

**TỔNG HỢP CÁC BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ, GIỚI HẠN**  
**TRONG ĐỀ THI HSG CÁC TỈNH, THÀNH PHỐ**  
**NĂM HỌC 2011 – 2012 VÀ MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN**

*(Lê Phúc Lữ - tổng hợp và giới thiệu)*

**A – ĐỀ BÀI.**

**Bài 1.** (Quảng Bình, vòng 1)

Cho dãy số  $(u_n)$  xác định như sau  $u_1 = 1, \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + u_n^{2011}, n = 1, 2, 3, \dots$

Tính  $\lim \left( \frac{u_1^{2011}}{u_2} + \frac{u_2^{2011}}{u_3} + \dots + \frac{u_n^{2011}}{u_{n+1}} \right)$ .

**Bài 2.** (Vĩnh Long, vòng 1)

Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi 
$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n^2 + u_n + 4), n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng  $(u_n)$  là dãy tăng nhưng không bị chặn trên.

b) Đặt  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + 3}, n = 1, 2, 3, \dots$ . Tính  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

**Bài 3.** (Chọn đội tuyển THPT chuyên Bến Tre) Tìm số hạng tổng quát của dãy  $\{u_n\}$  thỏa mãn:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{u_{n+1} \cdot u_n}{2u_{n+1} - u_n} \end{cases}$$

**Bài 4.** (Bình Định, vòng 1)

Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi 
$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ u_{n+1} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})u_n^2 + (2\sqrt{6} - 5)u_n + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} \end{cases}$$

Đặt  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + \sqrt{2}}, n = 1, 2, 3, \dots$ . Tìm  $\lim v_n$ .

**Bài 5.** (Bình Dương, vòng 2)

Cho dãy số  $(x_n)$  được xác định như sau  $x_n = \frac{1}{2} \left( x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right), n \geq 2$  và  $a > 0, x_1 > 0$ .

Chứng minh rằng dãy đã cho có giới hạn và tìm giới hạn của dãy.

**Bài 6.** (Chọn đội tuyển THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai)

Cho hai số thực  $a$  và  $b$ . Xét dãy số  $\{x_n\}$  xác định bởi công thức  $\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = 1 + b \cdot x_n; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Tìm điều kiện của  $a, b$  để  $\{x_n\}$  có giới hạn. Tính giới hạn đó.

**Bài 7.** (Hà Nam, vòng 2)

Cho dãy số thực  $(x_n)$  thỏa mãn:  $x_1 = \frac{1}{6}, x_{n+1} = \frac{3x_n}{2x_n + 1}$  với mọi  $n$  nguyên dương.

a. Chứng minh dãy số trên có giới hạn và tính giới hạn đó.

b. Tìm số hạng tổng quát của dãy số trên.

**Bài 8.** (Hà Nội, vòng 1)

1. Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi:  $u_1 = 1$  và  $u_{n+1} = u_n + n$  với mọi  $n \geq 1$ . Tìm  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}}$ .

2. Cho dãy số  $(v_n)$  xác định bởi:  $v_1 = \sqrt{2015}$  và  $v_{n+1} = v_n^2 - 2$  với mọi  $n = 1, 2, 3, \dots$

Chứng minh rằng  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_{n+1}^2}{v_1^2 \cdot v_2^2 \cdot \dots \cdot v_n^2} = 2011$ .

**Bài 9.** (Long An, vòng 2)

Cho dãy số xác định bởi  $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 1}, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$

Đặt  $x_n = u_{2n-1}, y_n = u_{2n}$ .

- a) Chứng minh dãy  $(x_n), (y_n)$  có giới hạn hữu hạn.  
 b) Chứng minh  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó

**Bài 10.** (Phú Thọ, vòng 1)

Cho dãy số  $u_1 = 4, u_{n+1} = \frac{1}{9}(u_n + 4 + 4\sqrt{1 + 2u_n}), n = 1, 2, 3, \dots$

Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số trên.

**Bài 11.** (Nam Định, vòng 1)

Xét dãy số  $(u_n)$  thỏa mãn  $u_1 = 1, u_{n+1} = u_n(u_n - 1) + 2, n \geq 1$ .

Chứng minh rằng  $A_n = \prod_{k=1}^n (u_k^2 + 1) - 1$  là số chính phương với mọi  $n$ .

**Bài 12.** (Cần Thơ, vòng 2)

Cho dãy số  $\{x_n\}$  được xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = \frac{2011}{3} \ln(x_n^2 + 2011^2) - 2011^2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số  $\{x_n\}$  có giới hạn.

**Bài 13.** (Quảng Ninh, vòng 2)

Cho dãy  $(x_n)$  xác định bởi  $x_0 = a$  với  $a \in [1; \sqrt{2})$  và  $x_{n+1} = (\sqrt{2})^{x_n}, n = 0, 1, 2, \dots$

Chứng minh dãy có giới hạn và tìm giới hạn đó.

**Bài 14.** (Vĩnh Phúc, vòng 1)

Giả sử  $a$  là số thực dương thỏa  $0 < a < 1$ . Lập dãy  $(a_n)$  như sau

$$a_1 = a, a_{n+1} = a^{a_n}, n \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy có giới hạn hữu hạn khi  $n$  tiến tới vô cực.

**Bài 15.** (Nam Định, vòng 2)

Với mỗi số thực  $x$  kí hiệu  $[x]$  là số nguyên lớn nhất không vượt quá  $x$  và  $\{x\} = x - [x]$ . Cho

$u_n = \{(45 + \sqrt{2012})^n\}$ . Chứng minh dãy  $(u_n)$  có giới hạn và tìm giới hạn đó.

**Bài 16.** (Đà Nẵng, vòng 2)

Cho dãy số thực  $\{x_n\}$  thỏa mãn điều kiện  $x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 3x_n}{3x_n^2 + 1}$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- Tìm công thức tính  $x_n$  theo  $x_1$  và  $n$ .
- Chứng minh rằng dãy số  $\{x_n\}$  có giới hạn hữu hạn.

**Bài 17.** (Hưng Yên, vòng 1)

Cho dãy số xác định bởi công thức 
$$\begin{cases} x_1 = a > 0 \\ x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2}, n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng  $\frac{1}{x_n + n^2} \leq \frac{1}{\sqrt{a} \cdot n(n+1)}$ .

**Bài 18.** (Quảng Bình, vòng 2)

Cho hai dãy số dương  $(u_n), (v_n)$  xác định bởi công thức

$$\begin{cases} u_1 = v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{4v_{n+1}^2 - 1}, v_{n+1} = \frac{v_n}{1 - 4u_{n+1}^2}, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

a. Tính  $u_{2011}^2 + v_{2011}^2$ .

b. Tính  $\lim u_n, \lim v_n$ .

**Bài 19.** (Vĩnh Phúc, vòng 2)

Cho dãy các số dương  $(a_n)$  thỏa mãn:  $a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2} \geq 0, \sum_{j=1}^n a_j < 1, \forall k \geq 1$ .

Chứng minh rằng  $0 \leq a_k - a_{k+1} \leq \frac{2}{k^2}, \forall k \geq 1$ .

**Bài 20.** (Vĩnh Long, vòng 2)

Xét phương trình  $x^n = x^2 + x + 1, n \in \mathbb{N}, n > 2$

a. Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên  $n > 2$  thì phương trình trên có đúng một nghiệm dương duy nhất. Gọi nghiệm đó là  $x_n$ .

b. Chứng minh rằng  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$ .

**Bài 21.** (Bến Tre, vòng 1)

Cho phương trình  $x^{2n} - 3x + 2 = 0$  trong đó  $n$  là số tự nhiên lớn hơn 1.

1. Chứng minh rằng ứng với mỗi  $n$ , phương trình có đúng một nghiệm  $x_n \in (0;1)$ .
2. Gọi  $(x_n)$  với  $n = 2, 3, 4, \dots$  là dãy số có được theo cách xác định như trên. Chứng minh rằng dãy số này đơn điệu và bị chặn.

**Bài 22.** (TP HCM, vòng 2)

Cho dãy  $(u_n)$  được xác định bởi công thức

$$\begin{cases} u_1 = \frac{4}{5} \\ u_{n+1} = \frac{u_n^4}{u_n^4 - 8u_n^2 + 8} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tìm công thức tổng quát của dãy  $(u_n)$ .

**Bài 23.** (Tiền Giang, vòng 2)

Cho dãy số  $\{u_n\}$  xác định bởi  $u_0 > 0, u_{n+1} = \frac{2 + \sqrt{2u_n^2 + 4u_n + 4}}{u_n}, n = 1, 2, 3, \dots$

Chứng minh rằng dãy  $\{u_n\}$  có giới hạn và tìm giới hạn đó.

**Bài 24.** (Chọn đội tuyển Phổ thông năng khiếu TP. HCM)

Cho dãy  $(u_n)$  thỏa mãn điều kiện  $u_1 = \frac{1}{6}$  và  $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{3}u_n$  với mọi  $n$  nguyên dương.

Tính giới hạn sau  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5u_{n+1}^2 - 2u_n^2 u_{n+1} + 5u_n u_{n+1}}{3u_n^2 + u_n u_{n+1} (4 + u_n^2)}$ .

**Bài 25.** (Hà Tĩnh, vòng 2) Dãy số  $\{x_n\}$  với  $n = 1, 2, 3, \dots$  bị chặn trên và thỏa mãn điều kiện:

$$x_{n+2} \geq \frac{1}{4}x_{n+1} + \frac{3}{4}x_n \quad \text{với mọi } n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng dãy số trên có giới hạn.

**Bài 26.** (Ninh Bình, vòng 2)

Chứng minh dãy  $(u_n)$  xác định bởi công thức  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$  có giới hạn hữu hạn.

**Bài 27.** (Hà Nội, vòng 2)

Cho dãy số nguyên dương  $(U_n)$  thoả mãn  $U_1 = 1, U_2 = 2, U_4 = 5$  và với mọi  $n > 1$  thì

$$U_{n+1}U_{n-1} = U_n^2 + a \text{ với } a^2 = 1.$$

1) Xác định số hạng tổng quát của dãy số trên.

2) Tìm các số tự nhiên  $n$  không vượt quá 2012 sao cho  $U_n$  chia hết cho 10.

**Bài 28.** (KHTN, vòng 3)

Cho dãy số dương  $(a_n)$  thoả mãn  $a_1 = 1, a_2 = \frac{2}{3}, a_{n+2} < \frac{1}{4}a_{n+1}^2 + \frac{3}{4}a_n, n = 1, 2, 3, \dots$

Chứng minh rằng  $a_n$  hội tụ và tìm giới hạn của nó.

**Bài 29.** (Chọn đội tuyển ĐHSP Hà Nội)

Cho dãy số  $(a_n), n \geq 1$  thoả mãn:  $a_1 = 1, a_n = \frac{2n-3}{2n}a_{n-1}, n \geq 2$  và dãy  $(b_n)$  thoả mãn

$b_n = \sum_{i=1}^n a_i, n \geq 1$ . Chứng minh dãy  $(b_n)$  có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó.

**Bài 30.** (Đại học KHTN Hà Nội, vòng 1)

Cho dãy số  $\{a_n\}$  xác định như sau  $\begin{cases} a_1 = 6, a_2 = 14 \\ a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n - 24 \cdot (-1)^n, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$

Tính giới hạn  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ .

## B – LỜI GIẢI CHI TIẾT VÀ NHẬN XÉT

### Bài 1. (Quảng Bình, vòng 1)

Cho dãy số  $(u_n)$  xác định như sau  $u_1 = 1, \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + u_n^{2011}, n = 1, 2, 3, \dots$

Tính  $\lim \left( \frac{u_1^{2011}}{u_2} + \frac{u_2^{2011}}{u_3} + \dots + \frac{u_n^{2011}}{u_{n+1}} \right)$ .

#### Lời giải.

Từ công thức xác định dãy, ta có

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_{n+1}} + \frac{u_n^{2011}}{u_{n+1}} \Rightarrow \frac{u_n^{2011}}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Do đó } \frac{u_1^{2011}}{u_2} + \frac{u_2^{2011}}{u_3} + \dots + \frac{u_n^{2011}}{u_{n+1}} = \sum_{k=1}^n \frac{u_k^{2011}}{u_{k+1}} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}} \right) = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}}.$$

Dễ thấy rằng  $u_n > 0, \forall n$  nên ta cũng có:  $u_{n+1} = u_n + u_n^{2012} > u_n$  hay dãy đã cho tăng thực sự.

Giả sử dãy không có chặn trên thì nó sẽ có giới hạn, đặt đó là  $\ell$ , rõ ràng  $\ell > 1$ .

Chuyển công thức tổng quát của dãy về giới hạn, ta có  $\ell = \ell + \ell^{2012} \Leftrightarrow \ell = 0$ , mâu thuẫn.

Suy ra dãy đã cho không bị chặn trên hay  $\lim u_n = +\infty$ .

$$\text{Từ đó, ta được } \lim \left( \frac{u_1^{2011}}{u_2} + \frac{u_2^{2011}}{u_3} + \dots + \frac{u_n^{2011}}{u_{n+1}} \right) = \lim \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{u_n} \right) = 1.$$

#### Nhận xét.

Bài toán này thuộc dạng quen thuộc với ý tưởng rút gọn tổng dưới dạng sai phân để đưa giới hạn cần tính về giới hạn của dãy ban đầu. Đề bài ở đây rất thuận lợi vì công thức sai phân đã được thể hiện khá rõ, chỉ cần lập luận cẩn thận, đầy đủ ở các bước là có thể giải quyết trọn vẹn bài này.

### Bài 2. (Vĩnh Long, vòng 1)

$$\text{Cho dãy số } (u_n) \text{ xác định bởi } \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n^2 + u_n + 4), n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng  $(u_n)$  là dãy tăng nhưng không bị chặn trên.

b) Đặt  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + 3}, n = 1, 2, 3, \dots$ . Tính  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

**Lời giải.**

a) Dễ thấy với mọi  $n > 0$  thì các số hạng của dãy đều dương.

Ta có  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}(u_n^2 + u_n + 4) - u_n = \frac{1}{5}(u_n^2 - 4u_n + 4) = \frac{1}{5}(u_n - 2)^2 \geq 0$  nên dãy đã cho không giảm. Hơn nữa, từ  $u_1 = 3 > 2$  nên  $u_n > 2, \forall n$ . Từ đó  $u_{n+1} - u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n$  hay dãy đã cho đơn điệu tăng.

Giả sử dãy bị chặn trên thì nó phải có giới hạn, đặt là  $\ell \geq 3$ . Chuyển công thức của dãy qua giới hạn, ta được  $\ell = \frac{1}{5}(\ell^2 + \ell + 4) \Leftrightarrow \ell = 2$ , mâu thuẫn.

Từ đó suy ra dãy này không bị chặn trên. Ta có đpcm.

b) Giả sử ta có công thức  $\frac{1}{u_k + 3} = a \left( \frac{1}{u_k + b} - \frac{1}{u_{k+1} + b} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{u_k + 3} = a \frac{u_{k+1} - u_k}{(u_k + b)(u_{k+1} + b)}$

Quy đồng và biến đổi, ta được  $(3a - b)u_{n+1} + (a - 1)u_{n+1}u_n = au_n^2 + (3a + b)u_n + b^2$ .

Để tương ứng với công thức quan hệ xây dựng dãy, ta chọn  $a = 1$  thì được quan hệ đơn giản hơn là  $(3 - b)u_{n+1} = u_n^2 + (3 + b)u_n + b^2$ , chọn tiếp  $b = -2$  thì được công thức đã cho.

Như thế, ta có  $\frac{1}{u_k + 3} = \frac{1}{u_k - 2} - \frac{1}{u_{k+1} - 2}, \forall k$ . Suy ra

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + 3} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{u_k - 2} - \frac{1}{u_{k+1} - 2} \right) = \frac{1}{u_1 - 2} - \frac{1}{u_{n+1} - 2} = 1 - \frac{1}{u_{n+1} - 2}.$$

Do  $\lim u_n = +\infty$  nên  $\lim \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + 3} = \lim \left( 1 - \frac{1}{u_{n+1} - 2} \right) = 1$ . Vậy giới hạn cần tìm là 1.

**Nhận xét.** Trong bài toán này, ta đã dùng phương pháp hệ số bất định để thử tìm một quan hệ có dạng sai phân giữa các biểu thức liên quan nhằm rút tổng cần tính để tìm giới hạn.

**Bài 3.** (Chọn đội tuyển THPT chuyên Bến Tre) Tìm số hạng tổng quát của dãy  $\{u_n\}$  thỏa mãn:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{u_{n+1}u_n}{2u_{n+1} - u_n} \end{cases}$$



### Lời giải.

Bài này có thể đổi điều kiện của các số hạng đầu để không rơi vào trường hợp đặc biệt. Ta xét bài toán tổng quát hơn là:

Tìm số hạng tổng quát của dãy số  $\{u_n\}$  thỏa mãn:

$$\begin{cases} u_1 = a, u_2 = b, 2a - b \neq 0 \\ u_{n+2} = \frac{u_{n+1}u_n}{2u_{n+1} - u_n}, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Từ công thức xác định dãy, ta có  $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2u_{n+1} - u_n}{u_{n+1}u_n} = \frac{2}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}$ . Đặt  $y_n = \frac{1}{u_n}, n = 1, 2, 3, \dots$

Ta có  $y_{n+1} = 2y_n - y_{n+1}, \forall n$ . Xét phương trình đặc trưng  $t^2 = 2 - t \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = -2$ .

Công thức tổng quát của dãy có dạng:  $y_n = r \cdot (-2)^n + s, n = 1, 2, 3, \dots$

So sánh với hai số hạng đầu của dãy, ta có: 
$$\begin{cases} -2r + s = \frac{1}{a} \\ 4r + s = \frac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{a-b}{6ab} \\ s = \frac{a+2b}{3ab} \end{cases}$$

Từ đây thay vào suy ra công thức tổng quát của dãy ban đầu là

$$x_n = \frac{1}{\frac{a-b}{6ab}(-2)^n + \frac{a+2b}{3ab}} = \frac{6ab}{(a-b)(-2)^n + 2(a+2b)}, \forall n$$

Trong bài toán ban đầu, nếu thay  $a = b = 1$ , ta có công thức tổng quát của dãy là  $x_n = 1, \forall n$ .

### Nhận xét.

Trong bài toán trên, ta không nhắc đến điều kiện của  $a, b$  để dãy xác định với mọi  $n$ .

Điều kiện đó chính là  $2x_{n+1} - x_n \neq 0, \forall n$  hay

$$\frac{12ab}{(a-b)(-2)^{n+1} + 2(a+2b)} - \frac{6ab}{(a-b)(-2)^n + 2(a+2b)} \neq 0, \forall n$$

Ngoài điều kiện  $ab \neq 0$  suy ra từ đó, ta còn cần có  $(a-b)(-2)^n + 2(a+2b) \neq 0, \forall n$  và

$$2(a-b)(-2)^n + 4(a+2b) - (a-b)(-2)^{n+1} - 2(a+2b) = 4a(-2)^n + 2a + 4b \neq 0$$

Đây chính là hai điều kiện của các số hạng đầu để dãy đã cho luôn xác định.

Ngoài ra, còn một bài toán có giả thiết tương tự như trên nhưng yêu cầu khác:

Cho dãy số  $(x_n)$  thỏa mãn  $x_{n+2} = \frac{x_n x_{n+1}}{2x_n - x_{n+1}}, n \in \mathbb{N}^*$ . Tìm điều kiện của  $x_1, x_2$  để dãy số trên có vô hạn số nguyên.

**Lời giải.**

Đặt  $x_1 = a, x_2 = b, ab \neq 0$ . Trước hết, dãy đã cho phải có tất cả các số hạng khác 0.

Ta có  $\frac{1}{x_{n+2}} = \frac{2}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}, n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n, n \in \mathbb{N}^*$  với  $y_n = \frac{1}{x_n}, n \geq 1$ .

Phương trình đặc trưng của dãy này có nghiệm kép  $t = 1$  nên công thức tổng quát của nó có dạng  $y_n = rn + s$  với  $r, s$  được xác định theo  $y_1 = \frac{1}{a}, y_2 = \frac{1}{b}$ .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} r + s = \frac{1}{a} \\ 2r + s = \frac{1}{b} \end{cases} \Rightarrow r = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}, s = \frac{2}{a} - \frac{1}{b}$$

$$\text{Do đó } y_n = \left(\frac{a-b}{ab}\right)n + \frac{2b-a}{ab} \Rightarrow x_n = \frac{ab}{(a-b)n + (2a-a)}$$

Ta thấy  $a, b$  nhận những giá trị không đổi và muốn dãy đã cho có vô số số nguyên thì cần phải

$[(a-b)n + (2b-a)] \mid ab$  với vô số  $n$ . Dễ thấy cần có hệ số trước  $n$  phải bằng 0 và  $a = b$ .

Khi đó  $x_n = a$  nguyên khác 0. Thử lại thấy thỏa.

Vậy điều kiện để dãy có vô số số nguyên là  $a = b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

**Bài 4.** (Bình Định, vòng 1)

Cho dãy số  $(u_n)$  được xác định bởi  $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ u_{n+1} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})u_n^2 + (2\sqrt{6} - 5)u_n + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} \end{cases}$

Đặt  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + \sqrt{2}}, n = 1, 2, 3, \dots$  Tìm  $\lim v_n$ .

### Lời giải.

Từ công thức xác định dãy, ta thấy rằng

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= (\sqrt{3} - \sqrt{2})u_n^2 + (2\sqrt{6} - 5)u_n + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow u_{n+1} - \sqrt{3} &= (\sqrt{3} - \sqrt{2})u_n^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})u_n + \sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \\ \Leftrightarrow u_{n+1} - \sqrt{3} &= (\sqrt{3} - \sqrt{2})(u_n^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})u_n - \sqrt{6}) \\ \Leftrightarrow u_{n+1} - \sqrt{3} &= (\sqrt{3} - \sqrt{2})(u_n + \sqrt{2})(u_n - \sqrt{3}) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1} - \sqrt{3}} &= \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(u_n + \sqrt{2})(u_n - \sqrt{3})} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1} - \sqrt{3}} &= \frac{1}{u_n - \sqrt{3}} - \frac{1}{u_n + \sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{u_n + \sqrt{2}} = \frac{1}{u_n - \sqrt{3}} - \frac{1}{u_{n+1} - \sqrt{3}}\end{aligned}$$

Do đó,  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + \sqrt{2}} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{u_k - \sqrt{3}} - \frac{1}{u_{k+1} - \sqrt{3}} \right) = \frac{1}{u_1 - \sqrt{3}} - \frac{1}{u_{n+1} - \sqrt{3}}$ .

Từ đẳng thức  $u_{n+1} - \sqrt{3} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(u_n + \sqrt{2})(u_n - \sqrt{3})$  và  $u_1 = \sqrt{3} + \sqrt{2} > \sqrt{3}$ , bằng quy nạp, ta chứng minh được  $u_n > \sqrt{3}, \forall n$ .

Từ đẳng thức  $\frac{1}{u_n + \sqrt{2}} = \frac{1}{u_n - \sqrt{3}} - \frac{1}{u_{n+1} - \sqrt{3}} > 0$  (\*), ta cũng có được  $u_n < u_{n+1}, \forall n$  hay dãy đã cho tăng thực sự.

Giả sử dãy đã cho bị chặn trên thì nó có giới hạn, đặt là  $\ell > \sqrt{3} + \sqrt{2}$ .

Chuyển đẳng thức (\*) qua giới hạn, ta được  $\frac{1}{\ell + \sqrt{2}} = \frac{1}{\ell - \sqrt{3}} - \frac{1}{\ell - \sqrt{3}} = 0$ , vô lí.

Từ đó suy ra dãy này không bị chặn trên hay  $\lim u_n = +\infty$ .

Do đó,  $\lim v_n = \lim \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + \sqrt{2}} = \lim \left( \frac{1}{u_1 - \sqrt{3}} - \frac{1}{u_{n+1} - \sqrt{3}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Vậy giới hạn cần tìm là  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

### Nhận xét.

Tương tự bài đầu tiên, ở bài toán này, ta cũng cần tìm được công thức liên hệ ở dạng thuận lợi cho việc rút gọn tổng. Tuy biến đổi ở trên khá rắc rối nhưng mục tiêu vẫn là tìm một biểu thức có dạng như sau

$$\frac{1}{u_n + \sqrt{2}} = a \left( \frac{1}{u_n + b} - \frac{1}{u_{n+1} + b} \right)$$

Ta có thể biến đổi rồi đồng nhất hệ số, để tránh các căn thức rắc rối, ta có thể tổng quát nó thành  $\sqrt{2} = x, \sqrt{3} = y$  rồi xử lí cho đơn giản hơn.

Một đặc điểm khá thú vị của bài toán này chính là việc chứng minh các số hạng của dãy dương và dãy đơn điệu tăng không suy ra trực tiếp được từ công thức ban đầu mà phải thông qua các biến đổi trong quá trình tính toán. Trên thực tế, các dãy số dạng này nói chung luôn có giới hạn tại vô cực (vì nếu nó có giới hạn là  $l$  thì chuyển qua giới hạn trong công thức sai phân, thường thì ta sẽ thu được mâu thuẫn) nên các quá trình lập luận ở trên có thể nói là thông nhất cho các dạng tương tự của nó. Một bài tương tự trong kì thi VMO 2009:

#### 1) VMO 2009:

Cho dãy số  $(x_n)$  xác định như sau 
$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}, \\ x_n = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1} + x_{n-1}}}{2}, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số  $(y_n)$  trong đó  $y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}, \forall n$  có giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow +\infty$ .

#### 2) VMO 2011:

Cho dãy số  $(x_n)$  xác định bởi  $x_1 = 1, x_n = \frac{2n}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-1} x_i, n \geq 2$ .

Đặt  $y_n = x_{n+1} - x_n, n = 1, 2, 3, \dots$

Chứng minh dãy  $(y_n)$  có giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow +\infty$ .

#### Bài 5. (Bình Dương, vòng 2)

Cho dãy số  $(x_n)$  được xác định như sau  $x_n = \frac{1}{2} \left( x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right), n \geq 2$  và  $a > 0, x_1 > 0$ .

Chứng minh rằng dãy đã cho có giới hạn và tìm giới hạn của dãy.

#### Lời giải.

Giả sử dãy đã cho có giới hạn, đặt đó là  $\ell > 0$  thì ta có  $\ell = \frac{1}{2} \left( \ell + \frac{a}{\ell} \right) \Leftrightarrow \ell = \sqrt{a}$ .

Ta xét biến đổi sau

$$\begin{aligned} 2(x_n - \sqrt{a}) &= x_{n-1} - \sqrt{a} + \frac{a}{x_{n-1}} - \sqrt{a} = (x_{n-1} - \sqrt{a}) - \frac{\sqrt{a}(x_{n-1} - \sqrt{a})}{x_{n-1}} \\ &= (x_{n-1} - \sqrt{a}) \left( 1 - \frac{\sqrt{a}}{x_{n-1}} \right) = \frac{(x_{n-1} - \sqrt{a})^2}{x_{n-1}} \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó suy ra } x_n - a = \frac{x_{n-1} - \sqrt{a}}{2x_{n-1}} (x_{n-1} - \sqrt{a}) \Rightarrow |x_n - a| = \left| \frac{x_{n-1} - \sqrt{a}}{2x_{n-1}} \right| |x_{n-1} - \sqrt{a}| < \frac{1}{2} |x_{n-1} - \sqrt{a}|.$$

(do  $x_{n-1} - \sqrt{a} < x_{n-1}$ )

$$\text{Lặp lại quá trình này } n-1 \text{ lần, ta được } |x_n - \sqrt{a}| < \frac{1}{2^{n-1}} |x_1 - \sqrt{a}|.$$

Cho  $n$  tiến tới vô cực, theo nguyên lí kẹp, ta có  $\lim |x_n - \sqrt{a}| = 0 \Leftrightarrow \lim x_n = \sqrt{a}$ .

Vậy giới hạn của dãy đã cho là  $\sqrt{a}$  và không phụ thuộc vào giá trị của  $x_1$ .

### Nhận xét.

Bài này có thể giải bằng cách sử dụng hàm số  $f(t)$  liên hệ giữa các số hạng  $x_n, x_{n-1}$  hoặc dùng định lí Lagrange. Tuy nhiên, cách đó cần xem xét một số trường hợp nữa và đòi hỏi lập luận thêm một số trường hợp nữa. Cách giải như trên là đơn giản và nhẹ nhàng hơn cả. Cách tìm ra giá trị  $\ell = \sqrt{a}$  cũng rất tự nhiên từ việc giải phương trình sau khi chuyển qua giới hạn.

### Bài 6. (Chọn đội tuyển THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai)

Cho hai số thực  $a$  và  $b$ . Xét dãy số  $\{x_n\}$  xác định bởi công thức 
$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = 1 + b \cdot x_n; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Tìm điều kiện của  $a, b$  để  $\{x_n\}$  có giới hạn. Tính giới hạn đó.

### Lời giải.

Xét trường hợp  $b = 1$ , ta thấy rằng khi đó  $x_{n+1} = 1 + x_n$  nên  $x_n = n + a$ , dãy trong trường hợp này không có giới hạn.

Xét trường hợp  $b = -1$ , khi đó  $x_{n+1} + x_n = 1$  nên dãy cũng không có giới hạn.

Xét trường hợp  $b \neq \pm 1$ , ta có  $x_{n+1} = 1 + bx_n \Leftrightarrow x_{n+1} - \frac{1}{1-b} = bx_n - \frac{b}{1-b} = b \left( x_n - \frac{1}{1-b} \right)$ .

