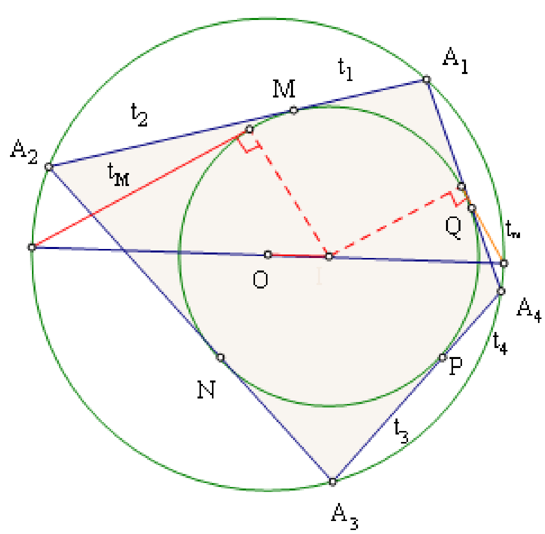
1) $t_i + t_{i+1} = A_iA_{i+1}, i = 1, 2, 3, 4$, quy ước $t_5 = t_1, A_5 \equiv A_1$.

2) $t_1t3 = t_2t_4 = r^2$,

3) $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_4 + t_4t_1 = 2(R^2 - d^2)$.

4) Gọi t_M, t_m lần lượt là độ dài đoạn tiếp tuyến lớn nhất và bé nhất từ (O, R) đến (I, r). Khi đó ta có

$$t_m = \sqrt{(R-d)^2 - r^2}, t_M = \sqrt{(R+d)^2 - r^2}.$$



Hình 31:

Bài toán 4. *Cho $A_1A_2A_3A_4$ là tứ giác nội tiếp đường tròn (O, R) và ngoại tiếp đường tròn (I, R). Các tiếp điểm trên $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ lần lượt là M, N, P, Q. Đặt $MA_1 = t_1, MA_2 =$*

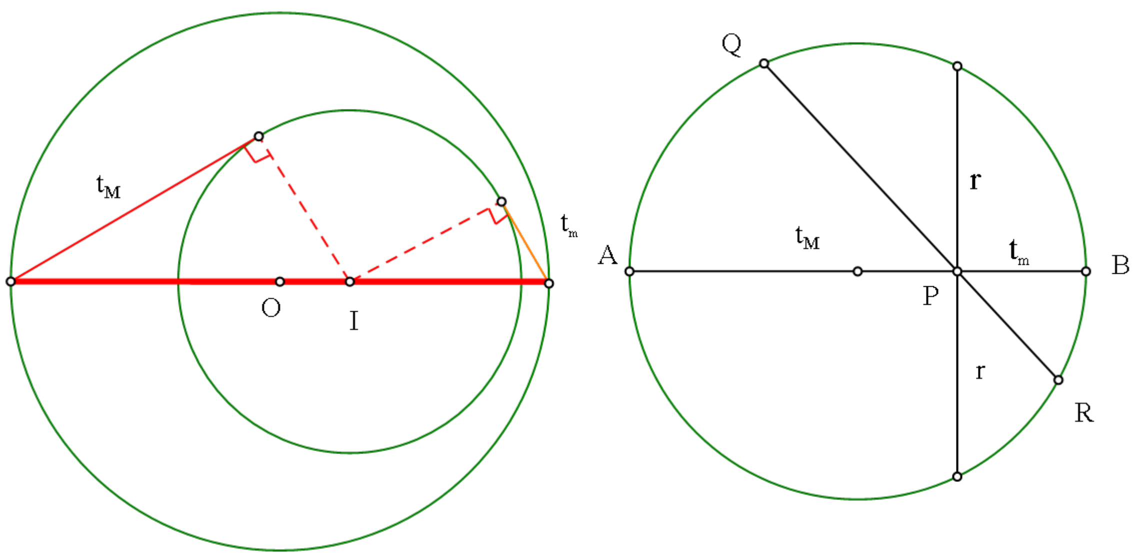
$t_2, PA_3 = t_3, PA_4 = t_4$, t_M, t_m *lần lượt là độ dài đoạn tiếp tuyến lớn nhất và bé nhất từ* (O, R) *đến* (I, r)*. Chứng minh rằng*

1) $2r \le t_1 + t_3 \le t_m + t_M$,

2) $2r \le t_2 + t_4 \le t_m + t_M$,

3) $4r \le t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \le 4r.\dfrac{R^2 + d^2}{R^2 - d^2}$,

4) $4r^2 \le t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 \le 4(R^2 + d^2 - r^2)$.



Hình 32:

Lời giải. Xét đường tròn (C) có đường kính $AB = t_m + t_M$. Gọi P thuộc AB sao cho $AP = t_M, PB = t_m$. Khi đó, với mỗi $t_i, i = 1, 2, 3, 4$; vì $t_m \le t_i \le t_M$, nên luôn có hai điểm Q và R thuộc (C) sao cho: $t_i = PQ, t_{i+2} = PR$, với $PQ + PR = QR$. Ta có $PQ.PR = t_m.t_M = P_{P/(C)}$.

Hiển nhiên $t_i + t_{i+2} \le t_m + t_M$ vì $t_m + t_M$ là đường kính. Mặt khác, rõ ràng $t_i + t_{i+2} \ge 2r$ vì $r^2 = t_m t_M$. Vậy, hai bất đẳng thức đầu đã được chứng minh.