Suy ra  $x_n - \frac{1}{1-b} = b^n \left( x_0 - \frac{1}{1-b} \right) = b^n \frac{a-ab-1}{1-b} \Leftrightarrow x_n = b^n \frac{a-ab-1}{1-b} + \frac{1}{1-b}, \forall n$ .

Để thấy rằng nếu  $|b| < 1$  thì  $\lim b^n = 0$  và giới hạn của dãy này là  $\lim x_n = \frac{1}{1-b}$ .

Nếu  $|b| > 1$  thì nếu  $\frac{a-ab-1}{1-b} = 0 \Leftrightarrow a = ab + 1$  thì dãy đã cho không đổi, còn nếu ngược lại thì dãy này tiến tới vô cực, tức là nó không có giới hạn hữu hạn.

Vậy dãy đã cho hội tụ khi và chỉ khi  $|b| < 1$  hoặc  $b \neq 1, a = \frac{1}{1-b}$ .

### Nhận xét.

Dãy số xác định như trên thay vì biến đổi từng bước như trên, ta hoàn toàn có thể dùng công thức tổng quát cho dãy truy hồi tuyến tính cấp 1 để xử lí. Các điều kiện về giới hạn của dãy cũng dễ dàng suy ra được từ các kết quả đó.

### Bài 7. (Hà Nam, vòng 2)

Cho dãy số thực  $(x_n)$  thỏa mãn:  $x_1 = \frac{1}{6}, x_{n+1} = \frac{3x_n}{2x_n + 1}$  với mọi  $n$  nguyên dương.

a. Chứng minh dãy số trên có giới hạn và tính giới hạn đó.

b. Tìm số hạng tổng quát của dãy số trên.

### Lời giải.

a. Dễ dàng thấy rằng  $x_n > 0, \forall n$ .

Xét hàm số  $f(t) = \frac{3t}{2t+1}, t > 0 \Rightarrow f'(t) = \frac{3}{(2t+1)^2} > 0$  nên đây là hàm đồng biến.

Dãy số đã cho có thể viết dưới dạng 
$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{6} \\ x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Do  $x_2 = \frac{3}{8} > x_1$  nên  $x_3 = f(x_2) > f(x_1) = x_2$  nên bằng quy nạp, ta chứng minh được dãy này tăng, đồng thời  $x_{n+1} - \frac{3}{2} = \frac{3x_n}{2x_n+1} - \frac{3}{2} = \frac{-3}{2x_n+1} < 0$  nên  $x_{n+1} < \frac{3}{2}, \forall n$ .

Dãy này tăng và bị chặn trên nên có giới hạn, đặt là  $l$  thì  $l = \frac{3l}{2l+1} \Leftrightarrow 2l^2 = 2l \Leftrightarrow l = 0 \vee l = 1$ .

Tuy nhiên, do  $l > \frac{1}{6}$  nên  $l = 1$  và đây chính là giới hạn cần tìm.

b. Do mọi số hạng của dãy đều dương nên ta có thể biến đổi như sau:

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{2x_n+1}{3x_n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3x_n}, \forall n \Rightarrow 3y_{n+1} = 2 + y_n, \forall n \text{ trong đó } y_n = \frac{1}{x_n}, \forall n.$$

Với  $y_1 = \frac{1}{x_1} = 6$ , ta tiếp tục biến đổi  $3(y_{n+1}-1) = y_n - 1 \Leftrightarrow y_{n+1} - 1 = \frac{1}{3}(y_n - 1) = \frac{1}{3^n}(y_1 - 1)$ .

Suy ra  $y_{n+1} = \frac{5}{3^n} + 1$  hay  $x_n = \frac{3^{n-1}}{5 + 3^{n-1}}, n = 1, 2, 3, \dots$  Đây chính là công thức tổng quát cần tìm.

### Nhận xét.

Về mặt tìm giới hạn thì dãy số ra trong trường hợp khá chuẩn mực nên có thể tìm được dễ dàng, ta cũng có thể nhầm trước rồi trừ vào công thức xác định để đưa về dãy kẹp. Ở bài toán xác định công thức tổng quát, thực ra đây là trường hợp đặc biệt của dãy phân tuyến tính  $u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$ .

Dãy số dạng này được xử lý bằng cách đưa về hệ hai dãy tuyến tính là  $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n \end{cases}$ .

Tuy nhiên, bài toán ở đây đưa ra ở dạng tương đối đặc biệt nên có thể dùng các biến đổi thông thường để giải quyết.

### Bài 8. (Hà Nội, vòng 1)

1. Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi:  $u_1 = 1$  và  $u_{n+1} = u_n + n$  với mọi  $n \geq 1$ . Tìm  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}}$ .

2. Cho dãy số  $(v_n)$  xác định bởi:  $v_1 = \sqrt{2015}$  và  $v_{n+1} = v_n^2 - 2$  với mọi  $n = 1, 2, 3, \dots$

Chứng minh rằng  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_{n+1}^2}{v_1^2 \cdot v_2^2 \cdot \dots \cdot v_n^2} = 2011$ .

**Lời giải.**

1. Từ công thức xác định dãy, ta có  $\sum_{i=1}^n u_{i+1} = \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{i=1}^n i \Leftrightarrow u_{n+1} = u_1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}$ .

$$\text{Suy ra } u_n = \frac{(n-1)^2 + (n-1) + 2}{2} = \frac{n^2 - n + 2}{2}.$$

$$\text{Do đó, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - n + 2}{n^2 + n + 2} = 1.$$

Vậy giới hạn cần tìm là 1.

2. Vì  $v_1 = \sqrt{2015} > 2$  nên ta có thể đặt  $v_1 = a + \frac{1}{a}, a > 1$ . Ta có

$$v_2 = v_1^2 - 2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = a^2 + \frac{1}{a^2}$$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng  $v_{n+1} = a^{2^n} + \frac{1}{a^{2^n}}, \forall n$ . Ta xét tích

$$\prod_{i=1}^n v_i = \prod_{i=1}^n \left(a^{2^{i-1}} + \frac{1}{a^{2^{i-1}}}\right) = \left(a - \frac{1}{a}\right)^{-1} \left[ \left(a - \frac{1}{a}\right) \prod_{i=1}^n \left(a^{2^{i-1}} + \frac{1}{a^{2^{i-1}}}\right) \right] = \left(a - \frac{1}{a}\right)^{-1} \left(a^{2^n} - \frac{1}{a^{2^n}}\right).$$

$$\text{Do đó, } \frac{v_{n+1}^2}{v_1^2 \cdot v_2^2 \cdot \dots \cdot v_n^2} = \frac{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 \left(a^{2^n} + \frac{1}{a^{2^n}}\right)^2}{\left(a^{2^n} - \frac{1}{a^{2^n}}\right)^2}, \text{ suy ra } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_{n+1}^2}{v_1^2 \cdot v_2^2 \cdot \dots \cdot v_n^2} = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 4 = 2011.$$

Vậy ta có đpcm.

**Nhận xét.**

Câu 2 của bài toán trên đã từng xuất hiện từ trước khá nhiều, chẳng hạn trong đề Olympic Sinh viên 2005 (số 2011 ở trên được thay bằng 2005) hoặc trên tạp chí THPT. Trên thực tế, giá trị 2011 có thể thay bằng một đại lượng  $a$  bất kì thỏa mãn  $a > 2$  bởi vì dãy số có dạng như trên là một trong các dạng đặc biệt của các dãy phi tuyến tính có thể tìm được công thức tổng quát được.

Tuy việc tìm giới hạn cũng có thể giải theo nhiều cách khác nhưng cách dùng công thức thế này cho ta nhiều biến đổi đẹp và cơ bản.

**Bài 9.** (Long An, vòng 2)

$$\text{Cho dãy số xác định bởi } \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 1}, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Đặt  $x_n = u_{2n-1}, y_n = u_{2n}, n \in \mathbb{N}$ .



- a) Chứng minh dãy  $(x_n), (y_n)$  có giới hạn hữu hạn.  
 b) Chứng minh  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó

**Lời giải.**

a) Dễ thấy rằng  $u_n > 0, \forall n$ . Xét hàm số  $f(x) = \frac{3x+4}{x+1}, x > 0$ .

Ta có  $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0, \forall x > 0$  nên đây là hàm nghịch biến. Do đó, suy ra  $g(x) = f(f(x))$  là hàm đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .

Các dãy số đã cho có thể viết lại là

$$u_1 = 1, u_{n+1} = f(u_n), n \geq 1, \quad x_1 = 1, x_{n+1} = g(x_n), n \geq 1 \quad \text{và} \quad y_1 = \frac{7}{2}, y_{n+1} = g(y_n), n \geq 1$$

Ta có  $u_2 = \frac{7}{2}, u_3 = \frac{29}{9} > u_1, u_4 = \frac{123}{38} < u_2$  nên dựa vào tính đồng biến của hàm  $g(x)$ , ta có thể chứng minh được rằng  $(x_n)$  đồng biến và  $(y_n)$  nghịch biến.

Ta thấy rằng  $u_{n+1} - 4 = \frac{3u_n + 4}{u_n + 1} - 4 = \frac{-u_n}{u_n + 1} < 0$  nên dãy này bị chặn trên bởi 4 hay dãy  $(x_n)$  cũng bị chặn trên bởi 4. Suy ra dãy  $(x_n)$  có giới hạn hữu hạn.

Tương tự, dãy  $(y_n)$  giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên cũng có giới hạn.

Ta có đpcm.

b) Giả sử  $\lim x_n = a, \lim y_n = b$  thì do  $\begin{cases} x_{2n+1} = f(x_{2n}) \\ x_{2n+2} = f(x_{2n+1}) \end{cases}$  nên chuyển về giới hạn, ta có hệ

$$\text{phương trình sau } \begin{cases} a = f(b) \\ b = f(a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3b+4}{b+1} \\ b = \frac{3a+4}{a+1} \end{cases} \Rightarrow a-b = \frac{3b+4}{b+1} - \frac{3a+4}{a+1} = \frac{a-b}{(a+1)(b+1)}.$$

Dễ thấy ngoài hệ thức  $a = b$  được suy ra từ hệ trên, không còn quan hệ nào nữa bởi vì  $(a+1)(b+1) = 1$  là vô nghiệm do  $a, b > 0$ .

Với  $a = b$ , ta có  $a = \frac{3a+4}{a+1} \Leftrightarrow a^2 + a = 3a + 4 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 1 + \sqrt{5}$  do  $a > 0$ .

Do đó, hai dãy con  $(x_n), (y_n)$  của dãy  $(u_n)$  cùng hội tụ về một điểm nên dãy đã cho cũng hội tụ và giới hạn cần tìm là  $\lim u_n = 1 + \sqrt{5}$ .

### Nhận xét.

Bài toán thực ra có thể yêu cầu trực tiếp giới hạn của dãy nhưng dùng thêm hai dãy con như trên là một gợi ý để việc lập luận có thể dễ dàng hơn cho các bạn mới tiếp xúc với dạng toán tìm giới hạn thế này.

### Bài 10. (Phú Thọ, vòng 1)

Cho dãy số  $u_1 = 4, u_{n+1} = \frac{1}{9}(u_n + 4 + 4\sqrt{1+2u_n}), n = 1, 2, 3, \dots$

Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số trên.

### Lời giải.

Từ giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} 9u_{n+1} &= u_n + 4 + 4\sqrt{1+2u_n} \Leftrightarrow 18u_{n+1} = 2u_n + 8 + 8\sqrt{1+2u_n} \\ \Leftrightarrow 18u_{n+1} + 9 &= (2u_n + 1) + 16 + 8\sqrt{1+2u_n} \\ \Leftrightarrow 9(2u_{n+1} + 1) &= (\sqrt{2u_n + 1} + 4)^2 \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{2u_{n+1} + 1} &= \sqrt{2u_n + 1} + 4, n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Đặt  $\sqrt{2u_n + 1} = v_n, \forall n \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n^2 - 1}{2}$  thì ta có dãy mới tương ứng là

$$\begin{cases} v_1 = 3 \\ 3v_{n+1} = v_n + 4, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Từ công thức xác định dãy này, ta có  $3v_{n+1} - 6 = v_n - 2 \Leftrightarrow v_{n+1} - 2 = \frac{1}{3}(v_n - 2), n = 1, 2, 3, \dots$

Suy ra  $v_n = \frac{1}{3^{n-1}} + 2$ , do đó:  $u_n = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{1}{3^{n-1}} + 2 \right)^2 - 1 \right), n = 1, 2, 3, \dots$

Đây là công thức tổng quát cần tìm.

**Bài 11.** (Nam Định, vòng 1)

Xét dãy số  $(u_n)$  thỏa mãn  $u_1 = 1, u_{n+1} = u_n(u_n - 1) + 2, n \geq 1$ .

Chứng minh rằng  $A_n = \prod_{k=1}^n (u_k^2 + 1) - 1$  là số chính phương với mọi  $n$ .

**Lời giải.**

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng  $A_n = \prod_{k=1}^n (u_k^2 + 1) - 1 = (u_{n+1} - 1)^2, \forall n$ .

Thật vậy,

- Với  $n = 1$ , ta tính được  $u_2 = 1$  nên ta có  $A_1 = (u_1^2 + 1) - 1 = (u_2 - 1)^2 = (2 - 1)^2$ , đúng.

- Giả sử khẳng định đúng với  $n = m \geq 1$ , tức là  $A_m = \prod_{k=1}^m (u_k^2 + 1) - 1 = (u_{m+1} - 1)^2$ .

Ta có  $A_{m+1} = \prod_{k=1}^{m+1} (u_k^2 + 1) - 1 = \left[ \prod_{k=1}^m (u_k^2 + 1) \right] (u_{m+1}^2 + 1) - 1 = (A_m + 1)(u_{m+1}^2 + 1) - 1$ .

Do đó  $A_{m+1} = (A_m + 1)(u_{m+1}^2 + 1) - 1 = [(u_{m+1} - 1)^2 + 1](u_{m+1}^2 + 1) - 1 = (u_{m+1}^2 - u_m + 1)^2 = u_{m+2}^2$ .

Suy ra khẳng định cũng đúng với  $n = m + 1$  nên theo nguyên lí quy nạp thì nó đúng với mọi  $n$ .

Vậy  $A_n = \prod_{k=1}^n (u_k^2 + 1) - 1$  là số chính phương với mọi  $n$ . Ta có đpcm.

**Nhận xét.**

Dãy số đã cho không thể tìm được công thức tổng quát nên ta cần phải thông qua các số hạng cụ thể để có thể dự đoán và chứng minh được quy nạp như thế.

Thật vậy, ta có thể tính được các số hạng của dãy là :

$$u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 4, u_4 = 14, u_5 = 184, u_6 = 33674, \dots$$

Tương ứng, ta cũng có  $A_1 = 1^2, A_2 = 3^2, A_3 = 13^2, A_4 = 183^2$ .

Từ đây dễ dàng dự đoán được điều cần chứng minh ở đây, nhiều bài toán về dãy số nguyên khác cũng được dự đoán và giải theo cách này.

**Bài 12.** (Cần Thơ, vòng 2)

Cho dãy số  $\{x_n\}$  được xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = \frac{2011}{3} \ln(x_n^2 + 2011^2) - 2011^2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số  $\{x_n\}$  có giới hạn.

**Lời giải.**

Xét hàm số tương ứng  $f(x) = \frac{2011}{3} \ln(x^2 + 2011^2) - 2011^2, x \in \mathbb{R}$ .

Dãy số đã cho chính là  $\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$

Ta có  $f'(x) = \frac{2011}{3} \cdot \frac{2x}{x^2 + 2011^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2011x}{x^2 + 2011^2} \leq \frac{1}{3}$ .

Xét hàm số  $g(x) = f(x) - x \Rightarrow g'(x) = f'(x) - 1 < 0$  nên phương trình  $g(x) = 0$  có không quá một nghiệm. Ta lại có  $g(0) = f(0) = \frac{2011}{3} \ln 2011^2 - 2011^2 < 0$  và  $g(-2011^2) > 0$  nên phương trình  $g(x) = 0$  có ít nhất một nghiệm do đây là hàm liên tục.

Từ đây suy ra phương trình  $g(x) = 0$  có đúng một nghiệm thực.

Gọi  $a$  là nghiệm của phương trình  $g(x) = 0 \Rightarrow f(a) = a$ .

Áp dụng dụng định lý Lagrange cho  $x, y$  thuộc  $\mathbb{R}$ , do hàm  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  nên tồn tại  $z \in (x, y)$  sao cho:  $f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$ , mà  $f'(z) \leq \frac{1}{3}, \forall z$  nên suy ra

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{3} |x - y| \text{ với mọi } x, y \text{ thuộc } \mathbb{R}.$$

Ta có  $|x_{n+1} - a| = |f(x_n) - f(a)| \leq \frac{1}{3} |x_n - a| \leq \dots \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |x_1 - a|$ .

Để thấy rằng  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left(\frac{1}{3}\right)^n |x_1 - a| \right] = 0$  nên theo nguyên lý kẹp, ta có  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n - a| = 0$ .

Vậy dãy đã có giới hạn hữu hạn. Ta có đpcm.

### Nhận xét.

Bài toán này được xây dựng trên nguyên lí ánh xạ co với dãy số có công thức truy hồi dạng  $x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, 3, \dots$  và  $f(x)$  là hàm khả vi thỏa mãn  $|f(x)| \leq q < 1$  với  $q$  là một số thực dương nào đấy. Bài toán này được giải theo ý tưởng như trên và nói chung hầu như các bài có giả thiết thỏa mãn yêu cầu đó đều chứng minh được tồn tại giới hạn theo cùng một cách.

Một bài toán có nội dung tương tự xuất hiện trong đề dự bị VMO 2008 là :

Cho số thực  $a$  và dãy số thực  $\{x_n\}$  xác định bởi:

$$x_1 = a, x_{n+1} = \ln(3 + \cos x_n + \sin x_n) - 2008 \text{ với mọi } n = 0, 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng dãy số  $\{x_n\}$  có giới hạn hữu hạn khi  $n$  tiến đến dương vô cùng.

### Bài 13. (Quảng Ninh, vòng 2)

Cho dãy  $(x_n)$  xác định bởi  $x_0 = a$  với  $a \in [1; \sqrt{2})$  và  $x_{n+1} = (\sqrt{2})^{x_n}, n = 0, 1, 2, \dots$

Chứng minh dãy có giới hạn và tìm giới hạn đó.

### Lời giải.

Đặt  $f(x) = (\sqrt{2})^x$  thì dãy số có dạng  $x_0 = \sqrt{2}$  và  $x_{n+1} = f(x_n)$ .

Ta thấy  $f(x)$  là hàm số tăng và  $x_1 = (\sqrt{2})^{x_0} > (\sqrt{2})^1 = \sqrt{2} > x_0$ .

Từ đó, do  $f(x)$  là hàm số tăng nên ta có  $x_2 = f(x_1) > f(x_0) = x_1, x_3 = f(x_2) > f(x_1) = x_2, \dots$

Suy ra  $\{x_n\}$  là dãy số tăng. Tiếp theo, ta chứng minh bằng quy nạp rằng  $x_n < 2$  với mọi  $n$ .

Thật vậy, điều này đúng với  $n = 0$ .

Giả sử ta đã có  $x_k < 2$  thì rõ ràng  $x_{k+1} = (\sqrt{2})^{x_k} < (\sqrt{2})^2 = 2$ .

Theo nguyên lý quy nạp, ta có  $x_n < 2$  với mọi  $n$ .

Do đó, dãy  $\{x_n\}$  tăng và bị chặn trên bởi 2 nên dãy có giới hạn hữu hạn.

Gọi  $a$  là giới hạn đó thì chuyển đẳng thức truy hồi  $x_{n+1} = (\sqrt{2})^{x_n}$  sang giới hạn, ta được

$a = (\sqrt{2})^a$ . Ngoài ra ta cũng có  $a \leq 2$ .

Xét phương trình  $x = (\sqrt{2})^x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \ln(\sqrt{2})$ . Khảo sát hàm số  $y = \frac{\ln x}{x}$  ta thấy rằng phương trình trên chỉ có 1 nghiệm bé hơn  $e$  và một nghiệm lớn hơn  $e$ .

Vì 2 là một nghiệm của phương trình nên rõ ràng chỉ có một nghiệm duy nhất của phương trình thoả mãn điều kiện không vượt quá 2. Từ đó suy ra  $a = 2$ .

Vậy giới hạn của  $\{x_n\}$  khi  $n$  dần đến vô cùng là 2.

### Nhận xét.

Các dãy số có hàm số tương ứng dạng  $f(x) = a^x, a > 0$  cũng xuất hiện khá nhiều. Trong bài toán trên, chúng ta có thể tìm được các giá trị của  $x_0$  để dãy đã cho có giới hạn.

Trường hợp  $f(x)$  là hàm đơn điệu giảm, dễ dàng thấy rằng  $f(f(x))$  là hàm đơn điệu tăng. Khi đó, dựa theo kết quả phần trên thì từ việc so sánh  $f(f(x))$  với  $x$ , ta sẽ xác định được tính tăng giảm của hai dãy con  $\{x_{2n}\}$  và  $\{x_{2n+1}\}$ .

Hai dãy này đơn điệu ngược chiều nhau vì  $x_{2n} = f(x_{2n-1}), x_{2n+1} = f(x_{2n}), \dots$ . Trong một số trường hợp, hàm số đã cho không đơn điệu trên cả tập xác định mà chỉ đơn điệu trên miền giá trị mà các số hạng của dãy nhận được. Ta cần xác định miền đó càng hẹp càng tốt để trên đó, hàm số đã cho đơn điệu và áp dụng phương pháp đánh giá này trên dãy số đã cho. Tuy nhiên, thay vì dùng cách xét dãy con như thế, ta có thể thay thế bằng cách dùng định lí Lagrange để giúp đơn giản hóa các bước lập luận và các bước giải sẽ nhẹ nhàng hơn.

### Bài 14. (Vĩnh Phúc, vòng 1)

Giả sử  $a$  là số thực dương thỏa  $0 < a < 1$ . Lập dãy  $(a_n)$  như sau  $a_1 = a, a_{n+1} = a^{a_n}, n \geq 1$ . Chứng minh rằng dãy có giới hạn hữu hạn khi  $n$  tiến tới vô cực.

### Lời giải.

Ta thấy rằng  $0 < a_n < 1, \forall n$ .

Xét hàm số  $f(x) = a^x, x \in (0; 1)$  là hàm liên tục trên  $(0; 1)$  với  $f'(x) = a^x \ln a < 0$  nên là hàm nghịch biến.

Dãy số đã cho có thể viết lại là  $a_1 = a, a_{n+1} = f(a_n), n = 1, 2, 3, \dots$

Ta có  $|f'(x)| = |a^x \ln a| < |a \ln a| = a |\ln a| = a \ln \frac{1}{a} = a \ln \left(1 + \frac{1}{a} - 1\right)$ .

Theo bất đẳng thức quen thuộc là  $\ln(t+1) \leq t, \forall t > 0$ , ta được  $|f'(x)| < a\left(\frac{1}{a} - 1\right) = 1 - a < 1$ .

Sử dụng định lý Lagrange cho hàm  $f(x)$  trên miền  $[a; b], 0 < a < b$ , ta thấy rằng tồn tại số thực  $c \in (a; b)$  sao cho

$$|f(x) - f(y)| = f'(c)|x - y| < (1 - a)|x - y|.$$

Xét phương trình  $a^x = x$  tương ứng với hàm số  $g(x) = a^x - x$ .

Dễ thấy hàm này có  $g'(x) = a^x \ln a - 1 < 0$  nên nghịch biến và  $g(0) = 1 > 0, g(1) = a - 1 < 0$  nên theo tính chất hàm liên tục thì tồn tại  $x_0$  sao cho  $g(x_0) = 0$  hay phương trình  $a^x = x$  có nghiệm duy nhất trên miền  $(0; 1)$  là  $x = x_0$ . Suy ra  $f(x_0) = x_0$ .

Từ đó, ta có  $|f(a_n) - f(x_0)| < (1 - a)|a_n - x_0| \Leftrightarrow |a_{n+1} - x_0| < (1 - a)|a_n - x_0|$ .

Áp dụng nhiều lần đẳng thức này, ta được  $|a_n - x_0| < (1 - a)^n |a_1 - x_0|$ .

Từ đó, theo nguyên lý kẹp thì dãy này hội tụ và giới hạn của dãy là nghiệm  $x = x_0$  duy nhất của phương trình  $x = a^x$ .

### Nhận xét.

Như vậy các dãy số có dạng  $x_{n+1} = f(x_n)$  và hàm  $f(x)$  đơn điệu gần như đã được giải quyết hoàn toàn. Tuy nhiên, trong các trường hợp khác, dãy này không đơn điệu thì việc biện luận phức tạp hơn nhiều. Khi đó, ta sẽ dùng kết quả sau:

Nếu  $f(x)$  là một hàm số thỏa điều kiện tồn tại số thực  $0 < q < 1$  sao cho  $|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$  với mọi  $x, y$  thuộc tập xác định thì dãy số  $\{x_n\}$  xác định bởi  $x_0 = a \in I, x_{n+1} = f(x_n)$  hội tụ. Giới hạn của dãy số là nghiệm duy nhất trên  $I$  của phương trình  $x = f(x)$ .

### Chứng minh.

Theo tính chất của dãy, với mọi  $n > m$  thì

$$|x_n - x_m| = |f(x_{n-1}) - f(x_{m-1})| \leq q|x_{n-1} - x_{m-1}| \leq \dots \leq q^m |x_{n-m} - x_0| \quad (*)$$

Từ đây  $|x_n - x_0| \leq |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \dots + |x_1 - x_0| \leq (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1)|x_1 - x_0|$ ,

suy ra  $\{x_n\}$  bị chặn. Xét một số thực  $\varepsilon > 0$ .

Từ (\*), do  $q < 1$  và  $|x_{n-m} - x_0|$  bị chặn nên ta suy ra tồn tại  $N$  sao cho  $q^n |x_{n-m} - x_0| < \varepsilon$ . Theo định nghĩa giới hạn thì suy ra dãy này hội tụ.

Trong nhiều trường hợp, việc chứng minh sự tồn tại của số thực  $q \in (0;1)$  là điều không đơn giản và ta thực hiện được điều đó qua cách xét đạo hàm của hàm số này. Nếu như  $0 < |f'(x)| < q < 1$  thì với mọi  $x, y \in \mathbb{R}; x > y$ , theo định lí Lagrange thì tồn tại  $c \in (y; x)$  sao cho

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c) \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| < q \Leftrightarrow |f(x) - f(y)| < q|x - y|.$$

Từ đây ta tiến hành khảo sát dãy đã cho và dùng nguyên lí kẹp để suy ra giới hạn.

Một bài toán tương tự (thuộc dạng cụ thể hóa) đã từng xuất hiện trên tạp chí THPT:

Xét dãy  $(a_n)$  như sau  $a_1 = 1, a_{n+1} = \left(\frac{1}{27}\right)^{a_n}, n \geq 1$ .

Chứng minh rằng dãy có giới hạn hữu hạn khi  $n$  tiến tới vô cực.

**Bài 15.** (Nam Định, vòng 2)

Với mỗi số thực  $x$  kí hiệu  $[x]$  là số nguyên lớn nhất không vượt quá  $x$  và  $\{x\} = x - [x]$ . Cho  $u_n = \{(45 + \sqrt{2012})^n\}$ . Chứng minh dãy  $(u_n)$  có giới hạn và tìm giới hạn đó.

**Lời giải.**

Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n$  thì biểu thức sau nhận giá trị nguyên  $A_n = (45 + \sqrt{2012})^n + (45 - \sqrt{2012})^n$ .

Thật vậy, theo khai triển nhị thức Newton thì

$$\begin{aligned} A_n &= (45 + \sqrt{2012})^n + (45 - \sqrt{2012})^n = \sum_{i=0}^n C_n^i 45^{n-i} (\sqrt{2012})^i + \sum_{i=0}^n C_n^i (-1)^i 45^{n-i} (\sqrt{2012})^i \\ &= \sum_{0 \leq 2i \leq n} C_n^{2i} 45^{n-2i} (\sqrt{2012})^{2i} + \sum_{0 \leq 2i+1 \leq n} C_n^{2i+1} 45^{n-2i-1} (\sqrt{2012})^{2i+1} + \\ &+ \sum_{0 \leq 2i \leq n} C_n^{2i} 45^{n-2i} (\sqrt{2012})^{2i} + \sum_{0 \leq 2i+1 \leq n} C_n^{2i+1} (-1)^{2i+1} 45^{n-2i-1} (\sqrt{2012})^{2i+1} \\ &= 2 \sum_{0 \leq 2i \leq n} C_n^{2i} 45^{n-2i} 2012^i \end{aligned}$$

là số nguyên với mọi  $n$ .

Hơn nữa, ta thấy rằng  $0 < 45 - \sqrt{2012} < 1$  và  $\lim (45 - \sqrt{2012})^n = 0$  nên



$$A_n - 1 < (45 + \sqrt{2012})^n < A_n \Rightarrow \left[ (45 + \sqrt{2012})^n \right] = A_n - 1.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \left\{ (45 + \sqrt{2012})^n \right\} &= (45 + \sqrt{2012})^n - \left[ (45 + \sqrt{2012})^n \right] \\ &= A_n - (45 + \sqrt{2012})^n - (A_n - 1) = 1 - (45 + \sqrt{2012})^n \end{aligned}$$

Do  $(45 - \sqrt{2012})^n$  hội tụ nên  $\left\{ (45 + \sqrt{2012})^n \right\}$  cũng hội tụ và

$$\lim \left\{ (45 + \sqrt{2012})^n \right\} = 1 - \lim (45 - \sqrt{2012})^n = 1$$

Vậy giới hạn cần tìm là 1.

### Nhận xét.

Bài toán có thể tổng quát lên thành dạng tìm giới hạn của  $\left\{ (a + \sqrt{b})^n \right\}$  trong đó  $0 < |a - \sqrt{b}| < 1$ .

Cách xử lý vẫn tương tự nhưng trong cả hai trường hợp  $a^2 < b$  hay  $a^2 > b$  thì khi khai triển, các đại lượng chứa căn vẫn bị triệt tiêu và giới hạn luôn là 1.

### Bài 16. (Đà Nẵng, vòng 2)

Cho dãy số thực  $\{x_n\}$  thỏa mãn điều kiện  $x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 3x_n}{3x_n^2 + 1}$  với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- Tìm công thức tính  $x_n$  theo  $x_1$  và  $n$ .
- Chứng minh rằng dãy số  $\{x_n\}$  có giới hạn hữu hạn.

### Lời giải.

a) Ta thấy rằng nếu  $x_1 = 1$  thì  $x_n = 1, \forall n$  và nếu  $x_1 = -1$  thì  $x_n = -1, \forall n$ .

Ta xét trường hợp  $x_1 = \pm 1 \Rightarrow x_n \neq \pm 1, \forall n$ . Từ công thức xác định dãy số, ta có:

$$x_{n+1} + 1 = \frac{x_n^3 + 3x_n + 3x_n^2 + 1}{3x_n^2 + 1} = \frac{(x_n + 1)^3}{3x_n^2 + 1}, x_{n+1} - 1 = \frac{x_n^3 + 3x_n - 3x_n^2 - 1}{3x_n^2 + 1} = \frac{(x_n - 1)^3}{3x_n^2 + 1}$$

Do đó,  $\frac{x_{n+1} - 1}{x_{n+1} + 1} = \frac{(x_n - 1)^3}{(x_n + 1)^3}, \forall n$ . Đặt  $y_n = \frac{x_n - 1}{x_n + 1}, n = 1, 2, 3, \dots \Leftrightarrow x_n = \frac{y_n + 1}{y_n - 1}$

Ta có  $y_1 = \frac{x_1 - 1}{x_1 + 1}, y_{n+1} = y_n^3, n = 1, 2, 3, \dots$ . Bằng quy nạp, ta chứng minh được  $y_n = y_1^{3^n}$ .

$$\text{Suy ra } x_{n+1} = \frac{y_1^{3^n} + 1}{y_1^{3^n} - 1} = \frac{\left(\frac{x_1 - 1}{x_1 + 1}\right)^{3^n} + 1}{\left(\frac{x_1 - 1}{x_1 + 1}\right)^{3^n} - 1} = \frac{(x_1 - 1)^{3^n} + (x_1 + 1)^{3^n}}{(x_1 - 1)^{3^n} - (x_1 + 1)^{3^n}}, \forall n.$$

Đây là công thức tổng quát cần tìm.

b) Xét hàm số  $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{3x^2 + 1}$  có đạo hàm dương và dãy số đã cho có thể viết lại dưới dạng

$$x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, 3, \dots$$

Với  $x_1 = \pm 1$  thì ta cũng có tương ứng  $x_n = \pm 1$  nghĩa là dãy đã cho có giới hạn.

Với  $x_1 \neq \pm 1$  thì  $f(x) - x = \frac{-2x^3 + 2x}{3x^2 + 1} = \frac{-2x(x^2 - 1)}{3x^2 + 1}$ . Ta có các trường hợp sau:

+ Nếu  $x_1 > 1$  thì  $x_2 - x_1 = f(x) - x < 0$  nên dãy đã cho giảm. Thật vậy,

Từ  $x_2 < x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1) \Rightarrow x_3 < x_2$ . Bằng quy nạp, ta chứng minh được  $x_{k+1} < x_k, \forall k$  nên dãy đã cho giảm. Hơn nữa, bằng quy nạp, ta cũng chứng minh được rằng  $x_n > 1, \forall n$  nên dãy đã cho có giới hạn hữu hạn.

+ Nếu  $0 < x_1 < 1$  thì  $x_2 - x_1 > 0$  nên dãy đã cho tăng; dãy này bị chặn nên cũng có giới hạn.

+ Trường hợp  $-1 < x_1 \leq 0$  và  $x_1 < -1$  cũng chứng minh tương tự.

Vậy với mọi giá trị của  $x_1$ , ta thấy dãy đã cho luôn có giới hạn.

### Nhận xét.

Hàm số  $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{3x^2 + 1}$  có thể tổng quát lên bằng  $f(x) = \frac{x^3 + 3ax}{3x^2 + a}$  với cách giải tương tự, do ta

cũng có  $f'(x) = \frac{3(x^2 - a)^2}{(3x^2 + a)^2} \geq 0$ . Việc xét trước các trường hợp  $x_1 = \pm 1$  để tránh rắc rối là việc

làm cần thiết. Công thức tổng quát tìm được không giúp được nhiều trong việc biện luận giới hạn dãy số ở đây và trên thực tế thì việc sử dụng tính đơn điệu của dãy số hoàn toàn có thể được dùng để xử lý trong tình huống này.

**Bài 17.** (Hưng Yên, vòng 1)

Cho dãy số xác định bởi công thức 
$$\begin{cases} x_1 = a > 0 \\ x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2}, n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng: 
$$\frac{1}{x_n + n^2} \leq \frac{1}{\sqrt{a} \cdot n(n+1)}.$$

**Lời giải.**

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với  $x_n + n^2 \geq \sqrt{a} \cdot n(n+1)$ .

Ta sẽ chứng minh điều này bằng quy nạp. Thật vậy,

- Với  $n = 1$ , ta có  $x_1 + 1 \geq 2\sqrt{a} \Leftrightarrow a + 1 \geq 2\sqrt{a}$ , bất đẳng thức này đúng.

- Giả sử khẳng định đúng với  $n = k \geq 1$ , tức là  $x_k + k^2 \geq \sqrt{a} \cdot k(k+1)$ .

Ta cần chứng minh  $x_{k+1} + (k+1)^2 \geq \sqrt{a} \cdot (k+1)(k+1) \Leftrightarrow x_k + \frac{x_k^2}{k^2} + (k+1)^2 \geq \sqrt{a} \cdot (k+1)(k+1)$ .

Ta sẽ chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & \frac{[\sqrt{a} \cdot k(k+1) - k^2] \sqrt{a} \cdot k(k+1)}{k^2} + (k+1)^2 \geq \sqrt{a} \cdot (k+1)(k+1) \\ & \Leftrightarrow [\sqrt{a}(k+1) - k] \sqrt{a} + k + 1 \geq \sqrt{a}(k+1) \\ & \Leftrightarrow a(k+1) + k + 1 \geq 2\sqrt{a}(k+1) \Leftrightarrow (k+1)(\sqrt{a} - 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Do đó, khẳng định đúng với  $n = k + 1$  nên theo nguyên lí quy nạp, ta có đpcm.

**Nhận xét.** Từ chứng minh đánh giá ở trên, ta có thể tìm được các giá trị của  $a$  để dãy đã cho có giới hạn hữu hạn.

**Bài 19.** (Vĩnh Phúc, vòng 2)

Cho dãy các số dương  $(a_n)$  thỏa mãn:  $a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2} \geq 0, \sum_{j=1}^n a_j < 1, \forall k \geq 1$ .

Chứng minh rằng  $0 \leq a_k - a_{k+1} \leq \frac{2}{k^2}, \forall k \geq 1$ .

**Lời giải.**

Từ giả thiết, ta có  $a_i - a_{i+1} \geq a_{i+1} - a_{i+2}, \forall i \geq 1$ .

Do  $\sum_{j=1}^n a_j < 1$  và  $a_j > 0, \forall j$  nên  $0 < a_i < 1, \forall i \geq 1$ .

Xét số nguyên dương  $k$  bất kì, ta có

$$u_k - u_{k+1} \geq u_{k+1} - u_{k+2} \geq \dots \geq u_{n-1} - u_n$$

Do đó,  $u_k - u_n \leq (n-k)(u_k - u_{k+1}) \Rightarrow u_k - u_{k+1} \geq \frac{u_k - u_n}{n-k}$ .

Ta cũng có  $u_k - u_n > 0 - 1 \geq -1$  nên  $u_k - u_{k+1} > \frac{-1}{n-k}, \forall n$ .

Điều này đúng với mọi  $n$  nên ta có  $u_k - u_{k+1} \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n-k} = 0$ .

Do đó, ta đã chứng minh được bất đẳng thức thứ nhất là  $u_k - u_{k+1} \geq 0, \forall k$

Ta cũng có  $1 \geq \sum_{i=1}^k u_i = \sum_{i=1}^k j(u_j - u_{j+1}) + ku_k$ , mà  $u_k > 0$  nên

$$1 \geq \sum_{i=1}^k j(u_j - u_{j+1}) + ku_k = (u_k - u_{k+1}) \frac{k(k+1)}{2} \text{ suy ra } u_k - u_{k+1} \leq \frac{2}{k(k+1)} < \frac{2}{k^2}.$$

**Nhận xét.** Đây là một trong số ít các bài toán không đưa ra theo hệ thống các kĩ thuật có sẵn mà đòi hỏi việc tư duy linh hoạt trong việc biến đổi và vận dụng các công thức, tận dụng điểm đặc trưng của các liên hệ xuất hiện trong bài.

Ta sẽ tìm hiểu bài toán tính giới hạn sau đây để thấy rõ điều đó:

Cho dãy số  $\{a_n\}$  xác định bởi  $a_1 > 0$  và  $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n}$  với mọi  $n \geq 1$ . Chứng minh rằng

- $a_n \geq n$  với mọi  $n \geq 2$ .
- Dãy số  $\left\{ \frac{a_n}{n} \right\}$  có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n - n) = 0$ .

**Lời giải.**

a) Ta sẽ chứng minh  $a_n \geq n$  với mọi  $n \geq 2$  bằng quy nạp. (\*)

Với  $n = 2$ , ta có  $a_2 = a_1 + \frac{1}{a_1} \geq 2$  do  $a_1 > 0$  nên (\*) đúng.

Giả sử (\*) đúng với  $n = k \geq 2$ , tức là  $a_k \geq k$ . Ta cần chứng minh (\*) cũng đúng với  $n = k + 1$ ,

tức là  $a_{k+1} = a_k + \frac{k}{a_k} \geq k + 1$ .

Nhưng bất đẳng thức trên đúng vì nó tương đương với

$$a_k^2 - (k+1)a_k + k \geq 0 \Leftrightarrow (a_k - 1)(a_k - k) \geq 0$$

Do đó, (\*) cũng đúng với  $n = k + 1$ . Theo nguyên lí quy nạp, (\*) được chứng minh.

b) Ta sẽ chứng minh dãy  $\left\{ \frac{a_n}{n} \right\}$  đơn điệu giảm, tức là  $\frac{a_n}{n} \geq \frac{a_{n+1}}{n+1}, \forall n \geq 2$ .

Thay  $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n}$  vào bất đẳng thức trên, ta có

$$\frac{a_n}{n} \geq \frac{a_n + n/a_n}{n+1} \Leftrightarrow (n+1)a_n \geq na_n + n \Leftrightarrow a_n \geq n$$

Bất đẳng thức này đúng nên nhận xét trên được chứng minh. Hơn nữa, vì  $a_n \geq n, \forall n \geq 2$  nên dãy

$\left\{ \frac{a_n}{n} \right\}$  bị chặn dưới, suy ra nó có giới hạn.

Ta có  $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n}$ , suy ra  $\sum_{i=2}^n a_{i+1} = \sum_{i=2}^n a_i + \sum_{i=2}^n \frac{i}{a_i} \Leftrightarrow a_{n+1} = a_2 + \sum_{i=2}^n \frac{i}{a_i}$ .

Do  $i \leq a_i, i = \overline{2, n}$  nên  $\sum_{i=2}^n \frac{i}{a_i} \leq \sum_{i=2}^n 1 = n - 2 \Rightarrow a_{n+1} \leq a_2 + n - 2 \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{n+1} \leq \frac{a_2}{n+1} + \frac{n-2}{n+1}$ .

Ta thấy rằng  $1 \leq \frac{a_{n+1}}{n+1} \leq \frac{a_2}{n+1} + \frac{n-2}{n+1}$  và  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{a_2}{n+1} + \frac{n-2}{n+1} \right) = 1$  nên theo nguyên lí kẹp, giới

hạn của dãy  $\left\{ \frac{a_n}{n} \right\}$  là 1.

c) Ta có  $a_{n+1} - (n+1) = a_n - n + \frac{n}{a_n} - 1 = \frac{a_n^2 - a_n(n+1) + n}{a_n} = \frac{(a_n - n)(a_n - 1)}{a_n}$ . Suy ra

$$\prod_{i=2}^n [a_{i+1} - (i+1)] = \prod_{i=2}^n \frac{(a_i - i)(a_i - 1)}{a_i} \Leftrightarrow a_{n+1} - (n+1) = (a_2 - 2) \prod_{i=2}^n \left( 1 - \frac{1}{a_i} \right)$$

Ta có  $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n} \leq a_n + 1 \Leftrightarrow \frac{a_{n+1} - 1}{a_{n+1}} \leq \frac{a_n}{a_{n+1}} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{a_{n+1}} \leq \frac{a_n}{a_{n+1}}$ . Do đó

$$0 \leq a_{n+1} - (n+1) \leq (a_2 - 2) \prod_{i=2}^n \frac{a_{i-1}}{a_i} = (a_2 - 2) \frac{a_1}{a_n} \leq \frac{a_1(a_2 - 2)}{n}$$

Cũng theo nguyên lí kẹp, do  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_1(a_2 - 2)}{n} = 0$  nên ta được  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n - n) = 0$ . Ta có đpcm.

**Bài 20.** (Vĩnh Long, vòng 2)

Xét phương trình  $x^n = x^2 + x + 1, n \in \mathbb{N}, n > 2$

a. Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên  $n > 2$  thì phương trình trên có đúng một nghiệm dương duy nhất. Gọi nghiệm đó là  $x_n$ .

b. Chứng minh rằng  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$ .

**Lời giải.**

a) Ta thấy rằng nếu  $x$  là nghiệm của phương trình  $x^n = x^2 + x + 1, n \in \mathbb{N}, n > 2$  thì  $x > 1$ .

Với  $n \geq 3$  cố định, xét hàm số  $f_n(x) = x^n - (x^2 + x + 1), x > 1$ . Ta có

$f'_n(x) = nx^{n-1} - (2x + 1) \geq 3x - (2x + 1) = x - 1 > 0$  nên đây là hàm đồng biến nên phương trình  $f_n(x) = 0$  có không quá một nghiệm.

Hơn nữa,  $f_n(1) = -2, \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$  và hàm số  $f_n(x)$  liên tục trên  $(0; +\infty)$  nên phương trình  $f_n(x) = 0$  có ít nhất một nghiệm dương.

Từ các điều trên, ta thấy rằng phương trình  $x^n = x^2 + x + 1$  có đúng một nghiệm dương.

b. Ta sẽ chứng minh dãy này giảm. Thật vậy, theo định nghĩa  $x_n$  thì  $f_n(x_n) = 0, f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ , tức là  $x_n^n = x_n^2 + x_n + 1 \Rightarrow x_n^{n+1} = x_n^3 + x_n^2 + x_n \Rightarrow x_n^{n+1} - (x_n^2 + x_n + 1) = x_n^3 - 1 > 0$ .

Suy ra  $f_{n+1}(x_n) > 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$ , mà  $f_{n+1}(x)$  đồng biến nên  $x_n > x_{n+1}, \forall n$ .

Do  $(x_n)$  bị chặn dưới bởi 1 nên nó có giới hạn hữu hạn.

Ta sẽ chứng minh rằng  $f_n\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0$ . Thật vậy, ta xét  $n \geq 4$  thì có đánh giá sau

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n > 1 + \frac{C_n^1}{\sqrt{n}} + \frac{C_n^2}{n} = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2n} = 1 + \sqrt{n} + \frac{n-1}{2} > \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + 1.$$

Suy ra  $f_n\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0 = f_n(x_n) \Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} > x_n$ . Do đó  $1 < x_n < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

Theo nguyên lí kẹp thì dãy này có giới hạn là 1.

### Nhận xét.

Các bài toán về biểu diễn nghiệm của một phương trình rồi xác định giới hạn thường khá thú vị và trong phần chứng minh tồn tại giới hạn, ta luôn sử dụng tính đơn điệu của dãy số để nhận xét, chú ý  $f_{n+1}(x_{n+1})$  và  $f_{n+1}(x_n)$ . Trong phần tìm chính xác giới hạn của dãy, để tránh sự nhầm lẫn và ngộ nhận ở một số trường hợp, ta nên dùng dãy kẹp để chứng minh giới hạn (thường thì đề bài sẽ cho trước giới hạn này).

Các bài toán tương tự đã xuất hiện trong đề VMO các năm trước :

#### 1) Đề VMO 2002, bảng A :

Xét phương trình  $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + \dots + \frac{1}{n^2x-1} = \frac{1}{2}$  với  $n$  là tham số nguyên dương.

a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương  $n$  thì phương trình nêu trên có duy nhất một nghiệm lớn hơn 1. Kí hiệu nghiệm đó là  $x_n$ .

b) Chứng minh dãy số  $(x_n)$  có giới hạn là 4 khi  $n \rightarrow +\infty$ .

#### 2) Đề VMO 2002, bảng B :

Xét phương trình  $\frac{1}{2x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4} + \dots + \frac{1}{x-n^2} = 0$  với  $n$  là tham số nguyên dương.

a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương  $n$  thì phương trình nêu trên có duy nhất một nghiệm lớn hơn 1. Kí hiệu nghiệm đó là  $x_n$ .

b) Chứng minh dãy số  $(x_n)$  có giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow +\infty$ .

#### 3) Đề VMO 2007 :

Xét số thực  $a > 2$ . Đặt  $f_n(x) = a^{10}x^{n+10} + x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1, n = 1, 2, 3, \dots$

Chứng minh rằng với mỗi giá trị nguyên dương của  $n$  thì phương trình  $f_n(x) = a$  có đúng một nghiệm  $x_n \in (0; +\infty)$  và dãy số  $x_n$  có giới hạn là  $1 - \frac{1}{a}$  khi  $n \rightarrow +\infty$ .

#### Bài 18. (Quảng Bình, vòng 2)

Cho hai dãy số dương  $(u_n), (v_n)$  xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{4v_{n+1}^2 - 1}, v_{n+1} = \frac{v_n}{1 - 4u_{n+1}^2}, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

a. Tính  $u_{2011}^2 + v_{2011}^2$ .

b. Tính  $\lim u_n, \lim v_n$ .

### Lời giải.

a) Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng  $u_n^2 + v_n^2 = 1, \forall n$ .

Thật vậy, với  $n = 1$ , ta có  $u_1^2 + v_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ .

Giả sử (\*) đúng với  $n = k$ , tức là  $u_k^2 + v_k^2 = 1$  thì theo công thức xác định dãy, ta có

$u_k = u_{k+1}(4v_{k+1}^2 - 1), v_k = v_{k+1}(1 - u_{k+1}^2)$ . Do đó, ta có biến đổi sau

$$\begin{aligned} [u_{k+1}(4v_{k+1}^2 - 1)]^2 + [v_{k+1}(1 - u_{k+1}^2)]^2 &= 1 \Leftrightarrow u_{k+1}^2(16v_{k+1}^4 - 8v_{k+1}^2 + 1) + v_{k+1}^2(16u_{k+1}^4 - 8u_{k+1}^2 + 1) = 1 \\ \Leftrightarrow (u_{k+1}^2 + v_{k+1}^2 - 1)(16u_{k+1}^2v_{k+1}^2 + 1) &= 0 \Leftrightarrow u_{k+1}^2 + v_{k+1}^2 = 1 \end{aligned}$$

Suy ra khẳng định cũng đúng với  $n = k + 1$ .

Theo nguyên lí quy nạp, ta có  $u_n^2 + v_n^2 = 1, \forall n$ , suy ra  $u_{2011}^2 + v_{2011}^2 = 1$ .

b) Do  $u_n, v_n > 0$  nên ta có:  $1 - 4u_{n+1}^2 < 1 \Rightarrow v_{n+1} = \frac{v_n}{1 - 4u_{n+1}^2} > v_n$ . Do đó dãy  $(v_n)$  tăng và bị chặn trên bởi 1 nên tồn tại  $\lim v_n = b$ .

Ta cũng có  $v_n > v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 4v_{n+1}^2 - 1 > 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1 > 1$ . Ta được  $u_{n+1} = \frac{u_n}{4v_{n+1}^2 - 1} < u_n$ .

Dãy số  $(u_n)$  giảm và bị chặn trên bởi 0 nên cũng tồn tại  $\lim u_n = a$ .

Trong công thức xác định dãy, ta chuyển qua giới hạn:  $a = \frac{a}{4b^2 - 1} \Leftrightarrow a(4b^2 - 2) = 0$ .

Nếu  $a \neq 0$  thì  $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$  (vô lí do  $b > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ), suy ra  $a = 0$ , tương ứng với  $b = 1$ .

Vậy  $\lim u_n = 0, \lim v_n = 1$ .

**Nhận xét.** Bài toán này có dạng dãy số xác định theo kiểu lượng giác. Nếu đề bài ban đầu không cho chứng minh quan hệ giữa hai số hạng như câu a thì thực sự là không dễ dàng để tìm được cả hai giới hạn của dãy đã cho. Trong phần chứng minh ở câu a, ý tưởng quy nạp là rất hiển nhiên !



**Bài 21.** (Bến Tre, vòng 1)

Cho phương trình  $x^{2n} - 3x + 2 = 0$  trong đó  $n$  là số tự nhiên lớn hơn 1.

1. Chứng minh rằng ứng với mỗi  $n$ , phương trình có đúng một nghiệm  $x_n \in (0;1)$ .
2. Gọi  $(x_n)$  với  $n = 2, 3, 4, \dots$  là dãy số có được theo cách xác định như trên. Chứng minh rằng dãy số này đơn điệu và bị chặn.

**Lời giải.**

1. Với  $n \geq 2$  cố định, ta xét hàm số  $f_n(x) = x^{2n} - 3x + 2, x \in (0;1)$ .

Ta có  $f_n''(x) = 2n(2n-1)x^{2n-2} > 0, 0 < x < 1$  nên phương trình  $f_n(x) = 0$  có không quá 2 nghiệm.

Mặt khác  $f_n'(x) = 2nx^{2n-1} - 3, f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = \sqrt[2n-1]{\frac{3}{2n}} \in (0;1)$  và  $f_n''(x_0) > 0$  nên đây là giá trị cực tiểu trên miền  $(0;1)$ .

Suy ra  $f_n(x_0) < f_n(1) = 0$ . Từ đó, do tính liên tục của hàm số này và  $f_n(0) > 0, f_n(x_0) < 0$  nên phương trình  $f_n(x) = 0$  còn có nghiệm trong khoảng  $x_n \in (0; x_0) \subset (0;1)$ . Do  $f_n(x) = 0$  có không quá hai nghiệm nên đây là nghiệm duy nhất. Ta có đpcm.

2. Ta có  $f_n(x_n) = 0 \Rightarrow x_n^{2n} - 3x_n + 2 = 0$ . Suy ra  $x_n^{n+1} - 3x_n^2 + 2x_n = 0$  (nhân hai vế cho  $x_n > 0$ ).

Ta cũng có  $f_n\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} > 0$  và  $f_n(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(0; x_0)$ , đồng biến trên khoảng  $(0; x_0)$  nên ta có  $\frac{2}{3} \in (0; x_n)$  hay  $x_n > \frac{2}{3}, \forall n$ .

Do đó,  $x_n^{n+1} - 3x_n + 2 = 3x_n^2 - 2x_n - 3x_n + 2 = 3x_n^2 - 5x_n + 2 = (3x_n - 2)(x_n - 1) < 0$ .

Trong khi đó  $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow x_{n+1}^{n+1} - 3x_{n+1} + 2 = 0$ .

Tương tự, xét các khoảng nghịch biến và đồng biến của hàm số  $f_{n+1}(x)$  thì ta thấy rằng vì  $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0, f_{n+1}(x_n) < 0$  nên  $x_n \in (x_{n+1}, 1) \Rightarrow x_{n+1} < x_n, \forall n$ .

Từ đó ta được dãy này giảm và bị chặn dưới bởi  $\frac{2}{3}$ . Ta có đpcm.

**Nhận xét.**

Bài này tuy cũng thuộc dạng tương tự bài 19 và các bài toán tương tự đã nêu trong phần nhưng xét nhưng bên cạnh đó vẫn còn một số vấn đề xuất hiện. Rõ ràng hàm số  $f_n(x)$  nêu trong bài không đơn điệu và phương trình đã cho luôn có hai nghiệm. Vì thế, ta cần phân tích sâu hơn vào đạo hàm cấp 1, cấp 2 để dựa vào tính biến thiên của dãy mà lập luận. Tuy bài này chỉ yêu cầu chứng minh dãy có giới hạn nhưng ta vẫn có thể tìm được giới hạn đó là  $\frac{2}{3}$  bằng dãy kẹp.

**Bài 22.** (TP HCM, vòng 2)

Cho dãy  $(u_n)$  được xác định bởi công thức

$$\begin{cases} u_1 = \frac{4}{5} \\ u_{n+1} = \frac{u_n^4}{u_n^4 - 8u_n^2 + 8} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tìm công thức tổng quát của dãy  $(u_n)$ .

**Lời giải.**

Đặt  $\frac{1}{u_n} = v_n, \forall n$ . Từ công thức xác định dãy, ta có  $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_n^4 - 8u_n^2 + 8}{u_n^4} = 1 - \frac{8}{u_n^2} + \frac{8}{u_n^4}$  hay

$$v_{n+1} = 8v_n^4 - 8v_n^2 + 1, n = 1, 2, 3, \dots \text{ và } v_1 = \frac{5}{4}$$

Bằng quy nạp, ta sẽ chứng minh rằng  $v_n = \frac{1}{2}(2^{2^{n-2}} + 2^{-2^{n-2}}), \forall n = 1, 2, 3, \dots$

Thật vậy,

- Với  $n = 1$ , ta có  $v_1 = \frac{1}{2}(2^{2^{1-2}} + 2^{-2^{1-2}}) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$ .

- Giả sử với  $n = k \geq 1$ , ta có  $v_k = \frac{1}{2}(2^{2^{k-2}} + 2^{-2^{k-2}})$ . Theo công thức tổng quát của dãy, ta được

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= v_k^4 - 8v_k^2 + 8 = \frac{8}{16}(2^{2^{k-2}} + 2^{-2^{k-2}})^4 - \frac{8}{4}(2^{2^{k-2}} + 2^{-2^{k-2}})^2 + 8 = \\ &= \frac{1}{2}(2^{2^{k-1}} + 2^{-2^{k-1}} + 2)^2 - 2(2^{2^{k-1}} + 2^{-2^{k-1}} + 2) + 1 \\ &= \frac{1}{2}(2^{2^{k-1}} + 2^{-2^{k-1}})^2 + 2(2^{2^{k-1}} + 2^{-2^{k-1}} + 2) - 2(2^{2^{k-1}} + 2^{-2^{k-1}} + 2) + 1 = \frac{1}{2}(2^{2^k} + 2^{2^k}) \end{aligned}$$

Do đó khẳng định đúng với  $n = k + 1$ . Theo nguyên lí quy nạp, khẳng định trên đúng.

$$\text{Vậy } u_n = \frac{2}{2^{2^{n-2}} + 2^{-2^{n-2}}}, n \in \mathbb{N}^*.$$

### Nhận xét.

Các công thức kiểu như trên thường gọi nhớ đến các hàm lượng giác và tương ứng với nó là các hàm hyperbolic mà công thức liên hệ cũng giống như của các hàm lượng giác quen thuộc.

Các bài toán về dạng này không nhiều và các giải chung đều là dự đoán công thức rồi dùng quy nạp để chứng minh. Các công thức thường có dạng  $a(\alpha_1^{k^{f(n)}} + \alpha_2^{k^{f(n)}})$  với  $\alpha_1, \alpha_2, a, k$  được chọn theo các giá trị cho trước, hàm  $f(n)$  thì tùy theo hàm số trong hệ thức truy hồi.

Một số bài tương tự:

1) Cho dãy số  $\{u_n\}, n = 1, 2, 3, \dots$  có  $u_1 = 1, u_{n+1} = 9u_n^3 + 3u_n$ . Tìm công thức tổng quát của dãy.

2) Cho dãy số  $\{v_n\}, n = 1, 2, 3, \dots$  xác định bởi  $v_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}, v_{n+1} = 64v_n^5 - 40v_n^3 + 5v_n, n = 1, 2, 3, \dots$

Tìm công thức tổng quát của dãy.

### Bài 23. (Tiên Giang, vòng 2)

Cho dãy số  $\{u_n\}$  xác định bởi  $u_0 > 0, u_{n+1} = \frac{2 + \sqrt{2u_n^2 + 4u_n + 4}}{u_n}, n = 1, 2, 3, \dots$

Chứng minh rằng dãy  $\{u_n\}$  có giới hạn và tìm giới hạn đó.

### Lời giải.

Do  $u_{n+1} = \frac{2}{u_n} + \sqrt{2 + \frac{4}{u_n} + \frac{4}{u_n^2}}, n = 1, 2, 3, \dots$  nên dễ dàng thấy rằng  $u_n > 0, \forall n$ .

Ta cũng có  $u_n > \sqrt{2}, \forall n$  nên  $u_{n+1} = \frac{2}{u_n} + \sqrt{2 + \frac{4}{u_n} + \frac{4}{u_n^2}} < \frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2 + \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{4}{2}} < 5$ .