Để chứng minh bất đẳng thức tiếp theo, ta để ý rằng

$$t_m = \sqrt{(R-d)^2 - r^2} = r.\frac{R-d}{R+d}, t_M = \sqrt{(R+d)^2 - r^2} = r.\frac{R+d}{R-d}.$$

Từ đó ta có

$$4r \le t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4 \le 2(t_m + t_M) = 4r.\frac{R^2 + d^2}{R^2 - d^2}$$

Với bất đẳng thức cuối, để ý rằng $t_1 t_3 = t_2 t_4 = r^2$, ta có

$$4r^2 \le t_1^2 + t_3^2 + 2t_1 t_3, 4r^2 \le t_2^2 + t_4^2 + 2t_2 t_4$$

Suy ra

$$4r^2 \le t_1^2 + t_3^2 + t_2^2 + t_4^2$$

Ta lại có
$$t_1 + t_3 \leq t_m + t_M, t_2 + t_4 \leq t_m + t_M, t_1t_3 = t_2t_4 = t_mt_M$$
Do đó
$$t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 \leq 2(t_m^2 + t_M^2) = 4(R^2 + d^2 - r^2)$$

Bài toán 5. *Cho tứ giác lưỡng tiếp $A_1A_2A_3A_4$ và các độ dài $t_i, i = 1, 2, 3, 4$ như giả thiết bài toán trên. Chứng minh:*
$$\frac{4}{r} \leq \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4} \leq \frac{4(R^2 + d^2)}{r(R^2 - d^2)}$$

Lời giải. Ta có $t_1 + t_3 \geq 2r$ và $t_1t_2 = r^2$ nên
$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_3} = \frac{t_1 + t_3}{r^2} \geq \frac{2}{r}$$
Tương tự,
$$\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_4} = \frac{t_2 + t_4}{r^2} \geq \frac{2}{r}$$
Từ đó
$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4} \geq \frac{4}{r}$$
Mặt khác do $t_1 + t_3 \leq t_m + t_M, t_1t_3 = t_mt_M$ nên ta có $\dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_3} \leq \dfrac{1}{t_m} + \dfrac{1}{t_M}$. Từ đó
$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4} \leq \left(\frac{1}{t_m} + \frac{1}{t_M}\right) = \frac{4(R^2 + d^2)}{r(R^2 - d^2)}.$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

5 Lời kết

Tứ giác và rộng hơn là đa giác lưỡng tiếp đã và đang là một vấn đề hấp dẫn không những với các nhà nghiên cứu mà còn đối với các bạn trẻ yêu toán. Bài viết trên đây đã phần nào đưa ra những định lý và những bài toán cơ bản về vấn đề này. Song vì dư lượng có hạn và khả năng hạn chế nên bài viết không đề cập đến những vấn đề chuyên sâu hơn trong các dạng đa giác và các bài toán phức tạp. Về lục giác và bát giác lưỡng tiếp sẽ được nghiên cứu sâu hơn trong các chuyên đề tiếp theo.

Để kết thúc bài viết, xin đưa ra một số bài tập liên quan đến tứ giác lưỡng tiếp để bạn đọc tham khảo.

Bài toán 6. *Cho tứ giác $ABCD$ lưỡng tiếp; M, N, P, Q lần lượt là tiếp điểm của các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA với đường tròn nội tiếp. Z là giao điểm hai đường chéo của tứ giác. Chứng minh ZM, ZN, ZP, ZQ lần lượt là phân giác các góc AZB, BZC, CZD, DZA.*

Bài toán 7. *Tứ giác lồi $ABCD$ có đường tròn nội tiếp $(I; r)$ và đường tròn ngoại tiếp $(O; R)$. Đặt $OI = d$. Chứng minh rằng:*

$$R^2 - d^2 = \frac{8R^2r^2}{AC.BD}.$$

Bài toán 8. *Xét lớp các tứ giác lồi $ABCD$ vừa nội tiếp $(O; R)$, vừa ngoại tiếp $(I; r)$ cố định. Chứng minh các tính chất sau:*

1) $AB.CD = \text{const}$ *;*

2) $IA.IB.IC.ID = \text{const}$;

3) $\sin A. \sin B. \sin C. \sin D = \text{const}$;

4) $\dfrac{AB + BC + CD + DA}{AC + BD} = \text{const}$ *;*

5) Giao điểm của hai đường chéo AC và BD là một điểm cố định nằm trên đường thẳng OI;

6) Tồn tại một tứ giác $A_0B_0C_0D_0$ có diện tích và chu vi lớn nhất, cũng tồn tại một tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ có chu vi và diện tích nhỏ nhất.

Bài toán 9. *Cho $ABCD$ là một tứ giác lưỡng tiếp, $(O; R), (I; r)$ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tứ giác. Chứng minh rằng:*

1) $8r \le AB + BC + CD + DA \le 8r.\dfrac{R^2 - d^2}{R^2 + d^2}$*;*

2) $4(R^2 - d^2 + 2r^2) \le AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \le 4(3R^2 - 2r^2)$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO.

[1] Trần Văn Tấn, Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Hình học 11, NXB Giáo dục 2008.

[2] Fuss' problem of the Chord-Tangent quadrilateral, Mgr. Barbora Stastna, Masaryk University, Faculty of Science.

[3] Some relations concerning triangles and bicentric quadrilaterals in connection with Poncelet's closure theorem, Mirko Radic, Math. Maced Vol1 (2003), 35-58.

[4] http://mathworld.wolfram.com; www.mathlinks.ro.