Do đó, dãy đã cho bị chặn.

Xét hàm số  $f(x) = \frac{2}{x} + \sqrt{2 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}$ ,  $\sqrt{2} < x < 5$ .

Dãy số đã cho có thể viết lại thành  $u_0 > 0, u_{n+1} = f(u_n), n = 0, 1, 2, \dots$

Ta thấy hàm này nghịch biến trên khoảng xác định nên  $f(f(x))$  đồng biến.

Xét dãy  $a_n = u_{2n}, b_n = u_{2n+1}, n \geq 0$ .

Nếu  $u_0 < u_2$  thì dãy  $(a_n)$  đồng biến và  $(b_n)$  nghịch biến, cả hai đều bị chặn nên có giới hạn.

Tương tự nếu  $u_0 \geq u_2$  thì cả hai dãy cũng có giới hạn.

Đặt  $\lim a_n = a, \lim b_n = b$  thì từ công thức xác định dãy, chuyển qua giới hạn, ta có

$$\begin{cases} b = \frac{2}{a} + \sqrt{2 + \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}} \\ a = \frac{2}{b} + \sqrt{2 + \frac{4}{b} + \frac{4}{b^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 2 + \sqrt{2 + 4a + 4a^2} \\ ab = 2 + \sqrt{2 + 4b + 4b^2} \end{cases} \Rightarrow a + a^2 = b + b^2 \Rightarrow a = b$$

Ta xét phương trình

$$\begin{aligned} a^2 = 2 + \sqrt{2 + 4a + 4a^2} &\Rightarrow (a^2 - 2)^2 = 4a^2 + 4a + 2 \Leftrightarrow (a + 2)(a - \sqrt{3} - 1)(a + \sqrt{3} - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \sqrt{3} + 1 > 0 \end{aligned}$$

Do đó, hệ này có nghiệm duy nhất là  $a = b = \sqrt{3} + 1$ .

Vậy hai dãy con của dãy đã cho có cùng giới hạn nên dãy  $u_n$  có giới hạn và  $\lim u_n = \sqrt{3} + 1$ .

### Nhận xét.

Đây lại là một minh họa điển hình về dãy số xác định theo kiểu  $u_{n+1} = f(u_n)$  với  $f(x)$  là hàm đơn điệu giảm, các dãy này thường ít khi có giới hạn phụ thuộc vào số hạng đầu.

Một bài tương tự trong đề VMO 2008:

Cho dãy số  $(x_n)$  xác định như sau  $x_1 = 2, x_2 = 0, x_{n+2} = 2^{-x_n} + \frac{1}{2}$  với mọi  $n = 1, 2, 3, \dots$

Chứng minh dãy  $(x_n)$  có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

**Bài 24.** (Chọn đội tuyển Phổ thông năng khiếu TP. HCM)

Cho dãy  $(u_n)$  thỏa mãn điều kiện  $u_1 = \frac{1}{6}$  và  $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{3}u_n$  với mọi  $n$  nguyên dương.

Tính giới hạn sau  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5u_{n+1}^2 - 2u_n^2 u_{n+1} + 5u_n u_{n+1}}{3u_n^2 + u_n u_{n+1} (4 + u_n^2)}$ .

**Lời giải.**

Trước hết, ta sẽ tìm giới hạn của dãy  $(u_n)$ . Bằng quy nạp, ta sẽ chứng minh rằng  $0 < u_n < \frac{1}{3}, \forall n$ .

Thật vậy,

- Với  $n = 1$  thì khẳng định đúng.

- Giả sử khẳng định đúng với  $n = k \geq 1$  thì  $0 < u_k < \frac{1}{3}$ . Ta có

$$0 < u_{k+1} = u_k^2 + \frac{2}{3}u_k < \frac{1}{9} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ nên khẳng định cũng đúng với } n = k + 1.$$

Theo nguyên lí quy nạp, khẳng định được chứng minh.

Xét hàm số  $f(x) = x^2 + \frac{2}{3}x, x \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$  thì  $f'(x) = 2x + \frac{2}{3} > 0$  nên đây là hàm đồng biến.

Dãy số đã cho chính là  $u_1 = \frac{1}{6}, u_{n+1} = f(u_n), n = 1, 2, 3, \dots$

Hơn nữa  $u_2 = \frac{1}{6^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36} < \frac{1}{6}$  nên đây là dãy nghịch biến và bị chặn dưới nên có giới hạn.

Gọi  $l$  là giới hạn của dãy thì  $l = l^2 + \frac{2}{3}l \Leftrightarrow l = 0 \vee l = \frac{1}{3}$ . Nhưng do dãy này giảm và theo chứng minh trên thì  $0 < u_n < \frac{1}{3}, \forall n$  nên giới hạn của dãy là 0.

Theo công thức xác định dãy, ta có  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = u_n + \frac{2}{3}$ . Do dãy  $(u_n)$  giảm nên dãy tương ứng  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

cũng có giới hạn là  $\frac{2}{3}$ .

Từ đó, ta tính được:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5u_{n+1}^2 - 2u_n^2 u_{n+1} + 5u_n u_{n+1}}{3u_n^2 + u_n u_{n+1} (4 + u_n^2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 \frac{u_{n+1}^2}{u_n^2} - 2u_{n+1} + 5 \frac{u_{n+1}}{u_n}}{3 + \frac{u_{n+1}}{u_n} (4 + u_n^2)} = \frac{5 \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot 0 + 5 \cdot \frac{2}{3}}{3 + \frac{2}{3} (4 + 0^2)} = \frac{50}{51}.$$

Đây chính là giới hạn cần tìm.

### Nhận xét.

Trong bài toán trên, các biến đổi tương đối thuận lợi nhưng nhiều trường hợp khác, ta cần chú ý đến định lý Taeplitz và Stolz liên quan đến tỉ số của hai dãy như sau:

#### \* Định lý Taeplitz:

Cho  $\{C_{n,k} \mid 1 \leq k \leq n; k, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$  thỏa mãn các điều kiện:

i.  $C_{n,k} \rightarrow 0$  khi  $n \rightarrow +\infty$ .

ii.  $\sum_{k=1}^n C_{n,k} \rightarrow 1$  khi  $n \rightarrow +\infty$ .

iii.  $\sum_{k=1}^n |C_{n,k}| \rightarrow C = \text{const}, \forall n$ .

Khi đó, nếu dãy  $\{a_n\}$  hội tụ thì dãy tương ứng  $\left\{b_n = \sum_{k=1}^n C_{n,k} a_k\right\}$  cũng hội tụ và hai dãy này có cùng giới hạn.

#### \* Định lý Stolz:

Cho hai dãy số  $(a_n), (b_n)$  thỏa mãn:

i.  $b_n$  tăng thực sự tới  $+\infty$ .

ii.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = c$

Khi đó dãy  $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$  cũng có giới hạn và  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ .

**Bài 25.** (Hà Tĩnh, vòng 2) Dãy số  $\{x_n\}$  với  $n = 1, 2, 3, \dots$  bị chặn trên và thỏa mãn điều kiện:

$$x_{n+2} \geq \frac{1}{4}x_{n+1} + \frac{3}{4}x_n \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng dãy số trên có giới hạn.

**Lời giải.**

Đặt  $y_n = \min\{x_n, x_{n+1}\}, n = 1, 2, 3, \dots$ . Ta sẽ chứng minh dãy này hội tụ. Thật vậy

$$\begin{aligned} x_{n+2} &\geq \frac{1}{4}x_{n+1} + \frac{3}{4}x_n \geq \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)y_n = y_n \Rightarrow y_n = \min\{x_n, x_{n+1}\} \leq \min\left\{x_n, x_{n+1}, \frac{1}{4}x_n + \frac{3}{4}x_{n+1}\right\} \\ &\leq \min\{x_{n+1}, x_{n+2}\} = y_{n+1} \end{aligned}$$

Theo giả thiết thì dãy  $\{x_n\}$  bị chặn trên nên dãy  $\{y_n\}$  cũng bị chặn trên. Đồng thời, theo nhận xét trên thì dãy  $\{y_n\}$  nên nó hội tụ. Đặt  $\lim y_n = \ell$ .

Với mọi  $\varepsilon > 0$ , tồn tại  $N$  nguyên dương sao cho với mọi  $n > N$  thì:  $\ell - \frac{\varepsilon}{7} < y_n < \ell + \frac{\varepsilon}{7}$ .

Theo định nghĩa của dãy  $\{y_n\}$ , suy ra:  $\ell - \frac{\varepsilon}{7} < y_n \leq x_n$ .

- Nếu  $x_n \leq \ell + \frac{\varepsilon}{7}$  thì suy ra:  $\ell - \frac{\varepsilon}{7} < y_n < \ell + \frac{\varepsilon}{7}, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lim x_n = \ell$ .

- Nếu  $x_n > \ell + \frac{\varepsilon}{7}$  thì theo định nghĩa của  $\{y_n\}$ , ta được  $x_{n+1} < \ell + \frac{\varepsilon}{7}$  (vì nếu ngược lại thì suy ra rằng  $y_n > \ell + \frac{\varepsilon}{7}$ ). Do đó, ta có

$$x_{n+1} \geq \frac{1}{4}x_n + \frac{3}{4}x_{n-1} \Rightarrow x_n \leq 4x_{n+1} - 3x_{n-1} \leq 4\left(\ell + \frac{\varepsilon}{7}\right) - 3\left(\ell - \frac{\varepsilon}{7}\right) = \ell + \varepsilon, \text{ tức là:}$$

$\ell - \varepsilon < x_n < \ell + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$  nên theo định nghĩa giới hạn thì dãy  $\{x_n\}$  cũng hội tụ về  $\ell$ .

Vậy trong mọi trường hợp, dãy đã cho đều có giới hạn. Ta có đpcm.

**Nhận xét.**

Bài toán này đã từng xuất hiện trên tạp chí THPT. Một bài toán tương tự quen thuộc hơn đã có trong đề chọn đội tuyển của Việt Nam 1988:

Dãy số  $\{x_n\}$  với  $n = 1, 2, 3, \dots$  bị chặn và thỏa mãn điều kiện:  $2x_{n+2} \leq x_{n+1} + x_n, n = 1, 2, 3, \dots$

Chứng minh dãy này hội tụ.

\*Các bài này đều có thể tổng quát lên thành:

Dãy số  $\{x_n\}$  với  $n = 1, 2, 3, \dots$  bị chặn trên và thỏa mãn điều kiện:

$$x_{n+2} \geq px_{n+1} + qx_n, n = 1, 2, 3, \dots \text{ trong đó } p + q = 1, p, q > 0$$

Chứng minh rằng dãy số trên có giới hạn.

(Nếu đổi điều kiện chặn trên thành chặn dưới thì điều kiện của dãy cũng tương ứng đổi thành  $x_{n+2} \leq px_{n+1} + qx_n$ ).

**Bài 26.** (Ninh Bình, vòng 2)

Chứng minh dãy  $(u_n)$  xác định bởi công thức  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$  có giới hạn hữu hạn.

**Lời giải.**

Trước hết, ta chứng minh bất đẳng thức  $\ln(x+1) \leq x, \forall x \geq 0$ .

Thật vậy, xét hàm số  $f(x) = \ln(x+1) - x, x \geq 0$ . Ta có  $f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1} \leq 0$  nên đây là hàm nghịch biến. Suy ra  $f(x) \leq f(0) = \ln 1 - 0 = 0$ .

Từ đây dễ dàng suy ra  $\ln(x+1) \leq x, \forall x \geq 0$ .

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = 0$  nên  $\ln(x+1) < x, \forall x > 0$ .

Trở lại bài toán, ta xét hiệu sau

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0$$

Suy ra dãy đã cho đơn điệu giảm.

Mặt khác, ta cũng có

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n > \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{1}{k} + 1\right) - \ln n = \sum_{k=1}^n [\ln(k+1) - \ln k] - \ln n = \ln \frac{n+1}{n} > 0$$

nên dãy này bị chặn dưới.



Dãy đã cho giảm và bị chặn dưới nên có giới hạn hữu hạn. Ta có đpcm.

**Nhận xét.**

Bài toán quen thuộc hơn thường được đề cập đến dãy số  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  là chứng minh rằng nó tiến tới vô cực và cách giải đơn giản nhất là dùng đánh giá  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \ln n$  thông qua các biến đổi logarit. Giới hạn của dãy trên có từ một kết quả nổi tiếng là hằng số Euler C.

\* Một bài tương tự: Tìm giới hạn của dãy số sau  $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}, n = 1, 2, 3, \dots$

**Bài 27.** (Hà Nội, vòng 2)

Cho dãy số nguyên dương  $(U_n)$  thỏa mãn  $U_1 = 1, U_2 = 2, U_4 = 5$  và với mọi  $n > 1$  thì

$$U_{n+1}U_{n-1} = U_n^2 + a \text{ với } a^2 = 1.$$

- 1) Xác định số hạng tổng quát của dãy số trên.
- 2) Tìm các số tự nhiên  $n$  không vượt quá 2012 sao cho  $U_n$  chia hết cho 10.

**Lời giải.**

1) Từ công thức xác định dãy, ta có  $U_3^2 = U_2U_4 - a = 10 - a$ , do  $U_3$  nguyên dương nên  $a = 1$  và  $U_3 = 3$ .

Bằng quy nạp, ta thấy rằng dãy này tăng và  $U_n > 3, \forall n > 3$ . Ta có  $U_{n+1} = \frac{U_n^2 + a}{U_{n-1}}$ .

Giả sử rằng  $U_n^2 + 1 : U_{n-1}$  và  $U_n^2 - 1 : U_{n-1}$  thì  $2 : U_{n-1}$ , vô lí vì đây là dãy số nguyên dương và theo nhận xét trên thì  $U_n > 3, \forall n > 3$ .

Do đó, có không quá một dãy số thỏa mãn đề bài.

Ta xét dãy Fibonacci xác định như sau  $\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 2 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$

Bằng quy nạp, ta cũng có thể chứng minh được rằng  $F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n, \forall n$ .

Dãy số này cũng thỏa mãn đề bài nên hai dãy  $(U_n)$  và  $(F_n)$  là trùng nhau.

Từ đó, ta tìm được công thức tổng quát của dãy  $(U_n)$  dựa theo dãy Fibonacci là

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

2) Ta có  $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n = 2U_n + U_{n-1} \equiv U_{n-1} \pmod{2}$  và

$$U_{n+2} = 2U_n + U_{n-1} = 3U_{n-1} + 2U_{n-2} = 5U_{n-2} + 3U_{n-3} \equiv 3U_{n-3} \pmod{5} \text{ (do } (3,5) = 1).$$

Theo công thức xác định dãy thì  $U_2 = 2, 0 \equiv U_2 \equiv U_5 \equiv U_8 \equiv \dots \pmod{2}$  nên bằng quy nạp, ta có thể chứng minh được rằng  $U_n \equiv 0 \pmod{2} \Leftrightarrow n = 3k + 2, k \in \mathbb{N}$ .

Tương tự, do  $U_4 = 5$  nên cũng bằng quy nạp thì  $U_n \equiv 0 \pmod{5} \Leftrightarrow n = 5k + 4, k \in \mathbb{N}$ .

$$\text{Từ đó suy ra } U_n \equiv 0 \pmod{10} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \equiv 4 \pmod{5} \end{cases} \Rightarrow n \equiv 14 \pmod{15} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*, n = 15k - 1.$$

Do  $1 \leq n \leq 2012$  nên để tìm tất cả các giá trị  $n$  thỏa mãn đề bài, ta xét

$$1 \leq 15k - 1 \leq 2012 \Leftrightarrow 1 \leq k \leq 134.$$

Vậy có đúng 134 số hạng thỏa mãn đề bài.

### Nhận xét.

Vấn đề ở bài này chính là việc phát biểu  $a$  trong đề bài dễ gây nhầm lẫn rằng  $a$  là hằng số và nhiều bạn sẽ từ bước tìm điều kiện  $U_3$  nguyên dương để suy ra  $a = 1$  thì công nhận rằng giá trị đó không đối với những quan hệ khác trong công thức tổng quát dẫn đến sai lầm.

Tuy nhiên, ý của đề bài lại chính là  $a$  có thể nhận giá trị là 1 hoặc  $-1$  trong từng quan hệ, miễn sao giá trị  $U_{n+1}$  nguyên dương là được.

Nói về câu 2 của bài toán này, ta cũng có nhiều kết quả thú vị. Chẳng hạn như  $F_{3 \cdot 2^{n-1}} : 2^n, \forall n$  hoặc  $F_{5^n} : 5^n$  trong trường hợp dãy xác định theo kiểu  $F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \geq 1$ .

Trong cuốn tuyển tập 30 năm Tạp chí THPT, có một bài báo cũng nhắc đến đến bài toán này và câu chuyện về một học sinh trong kì thi Vô địch Toán của Liên Xô năm 1946 (tương đương với kì thi quốc gia) đã phát biểu và chứng minh bài toán:

**Tìm số hạng đầu tiên trong  $10^4$  số hạng đầu của dãy Fibonacci mà tận cùng bằng 4 chữ số 0.**

Trong đề thi có nhiều bài toán nhưng bằng việc chứng minh một kết quả tổng quát tuyệt vời cho bài toán này mà cậu học sinh đã giành giải nhất trong kì thi đó. Bài toán năm đó cậu đã tổng quát lên từ bài toán gốc của đề và giải được là

**Hãy tìm tất cả các số hạng của dãy Fibonacci có tận cùng bằng 4 chữ số 0.**

Muốn chứng minh kết quả này, cần phải chứng minh được rằng chỉ có những số hạng có dạng  $F_{3p \cdot 2^{4-2}} = F_{12p}$  mới chia hết cho  $2^4$  và chỉ những số hạng có dạng  $F_{5^4 p} = F_{625p}$  mới chia hết cho  $5^4$ , từ đó suy ra tất cả số hạng cần tìm có dạng  $F_{7500p}, p \in \mathbb{N}$ .

Để giải bài toán này, đòi hỏi cần phải chịu khó tìm tòi, khám phá và kiên nhẫn!

**Bài 28.** (KHTN, vòng 3)

Cho dãy số dương  $(a_n)$  thỏa mãn

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{2}{3}, a_{n+2} < \frac{1}{4}a_{n+1}^2 + \frac{3}{4}a_n, n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng  $a_n$  hội tụ và tìm giới hạn của nó.

**Lời giải.**

Ta có  $a_1 = 1, a_2 = \frac{2}{3}$  nên bằng quy nạp, ta có thể chứng minh được rằng  $0 < a_n < 1, \forall n$ .

Từ đó suy ra  $a_{n+2} < \frac{1}{4}a_{n+1}^2 + \frac{3}{4}a_n < \frac{1}{4}a_{n+1} + \frac{3}{4}a_n, \forall n$ .

Dãy số này bị chặn và thỏa mãn hệ thức trên nên tương tự bài 23, ta có thể chứng minh nó có giới hạn.

Xét dãy số tương ứng là  $b_1 = 1, b_2 = \frac{2}{3}, b_{n+2} = \frac{1}{4}b_{n+1}^2 + \frac{3}{4}b_n, n = 1, 2, 3, \dots$

Dễ dàng thấy rằng  $a_n < b_n, \forall n > 2$ . Ta chứng minh được rằng  $\lim b_n = 0$ .

Từ đó, ta thấy rằng  $0 < a_n < b_n, \forall n > 2$  và  $\lim b_n = 0$  nên theo nguyên lí kẹp thì  $\lim a_n = 0$ .

Ta có đpcm.

**Nhận xét.**

Các bài dãy số có công thức truy hồi cấp 2, 3 thế này thuộc dạng khó và để đánh giá nó, đòi hỏi khá nhiều kĩ thuật. Bài toán này không những thế, còn kết hợp thêm dạng dãy số xác định không theo đẳng thức và khiến cho vấn đề trở nên rắc rối hơn nhiều.

Dạng này cũng đã từng xuất hiện trong đề chọn đội tuyển Việt Nam năm 1990 và 1991:

**1) Đề TST 1990:**

Cho bốn số thực dương  $A, B, a, b$ . Xét dãy số thực  $(x_n)$  thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1 = a, x_2 = b \\ x_{n+1} = A\sqrt[3]{x_n^2} + B\sqrt[3]{x_{n-1}^2}, n \geq 2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng tồn tại giới hạn  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$  và tìm giới hạn đó.

**2) Đề TST 1991:**

Cho dãy thực dương  $\{x_n\}$  được xác định bởi

$$x_1 = 1, x_2 = 9, x_3 = 9, x_4 = 1, x_{n+4} = \sqrt[4]{x_n \cdot x_{n+1} \cdot x_{n+2} \cdot x_{n+3}}, n \geq 1.$$

Chứng minh dãy này có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

**Bài 29.** (Chọn đội tuyển ĐHSP Hà Nội)

Cho dãy số  $(a_n), n \geq 1$  thỏa mãn:  $a_1 = 1, a_n = \frac{2n-3}{2n} a_{n-1}, n \geq 2$  và dãy  $(b_n)$  thỏa mãn

$b_n = \sum_{i=1}^n a_i, n \geq 1$ . Chứng minh dãy  $(b_n)$  có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó.

**Lời giải.**

Từ công thức xác định dãy đã cho, ta có  $2na_n = (2n-3)a_{n-1} \Leftrightarrow a_{n-1} = 2[(n-1)a_{n-1} - na_n], n > 1$ .

Do đó, ta có

$$b_n = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n 2[ia_i - (i+1)a_{i+1}] = 2[1 - (n+1)a_{n+1}].$$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng  $na_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n$ . Thật vậy,

- Với  $n = 1$ , ta có  $a_1 = 1$  nên khẳng định đúng.

- Giả sử khẳng định đúng với  $n = k \geq 1$ , tức là  $ka_k \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$ .

Ta có  $a_{k+1} = \frac{2(k+1)-3}{2(k+1)} a_k \leq \frac{2k-1}{2k+2} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ , ta cần chứng minh

$$\frac{2k-1}{2k+2} \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq \frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}} \Leftrightarrow (2k-1)\sqrt{k+1} \leq 2k\sqrt{k} \Leftrightarrow (4k^2 - 4k + 1)(k+1) \leq 4k^3 \Leftrightarrow 1 \leq 3k.$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên khẳng định trên cũng đúng với  $n = k + 1$ .

Theo nguyên lí quy nạp thì khẳng định được chứng minh.

Từ đó suy ra  $2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \leq 2[1 - (n+1)a_{n+1}] = b_n \leq 2$ .

Theo nguyên lí kẹp thì dãy  $b_n$  có giới hạn và giới hạn đó là 2.

**Nhận xét.**

Bài này có thể từ công thức truy hồi  $a_n = \frac{2n-3}{2n} a_{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{(2n-3)(2n-1)\dots 5 \cdot 3}{2n(2n-2)\dots 4 \cdot 2}$ .

Suy ra  $a_n^2 = \left[ \frac{(2n-3)(2n-5)\dots 5 \cdot 3}{2n(2n-2)\dots 4 \cdot 2} \right]^2 = \frac{2n-3}{4n^2(2n-2)^2} \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-4)^2} \dots \frac{5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1}{4^2 \cdot 2^2} < \frac{2n-3}{4n^2(2n-2)^2}$ .

Từ đó ta cũng có một bất đẳng thức tương tự lời giải ở trên  $2na_n \leq \frac{\sqrt{2n-3}}{2n-2}$ .

Ngoài ra, việc đánh giá dãy  $na_n$  có thể dùng định lí Stolz.

**Bài 30.** (Đại học KHTN Hà Nội, vòng 1)

Cho dãy số  $\{a_n\}$  xác định như sau

$$\begin{cases} a_1 = 6, a_2 = 14 \\ a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n - 24 \cdot (-1)^n, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Tính giới hạn  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ .

**Lời giải.**

Xét phương trình  $x^2 - 6x + 1 = 0$  có hai nghiệm là

$$x_1 = 3 - 2\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^2, x_2 = 3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2.$$

Phương trình sai phân ở trên có nghiệm tổng quát là:

$$a_n = \lambda_1 (3 - 2\sqrt{2})^n + \lambda_2 (3 + 2\sqrt{2})^n + \lambda_3 (-1)^n.$$

Thay vào công thức truy hồi, ta được:  $\lambda_3 (-1)^{n+2} = 6\lambda_3 (-1)^{n+1} - \lambda_3 (-1)^n - 24(-1)^n$  hay

$$(-1)^n (8\lambda_3 + 24) = 0.$$

Công thức này phải đúng với mọi  $n$  nên  $\lambda_3 = -3$ .

Tiếp tục so sánh với điều kiện  $a_1 = 6, a_2 = 14$ , ta tính được hai giá trị của tham số tương ứng là

$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ . Do đó, công thức tổng quát của dãy là:

$$a_n = \frac{1}{2} \left[ (3 - 2\sqrt{2})^n + (3 + 2\sqrt{2})^n \right] - 3(-1)^n, \forall n.$$

Đặt  $b_n = (1 - \sqrt{2})^n + (1 + \sqrt{2})^n, n = 1, 2, 3, \dots$  Ta có:

$$\begin{aligned} b_n b_{n+2} &= \left[ (1 - \sqrt{2})^n + (1 + \sqrt{2})^n \right] \left[ (1 - \sqrt{2})^{n+2} + (1 + \sqrt{2})^{n+2} \right] \\ &= (3 - 2\sqrt{2})^n + (3 + 2\sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n (1 + \sqrt{2})^n \left[ (1 - \sqrt{2})^2 + (1 + \sqrt{2})^2 \right] \\ &= (3 - 2\sqrt{2})^n + (3 + 2\sqrt{2})^n - 6(-1)^n \end{aligned}$$

Từ biến đổi trên, ta cũng có

$$\begin{aligned} b_{n+1}^2 - b_{n-1} b_{n+3} &= \left[ (1 - \sqrt{2})^{n+1} + (1 + \sqrt{2})^{n+1} \right]^2 - \left[ (1 - \sqrt{2})^{n-1} + (1 + \sqrt{2})^{n-1} \right] \left[ (1 - \sqrt{2})^{n+3} + (1 + \sqrt{2})^{n+3} \right] \\ &= 2(1 - \sqrt{2})^{n+1} (1 + \sqrt{2})^{n+1} - \left[ (1 - \sqrt{2})^3 + (1 + \sqrt{2})^3 \right] (1 - \sqrt{2})^{n+1} (1 + \sqrt{2})^{n+1} = 32(-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{16(-1)^n}{a_n} = \frac{32(-1)^n}{b_{n-1} b_{n+1}} = \frac{b_{n+1}^2 - b_{n-1} b_{n+3}}{b_{n-1} b_{n+1}} = \frac{b_{n+1}}{b_{n-1}} - \frac{b_{n+3}}{b_{n+1}}, n = 2, 3, 4, \dots$$

Ta xét hai trường hợp sau:

-Nếu  $n$  chẵn, đặt  $n = 2k, k \in \mathbb{Z}^+$ . Ta có:

$$\frac{16}{a_{2k}} = \frac{b_{2k+1}}{b_{2k-1}} - \frac{b_{2k+3}}{b_{2k+1}} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{16}{a_{2k}} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{b_{2k+1}}{b_{2k-1}} - \frac{b_{2k+3}}{b_{2k+1}} \right) = \frac{b_3}{b_1} - \frac{b_{2n+3}}{b_{2n+1}}.$$

-Nếu  $n$  lẻ, đặt  $n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}^+$ . Ta có:

$$\frac{16}{a_{2k+1}} = \frac{b_{2k+4}}{b_{2k+2}} - \frac{b_{2k+2}}{b_{2k}} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{16}{a_{2k+1}} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{b_{2k+4}}{b_{2k+2}} - \frac{b_{2k+2}}{b_{2k}} \right) = \frac{b_{2n+4}}{b_{2n+2}} - \frac{b_2}{b_0}.$$

Để dàng thấy rằng  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{b_{2n+3}}{b_{2n+1}} - \frac{b_{2n+4}}{b_{2n+2}} \right] = 0$  và  $\frac{b_3}{b_1} - \frac{b_2}{b_0} = 4$  nên  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{16}{a_i} = 4 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} = \frac{1}{4}$ .

Vậy giới hạn của dãy đã cho là  $\frac{1}{4}$ .

### Nhận xét.

Bài toán này cũng có hình thức tương tự như nhiều bài toán về giới hạn dãy số xuất hiện trong các năm gần đây là từ một dãy số  $x_n$  suy ra giới hạn của một dãy  $\{y_n\}$  khác được xác định bằng tổng  $y_n = \sum_{i=1}^n f(x_i)$  với  $f(x)$  là một hàm số nào đấy. Cách giải chung cho dạng này vẫn là từ công thức của  $\{x_n\}$ , biến đổi và đưa về sai phân để rút gọn tổng trên; từ đó xác định được biểu thức đơn giản hơn của  $y_n$ .

Tuy nhiên, ở bài toán này, ta thấy rằng việc biến đổi đó không còn dễ dàng được nhận ra nữa. Bằng cách xét thêm dãy số phụ và dùng nó để xử lý được lũy thừa  $(-1)^n$ , ta đã rút gọn được tổng đã cho ở dạng đặc biệt và xác định được giới hạn.

Chú ý thêm rằng tổng có dạng như trên còn gọi là chuỗi số và chuỗi có giới hạn hữu hạn gọi là chuỗi hội tụ (trường hợp ngược lại là chuỗi phân kỳ).

## C – MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ BIỆN LUẬN GIỚI HẠN DÃY SỐ

Các bài toán về biện luận dãy số là một dạng khó và xuất hiện khá nhiều trong các đề thi HSG, việc tham số hóa trong việc xác định các số hạng của dãy làm cho bài toán dãy số thông thường trở nên thú vị hơn khá nhiều. Để có thể giải quyết được các bài toán này, chúng ta cần phải có một số kiến thức căn bản để có thể tiếp tục có những ý tưởng rõ ràng hơn cho việc biến đổi và phân tích vấn đề. Chúng ta sẽ cùng xem xét một số bài toán liên quan đến các dạng này cùng một số phương pháp cơ bản để giải quyết chúng.

Trong phần này, chúng ta công nhận các kết quả quen thuộc về giới hạn của dãy như: dãy đơn điệu và bị chặn thì hội tụ, dãy các đoạn thắt lồng nhau có đúng một giao điểm chung thì hội tụ,...

Các bài toán về khảo sát giới hạn của dãy  $\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}, n = 1, 2, 3, \dots$  thông thường được thực hiện dựa theo tính chất và sự biến thiên của hàm số  $f(x)$ . Trên miền xác định của nó, số nghiệm của phương trình  $f(x) = x$  có ảnh hưởng trực tiếp đến sự thay đổi của hàm số và tính chất có giới hạn của dãy.

Ta biết rằng nếu  $f(x)$  đồng biến trên miền xác định của nó hoặc đồng biến trên miền giá trị của các số hạng của dãy thì dãy số đã cho sẽ đơn điệu. Ta có các trường hợp sau

- Nếu  $x_1 < x_2$  thì  $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_2 < x_3$  và tương tự, ta chứng minh được rằng

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots$$

tức là dãy này đồng biến.

- Nếu  $x_2 > x_1$  thì tương tự, ta có dãy nghịch biến.

- Nếu  $x_1 = x_2$  thì dãy này không đổi.

Do đó, sự biến thiên của dãy số trong trường hợp này phụ thuộc hoàn toàn vào các khoảng nghiệm của phương trình  $f(x) = x$ .

Và để khảo sát được tính hội tụ của dãy thì ta chỉ cần giải được phương trình này và tìm các chặn trên, chặn dưới tương ứng là xong. Dãy số trong trường hợp này dễ xử lí.

Trường hợp  $f(x)$  là hàm đơn điệu giảm, dễ dàng thấy rằng  $f(f(x))$  là hàm đơn điệu tăng. Khi đó, dựa theo kết quả phân trên thì từ việc so sánh  $f(f(x))$  với  $x$ , ta sẽ xác định được tính tăng giảm của hai dãy con  $\{x_{2n}\}$  và  $\{x_{2n+1}\}$ .



Hai dãy này đơn điệu ngược chiều nhau vì  $x_{2n} = f(x_{2n-1}), x_{2n+1} = f(x_{2n}), \dots$ . Trong một số trường hợp, hàm số đã cho không đơn điệu trên cả tập xác định mà chỉ đơn điệu trên miền giá trị mà các số hạng của dãy nhận được. Ta cần xác định miền đó càng hẹp càng tốt để trên đó, hàm số đã cho đơn điệu và áp dụng phương pháp đánh giá này trên dãy số đã cho.

Các bước cụ thể của cách giải dạng này được giới thiệu trong ví dụ sau.

**Ví dụ 1.**

Cho dãy số  $(u_n)$  thỏa mãn: 
$$\begin{cases} u_1 \in (0;1) \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 4u_n + 1}{u_n^2 + u_n + 1}, n \geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh dãy số  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

**Lời giải.**

Ta thấy  $u_n > 0, \forall n$  và từ:  $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 4u_n + 1}{u_n^2 + u_n + 1} = 1 + \frac{3u_n}{u_n^2 + u_n + 1} = 2 - \frac{(u_n - 1)^2}{u_n^2 + u_n + 1}$ , ta có:  $1 < u_n < 2, \forall n$ .

Xét hàm số:  $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 1}, x \in (1; 2) \Rightarrow f'(x) = \frac{3(1 - x^2)}{x^2 + x + 1} < 0$ .

Suy ra là hàm này nghịch biến trên  $(1; 2)$ .

Dãy số đó cho có thể viết dưới dạng: 
$$\begin{cases} u_1 \in (0;1) \\ u_{n+1} = f(u_n), n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Ta thấy:  $u_1 < u_3 \Rightarrow f(u_1) > f(u_3) \Rightarrow u_2 > u_4 \Rightarrow f(u_2) < f(u_4) \Rightarrow u_3 < u_5$

Tiến hành tương tự, suy ra:

$u_1 < u_3 < u_5 < \dots \Rightarrow$  Dãy  $u_{2n+1}$  tăng và bị chặn trên bởi 2 nên có giới hạn, giả sử là  $\alpha \in [1; 2]$ .

$u_2 > u_4 > u_6 > \dots \Rightarrow$  Dãy  $u_{2n}$  giảm và bị chặn dưới bởi 1 nên có giới hạn, giả sử là  $\beta \in [1; 2]$ .

Ta có: 
$$\begin{cases} u_{2n+1} = f(u_{2n}) \\ u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) \end{cases} \text{ Chuyển qua giới hạn, ta có } \begin{cases} \alpha = f(\beta) \\ \beta = f(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha - \beta &= f(\beta) - f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha - \beta = \frac{\beta^2 + 4\beta + 1}{\beta^2 + \beta + 1} - \frac{\alpha^2 + 4\alpha + 1}{\alpha^2 + \alpha + 1} \\ \Leftrightarrow \alpha - \beta &= 3 \left( \frac{\beta}{\beta^2 + \beta + 1} - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \alpha + 1} \right) \Leftrightarrow \alpha - \beta = \frac{3(\alpha - \beta)(\alpha\beta - 1)}{(\alpha^2 + \alpha + 1)(\beta^2 + \beta + 1)} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 3(\alpha\beta - 1) = (\alpha^2 + \alpha + 1)(\beta^2 + \beta + 1) \end{cases} \end{aligned}$$

Ta thấy phương trình thứ hai không có giá trị  $\alpha, \beta \in [1; 2]$  thỏa mãn  $\alpha = \beta = t$ .

Do đó,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = t$ , hai dãy con đó có cùng giới hạn là  $t$ .

Ta thấy,  $t$  phải thỏa mãn đẳng thức:  $t = \frac{t^2 + 4t + 1}{t^2 + t + 1} \Leftrightarrow t^3 - 3t = 1$  (\*).

Ta sẽ chứng minh rằng nghiệm  $|t| \leq 2$ . Đặt  $t = 2 \cos \varphi$ ,  $\varphi \in [0; 2\pi]$ , thay vào phương trình (\*):

$$8 \cos^3 \varphi - 6 \cos \varphi = 1 \Leftrightarrow \cos 3\varphi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{9} + k \frac{2\pi}{3}. \text{ Do } \varphi \in [0; 2\pi] \text{ nên}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{9}; \frac{5\pi}{9}; \frac{7\pi}{9}, \text{ tương ứng với các nghiệm của (*) là: } t = 2 \cos \frac{\pi}{9}; 2 \cos \frac{5\pi}{9}; 2 \cos \frac{7\pi}{9}.$$

Phương trình (\*) đó có đủ 3 nghiệm nên nó không có nghiệm  $|t| > 2$ .

Trong các nghiệm này, chỉ có  $t = 2 \cos \frac{\pi}{9} \in [1; 2]$  thỏa mãn và đây cũng chính là giới hạn cần tìm.

Vậy dãy số  $u_n$  có giới hạn hữu hạn và  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2 \cos \frac{\pi}{9}$ .

**Nhận xét.** Như vậy các dãy số có dạng  $x_{n+1} = f(x_n)$  và hàm  $f(x)$  đơn điệu gần như đã được giải quyết hoàn toàn. Tuy nhiên, trong các trường hợp khác, dãy này không đơn điệu thì việc biện luận phức tạp hơn nhiều. Ta tiến hành khảo sát dãy đã cho và dùng nguyên lý kẹp để suy ra giới hạn. Các bước giải bài toán này được thể hiện trong ví dụ sau:

### Ví dụ 2.

Cho dãy số xác định bởi công thức  $u_1 = a \in (0, 1)$ ,  $u_{n+1} = \sqrt[9]{\frac{u_n + k}{k u_n + 1}}$ ,  $k > 1, n = 1, 2, 3, \dots$

Chứng minh rằng  $\lim u_n = 1$ .

### Lời giải.

Từ công thức xác định của dãy số, bằng quy nạp, ta có được  $u_n \in (0, 1), \forall n$ .

Xét hàm số  $f(x) = \sqrt[9]{\frac{x+k}{kx+1}}$ ,  $k > 1, x \in [0,1]$ . Ta có

$$f'(x) = \frac{1}{9} \frac{1-k^2}{(kx+1)^2} \sqrt[9]{\left(\frac{kx+1}{x+k}\right)^8} = \frac{1-k^2}{9(kx+1)\sqrt[9]{(kx+1)(x+k)^8}} \Rightarrow |f'(x)| < \frac{1}{9}, \forall x \in [0;1]$$

Nếu dãy đã cho hội tụ thì giới hạn của nó phải là nghiệm của phương trình

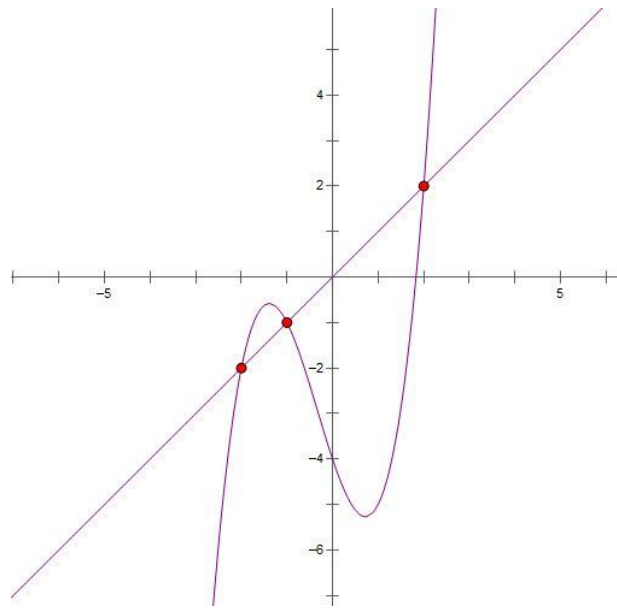
$$f(x) = x \Leftrightarrow x = \sqrt[9]{\frac{x+k}{kx+1}} \Leftrightarrow kx^{10} + x^9 = x+k \Leftrightarrow k(x^{10}-1) + x(x^8-1) = 0 \Leftrightarrow x=1 > 0.$$

Theo định lí Lagrange thì tồn tại  $c$  thuộc  $(0,1)$ :  $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(c) \Rightarrow |f(x)-f(1)| < \frac{1}{9}|x-1|$

Ta cũng có  $f(1)=1$  nên  $|u_{n+1}-1| = |f(u_n)-1| < \frac{1}{9}|u_n-1| < \dots < \frac{1}{9^n}|a-1|$ .

Theo nguyên lí kẹp thì  $\lim(u_n-1) = 0$  hay  $\lim u_n = 1$ .

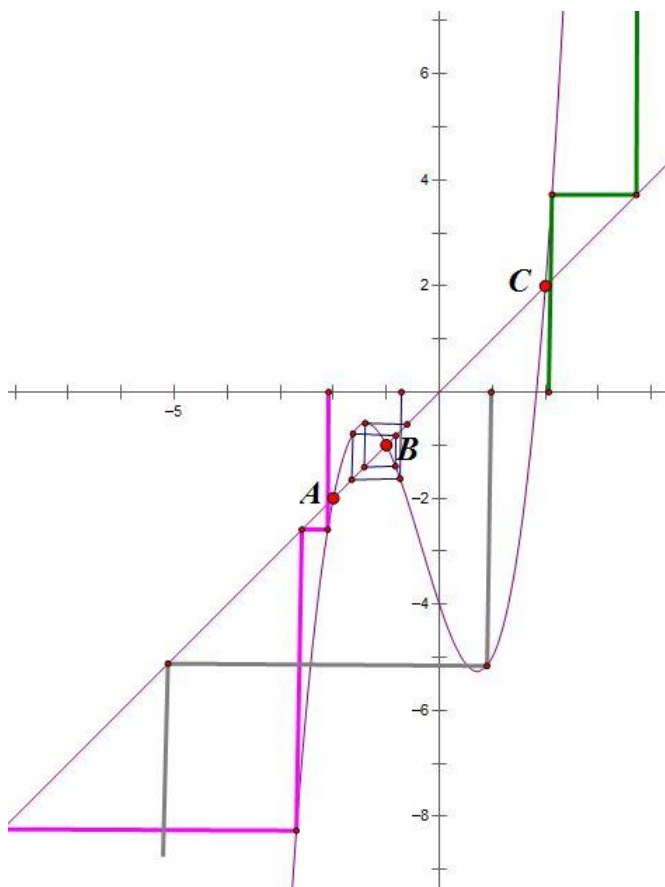
**Nhận xét.** Trường hợp còn lại cần quan tâm là dãy số xác định theo công thức tương tự trên nhưng hàm số  $f(x)$  không đơn điệu và không thỏa mãn tính chất  $0 < |f(x)| < q < 1$ . Khi đó, ta phải dựa vào sự tương giao giữa đồ thị hàm số  $y = f(x)$  và hàm số  $y = x$  để biện luận giới hạn dãy, khảo sát tính hội tụ của dãy. Ta xét hàm số cho bởi đồ thị minh họa dưới đây:



Giả sử ta biểu diễn các số hạng của dãy trên trục hoành của hệ trục tọa độ. Ta thấy rằng đường thẳng  $y = x$  cắt đồ thị (C) tương ứng tại ba điểm phân biệt, giả sử chúng có hoành độ lần lượt là  $x_1 < x_2 < x_3$ . Khi đó, các số hạng của dãy số sẽ được xác định bằng cách từ một điểm bất kì thuộc trục hoành, đặt là  $u_1$ . Ta vẽ đường thẳng song song với trục tung cắt đồ thị (C) tại một

điểm, tung độ của điểm đó chính là  $u_2 = f(u_1)$ . Ta lại vẽ đường thẳng qua điểm này và song song với trục hoành, cắt đường thẳng  $y = x$  tại một điểm, hình chiếu của điểm đó lên trục hoành chính là vị trí của  $u_2$ . Cứ tiếp tục như thế, ta xác định được vị trí của tất cả các số hạng của dãy. Khi đó, dãy đã cho hội tụ khi các vị trí này tiến về một điểm nào đó trên trục hoành. Trong hình vẽ dưới đây, các đường màu xanh ở bìa phải cho ta minh họa về một dãy số có  $u_1$  lớn hơn nghiệm lớn nhất của phương trình là  $x_3$ , đường màu hồng ở bìa trái cho ta minh họa về một dãy số có  $u_1$  bé hơn nghiệm nhỏ nhất của phương trình là  $x_1$ . Dễ thấy rằng hai đường này không cho ta một dãy hội tụ nào cả. Trong trường hợp số hạng  $u_1$  trùng với một trong ba nghiệm đã nêu thì ta có dãy hằng nên tất nhiên nó hội tụ. Do đó, thông thường thì một dãy hội tụ khi  $u_1 \in (x_1, x_3)$  và giới hạn tương ứng chính là  $x_2$  (vẫn có trường hợp thuộc miền đó nhưng không hội tụ).

Đây là xét riêng trong trường hợp phương trình  $f(x) = x$  có ba nghiệm phân biệt. Các trường hợp khác thì tùy vào số nghiệm và chiều biến thiên của hàm số trên từng khoảng mà ta có các kết quả khác nhau tương ứng.



Ta sẽ xem xét lời giải bài này qua ví dụ sau

### Ví dụ 3.

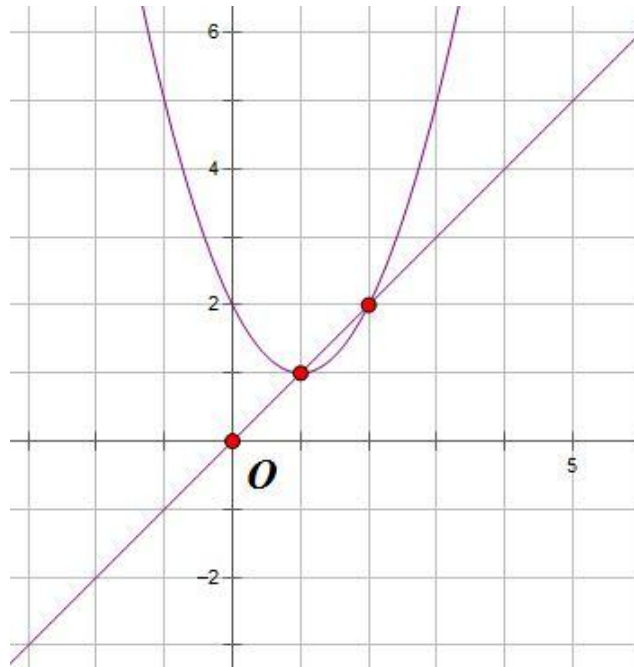
Tìm điều kiện của  $a$  sao cho dãy số xác định như sau hội tụ:

$$x_1 = a, x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2, n = 1, 2, 3, \dots$$

### Lời giải.

Xét hàm số tương ứng là  $f(x) = x^2 - 2x + 2$  với đồ thị minh họa trong hình bên dưới.

Phương trình  $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$  có hai nghiệm phân biệt là  $x_1 = 1, x_2 = 2$  nên  $f(x) > x$  với mọi  $x < 1 \vee x > 2$  và  $f(x) \leq x$  với  $1 \leq x \leq 2$ .



Ta xét các trường hợp sau:

-Nếu  $a = 1$  thì  $x_n = 1, \forall n$  nên dãy đã cho hội tụ.

-Nếu  $a = 2$  thì  $x_n = 2, \forall n$  nên dãy đã cho cũng hội tụ.

-Nếu  $a > 2$  thì  $x_2 = f(a) > a = x_1$  và đồng thời hàm số  $f'(x) = 2x - 2 > 0$  nên đồng biến. Khi đó, dãy này tăng và không bị chặn trên nên không hội tụ (vì nếu dãy hội tụ thì nó phải hội tụ về hai nghiệm của phương trình  $f(x) = x$  nhưng điều này không thể xảy ra).

-Ta thấy rằng chỉ cần xét  $a \in (1; 2)$  vì rõ ràng nếu  $a < 1$  thì  $x_2 = f(x_1) = a^2 - 2a + 2 > 1$  và ta có thể tiến hành khảo sát dãy từ vị trí  $x_2$ . Ta thấy khi  $a \in (1; 2)$  thì

$$x_2 = f(a) = a^2 - 2a + 2 = a(a - 2) + 2 < 2$$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng  $x_n \in (1; 2), \forall n$ .

Khi đó, hàm số đã cho, xét trên miền  $(1;2)$  có đạo hàm  $f(x) = 2x - 2 > 0$  nên đồng biến, đồng thời  $x_2 = f(x_1) < x_1$  nên dãy này giảm và bị chặn dưới bởi 1 nên hội tụ. Gọi giới hạn đó là  $l$  thì ta có  $l \in [1;2)$  và  $l = l^2 - 2l + 2$  hay  $l = 1$ .

-Ta sẽ tìm điều kiện để tồn tại một giá trị  $x_k$  của dãy sao cho  $x_k \in (1;2)$ , khi đó

$$1 \leq x_{k+1} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x_k^2 - 2x_k + 2 \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_k^2 - 2x_k + 1 \geq 0 \\ x_k^2 - 2x_k \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x_k \leq 2.$$

Điều kiện ở trên lại có thể viết thành  $0 \leq x_{k-1}^2 - 2x_{k-1} + 2 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x_{k-1} \leq 2$ .

Do đó, nếu như tồn tại một giá trị của dãy sao cho  $x_k \in [0;2]$  thì tất cả số hạng kể từ đó cũng sẽ thuộc miền này, nói riêng, ta có điều kiện  $a \in [0;2]$ .

Vậy các giá trị cần tìm của  $a$  là  $a \in [0;2]$ .

### Nhận xét.

Một số trường hợp khác hàm số xác định dãy có dạng phân thức và không những ta cần phải biện luận giới hạn của dãy mà còn phải tìm điều kiện xác định của tất cả các phần tử của dãy. Khi đó, ta cần phải vận dụng tính đơn điệu và song ánh của hàm số để dùng hàm ngược và xây dựng các dãy tương ứng mà nếu các phần tử của dãy ban đầu nhận một trong các giá trị đó thì đến một lúc nào đó sẽ không xác định, dãy đã cho chỉ cần tránh đi các phần tử đó thì tất cả các số hạng đều xác định. Việc biện luận giới hạn dãy trong trường hợp này cần phải cẩn thận, tập trung khai thác các tính chất đặc trưng của hàm số để đơn giản hóa các bước tính toán và phân tích vấn đề. Dưới đây chúng ta sẽ phân tích lời giải một bài toán minh họa cho trường hợp này.

### Ví dụ 4.

Cho dãy số  $\{x_n\}$  thỏa mãn  $x_1 = a, x_{n+1} = \frac{2x_n^3}{3x_n^2 - 1}, n = 1, 2, 3, \dots$

Hãy tìm tất cả các giá trị  $a$  sao cho dãy này xác định và có giới hạn hữu hạn.

### Lời giải.

Đặt  $f(x) = \frac{2x^3}{3x^2 - 1}, x \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Ta có  $u_1 = a, u_{n+1} = f(u_n), n = 1, 2, 3, \dots$

Ta có  $f'(x) = \frac{6x^4 - 6x^2}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{6x^2(x^2 - 1)}{(3x^2 - 1)^2}$ .

Suy ra hàm này tăng trên  $(-\infty; 1] \cup [1; +\infty)$  và giảm trên  $\left(-1; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right)$ .

Do  $f(x)$  là hàm số lẻ nên nếu thay  $x_1 = -a$  thì tất cả số hạng của dãy sẽ đổi dấu. Vì thế, ta chỉ cần xét đặc trưng trên miền dương của tập xác định.

Nếu  $x_1 = a = 0$  thì tất cả các số hạng của dãy là 0 nên thỏa mãn yêu cầu đề bài. Ta xét  $a > 0$ , dựa vào sự biến thiên của hàm  $f(x)$ , ta sẽ tìm điều kiện của giá trị  $a$ .

Vì  $f(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^-} = -\infty$  nên do tính đơn điệu và liên tục của hàm  $f(x)$  thì với  $c \in (-\infty; 0]$

thì tồn tại duy nhất  $x \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$  sao cho  $f(x) = c$ .

Ta đặt  $a_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$  thì tồn tại duy nhất  $a_1 \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$  sao cho  $f(a_1) = -a_0$ , tương tự tồn tại duy nhất

$a_2 \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$  sao cho  $f(a_2) = -a_1$ . Tương tự, ta xây dựng các số hạng cho dãy  $\{a_n\}$  vừa nêu.

Ta thấy  $a_1 < a_0$  và hàm số  $f(x)$  đơn điệu giảm trên miền  $\left[0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$  nên

$$f(a_0) < f(a_1) \Leftrightarrow -a_1 < -a_2 \Leftrightarrow a_1 > a_2$$

Tương tự với các số hạng còn lại, tức là dãy này đơn điệu giảm. Hơn nữa, dãy này bị chặn dưới

bởi 0 nên có giới hạn, đặt là  $l$ . Ta thấy  $f(x) + x = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3}{3x^2 - 1} + x = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$ .

Xét  $f(x) + x$  trên miền  $0 < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$  thì  $f(x) + x < 0$  khi  $\frac{\sqrt{5}}{5} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$  và  $f(x) + x > 0$  khi

$0 < x < \frac{\sqrt{5}}{5}$ . Do đó,  $f(a_n) + a_n = a_n - a_{n-1} < 0$  nên  $a_n \in \left(\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ , suy ra  $\lim a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

Từ việc khảo sát dãy số này, ta có được điều kiện sau:

- Nếu tồn tại  $n$  sao cho  $a = a_n$  thì có hai trường hợp, nếu  $a = a_n$  thì  $x_2 = f(x_1) = f(a_n) = -a_{n-1}$ ; còn nếu  $a = -a_n$  thì  $x_2 = f(x_1) = f(-a_n) = -f(a_n) = a_{n-1}$ .

Tức là nếu  $a = a_n$  thì  $x_2 = a_{n-1}, x_3 = a_{n-2}, \dots$  hay  $x_{n+1} = a_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$  và  $\{x_n\}$  không xác định.

- Còn nếu  $a = \frac{\sqrt{5}}{5}$  thì dễ thấy rằng  $x_2 = -x_1, x_3 = -x_2, x_4 = -x_3, \dots$  và dãy này không có giới hạn.

Ta sẽ chứng minh rằng nếu  $a \neq a_n, \forall n$  và  $a \neq \frac{\sqrt{5}}{5}$  thì dãy đã cho xác định và hội tụ.

Thật vậy, ta có các trường hợp sau:

- Nếu  $a = 0$  thì tất cả các phân tử của dãy  $\{x_n\}$  đều bằng 0 nên hội tụ.
- Nếu  $0 < a < \frac{\sqrt{5}}{5}$  thì  $0 < f(a) < a$  nên  $x_2 < x_1$ . Suy ra dãy  $\{x_n\}$  giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên có giới hạn, đặt là  $c$ . Do  $0 < a < \frac{\sqrt{5}}{5}$  và  $f(c) = c$  nên  $c = 0$ . Do đó, trong trường hợp này thì dãy có giới hạn là 0.
- Nếu tồn tại  $k$  sao cho  $x_k = 1$  thì tất cả các số hạng của dãy từ đó trở đi đều bằng 1 nên cũng hội tụ. Còn nếu tồn tại  $k$  sao cho  $\frac{\sqrt{3}}{3} < x_k < 1$  hoặc  $x_k > 1$  thì do  $f(x)$  giảm trên  $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right]$  và tăng trên  $[1; +\infty)$  nên  $x_{k+1} > 1$ . Dễ thấy  $1 < f(x) < x, \forall x > 1$  nên từ số hạng này trở đi thì dãy giảm và bị chặn dưới bởi 1 nên hội tụ. Từ các điều này, ta suy ra nếu  $a > \frac{\sqrt{3}}{3}$  thì dãy đã cho hội tụ. Do đó, dãy đã cho cũng hội tụ với  $|a| > \frac{\sqrt{3}}{3}$ .
- Nếu  $\frac{\sqrt{5}}{5} < a < \frac{\sqrt{3}}{3}$  và  $a \neq a_n, \forall n$  thì  $f(a) \in (-a_{k-2}, -a_{k-1}) \Rightarrow |x_2| = |f(x_1)| \in (a_{k-1}, a_{k-2})$ . Tương tự,  $|x_3| \in (a_{k-2}, a_{k-3})$  và suy ra được rằng  $|x_k| \in (a_1, a_0)$  và cuối cùng  $|a_{k+1}| > \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Trường hợp này đã được xét ở trên nên dãy đã cho cũng hội tụ.

Nói tóm lại, dãy  $\{x_n\}$  xác định và có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi  $|a| > \frac{\sqrt{3}}{3}$  hoặc  $|a| < \frac{\sqrt{3}}{3}$  và  $a \neq a_n, \forall n$  với dãy  $\{a_n\}$  xác định như trên.



## D – MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỌN LỌC VỀ GIỚI HẠN DÃY SỐ

### Bài 1.

Cho dãy số  $(a_n)$  xác định bởi  $a_0 \in \mathbb{R}, a_n = a_{n-1}^2 - a_{n-1}, n \geq 1$ . Hãy tìm tất cả các giá trị của  $a_0$  để dãy số này hội tụ.

### Lời giải.

Ta thấy rằng nếu tồn tại số  $k$  nào đó mà  $0 \leq a_k \leq 1$  thì

$$-\frac{1}{4} \leq a_{k+1} \leq 0, 0 \leq a_{k+2} \leq 1, -\frac{1}{4} \leq a_{k+3} \leq 0, 0 \leq a_{k+4} \leq 1, \dots$$

Khi đó, dãy  $\{a_{k+2l}\}$  sẽ đơn điệu giảm vì

$$a_{k+2l+2} - a_{k+2l} = a_{k+2l+1}^2 - a_{k+2l+1} - a_{k+2l} = a_{k+2l}^4 - 2a_{k+2l}^3 = a_{k+2l}^3(a_{k+2l} - 2) \leq 0$$

Dãy này cũng bị chặn dưới nên tồn tại giới hạn  $c = \lim_{l \rightarrow +\infty} a_{k+2l}$ . Chuyển đẳng thức tương ứng ở trên qua giới hạn thì ta cần xét phương trình  $c = c + c^4 - c^3$  với  $c \leq 1$  thì ta được  $c = 0$ .

Dãy  $\{a_{k+2l+1}\}$  tương tự cũng sẽ đơn điệu giảm và bị chặn dưới nên có giới hạn. Ta có

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} a_{k+2l+1} = \lim_{l \rightarrow +\infty} (a_{k+2l}^2 - a_{k+2l}) = c^2 - c = 0$$

Suy ra  $\lim a_n = 0$ .

Tiếp theo, ta sẽ chứng tỏ rằng tồn tại giá trị  $k$  sao cho  $0 \leq a_k \leq 2$ , khi đó  $a_{k+1} \leq a_k \leq 2$ . Nếu  $a_{k+1} \geq 0$  thì ta lại có  $a_{k+2} \leq a_{k+1} \leq 2$  và tương tự như vậy. Do đó, hoặc là dãy này gồm các phần tử không âm và đơn điệu tăng, tức là nó có giới hạn hoặc là với  $l \geq 1$  nào đó mà  $a_{k+1} < 0 \leq a_{k+l-1}$ . Như phần chứng minh ở trên, ta thấy rằng khi đó  $0 \leq a_{k+l-1} \leq 1$  và dãy này cũng có hội tụ.

Do đó, ta đã chứng minh được rằng dãy đã cho hội tụ khi  $0 \leq a_1 \leq 2$ .

Ta xét bất phương trình  $0 \leq a_2 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq a_1^2 - a_1 \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq a_1 \leq 0 \vee 1 \leq a_1 \leq 2$ .

Do đó, ta có thêm điều kiện là  $-1 \leq a_1 \leq 0$  thì dãy sẽ có giới hạn hữu hạn.

Ta sẽ chứng minh rằng các trường hợp còn lại sẽ dẫn đến một dãy không có giới hạn hữu hạn.

Thật vậy, xét  $a_1 < -1 \vee a_1 > 2$  thì  $a_2 = a_1^2 - a_1 > 2$  và  $a_3 = a_2 + a_2(a_2 - 2) > a_2$ .

Tương tự với các giá trị tiếp theo, tức là ta đã chứng minh được rằng dãy này tăng thực sự.

Nếu tồn tại  $c$  sao cho  $\lim a_n = c$  thì  $c^2 - c = c \Leftrightarrow c = 0 \vee c = 2$ , nhưng những giá trị này không thể là giới hạn của dãy đã cho được vì  $a_n > a_2 > 2, \forall n$  và dãy đã cho không có giới hạn trong trường hợp này.

Vậy dãy đã cho hội tụ khi và chỉ khi  $-1 \leq a_1 \leq 2$ .

## **Bài 2.**

Khảo sát sự hội tụ của dãy số  $\{u_n\}$  xác định bởi  $u_0 = a \geq 0, u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n^2}$ .

### **Lời giải.**

Bằng quy nạp, ta có thể chứng minh được rằng  $u_n \geq 0$  với mọi  $n$ .

Xét hàm số  $f: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty), f(x) = \frac{2}{1+x^2}$  là hàm liên tục. Ta có:

$$\forall x \in [0; +\infty), f(x) = x \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Do đó, nếu  $\{u_n\}$  hội tụ thì nó chỉ có thể hội tụ đến 1.

Hàm số  $f$  khả vi trên  $[0; +\infty)$  và  $\forall x \in [0; +\infty), f'(x) = -\frac{4x}{(1+x^2)^2} \leq 0$ , suy ra  $f$  giảm.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh  $\lim u_{2k} = 1$  và  $\lim u_{2k+1} = 1$ .

Xét  $g = f \circ f: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty), g(x) = \frac{2(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2 + 4}$  thì  $g$  là một hàm tăng vì  $f$  giảm.

$$\text{Ta tính } g(x) - x = -\frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{(1+x^2)^2 + 4} = -\frac{(x-1)^3(x^2 + x + 2)}{(1+x^2)^2 + 4}$$

Ta xét các trường hợp sau:

*\*Trường hợp 1:*  $u_0 = a \in [0, 1]$ . Khi ấy với mọi  $k \in \mathbb{N}$ , ( $u_{2k} \in [0, 1]$  và  $u_{2k+1} \in [1; \infty)$ ) Vậy với mọi  $k \in \mathbb{N}$ , ta có

$$u_{2k+2} - u_{2k} = g(u_{2k}) - u_{2k} \geq 0$$

$$u_{2k+3} - u_{2k+1} = g(u_{2k+1}) - u_{2k+1} \leq 0$$

Do đó  $\{u_{2k}\}$  tăng và  $\{u_{2k+1}\}$  giảm.

Hơn nữa, vì  $(\forall p \in \mathbb{N}, u_{2k} \leq 1 \leq u_{2k+1})$ , nên ta suy ra rằng  $\{u_{2k}\}$  hội tụ đến một giới hạn  $L_1$  thuộc  $[0; \infty)$  và  $\{u_{2k+1}\}$  hội tụ đến một giới hạn  $L_2$  thuộc  $[0; \infty)$ .

Vì  $g$  liên tục trên  $[0; \infty)$  và vì phương trình  $g(x) = x$  có nghiệm duy nhất  $x = 1$  trên  $[0; \infty)$  nên ta suy ra  $L_1 = L_2 = 1$ . Cuối cùng ta được  $\lim u_n = 1$ .

\*Trường hợp 2:  $u_0 = a \in [1, \infty]$ :

Vì  $u_1 = f(u_0) = f(a) \in [0, 1]$  ta quy về trường hợp trên (bằng cách thay  $u_0$  bởi  $u_1$ ) và có cùng một kết luận  $\lim u_n = 1$ .

### Bài 3.

Tìm tất cả các giá trị của  $a$  để dãy số  $\{x_n\}$  xác định bởi  $x_0 = a, x_{n+1} = 2 - x_n^2$  có giới hạn hữu hạn.

#### Lời giải.

Hàm số  $f(x) = 2 - x^2$  tăng trên  $(-\infty, 0)$  và giảm trên  $(0, +\infty)$ .

Phương trình  $f(x) = x$  có hai nghiệm là  $x = -2$  và  $x = 1$ . Ta xét các trường hợp sau:

- Đầu tiên, nhận xét rằng nếu  $a < -2$  thì do  $f : (-\infty, -2) \rightarrow (-\infty, -2)$  và là hàm tăng, hơn nữa  $x_1 = 2 - a^2 < x_0$  nên dãy số  $\{x_n\}$  giảm. Nếu dãy  $\{x_n\}$  bị chặn dưới thì nó hội tụ về nghiệm của phương trình  $f(x) = x$ , điều này mâu thuẫn vì dãy giảm và  $x_0 < -2$ .

Do đó, trong trường hợp này  $\{x_n\}$  không bị chặn dưới, tức không có giới hạn hữu hạn.

Nếu  $a > 2$  thì  $x_1 < -2$  và ta cũng suy  $\{x_n\}$  không có giới hạn hữu hạn.

- Với  $a = -2$  hoặc  $a = 1$  thì dãy số có giới hạn vì đều là các dãy hằng. Xét  $x_0 \in [-2, 2]$ .

Ta chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi tồn tại một giá trị  $n$  nào đó sao cho  $x_n = -2$  hoặc  $x_n = 1$ .

Thật vậy, giả sử  $x_n$  có giới hạn hữu hạn là  $b$  và  $x_n \notin \{-2, 1\}$  với mọi  $n$ .

Khi đó  $b = -2$  hoặc  $b = 1$ . Giả sử  $b = -2$  thì tồn tại  $N_0$  sao cho  $x_n$  nằm trong lân cận  $-2$  với mọi  $n \geq N_0$ . Nhưng nếu  $x_n = -2 + \varepsilon$  thì  $x_{n+1} = -2 + 4\varepsilon - \varepsilon^2 > x_n$ , suy ra dãy  $\{x_n\}$  tăng kể từ  $N_0$  và không thể dần về  $-2$ . Nếu  $b = 1$  kể từ  $n \geq N_0$  nào đó  $x_n$  thuộc lân cận  $1$ . Ta có:

$$x_{n+2} - x_n = 2 - (2 - x_n^2)^2 - x_n = (2 - x_n - x_n^2)(x_n^2 - x_n - 1)$$

Tại lân cận  $1$  thì  $x_n^2 - x_n - 1 < 0$ . Vì nếu  $x_n < 1$  thì  $x_{n+1} > 1$  (và ngược lại  $x_n > 1$  thì  $x_{n+1} < 1$ , chúng ta đang xét trong lân cận điểm  $1$ ) nên có thể giả sử  $x_n > 1$ .

Khi đó  $2 - x_n - x_n^2 < 0$  suy ra  $x_{n+2} > x_n$ . Tiếp tục như vậy, suy ra  $1 < x_n < x_{n+2} < \dots < x_{n+2k} < \dots$ , mâu thuẫn với giả thiết  $b = 1$ . Do đó, điều giả sử là sai, tức là dãy số chỉ có giới hạn khi tồn tại  $n$  sao cho  $x_n = -2$  hoặc  $x_n = 1$ .

Sau khi thu được kết quả này, ta sử dụng hàm ngược  $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{2-x}$  để xây dựng tất cả các giá trị  $a$  thỏa mãn điều kiện đầu bài.

**Bài 4.** (Đề dự bị VMO 2008)

Cho số thực  $a$  và dãy số thực  $\{x_n\}$  xác định bởi:

$$x_1 = a, x_{n+1} = \ln(3 + \cos x_n + \sin x_n) - 2008 \text{ với mọi } n = 0, 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng dãy số  $\{x_n\}$  có giới hạn hữu hạn khi  $n$  tiến đến dương vô cùng.

**Lời giải.**

Đặt  $f(x) = \ln(3 + \cos x + \sin x) - 2008$  thì  $f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{3 + \sin x + \cos x}$ .

Từ đó, sử dụng đánh giá  $|\cos x - \sin x| \leq \sqrt{2}$ ,  $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$  ta suy ra

$$|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} = q < 1$$

Áp dụng định lý Lagrange cho  $x, y$  thuộc  $\mathbb{R}$ , do hàm  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  nên tồn tại  $z$  thuộc  $\mathbb{R}$  sao cho:  $f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$

Từ đó suy ra  $|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$  với mọi  $x, y$  thuộc  $\mathbb{R}$ .

Gọi  $l$  là nghiệm của phương trình  $f(x) = x$  hay  $f(l) = l$ .

Ta có  $|f(u_n) - f(l)| < q|u_n - l| = q|f(u_{n-1}) - f(l)| < q^2|u_{n-1} - l| \dots < q^{n-1}|u_1 - l|$ .

Do  $q^{n-1} \rightarrow 0$  khi  $n \rightarrow +\infty$ . Theo nguyên lí kẹp thì khi  $n \rightarrow +\infty$ , dãy đã cho có giới hạn là  $l$ .

Ta có đpcm.

**Bài 5.** (VMO 2000, bảng A và B)

Cho dãy số  $\{x_n\}$  xác định như sau

$$x_0 = 0, x_{n+1} = \sqrt{c - \sqrt{c + x_n}}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Tìm tất cả các giá trị của  $c$  để với mọi giá trị  $x_0 \in (0, c)$ ,  $x_n$  xác định với mọi  $n$  và tồn tại giới hạn hữu hạn  $\lim x_n$ .

**Lời giải.**

Để  $x_1$  tồn tại thì ta thì  $c - \sqrt{c + x_0} \geq 0$  với mọi  $x_0 \in (0, c) \Leftrightarrow c(c-1) \geq x_0$  với mọi  $x_0 \in (0, c)$ , suy ra  $c \geq 2$ . Với  $c \geq 2$  thì  $0 < x_1 < \sqrt{c}$ .

Nếu  $0 < x_n < \sqrt{c}$  thì  $c - \sqrt{c + x_n} > c - \sqrt{2c} > 0$ , suy ra  $x_{n+1}$  tồn tại và ta cũng có  $0 < x_{n+1} < \sqrt{c}$ .

Đặt  $f(x) = \sqrt{c - \sqrt{c + x}}$  thì  $f'(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{c + x}\sqrt{c - \sqrt{c + x}}$ .

Với mọi  $x \in (0, \sqrt{c})$  ta có  $(c + x)(c - \sqrt{c + x}) > c(c - \sqrt{c + \sqrt{c}}) \geq 2(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}) > \frac{1}{4}$ .

Từ đó suy ra  $|f'(x)| < q < 1$  với mọi  $x \in (0, \sqrt{c})$ , tức  $f(x)$  là hàm số co trên  $(0, \sqrt{c})$ , suy ra dãy số đã cho hội tụ.

Do đó, tất cả các giá trị  $c$  cần tìm là  $c \geq 2$ .

**Bài 6.**

Cho dãy số  $\{x_n\}$  xác định bởi  $x_1 \in (1, 2)$  và  $x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{x_n^2}{2}$ .

Chứng minh rằng  $\{x_n\}$  có giới hạn hữu hạn khi  $n$  dần đến vô cực. Tìm giới hạn đó.

**Lời giải.**

Giả sử  $x_n$  có giới hạn là  $a$  thì  $a = 1 + a - \frac{a^2}{2} \Rightarrow a = \sqrt{2}$ . Ta sẽ dùng định nghĩa để chứng minh

$$\lim x_n = \sqrt{2}. \text{ Ta có } |x_{n+1} - \sqrt{2}| = \left| 1 + x_n - \frac{x_n^2}{2} - \sqrt{2} \right| = |x_n - \sqrt{2}| \left| \frac{\sqrt{2} + x_n - 1}{2} \right|.$$

Tiếp theo ta có thể chứng minh bằng quy nạp rằng  $1 < x_n < \frac{3}{2}$  với mọi  $n = 2, 3, 4, \dots$

$$\text{Từ đó, suy ra } \frac{\sqrt{2}}{2} < \left| \frac{\sqrt{2} + x_n - 1}{2} \right| < \frac{\sqrt{2} + \frac{1}{2}}{2} = q < 1. \text{ Suy ra } |x_{n+1} - \sqrt{2}| < q |x_n - \sqrt{2}|, \forall n.$$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được  $|x_{n+1} - \sqrt{2}| < q^n |x_1 - \sqrt{2}|, \forall n$

Vì  $0 < q < 1$  nên với  $n$  đủ lớn thì  $q^n$  nhỏ tùy ý, suy ra  $\lim x_n = \sqrt{2}$ .

**Bài 7. (VMO 1998, bảng A)**

$$\text{Cho dãy số xác định bởi } \begin{cases} x_1 = a \geq 1 \\ x_{n+1} = 1 + \ln \left( \frac{x_n^2}{1 + \ln x_n} \right), n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy này có giới hạn hữu hạn không phụ thuộc vào giá trị của  $a$ .

**Lời giải.**

-Nếu  $a = 1$  thì  $x_n = 1, \forall n$  hay  $\lim x_n = 1$ .

-Nếu  $a > 1$  thì bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng  $x_n > 1$ , tức là chỉ cần chứng minh

$x_n^2 > 1 + \ln x_n, x_n > 1$ . Bất đẳng thức này có thể chứng minh dễ dàng bằng khảo sát hàm số.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng  $x_{n+1} > x_n$  bằng cách xét hàm số sau

$$f(x) = x - 1 - \ln \left( \frac{x^2}{1 + \ln x} \right), x > 1$$

Ta có  $f'(x) = \frac{x - 1 + x \ln x - 2 \ln x}{x(1 + \ln x)}$ . Lại xét hàm số  $g(x) = x - 1 + x \ln x - 2 \ln x, x > 1$ , ta có

$$g'(x) = 2\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \ln x > 0, \forall x > 1$$

Suy ra  $f'(x) > 0, \forall x > 1$  hay  $f(x)$  là hàm đồng biến trên  $(1; +\infty)$ .

Từ đó dễ dàng có được  $x_{n+1} - x_n = 1 + \ln\left(\frac{x_n^2}{1 + \ln x_n}\right) - x_n < 0 \Rightarrow x_n > x_{n+1}$ .

Dãy này giảm và bị chặn dưới bởi 1 nên hội tụ.

Giả sử  $\lim x_n = l \geq 1$ , ta có  $l - 1 - \ln\left(\frac{l^2}{1 + \ln l}\right) = 0$ . Theo phần chứng minh trên thì dễ thấy rằng phương trình này không có nghiệm  $l > 1$  và  $l = 1$  nghiệm đúng phương trình nên giới hạn cần tìm của dãy đã cho là  $l = 1$ .

**Bài 8.** (Việt Nam TST 1993)

Dãy số  $\{a_n\}$  được xác định bởi  $a_1 = 1$  và  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt{a_n}}, n \geq 1, 2, 3, \dots$

Hãy tìm tất cả các số thực  $\beta$  để dãy số  $\frac{a_n^\beta}{n}$  có giới hạn hữu hạn khác 0.

**Lời giải.**

Trước hết ta chứng minh  $a_n$  dần tới vô cùng khi  $n$  dần tới vô cùng. Thật vậy, ta có

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2\sqrt{a_n} + \frac{1}{a_n} > a_n^2 + 2 \quad (\text{do } a_n \geq 1 \text{ với mọi } n)$$

Từ đó  $a_{n+1}^2 > 1 + 2n$  suy ra điều phải chứng minh. Trở lại bài toán, xét biểu thức

$$a_n^{3/2} - a_n^{3/2} = \left(a_n + \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^{3/2} - a_n^{3/2} = \left[\left(1 + \frac{1}{a_n^{3/2}}\right)^{3/2} - 1\right] \left(\frac{1}{a_n^{3/2}}\right)$$

Đặt  $x_n = \frac{1}{a_n^{3/2}}$  thì  $x_n \rightarrow 0$  khi  $n \rightarrow \infty$ . Do đó

$$\lim(a_{n+1}^{3/2} - a_n^{3/2}) = \lim \frac{(1 + x_n)^{3/2} - 1}{x_n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^{3/2} - 1}{x} = \frac{3}{2}$$

Từ đó suy ra  $\lim \frac{a_n^{\frac{3}{2}}}{n} = \frac{3}{2}$ . Với  $\beta > \frac{3}{2}$  suy ra giới hạn bằng vô cực, với  $\beta < \frac{3}{2}$  suy ra giới hạn bằng 0.

Vậy  $\beta = \frac{3}{2}$  là giá trị duy nhất thoả mãn yêu cầu bài toán.

### Bài 9.

Xét dãy số  $\{x_n\}$  cho bởi công thức  $x_{n+2} = \frac{(n-1)x_{n+1} + x_n}{n}$ .

Chứng minh rằng với mọi giá trị ban đầu  $x_1, x_2$  dãy số đã cho hội tụ. Tìm giới hạn của dãy như một hàm số theo  $x_1, x_2$ .

### Lời giải.

Ta có từ công thức của dãy số, ta có

$$x_{n+2} - x_{n+1} = -\frac{(x_{n+1} - x_n)}{n} = \frac{(x_n - x_{n-1})}{n(n-1)} = \dots = \frac{(-1)^n (x_2 - x_1)}{n!}.$$

Từ đó suy ra

$$x_{n+2} = (x_{n+2} - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_n) + \dots + (x_2 - x_1) + x_1 = x_1 + (x_2 - x_1) \cdot K_n,$$

trong đó  $K_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$ , ta thấy  $K_n \rightarrow \frac{1}{e}, n \rightarrow +\infty$ .

Từ đây suy ra dãy số có giới hạn và giới hạn đó bằng  $x_1 + \frac{(x_2 - x_1)}{e}$ .

### Bài 10.

Dãy số  $\{a_n\}$  được xác định bởi  $a_1 > 0, a_2 > 0$  và  $a_{n+1} = \frac{2}{a_n + a_{n-1}}$ .

Chứng minh rằng dãy số  $\{a_n\}$  hội tụ với mọi giá trị của  $a_1, a_2$  và giới hạn của dãy không phụ thuộc vào hai giá trị này.

### Lời giải.

Xét hai dãy  $M_n = \max\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}\}$  và  $m_n = \min\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}\}$ . Ta chứng minh  $M_n$  là dãy số giảm và  $m_n$  là dãy số tăng.

Thật vậy, ta sẽ chứng minh  $a_{n+4} \leq \max\{a_{n+1}, a_{n+3}\}$ .

Từ đây suy ra  $M_{n+1} = a_{n+1}$  hoặc  $a_{n+2}$  hoặc  $a_{n+3}$  và khi đó  $M_n = \max\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}\} \geq M_{n+1}$ .



Thật vậy, nếu  $a_{n+4} \geq a_{n+3}$  thì  $\frac{2}{a_{n+3} + a_{n+2}} \geq a_{n+3}$  suy ra  $2 \geq (a_{n+3} + a_{n+2})a_{n+3}$ .

Khi đó  $a_{n+1} = \frac{2}{a_{n+3}} - a_{n+2} = \frac{2}{a_{n+3}} - \frac{2}{a_{n+2} + a_{n+3}} - a_{n+2} + a_{n+4} = 2 \cdot \frac{a_{n+2}}{(a_{n+3} + a_{n+2})a_{n+3}} - a_{n+2} + a_{n+4} \geq a_{n+4}$

suy ra đpcm.

Ta đã chứng minh được  $M_n$  giảm. Tương tự  $m_n$  tăng. Hai dãy số này đều bị chặn nên hội tụ.

Cuối cùng, ta chứng minh được hai giới hạn bằng nhau.

Suy ra dãy  $\{a_n\}$  hội tụ và  $\lim a_n = 1$ .

### Bài 11.

Cho  $\{u_n\}$  là dãy bị chặn thỏa mãn:  $2a_{n+2} \leq a_n + a_{n+1}, \forall n$ . Chứng minh rằng dãy  $\{a_n\}$  này hội tụ.

### Lời giải.

Đặt  $A_n = \max\{a_n, a_{n+1}\}$ . Ta sẽ chứng minh dãy này hội tụ. Thật vậy

$$a_{n+2} \leq \frac{a_n + a_{n+1}}{2} \leq A_n \Rightarrow A_{n+1} = \max\{a_{n+1}, a_{n+2}\} \leq \max\{A_n, A_n\} = A_n.$$

Do dãy  $\{a_n\}$  bị chặn nên dãy  $\{A_n\}$  cũng bị chặn, đồng thời theo nhận xét trên thì dãy  $\{A_n\}$  giảm nên nó hội tụ. Đặt  $\lim A_n = \ell$ .

Với mọi  $\varepsilon > 0$ , tồn tại  $N$  nguyên dương sao cho với mọi:  $n > N$  thì:  $\ell - \frac{\varepsilon}{3} < A_n < \ell + \frac{\varepsilon}{3}$ .

Theo định nghĩa của  $\{A_n\}$ , suy ra:  $a_n \leq A_n < \ell + \frac{\varepsilon}{3}$ .

- Nếu  $a_n \geq \ell - \frac{\varepsilon}{3}$  thì suy ra:  $\ell - \frac{\varepsilon}{3} \leq a_n < \ell + \frac{\varepsilon}{3}, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lim a_n = \ell$ .

- Nếu:  $a_n < \ell - \frac{\varepsilon}{3}$  thì theo định nghĩa của  $\{A_n\}$ , ta được  $a_{n+1} > \ell - \frac{\varepsilon}{3}$ . Suy ra:

$$a_n \geq 2a_{n+1} - a_{n-1} \geq 2\left(\ell + \frac{\varepsilon}{3}\right) - \left(\ell - \frac{\varepsilon}{3}\right) = \ell - \varepsilon, \text{ tức là:}$$

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lim a_n = \ell.$$

Vậy trong mọi trường hợp, dãy đã cho đều có giới hạn.

**Bài 12.** (VMO 2001, bảng A)

Với mỗi cặp số thực  $(a, b)$ , xét dãy số thực sau

$$x_0 = a, x_{n+1} = x_n + b \sin x_n, n = 0, 1, 2, \dots$$

a) Cho  $b = 1$ . Chứng minh rằng dãy này có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó.

b) Chứng minh rằng với  $b > 2$  thì luôn tồn tại  $a$  sao cho dãy  $(x_n)$  tương ứng không có giới hạn.

**Lời giải.**

a) Với  $b = 1$ , ta có dãy số tương ứng  $x_0 = a, x_{n+1} = x_n + \sin x_n, n = 0, 1, 2, \dots$  Ta xét các trường hợp

-Nếu  $a = k\pi, k \in \mathbb{Z}$  thì  $x_n = a, \forall n \in \mathbb{N}$ , tức là dãy này có giới hạn.

-Nếu  $a \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Xét hàm số  $f(x) = x + \sin x, x \in \mathbb{R}$  thì  $x_{n+1} = f(x_n), n = 0, 1, 2, \dots$  và

$f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$  nên hàm này đồng biến và dãy đã cho đơn điệu. Ta có 2 khả năng:

+Nếu  $a \in (2k\pi; (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$ .

Khi đó,  $\sin a > 0$  và suy ra dãy này đơn điệu tăng.

Bằng quy nạp theo  $n$ , ta chứng minh được rằng  $x_n \in (2k\pi; (2k+1)\pi), \forall n$ .

Suy ra dãy này tăng và bị chặn trên nên có giới hạn, đặt đó là  $l$  thì chuyển qua giới hạn, ta có

$$2k\pi < a \leq l \leq (2k+1)\pi, \sin l = 0$$

Do đó  $l = (2k+1)\pi$ .

+Nếu  $a \in ((2k-1)\pi; 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$ . Khi đó,  $\sin a < 0$  và suy ra dãy này đơn điệu giảm. Chứng minh tương tự phần trên, dãy này giảm và bị chặn dưới nên có giới hạn. Ta tính được giới hạn đó chính là  $(2k-1)\pi$ .

Suy ra, với  $b = 1$  thì dãy đã cho luôn có giới hạn và giới hạn đó được xác định bởi công thức

$$\lim x_n = \left( 2 \left[ \frac{a}{2\pi} \right] + \text{sign} \left\{ \frac{a}{2\pi} \right\} \right) \pi$$

Với  $[x], \{x\}, \text{sign}(x)$  lần lượt là hàm phần nguyên, hàm phần lẻ và hàm dấu của  $x$ .

b) Xét hàm số  $g(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in (0; \pi]$ . Ta thấy đây là hàm liên tục và  $g(\pi) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} = 1$  nên từ điều kiện  $0 < \frac{2}{b} < 1$  do  $b > 2$  nên tồn tại  $a_0 \in (0; \pi)$  sao cho  $2a_0 = b \sin a_0$ .

Để thấy rằng khi đó dãy  $(x_n)$  tuần hoàn với chu kỳ nhỏ nhất là 2 nên không có giới hạn hữu hạn.

Ta có đpcm.

### Bài 13.

Dãy số  $\{u_n\}$  xác định bởi  $u_1 = b, u_{n+1} = u_n^2 + (1 - 2a)u_n + a^2, n = 1, 2, 3, \dots$

Tìm tất cả các giá trị của  $a, b$  sao cho dãy này có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

### Lời giải.

Ta thấy rằng  $u_{n+1} = u_n + (u_n - a)^2$  nên nếu dãy đã cho có giới hạn là  $L$  thì

$$L = L + (L - a)^2 \Leftrightarrow L = a.$$

Để thấy dãy đã cho tăng nên nếu tồn tại số  $i$  nào đó mà  $u_i > a \Rightarrow u_j > a, \forall j > i$ , tức là dãy không hội tụ.

Nếu tồn tại  $n$  sao cho  $u_n^2 + (1 - 2a)u_n + a^2 \leq a$  thì  $a - 1 \leq u_n \leq a \Rightarrow a - 1 \leq b \leq a$  (vì nếu ngược lại thì lại quay về trường hợp trên và dãy không hội tụ).

Ngược lại, ta xét  $a - 1 \leq b \leq a$ . Ta có  $u_{n+1} \geq u_n \geq \dots \geq u_1 = b \geq a - 1$  và

$$u_{n+1} = u_n^2 + (u_n - a)^2 \leq u_n + |u_n - a| = u_n + a - u_n = a$$

Khi đó,  $a - 1 \leq u_n \leq a, \forall n$  và dãy này tăng nên có giới hạn. Giới hạn đó chính là  $\lim u_n = a$ .

### Bài 14. (VMO 2004, bảng A)

Xét dãy số thực  $(x_n), n = 1, 2, 3, \dots$  xác định bởi

$$x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{(2 + \cos 2\alpha)x_n + \cos^2 \alpha}{(2 - 2\cos 2\alpha) + 2 - \cos 2\alpha}, n = 1, 2, 3, \dots$$

trong đó  $\alpha$  là tham số thực.

Hãy xác định tất cả các giá trị của  $\alpha$  để dãy số  $(y_n)$  với  $y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2x_k + 1}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn tương ứng trong các trường hợp đó.

**Lời giải.**

Vì  $x_1 = 1 > 0, 2 + \cos 2\alpha > 0, \cos^2 \alpha > 0, 2 - 2\cos \alpha \geq 0, 2 + \cos 2\alpha > 0$  nên từ công thức đã cho, ta thấy rằng  $x_n > 0, \forall n$ . Ta có  $2x_{n+1} + 1 = \frac{3(2x_n + 1)}{(2 - 2\cos 2\alpha)x_n + 2 - \cos 2\alpha}$ . Suy ra

$$\frac{1}{2x_{n+1} + 1} = \frac{(1 - \cos 2\alpha)(2x_n + 1) + 1}{3(2x_n + 1)} = \frac{1}{3} \left( 2\sin^2 \alpha + \frac{1}{2x_n + 1} \right)$$

Do đó,  $\frac{1}{2x_{n+1} + 1} - \sin^2 \alpha = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2x_n + 1} - \sin^2 \alpha \right)$ . Đây là một cấp số nhân có công bội là  $\frac{1}{3}$  và số hạng đầu là  $\frac{1}{3} - \sin^2 \alpha$  nên ta có thể xác định được tất cả số hạng của dãy. Từ đó có được

$$y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2x_k + 1} = \frac{1 - 3\sin^2 \alpha}{2} \left( 1 - \frac{1}{3^n} \right) + n\sin^2 \alpha, n \geq 1$$

Vì dãy số  $\frac{1}{3^n}$  hội tụ nên  $(y_n)$  hội tụ khi  $n\sin^2 \alpha$  hội tụ hay  $\sin^2 \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Khi đó, giới hạn tương ứng của dãy  $y_n$  là  $\frac{1}{2}$ .

**Bài 15.** (VMO 2005, bảng A)

Xét dãy số thực  $(x_n)$  được xác định bởi công thức  $\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = 3x_n^3 - 7x_n^2 + 5x_n \end{cases}, n = 1, 2, 3, \dots$

Hãy tìm tất cả các giá trị của  $a$  sao cho dãy số  $(x_n)$  có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn của dãy tương ứng trong các trường hợp đó.

**Lời giải.**

Xét hàm số  $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 5x, x \in \mathbb{R}$ .

Dãy số đã cho chính là  $x_1 = a, x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, 3, \dots$

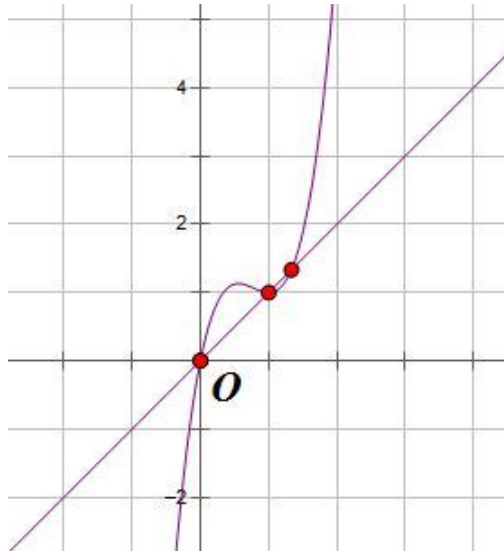
Ta có  $f'(x) = 9x^2 - 14x + 5 = (9x - 5)(x - 1)$ . Ta có bảng biến thiên sau

$x$	$-\infty$	$\frac{5}{9}$	$1$	$+\infty$	
$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$y$	$-\infty$	$\frac{275}{243}$	$1$	$+\infty$	

Ta cũng có  $f(x) - x = x(x-1)(4x-3)$  nên  $f(x) = x$  có ba nghiệm là  $x = 0, x = 1, x = \frac{4}{3}$ .

Dễ thấy rằng  $x < 0$  thì  $f(x) < x$  và  $x > \frac{4}{3}$  thì  $f(x) > x$ . Đồng thời  $f(0) = 0, f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$  nên từ bảng biến thiên ở trên, ta thấy rằng:

- Với  $x \in (-\infty; 0)$  thì ta luôn có  $f(x) \in (-\infty; 0)$ .
- Với  $x \in \left(0; \frac{4}{3}\right)$  thì ta luôn có  $f(x) \in \left(0; \frac{4}{3}\right)$ .
- Với  $x \in \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$  thì ta luôn có  $f(x) \in \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$ .



Ta xét các trường hợp sau:

-Nếu  $a < 0$  thì  $x_n < 0, \forall n$  với mọi  $n \geq 1$ . Ta có  $x_2 = f(x_1) < x_1$  và hàm  $f(x)$  đồng biến trên miền này nên dãy đã cho đơn điệu giảm, tức là nếu dãy này hội tụ về  $l$  thì  $l < 0$ , không thể là nghiệm của phương trình  $f(x) = x$  đã nêu nên trong trường hợp này, dãy không hội tụ.

-Nếu  $a > \frac{4}{3}$  thì  $x_n > \frac{4}{3}, \forall n$ . Ta có  $x_2 = f(x_1) > x_1$  và  $f(x)$  đồng biến trên miền này nên dãy đã cho đơn điệu tăng, tức là nếu dãy này hội tụ về  $l$  thì  $l > \frac{4}{3}$ , cũng không thể là nghiệm của phương trình  $f(x) = x$  đã nêu nên trong trường hợp này, dãy không hội tụ.

-Nếu  $a = 0$  thì  $x_n = 0, \forall n$  nên thỏa mãn đề bài.

-Nếu  $a = \frac{4}{3}$  thì  $x_n = \frac{4}{3}, \forall n$  nên cũng thỏa mãn đề bài.

-Nếu  $0 < a < \frac{4}{3}$  thì suy ra  $x_n \in \left(0; \frac{4}{3}\right), \forall n$ . Ta có hai trường hợp sau:

+ Nếu  $a \in \left(1; \frac{4}{3}\right)$  thì ta có

$$f(a) - 1 = 3a^3 - 7a^2 + 5a - 1 = (a-1)^2(3a-1) > 0$$

$$f(a) - \frac{4}{3} = 3a^3 - 7a^2 + 5a - \frac{4}{3} = \left(a - \frac{4}{3}\right)(3x^2 - 3x + 1) < 0$$

Do đó, bằng quy nạp, ta chứng minh được  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \left(1; \frac{4}{3}\right)$ .

Hàm số  $f(x)$  trên miền này đồng biến và  $f(a) - a = 3a^3 - 7a^2 + 4a = (a-1)(3a-4) < 0$  nên dãy số này giảm và bị chặn dưới. Do đó, dãy số  $\{x_n\}$  có giới hạn. Để thấy rằng giới hạn đó phải thuộc tập nghiệm của phương trình  $f(x) = x$  và thuộc miền  $\left[1; \frac{4}{3}\right)$ , suy ra giới hạn là 1.

+Nếu  $a \in (0;1)$  thì có hai trường hợp xảy ra:

\*Nếu như  $\forall n \in \mathbb{N}$  mà  $x_n \in (0;1)$  thì  $f(x) > x, \forall x \in (0;1)$  nên với  $n$  tùy ý thì  $x_{n+1} = f(x_n) > x_n$ , tức là dãy này đơn điệu tăng. Hơn nữa, nó bị chặn trên nên có giới hạn. Lập luận tương tự trên, giới hạn đó cũng chính là 1.

\*Nếu như tồn tại một số số hạng của dãy thuộc miền  $x_n \in \left(0; \frac{4}{3}\right)$  nhưng không thuộc  $a_n \in (0;1)$

thì gọi  $n_0$  là chỉ số nhỏ nhất sao cho  $x_{n_0} \notin (0;1)$ , rõ ràng  $n_0 > 1$  vì  $a = x_1 \in (0;1)$ . Khi đó, ta có

$a_{n_0-1} \in (0;1)$  nên  $x_{n_0} \leq \max f(x_{n_0-1}) = f\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{275}{243}$  và  $x_{n_0} \geq \min f(x_{n_0-1}) = f(0) = 0$ .

Do đó,  $x_{n_0} \in \left(0; \frac{275}{243}\right)$  và  $x_{n_0} \notin (0;1)$  nên  $x_{n_0} \in \left(1; \frac{275}{243}\right) \subset \left(1; \frac{4}{3}\right)$ . Suy ra từ số hạng này trở đi thì tất

cả các số hạng của dãy đều thuộc  $\left(1; \frac{4}{3}\right)$  và trường hợp này đã được chứng minh ở phần trên.

Giới hạn của dãy số trong trường hợp này vẫn là 1.

Tóm lại, dãy đã cho hội tụ khi và chỉ khi  $a \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$ , cụ thể là:

+ Với  $a = 0$  thì dãy hội tụ về 0.

+ Với  $a = \frac{4}{3}$  thì dãy hội tụ về  $\frac{4}{3}$ .

+ Với  $0 < a < \frac{4}{3}$  thì dãy hội tụ về 1.

### Bài 16.

Cho dãy số xác định bởi  $a_1 > 0, a_{n+1} = \frac{6 + 6a_n}{7 + a_n}, n = 1, 2, 3, \dots$

Chứng minh rằng dãy này luôn hội tụ và tìm giới hạn của nó.

#### Lời giải.

Ta thấy rằng  $a_{n+1} = 6 \left(1 - \frac{6}{a_n + 7}\right)$  nên bằng quy nạp, ta có thể chứng minh được rằng  $a_n \leq 2, \forall n$

nếu  $a_1 \leq 2$  và  $a_n > 2, \forall n$  nếu  $a_1 > 2$ .

Xét hàm số  $f(x) = \frac{6x+6}{x+7}, x > 0$ . Ta có  $f'(x) = \frac{36}{(x+7)^2} > 0, \forall x > 0$  và

$$f(x) - x = -\frac{(x+3)(x-2)}{x+7}. \text{ Do đó:}$$

-Nếu  $0 < a_1 < 2$  thì dãy này tăng và bị chặn trên bởi 2 nên có giới hạn.

-Nếu  $a_1 > 2$  thì dãy này giảm và bị chặn dưới bởi 2 nên cũng có giới hạn.

-Nếu  $a_1 = 2$  thì đây là dãy hằng.

Tóm lại, trong mọi trường hợp thì dãy đã cho đều hội tụ và giới hạn của nó là nghiệm dương của phương trình  $f(x) = x \Leftrightarrow x = 2$ .

### Bài 17.

Cho hàm số thực  $f(x) = \frac{2x^3 - 3}{3(x^2 - 1)}$ .

1. Chứng minh rằng tồn tại hàm số  $g(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  sao cho  $f(g(x)) = x$  và  $g(x) > x$  với mọi số thực  $x$ .

2. Chứng minh rằng tồn tại số thực  $a > 1$  để dãy  $\{u_n\}, n = 1, 2, 3, \dots$  được xác định bởi  $u_0 = a, u_{n+1} = f(u_n), n = 1, 2, 3, \dots$  tuần hoàn với chu kỳ dương nhỏ nhất bằng 2011.

### Lời giải.

1. Hàm số  $f(x)$  xác định trên  $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ . Ta có  $f'(x) = \frac{2x(x^3 - 3x + 3)}{3(x^2 - 1)^2}$ .

Ta thấy rằng  $x^3 - 3x + 3 = (x-1)^2(x+2) + 1 > 0, \forall x > 1$  nên hàm số đã cho đồng biến trên  $(1; +\infty)$ .

Hơn nữa,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  nên với tập xác định là  $(1; +\infty)$  thì tập giá trị của  $f(x)$  là  $(-\infty; +\infty)$ , mà  $f(x)$  là hàm liên tục và đồng biến trên  $(1; +\infty)$  nên nó chính là một song ánh từ  $(1; +\infty)$  vào  $(-\infty; +\infty)$ .

Do đó, tồn tại hàm số ngược  $g(x)$  của  $f(x)$  có tập xác định là  $\mathbb{R}$  và tập giá trị là  $(1; +\infty)$  sao cho  $f(g(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Ta cần chứng minh rằng  $g(x) > x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Thật vậy:

- Với  $x \leq 1$  thì  $g(x) > 1 \geq x$ .



- Với  $x > 1$  thì  $f(x) - x = -\frac{x^3 - 3x + 3}{3(x^2 - 1)} < 0, \forall x > 1 \Rightarrow x > f(x), \forall x > 1 \Rightarrow f(g(x)) > f(x), \forall x > 1,$

do tính đồng biến của  $f(x)$  trên  $(1; +\infty)$  nên  $g(x) > x, \forall x > 1.$

Vậy hàm số  $g(x)$  thỏa mãn đề bài. Ta có đpcm.

2. Đặt  $g_n(x) = \underbrace{g(g \dots g(x))}_{n}, n \in \mathbb{N}^*$  và  $u_0 = a = g_{2010}(x_0) > 1$  với  $x_0 \in \mathbb{R}$  sẽ được xác định sau.

Ta có  $u_0 = g_{2010}(x_0) > 1 \Rightarrow u_1 = f(u_0) = f(g_{2010}(x_0)) = g_{2009}(x_0) > 1.$

Tiếp tục quá trình này, ta dễ dàng chứng minh được  $u_{2010} = x_0$  đồng thời vì  $g(x) > x, \forall x \in \mathbb{R}$  nên  $u_0 > u_1 > u_2 > \dots > u_{2010}.$

Do đó, nếu chọn được  $x_0$  sao cho  $x_0 \neq \pm 1$  và  $u_{2011} = f(x_0) = g_n(x_0)$  thì dãy đã cho có chu kỳ dương nhỏ nhất là 2011.

Ta chỉ cần chứng minh tồn tại  $x_0$  thỏa mãn điều kiện nêu trên.

Thật vậy, xét hàm  $h(x) = f(x) - g_{2010}(x)$  trên  $(-1; 0]$ , dễ thấy  $h(x)$  là hàm liên tục trên nửa khoảng này và  $h(0) = f(0) - g_{2010}(0) = 1 - g_{2010}(0) < 0, \lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) - g_{2010}(-1) = +\infty$  nên phương trình  $h(x) = 0$  có nghiệm  $x_0$  trên  $(-1; 0]$ .

Vậy tồn tại giá trị  $a > 1$  thỏa mãn đề bài nên ta có đpcm.

### **Bài 18.** (Việt Nam TST 1996)

Hãy tìm tất cả các số thực  $a$  và  $b$  để dãy số sau có giới hạn hữu hạn

$$x_0 = b > 0, x_{n+1} = \frac{a}{1 + x_n^2}, n = 0, 1, 2, \dots$$

#### **Lời giải.**

Ta xét các trường hợp sau :

Nếu  $a = 0$  thì hiển nhiên  $x_i = 0, \forall i > 0$  nên dãy đã cho hội tụ.

Nếu  $a > 0$  thì kí hiệu  $f(x) = \frac{a}{1 + x^2}$  và  $g(x) = f(f(x))$  thì ta có  $f(x) = -\frac{2ax}{(1 + x^2)^2} < 0$  nên  $f(x)$  là hàm giảm trên  $(0; +\infty)$  và hàm  $g(x)$  tăng trên  $(0; +\infty)$ .

Xét dãy  $\{x_{2n}\}$  và đặt  $u_n = x_{2n}, n = 0, 1, 2, \dots$  thì  $u_{n+1} = g(u_n)$ . Do  $g(x)$  tăng nên  $\{u_n\}$  là dãy đơn điệu (tăng hoặc giảm). Mặt khác, dễ thấy rằng  $0 < u_n < a$  nên dãy này bị chặn và luôn tồn tại giới hạn  $\lim u_n = \lim x_{2n} = l$ . Giới hạn này chính là nghiệm của phương trình  $g(l) = l$ .

Ta có  $x_{2n+1} = f(x_{2n})$  nên nếu dãy  $\{x_{2n}\}$  có giới hạn thì dãy  $\{x_{2n+1}\}$  cũng có giới hạn.

Ta sẽ chứng minh rằng nếu  $0 < a \leq 2$  thì hai dãy này có cùng giới hạn, tức là  $\{x_n\}$  có giới hạn.

Thật vậy, giả sử  $f(l) = v$  hay  $a = v + vl^2$ . Ta cũng có  $f(f(l)) = f(v) \Rightarrow f(v) = g(l) = l$  hay  $a = l + lv^2$ .

Trừ tương ứng hai vế của các đẳng thức trên, ta được  $(v-l)(vl-1) = 0$ .

Nếu  $v \neq l$  thì  $vl = 1$ , suy ra  $v + l = a$ , tức là  $v, l$  là nghiệm của phương trình  $x^2 - ax + 1 = 0$ .

Vì  $a \leq 2$  nên hoặc là phương trình này vô nghiệm, hoặc là với  $a = 2$  thì nó có nghiệm  $v = l = 1$ , trái với điều giả sử. Do đó,  $v = l$  hay  $\lim x_{2n+1} = \lim x_{2n} = f(l) = l$ .

Do đó, trong trường hợp này, giới hạn của dãy  $\{x_n\}$  tồn tại.

Ta sẽ chứng minh trong trường hợp  $a > 2$  thì dãy đã cho hội tụ khi và chỉ khi  $a = x_0^3 + x_0$ . Thật

vậy, nếu  $a = x_0^3 + x_0$  thì  $x_1 = \frac{a}{1+x_0^2} = \frac{x_0 + x_0^3}{1+x_0^2} = x_0$ . Tương tự, ta chứng minh được dãy này

không đổi nên nó có giới hạn.

Giả sử  $a \neq x_0 + x_0^3$  và tồn tại giới hạn  $\lim x_n = k > 0$  thì chuyển qua giới hạn, ta có  $f(k) = k$  hay  $a = k + k^3$ . Do đó,  $k$  chính là nghiệm duy nhất của phương trình  $x^3 + x = a$ . Ta có

$$g(x) - x = \frac{(1+x^2)^2(a-x) - a^2x}{a^2 + (1+x^2)^2} = \frac{-(x^2+x-a)(x^2-ax+1)}{a^2 + (1+x^2)^2}$$

Vì  $a > 2$  nên phương trình  $x^2 - ax + 1 = 0$  có hai nghiệm phân biệt là  $\alpha, \beta$ . Nếu giả sử  $\alpha < \beta$  thì  $\alpha < k < \beta$ . Thật vậy, vì  $a > 2$  nên  $k > 1$ , do đó,  $a - a^2k < 0$ . Thay  $a = k + k^3$  vào, ta được

$$k^3 + k - ak^2 < 0 \Rightarrow \alpha < k < \beta.$$

Dấu của  $g(x) - x$  chính là dấu của  $-(x-k)(x-\alpha)(x-\beta)$ . Từ bảng xét dấu của biểu thức này, ta được

Nếu xét dãy  $u_n = x_{2n}$  tương tự ở trên thì nó đơn điệu và  $\lim u_n = k$  nên tồn tại  $n = n_0$  sao cho  $\alpha < u_{n_0} < \beta$ . Nếu  $\alpha < u_{n_0} < k$  thì  $u_{n_0+1} = g(u_{n_0}) < u_{n_0}$ , suy ra  $\{u_n\}$  là dãy giảm kể từ  $u_{n_0}$  và  $u_{n_0} < k$  nên không thể có  $\lim u_n = k$ . Tương tự nếu  $k < u_{n_0} < \beta$ . Suy ra chỉ có thể là  $u_{n_0} = k$ .

Ta cũng có, nếu  $\exists i : x_i = k, i \geq 1 \Rightarrow x_{i-1} = k$  vì

$$x_i = \frac{a}{1+x_{i-1}^2} = k \Rightarrow k(1+x_{i-1}^2) = a = k+k^3 \Leftrightarrow x_{i-1}^2 = k^2 \Leftrightarrow x_{i-1} = k$$

Suy ra, nếu  $u_{n_0} = k$  thì  $u_0 = k$ , mà  $a = k+k^3$  nên  $a = x_0 + x_0^3$ , mâu thuẫn với điều giả sử.

Nếu  $a < 0$ , đặt  $x_n = -y_n \Rightarrow y_{n+1} = \frac{-a}{1+x_n^2} = \frac{-a}{1+y_n^2}$  và  $y_n > 0, \forall n \geq 1$ .

Do đó,  $\{x_n\}$  hội tụ khi và chỉ khi  $\{y_n\}$  hội tụ. Tương tự như lập luận ở trên, dãy này có hội tụ khi  $0 < -a < 2$  hoặc  $-a = y_1 + y_1^3$ . Hơn nữa,  $-a = y_1(1+y_1^2) = y_1(1+x_0^2) \Rightarrow x_0 = y_1$  hay  $-a = x_0 + x_0^3$ , tương tự điều kiện trên.

Vậy dãy đã cho có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi  $|a| \leq 2$  hoặc  $a = x_0 + x_0^3$ .

### Bài 19.

Chứng minh rằng dãy số xác định bởi  $x_{n+1} = x_n + \left(\frac{x_n}{n}\right)^2, n \geq 1$  với  $x_1 \in (0;1)$  có giới hạn hữu hạn.

### Lời giải.

Ta có  $x_2 = x_1 + x_1^2 < 2x_1$  và  $x_3 = x_2 + \frac{x_2^2}{4} < 2x_1 + x_1^2 < 3x_1, \dots$  Bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng  $x_n < nx_1, \forall n > 1$ . Ta luôn có thể chọn được số  $m$  sao cho  $x_m < m-1$  vì

$$mx_1 < m-1 \Leftrightarrow m(1-x_1) > 1 \Leftrightarrow m > \frac{1}{1-x_1}$$

Các giá trị  $m$  như thế là tồn tại và  $x_m < mx_1 < m-1$  thỏa điều kiện.

Hơn nữa,  $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n x_{n+1}} = \frac{x_n^2/n^2}{x_n x_{n+1}} = \frac{x_n}{x_{n+1} n^2} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ .

$$\text{Do đó } \frac{1}{x_m} - \frac{1}{x_n} = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{x_{m+i}} - \frac{1}{x_{m+i+1}} \right) < \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{m+i-1} - \frac{1}{m+i} \right) = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{n-1} < \frac{1}{m-1}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{x_n} > \frac{1}{x_m} - \frac{1}{m-1} > 0 \Rightarrow x_n < \frac{(m-1)x_m}{(m-1) - x_m}.$$

Vế phải của bất đẳng thức này không phụ thuộc vào  $n$  nên dãy này bị chặn trên. Hơn nữa, dãy đã cho cũng tăng thực sự nên nó có giới hạn hữu hạn.

### Bài 20.

Cho dãy số dương xác định bởi  $(8x_2 - 7x_1)x_1^7 = 8$  và

$$x_{k+1}x_{k-1} - x_k^2 = \frac{x_{k-1}^8 - x_k^8}{x_k^7 x_{k-1}^7}, k = 2, 3, 4, \dots$$

Xác định một số thực dương  $a$  sao cho nếu  $x_1 > a$  thì dãy này đơn điệu giảm và nếu  $0 < x_1 < a$  thì dãy này không đơn điệu.

### Lời giải.

Từ công thức dãy đã cho, ta có

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{x_k^2}{x_{k-1}} + \frac{x_{k-1}^8 - x_k^8}{x_k^7 x_{k-1}^8} \Leftrightarrow 8x_{k+1}x_k^7 = \frac{8x_k^9}{x_{k-1}} + 8\frac{x_{k-1}^8 - x_k^8}{x_{k-1}^8} \\ &\Leftrightarrow 8x_{k+1}x_k^7 - 7x_k^8 = \frac{x_k^8}{x_{k-1}}(8x_k - 7x_{k-1}) + 8 - \frac{8x_k^8}{x_{k-1}^8} \\ &\Leftrightarrow (8x_{k+1} - 7x_k)x_k^7 = 8 + \frac{x_k^8}{x_{k-1}^8}[(8x_k - 7x_{k-1})x_{k-1}^7 - 8] \end{aligned}$$

Từ điều kiện  $(8x_2 - 7x_1)x_1^7 = 8$  và bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$(8x_{k+1} - 7x_k)x_k^7 = 8 \Leftrightarrow x_{k+1} = \frac{1}{x_k^7} + \frac{7x_k}{8}, k = 1, 2, 3, \dots$$

Xét hàm số  $f(x) = \frac{1}{x^7} + \frac{7x}{8}, x > 0$ . Ta thấy rằng  $f(x) = x \Leftrightarrow x^8 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[8]{8}$ .

Do đó,  $f(x) > x, \forall x < \sqrt[8]{8}$  và  $f(x) < x, \forall x > \sqrt[8]{8}$ .

Ta sẽ chứng minh rằng  $a = \sqrt[8]{8}$  là giá trị cần tìm.

Thật vậy, nếu  $x_1 > a$  thì  $x_2 = f(x_1) < x_1$  và bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng  $x_n > \sqrt[8]{8}, \forall n$  và vì  $f'(x) = -\frac{7}{x^8} + \frac{7}{8} = \frac{7}{8} \left(1 - \frac{8}{x^8}\right) > 0, \forall x > \sqrt[8]{8}$  nên đây là hàm đồng biến và dãy đã cho đơn điệu giảm.

Nếu  $x_1 < a$  thì  $x_2 = f(x_1) > x_1$  và bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng  $x_n < \sqrt[8]{8}, \forall n$  và ta cũng có  $f'(x) < 0, \forall x > \sqrt[8]{8}$  nên đây là hàm nghịch biến, suy ra dãy đã cho không đơn điệu.

Vậy giá trị cần tìm là  $a = \sqrt[8]{8}$ .

### Bài 21.

Cho dãy số  $\left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{n}\right\}$  với  $n$  là số nguyên dương cho trước. Ta xét hai hoán vị sau của dãy trên là  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$  và  $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$  thỏa mãn điều kiện

$$a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2 \geq \dots \geq a_n + b_n$$

a) Chứng minh rằng  $a_k + b_k < \frac{4}{k}, k = \overline{1, n}$ .

b) Chứng minh rằng với mỗi  $c > 1$  thì luôn tồn tại ít nhất một số tự nhiên  $n$  sao cho có hai hoán vị thỏa mãn điều kiện trên và bất đẳng thức  $a_k + b_k > \frac{4-c}{k}$  đúng đối với ít nhất 1 giá trị  $k = \overline{1, n}$ .

### Lời giải.

a) Với mỗi  $k$ , ta chia các cặp  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_k, b_k)$  thành ba loại sau:

- Loại 1 gồm  $r$  cặp với  $a_i > b_i$ .

- Loại 2 gồm  $s$  cặp với  $a_i = b_i$ .

- Loại 3 gồm  $t$  cặp với  $a_i < b_i$ .

Khi đó,  $r + s + t = k$  và do tính đối xứng giữa  $a_i, b_i$  nên ta có thể giả sử  $r \geq t$ .

Ta xét hai trường hợp sau:

- Nếu  $s > 0$  thì ta có  $r + s$  cặp loại 1 và 2 là  $(a_{i_1}, b_{i_1}), (a_{i_2}, b_{i_2}), \dots, (a_{i_{r+s}}, b_{i_{r+s}})$ .

Các số  $a_j, 1 \leq j \leq r+s$  lấy  $r+s$  giá trị khác nhau trong tập hợp  $\left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{n}\right\}$  nên nếu đặt

$$a^* = \min(a_j : 1 \leq j \leq r+s) \leq \frac{1}{r+s}$$

Gọi  $(a^*, b^*)$  là cặp số tương ứng thì  $a_k + b_k \leq a^* + b^* \leq 2a^* \leq \frac{2}{r+s} = \frac{4}{2r+2s} < \frac{4}{r+s+t} = \frac{4}{k}$ .

-Nếu  $s=0$  thì ta xét  $r$  cặp loại 1 là  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_r, b_r)$ .

Ta cũng đặt  $a^* = \min(a_j : 1 \leq j \leq r+s)$  thì  $a^* \leq \frac{1}{r}, b^* < a^*$  do  $(a^*, b^*)$  là một cặp loại 1.

Vì vậy,  $a_k + b_k \leq a^* + b^* < 2a^* \leq \frac{2}{r} = \frac{4}{2r} < \frac{4}{r+t} = \frac{4}{k}$ .

Trong cả hai trường hợp, ta luôn có đpcm.

b) Xét  $n = 2m, m \in \mathbb{N}^*$  thì ta xét hai hoán vị sau

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = \left(1, \frac{1}{2m}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2m-1}, \dots, \frac{1}{m}, \frac{1}{m+1}\right), (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n) = (a_2, a_1, a_4, a_3, \dots, a_{2m}, a_{2m-1})$$

Có thể thấy rằng hai hoán vị này thỏa mãn điều kiện ban đầu và

$$a_{2m} + b_{2m} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m} = \frac{2m+1}{m(m+1)}$$

Do đó, với  $c > 0$  thì  $\frac{4-c}{2m} - (a_{2m} + b_{2m}) = \frac{2-(m+1)c}{2m}$ .

Với  $c$  dương tùy ý thì ta luôn có thể chọn  $m$  sao cho biểu thức trên âm. Từ đó, ta có đpcm.

## Bài 22.

Cho  $p$  là một số nguyên tố, xét dãy số  $(a_n)$  thỏa mãn

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_{k+2} = 2a_{k+1} - pa_k \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Xác định tất cả giá trị của  $p$  để  $-1$  là một phần tử của dãy  $(a_n)$ .

**Lời giải.**

Nếu  $p = 2$ , khi đó  $a_{k+2} = 2a_{k+1} - 2a_k$  với mọi  $k = 0, 1, 2, \dots$ , do đó  $a_k$  là số chẵn với mọi  $k \geq 2$  nên không thể có một phân tử nhận giá trị là  $-1$ . Suy ra với  $p > 2 \Rightarrow (p, 2) = 1$ .

Giả sử tồn tại  $m \geq 2$  sao cho  $a_m = -1$ , theo đề ta có  $a_{k+1} = 2a_k - pa_{k-1} \equiv 2a_k \pmod{p}, k = 2, 3, 4, \dots$

Suy ra  $-1 = a_m \equiv 2^{m-1} \cdot a_1 \equiv 2^{m-1} \pmod{p}$ . (\*)

Ta cũng có

$$a_{k+1} = 2a_k - a_{k-1} - (p-1)a_{k-1} \equiv 2a_k - a_{k-1} \pmod{p-1} \Rightarrow a_{k+1} - a_k \equiv a_k - a_{k-1} \pmod{p-1}, k = 2, 3, 4, \dots$$

Suy ra  $a_{k+1} \equiv (k+1)(a_1 - a_0) + a_0 \equiv k+1 \pmod{p-1}$ .

Do đó  $-1 = a_m \equiv m \pmod{p-1} \Rightarrow m+1 \equiv 0 \pmod{p-1}$ . (\*\*)

Do  $(p, 2) = 1$  nên theo định lý Fermat, ta có  $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow 2^{m+1} \equiv 1 \pmod{p}$

Kết hợp với (\*), ta được  $-4 \equiv 2^{m+1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow 5 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow p = 5$ .

Với  $p = 5$ , ta thấy  $a_3 = -1$ , thỏa mãn đề bài.

Vậy tất cả giá trị của  $p$  thỏa yêu cầu bài toán là  $p = 5$ .

### Bài 23.

Cho dãy số  $\{u_n\}$  xác định bởi  $u_1 = a, u_{n+1} = \frac{k+u_n}{1-u_n}, n > 0$ . Biết rằng  $u_1 = u_{13}$ .

Hãy tìm tất cả các giá trị của  $k$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } u_{n+1} = \frac{k+u_n}{1-u_n} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k} + \frac{u_n}{\sqrt{k}}}{1 - \sqrt{k} \cdot \frac{u_n}{\sqrt{k}}}$$

Đặt  $\sqrt{k} = \tan \alpha, \frac{a}{\sqrt{k}} = \tan \beta \left( 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2} \right)$ . Bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng

$$\frac{u_n}{\sqrt{k}} = \tan((n-1)\alpha + \beta), \forall n$$

Do đó,  $u_1 = u_{13} \Leftrightarrow \tan(12\alpha + \beta) = \tan \beta \Leftrightarrow 12\alpha = m\pi, m \in \mathbb{Z}$ .

Vì  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  nên  $m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Ta cũng có  $\tan^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{1 + \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 7 - 4\sqrt{3}$ , suy ra  $\tan^2 \frac{5\pi}{6} = \cot^2 \frac{\pi}{12} = 7 + 4\sqrt{3}$ .

Do đó, các giá trị của  $m$  cần tìm là  $m \in \left\{ 7 - 4\sqrt{3}, \frac{1}{3}, 1, 3, 7 + 4\sqrt{3} \right\}$ .

**Bài 24.** (Việt Nam TST 2009)

Cho đa thức  $P(x) = rx^3 + qx^2 + px + 1$  trong đó  $p, q, r$  là các số thực và  $r > 0$ .

Xét dãy số thực sau

$$\begin{cases} a_1 = 1, & a_2 = -p, & a_3 = p^2 - q \\ a_{n+3} = -p \cdot a_{n+2} - q \cdot a_{n+1} - r \cdot a_n, & n \geq 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng nếu đa thức  $P(x)$  có một nghiệm thực duy nhất và không có nghiệm bội thì dãy số  $(a_n)$  có vô số số âm.

**Lời giải.**

Giả sử  $k$  là một nghiệm (thực hoặc phức) của đa thức

$$Q(x) = x^3 + px^2 + qx + r, \text{ do } r > 0 \text{ nên } k \neq 0 \Rightarrow k^3 + pk^2 + qk + r = 0 \quad (*)$$

Theo giả thiết, đa thức  $P(x) = rx^3 + qx^2 + px + 1$  có đúng một nghiệm thực nên nó còn có thêm hai nghiệm phức liên hợp nữa, đồng thời  $\frac{1}{k}$  chính là nghiệm của  $P(x)$  do

$$P\left(\frac{1}{k}\right) = r\left(\frac{1}{k}\right)^3 + q\left(\frac{1}{k}\right)^2 + p\left(\frac{1}{k}\right) + 1 = \frac{r + qk + pk^2 + k^3}{k^3} = 0.$$

Xét dãy số  $(u_n)$  xác định bởi công thức  $u_{n+1} = a_{n+3} + (p+k)a_{n+2} - \frac{r}{k}a_{n+1}$  (\*\*)

Theo giả thiết thì  $a_{n+3} = -pa_{n+2} - qa_{n+1} - ra_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  Ta có:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= -pa_{n+2} - qa_{n+1} - ra_n + (p+k)a_{n+2} - \frac{r}{k}a_{n+1} = ka_{n+2} - \frac{kq+r}{k}a_{n+1} - ra_n \\ &= k\left(a_{n+2} - \frac{kq+r}{k^2}a_{n+1} - \frac{r}{k}a_n\right) \end{aligned}$$

Từ (\*) suy ra  $-(kq+r) = pk^2 + k^3 \Rightarrow -\frac{kq+r}{k^2} = p+k$ , do đó:



$$u_{n+1} = k(a_{n+2} + (p+k)a_{n+1} - \frac{r}{k}a_n) = ku_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Trong (\*\*), cho  $n = -1$ , ta có

$$u_0 = a_2 + (p+k)a_1 - \frac{r}{k}a_0 = p^2 - q - (p+k)p - \frac{r}{k} = -\frac{pk^2 + qk + r}{k} = \frac{k^3}{k} = k^2$$

Suy ra  $u_n = k^{n+2} \Rightarrow a_{n+2} + (p+k)a_{n+1} - \frac{r}{k}a_n = k^{n+2}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  (\*\*\*)

Giả sử  $z$  là nghiệm phức của phương trình  $P(x) = 0$  và  $\rho, \theta$  lần lượt là modun và argument của  $z$  trong đó:  $\rho, \theta \in \mathbb{R}, \rho > 0$ .

Ta có:  $z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$  và  $P(x) \in \mathbb{R}[x]$  nên:  $P(z) = 0 \Rightarrow \overline{P(z)} = 0 \Rightarrow P(\bar{z}) = 0$  do đó  $\bar{z} = \rho e^{-i\theta} = \rho(\cos \theta - i \sin \theta)$  cũng là nghiệm của  $P(x)$ .

Từ (\*\*\*), ta được  $a_{n+2} + (p+z)a_{n+1} - \frac{r}{z}a_n = (z)^{n+2}$ ,  $a_{n+2} + (p+\bar{z})a_{n+1} - \frac{r}{\bar{z}}a_n = (\bar{z})^{n+2}$ .

Theo công thức Moavre, ta có:  $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \Rightarrow z^n = \rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$  nên:

$$\begin{aligned} z^{n+2} - (\bar{z})^{n+2} &= \rho^{n+2} [\cos(n+2)\theta + i \sin(n+2)\theta] - \rho^{n+2} [\cos(n+2)\theta - i \sin(n+2)\theta] = \\ &= 2i \cdot \rho^{n+2} \sin[(n+2)\theta] \Rightarrow \frac{z^{n+2} - (\bar{z})^{n+2}}{z - \bar{z}} = \frac{2i \cdot \rho^{n+2} \sin[(n+2)\theta]}{2i \cdot \rho \sin \theta} = \rho^{n+1} \cdot \frac{\sin[(n+2)\theta]}{\sin \theta} \end{aligned}$$

Trừ từng vế hai đẳng thức, ta được  $(z - \bar{z})a_{n+1} - r\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}}\right)a_n = (z)^{n+2} - (\bar{z})^{n+2}$ .

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (z - \bar{z})a_{n+1} - r\left(\frac{\bar{z} - z}{z \cdot \bar{z}}\right)a_n &= z^{n+2} - (\bar{z})^{n+2} \Leftrightarrow a_{n+1} + \frac{r}{\rho^2}a_n = \frac{z^{n+2} - (\bar{z})^{n+2}}{(z - \bar{z})} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} + \frac{r}{\rho^2}a_n &= \rho^{n+1} \cdot \frac{\sin[(n+2)\theta]}{\sin \theta} \end{aligned}$$

Do  $\rho > 0$  nên xét  $n_0$  là một giá trị nguyên dương sao cho

$$\frac{\sin[(n_0+2)\theta]}{\sin \theta} < 0 \Rightarrow \rho^{n_0+1} \cdot \frac{\sin[(n_0+2)\theta]}{\sin \theta} < 0 \Rightarrow a_{n_0+1} + \frac{r}{\rho^2}a_{n_0} < 0.$$

Vì  $\frac{r}{\rho^2} > 0$  nên  $a_{n_0+1}, a_{n_0}$  trái dấu với nhau. Do đó, trong hai giá trị này có một số âm.

Ta thấy khi  $n$  tiến tới vô cực, tồn tại vô số giá trị  $n_0$  sao cho  $\frac{\sin[(n_0+2)\theta]}{\sin \theta} < 0$ , mà ứng với mỗi

giá trị  $n_0$  như thế ta lại tìm được một số hạng âm của dãy đã cho, tức là dãy  $(a_n)$  có vô số số âm.

Đây chính là điều phải chứng minh.

## E – CÁC BÀI TOÁN DÃY SỐ CÓ GỢI Ý GIẢI.

### Bài 1. (Việt Nam TST 1985)

Cho dãy số thực  $(x_n)$  được xác định bởi công thức:

$$x_1 = \frac{29}{10}, x_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 - 1}} + \sqrt{3}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng tồn tại một số thực  $a$  thỏa mãn  $x_{2k-1} > a > x_{2k}$  với mọi số nguyên dương  $k$ .

#### Gợi ý.

Từ cách xác định dãy số, ta có  $x_n \geq \sqrt{3}, \forall n$ . Ta sẽ tìm giới hạn của dãy số đã cho và chứng minh rằng giới hạn đó chính là giá trị cần tìm.

Xét hàm số  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{3}, x \geq \sqrt{3}$ .

Phương trình  $f(x) = x$  có nghiệm duy nhất là  $x = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5} + 1)}{2}$ .

Hàm số  $f'(x) = \frac{-1}{(\sqrt{x^2 - 1})^3} < 0, x \geq \sqrt{3}$  nên đây là hàm nghịch biến.

Đến đây, ta có bài toán quen thuộc là tìm giới hạn của dãy số xác định bởi công thức truy hồi  $x_{n+1} = f(x_n)$  và  $f(x)$  nghịch biến.

Sử dụng tính chất của hai dãy con có tính đơn điệu ngược nhau là hoàn tất chứng minh.

### Bài 2.

Cho  $n$  số dương  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  với  $a_1 = 1, a_n = 2$  và  $a_k \leq \sqrt{a_{k-1}a_{k+1}}$  với  $k = 2, 3, 4, \dots, n-1$ .

Xác định số lớn nhất của dãy.

**Gợi ý.** Bằng phản chứng hãy chứng minh rằng  $\max_{1 \leq k \leq n} a_k = \max\{a_1, a_n\}$ .

### Bài 3.

Chứng minh rằng dãy số  $\{x_n\}$  có tính chất  $|x_n - x_m| > \frac{1}{n}, \forall n < m$ .

Chứng minh rằng dãy này không bị chặn.

**Gợi ý.** Trước hết, chứng minh rằng dãy  $a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \rightarrow +\infty$ . Giả sử dãy đã cho bị chặn, tức là tồn tại  $|x_n| \leq M, \forall n$  rồi xét lân cận bán kính  $\frac{1}{2n}$  cho mỗi điểm.

**Bài 4.**

Tìm tất cả các số thực  $a, b$  sao cho dãy  $\{x_n\}$  với  $x_0 = a, x_{n+1} = 1 + bx_n, n = 0, 1, 2, \dots$  hội tụ.

**Gợi ý.** Quy nạp tìm công thức tổng quát của  $n$  rồi tìm biện luận.

Kết quả là  $|b| < 1, a$  tùy ý hoặc  $b \neq 1, a = \frac{1}{1-b}$ .

**Bài 5.**

Cho dãy  $\{x_n\}$  xác định bởi  $x_1 > 0$  và  $x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 3ax_n}{3x_n^2 + a}, a > 0$ .

Chứng minh rằng dãy này có giới hạn với mọi  $x_1$ . Tìm giới hạn đó.

**Gợi ý.** Dễ thấy rằng hàm số  $f(x) = \frac{x^3 + 3ax}{3x^2 + a}, a > 0$  có đạo hàm dương và dãy số đã cho chính là

$$x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, 3, \dots$$

**Bài 6.**

Cho dãy số  $\{y_n\}$  xác định bởi  $y_1 = x \in \mathbb{R}, y_{n+1} = a \sin y_n$  trong đó  $|a| \leq \frac{\pi}{2}, x > 0$ .

Tìm giới hạn của dãy này.

**Gợi ý.** Xét các trường hợp  $-1 \leq a \leq 1$  thì giới hạn bằng 0, nếu  $1 < a \leq \frac{\pi}{2}$  thì xét nghiệm  $l^*$  của phương trình  $l = a \sin l$ . Các trường hợp khác không có giới hạn.

**Bài 7.**

Cho dãy số  $\{x_n\}$  xác định như sau:  $x_{n+1} = \sin x_n, n = 1, 2, 3, \dots$  và  $x_1 \in (0; \pi)$ . Chứng minh rằng  $\lim \sqrt{n}x_n = \sqrt{3}$ .

**Gợi ý:** Chứng minh rằng tồn tại dãy  $y_n \rightarrow 0$  sao cho  $\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_{n-1}^2} + \frac{1}{3} + y_n$ . Đánh giá các tổng này để suy ra các hằng số, từ đó tìm được giới hạn.

**Bài 8.**

Giả sử  $a_1, a_2, a_3, \dots$  là dãy các số tự nhiên vô hạn không nhỏ hơn 2. Chứng minh rằng từ dãy này có thể trích ra được dãy con  $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots$  sao cho  $a_{i_k} > i_k$ .

**Gợi ý.** Bằng phản chứng, chứng minh rằng có vô số số hạng của dãy mà  $a_i > i$ .

**Bài 9.**

Cho dãy  $\{x_n\}$  thỏa mãn điều kiện  $x_{m+n} \leq x_n + x_m, \forall m, n$ . Chứng minh rằng dãy  $\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$  hội tụ.

**Gợi ý.** Ta thấy rằng tồn tại  $\alpha > 0$  sao cho  $\forall \varepsilon > 0$  thì tồn tại  $m$  mà  $\alpha \leq \frac{x_m}{m} \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ .

Biểu diễn  $n = qm + r, 0 \leq r \leq m-1$  để có  $x_n \leq qx_m + x_r \Rightarrow \frac{x_n}{n} \leq \frac{x_m}{m} \cdot \frac{m}{qm+r} + \frac{x_r}{r}$ .

Do đó  $\alpha \leq \frac{x_n}{n} < \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{qm+r}{m} + \frac{x_r}{r} < \alpha + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{x_r}{r}$ . Đánh giá  $\frac{x_r}{r}$  dựa trên điều kiện đã cho để

chứng minh rằng  $\alpha \leq \frac{x_n}{n} \leq \alpha + \varepsilon$  là xong.

**Bài 10.**

Cho dãy số  $\{a_n\}$  không tuần hoàn gồm các phân tử là 0,1,2 và xét các dãy  $\{b_n\}, \{c_n\}$  tương ứng như sau

$$b_n = 0 \text{ nếu } a_n = 0, b_n = 1 \text{ nếu } a_n = 1 \text{ hoặc } a_n = 2.$$

$$c_n = 0 \text{ nếu } a_n = 2, c_n = 1 \text{ nếu } a_n = 0 \text{ hoặc } a_n = 1.$$

Chứng minh rằng ít nhất một trong hai dãy này không tuần hoàn.

**Gợi ý.** Chỉ cần chứng minh  $a_n = b_n + c_n, n = 0,1,2, \dots$

Chú ý rằng hai dãy tuần hoàn thì tổng của chúng cũng phải tuần hoàn.

**Bài 11.** (VMO 1990, bảng A và B)

Cho dãy số  $(x_n), n \in \mathbb{N}^*$  và  $|x_1| < 1$  được xác định bởi hệ thức

$$x_{n+1} = \frac{-x_n + \sqrt{3 - 3x_n^2}}{2}, n = 1, 2, 3, \dots$$

a) Cần thêm điều kiện gì đối với  $x_1$  để dãy này gồm toàn số dương?

b) Dãy số này có tuần hoàn không? Vì sao?

**Gợi ý.**

a) Chứng minh bằng quy nạp rằng điều kiện cần tìm là  $0 < x_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

b) Do  $|x_n| < 1, \forall n$  nên có thể đặt  $x_n = \sin a_n, -\frac{\pi}{2} < a_n < \frac{\pi}{2}$  rồi xem xét tính chất của dãy  $\{a_n\}$ .

**Bài 12.** (VMO 1994, bảng B)

Cho số thực  $a$  và dãy số  $(x_n)$  xác định bởi

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_n = \sqrt[3]{6x_{n-1} - 6\sin x_{n-1}}, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số  $(x_n)$  có giới hạn hữu hạn khi  $n$  dần tới vô cực và tìm giới hạn đó.

**Gợi ý.** Với  $a = 0$  thì giới hạn của dãy là 0. Với  $a > 0$  thì từ bất đẳng thức  $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}, \forall x \geq 0$ ,

ta có  $x_n < x_{n-1}$ , tức là dãy đã cho giảm, bị chặn dưới nên có giới hạn. Trường hợp  $a < 0$  thì đổi dấu của dãy và chứng minh tương tự.

**Bài 13.**

Tìm điều kiện của  $a$  để các dãy số xác định như sau hội tụ:

a)  $u_1 = a, u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1, n = 1, 2, 3, \dots$

b)  $u_1 = a > 0, u_{n+1} = \frac{u_n^2 + a}{2}, n = 1, 2, 3, \dots$

**Gợi ý.**

a) Tiến hành khảo sát hàm số  $y = f(x)$  và nghiệm của phương trình  $f(x) = x$  để suy ra điều kiện cần tìm là  $a \in [0;1]$ .

b) Hàm số tương ứng là  $f(x) = \frac{x^2 + a}{2}$  có đạo hàm là  $f'(x) = x$  và các số hạng của dãy đều dương nên hàm này đồng biến. Từ đó, chỉ cần so sánh  $a$  với  $\frac{a^2 + a}{2}$  là suy ra điều kiện cần tìm.

**Bài 14.**

Cho dãy số  $\{a_n\}$  thỏa mãn  $a_1 \in (0,1)$  và  $a_{n+1} = a_n - a_n^2$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Chứng minh rằng  $\lim na_n = 1$ .

**Gợi ý.**

Bằng quy nạp, ta chứng minh được:  $a_n < \frac{1}{n+1}$ ,  $\forall n$ .

Ta cũng có:  $a_{n+1} - a_n = -a_n^2 < 0$ ,  $\forall n$ , suy ra: dãy  $\{a_n\}$  giảm, đồng thời nó bị chặn dưới nên có giới hạn, dễ thấy giới hạn đó chính là 0. Đặt  $c_n = \frac{1}{a_n}$ .

Ta thấy:  $\lim \frac{c_{n+1} - c_n}{(n+1) - n} = \lim \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n \cdot a_{n+1}} = \lim \frac{a_n^2}{a_n^2(1 - a_n)} = \lim \frac{1}{1 - a_n} = 1$ .

Theo định lí trung bình Cesaro, ta được  $\lim \frac{c_n}{n} = 1 \Rightarrow \lim na_n = 1$ .

**Bài 15.**

Cho dãy số  $\{x_n\}$  được xác định như sau:

$$\begin{cases} x_1 = a \neq -2 \\ x_{n+1} = \frac{3\sqrt{2x_n^2 + 2} + 2}{2x_n + \sqrt{2x_n^2 + 2}}, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Xét tính hội tụ của dãy sau tùy theo giá trị của  $a$ .

**Gợi ý.**

Xét  $f(x) = \frac{3\sqrt{2x^2+2}+2}{2x+\sqrt{2x^2+2}}, x \neq -2$ . Ta có  $x_1 = a, x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, 3, \dots$

Ta thấy phương trình  $f(x) = x$  chỉ có hai nghiệm là  $x = -1, x = 7$ .

Xét dấu của  $f(x) - x$  trên  $(-\infty, -7), (1, +\infty)$ , ta có  $f(x) > x, \forall x < -7$  và  $f(x) < x, \forall x > 1$ .

Tiếp tục nhận xét phương trình  $f(x) = 1$  chỉ có nghiệm  $x = -1$  nên  $f(x) - 1$  không đổi dấu trên từng khoảng  $(-1, 1)$  và  $(1, +\infty)$ ; ta chứng minh được:  $f(x) \geq 1, \forall x \geq -1$ .

Tương tự, xét phương trình  $f(x) = -7$ , ta được:  $f(x) \leq -7, \forall x < -1$ .

Từ đó suy ra:

- Nếu  $a \geq -1$  thì dãy giảm và bị chặn dưới nên nó hội tụ,  $\lim x_n = 1$ .
- Nếu  $a < -1, a \neq -2$  thì dãy tăng và bị chặn trên nên cũng hội tụ,  $\lim x_n = -7$ .

**Bài 16.**

Cho  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Xét hàm số  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}$  và dãy  $\{u_n\}$  thỏa

$$u_0 = k \in \mathbb{R}, u_{n+1} = f(u_n), n = 0, 1, 2, \dots$$

a) Chứng minh rằng  $f(x)$  là một song ánh và dãy  $\{u_n\}$  đã cho xác định khi và chỉ khi

$k \neq v_n, \forall n$ , trong đó  $\{v_n\}$  được xác định bởi  $v_0 = \frac{-d}{c}, v_{n+1} = f^{-1}(v_n), n = 0, 1, 2, \dots$  (lưu ý rằng dãy này có thể không xác định từ một số thứ tự nào đấy).

b) Đặt  $\Delta = (d-a)^2 + 4bc$ .

Biện luận theo  $\Delta$  sự hội tụ của dãy  $\{u_n\}$ .

**Gợi ý.**

a) Ta có  $y = \frac{ax+b}{cx+d} \Leftrightarrow x = \frac{b-dy}{cy-a}, \forall (x, y) \in \left( \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\} \right) \times \left( \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\} \right)$  nên  $f(x)$  là một song ánh.

Dãy đã cho xác định khi và chỉ khi  $u_0 = k \neq v_0, u_k$  xác định và khác  $v_0$  với mọi  $k$  hay  $k \neq v_n, \forall n$ .

b) Ta thấy nếu dãy đã cho có giới hạn là  $\ell$  thì  $\ell = \frac{a\ell + b}{c\ell + d} \Leftrightarrow c\ell^2 + (d-a)\ell - b = 0$  (\*). Khi đó :

- Nếu  $\Delta = (d-a)^2 + 4bc < 0$  thì dãy này phân kì.
- Nếu  $\Delta = (d-a)^2 + 4bc > 0$  thì (\*) có hai nghiệm phân biệt, đặt là  $\alpha > \beta$ .

Ta lại xét các trường hợp :

+ Nếu  $u_0 = \alpha \Rightarrow u_n = a, \forall n$ . Dãy đã cho là dãy hằng.

+ Nếu  $u_0 \neq \alpha$ , ta xét dãy số :  $U_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \beta}{u_{n+1} - \alpha} = \frac{c\alpha + d}{c\beta + d} \cdot \frac{u_n - \beta}{u_n - \alpha} = \gamma \cdot U_n$ . Suy ra :

$$U_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \beta}{u_{n+1} - \alpha} = \frac{c\alpha + d}{c\beta + d} \cdot \frac{u_n - \beta}{u_n - \alpha} = \gamma \cdot U_n \Rightarrow U_n = \gamma^n \cdot U_0 \text{ với } \gamma = \frac{c\alpha + d}{c\beta + d} \neq 1.$$

$$\text{Do đó : } \begin{cases} |\gamma| < 1 \Rightarrow u_n \rightarrow \beta \\ |\gamma| > 1 \Rightarrow u_n \rightarrow \alpha \end{cases}$$

Trường hợp  $\gamma = -1$  thì  $u_n \rightarrow \beta$  nếu  $u_0 = \beta$  và  $\{u_n\}$  phân kì nếu  $u_0 \neq \beta$ .

- Nếu  $\Delta = (d-a)^2 + 4bc = 0$ , đặt  $\alpha = \frac{a-d}{2c}$  là nghiệm duy nhất của (\*).

+ Nếu  $u_0 = \alpha \Rightarrow u_n = a, \forall n$ .

+ Nếu  $u_0 \neq \alpha$ . Ta chứng minh được dãy  $V_n = \frac{1}{u_n - \alpha} \rightarrow +\infty$  khi  $n \rightarrow +\infty$ .

Từ đó suy ra :  $\lim u_n = \alpha$ .

### Bài 17.

Dãy số  $\{a_n\}$  được xác định bởi  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$  và  $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}$ .

Chứng minh rằng dãy số  $\{a_n\}$  hội tụ và tìm giới hạn của dãy số đó.

**Gợi ý.**

Xét dãy số  $M_n = \max\{a_n, a_{n+1}, 4\}$ .

+ Nếu  $M_n = 4$  thì  $a_n, a_{n+1} \leq 4$ , suy ra  $a_{n+2} \leq 4$ , từ đó  $M_{n+1} = 4$ .

+ Nếu  $M_n = a_{n+1}$  thì  $a_{n+1} \geq a_n, a_{n+1} \geq 4$ . Khi đó



$$\sqrt{a_{n-1}} = a_{n+1} - \sqrt{a_n} \geq a_{n+1} - \sqrt{a_{n+1}} \geq \sqrt{a_{n+1}} \text{ suy ra } a_{n+2} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}} \leq \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}} = a_{n+1}.$$

Do đó,  $M_{n+1} = \max\{a_{n+1}, a_{n+2}, 4\} = a_{n+1}$ .

+ Nếu  $M_n = a_n$  thì  $a_n \geq a_{n+1}, a_n \geq 4$ . Khi đó  $a_{n+2} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}} \leq 2\sqrt{a_n} \leq a_n$ .

Suy ra  $M_{n+1} \leq a_n = M_n$ .

Vậy trong mọi trường hợp thì  $M_{n+1} \leq M_n$ , tức là dãy  $\{M_n\}$  là dãy số giảm. Do  $\{M_n\}$  bị chặn dưới bởi 4 nên dãy này có giới hạn. Ta chứng minh giới hạn này bằng 4. Thực vậy, giả sử giới hạn là  $M > 4$ . Khi đó với mọi  $\varepsilon > 0$ , tồn tại  $N$  sao cho với mọi  $n \geq N$  thì  $M - \varepsilon < M_n < M + \varepsilon$ .

Chọn  $n \geq N$  sao cho  $M_{n+2} = a_{n+2}$  (theo lập luận trên và do  $M > 4$  thì tồn tại chỉ số  $n$  như vậy). Ta có

$$\begin{aligned} M - \varepsilon < M_{n+2} = a_{n+2} &= \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}} < 2\sqrt{M + \varepsilon} \\ \Leftrightarrow M(M - 4) - \varepsilon(2M + 4 - \varepsilon) &< 0 \end{aligned}$$

Mâu thuẫn vì  $M > 4$  và  $\varepsilon$  có thể chọn nhỏ tùy ý.

Do đó,  $\lim M_n = 4$  suy ra dãy đã cho cũng hội tụ tại 4.

**Bài 18.** (Việt Nam TST 1990)

Cho trước bốn số thực dương  $a, b, A, B$ . Xét dãy số  $\{x_n\}$  xác định như sau

$$x_1 = a, x_2 = b, x_{n+2} = A\sqrt[3]{x_{n+1}^2} + B\sqrt[3]{x_n^2}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng tồn tại giới hạn  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$  và tìm giới hạn đó.

**Gợi ý.**

Xét dãy số phụ  $b_n = \max\{a_n, a_{n+1}, (A+B)^3\}$ .

Ta chứng minh được dãy này giảm và bị chặn dưới nên có giới hạn. Sau đó chứng minh giới hạn của dãy này và dãy  $\{x_n\}$  đã cho có cùng giới hạn là  $(A+B)^3$ .

**Bài 19.** (VMO 1992)

Cho ba số thực dương  $a, b, c$  và các dãy số  $\{a_k\}, \{b_k\}, \{c_k\}, k = 0, 1, 2, \dots$  được xác định như sau:

$$1) a_0 = a, b_0 = b, c_0 = c.$$

$$2) a_{k+1} = a_k + \frac{2}{b_k + c_k}, b_{k+1} = b_k + \frac{2}{c_k + a_k}, c_{k+1} = c_k + \frac{2}{a_k + b_k}, k \geq 0$$

Chứng minh các dãy  $\{a_k\}, \{b_k\}, \{c_k\}$  này dần tới vô cực khi  $n$  tiến tới vô cực.

**Gợi ý.**

Với mỗi  $k \geq 0$ , đặt  $M = \max\{a_k, b_k, c_k\}$  và  $m = \min\{a_k, b_k, c_k\}$ , dễ thấy các dãy này đều dương.

Ta sẽ chứng minh rằng:  $\lim M_k = +\infty$ ,  $\lim \frac{M_k}{m_k} = p \in \mathbb{R}^+$ . Thật vậy:

Xét  $M_k$ , từ giả thiết, ta có:

$$a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2 + c_{k+1}^2 > a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + 2 \left( \frac{a_k}{b_k + c_k} + \frac{b_k}{c_k + a_k} + \frac{c_k}{a_k + b_k} \right) \geq a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + 6$$

Bằng quy nạp, suy ra:  $a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 > 6k, \forall k \Rightarrow M_k^2 \geq \frac{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2}{3} > 2k \Rightarrow \lim M_k = +\infty$ .

Xét  $\frac{M_k}{m_k}$ , ta chứng minh được:  $m_{k+1} \geq m_k + \frac{1}{M_k}, M_{k+1} \leq M_k + \frac{1}{m_k}, \forall k$ . Suy ra:

$$M_{k+1} \cdot m_k \leq \left( M_k + \frac{1}{m_k} \right) m_k = M_k \left( m_k + \frac{1}{M_k} \right) \leq M_k \cdot m_{k+1} \Rightarrow \frac{M_{k+1}}{m_{k+1}} \leq \frac{M_k}{m_k}.$$

Hơn nữa rõ ràng:  $\frac{M_k}{m_k} \geq 1$ , suy ra dãy  $\frac{M_k}{m_k}$  này hội tụ, tức là tồn tại giới hạn  $p$  của  $\frac{M_k}{m_k}$ .

Từ đó suy ra:  $\lim m_k = +\infty$  và suy ra đpcm.

**Bài 20.**

Cho dãy số dương  $\{a_n\}$  thỏa mãn:  $a_1 > 0, a_{n+1}^p \geq a_1 + a_1 + \dots + a_n, \forall n \geq 1$  với  $0 < p < 2$ .

Chứng minh rằng tồn tại  $c > 0$  sao cho  $a_n > nc, \forall n$ .

**Gợi ý.**

Từ giả thiết, suy ra:  $a_n \geq a_1^{\frac{1}{p}}, \forall n$  hay  $a_n \geq (n-2)a_1^{\frac{1}{p}} + a_1, \forall n$ .

Do đó:  $\lim a_n = +\infty$ . Suy ra, tồn tại  $N_0 \in \mathbb{N}$  sao cho với mọi  $n > N_0$  thì  $a_n > 1$ .

Đặt  $c = \min\{\frac{1}{4}, a_1, \frac{a_2}{2}, \dots, \frac{a_{N_0}}{N_0}\} \Rightarrow \frac{a_n}{n} > c > 0, \forall n \leq N_0$ .

Ta sẽ chứng minh  $a_n > nc, \forall n \geq N_0$  bằng quy nạp. Thật vậy:

Với  $n = N_0$ , nhận xét trên hiển nhiên đúng.

Giả sử nhận xét đúng đến  $n = N_1 > N_0$ , ta có

$$a_{N_1+1}^2 \geq a_{N_1+1}^p \geq a_1 + a_2 + \dots + a_{N_1} \geq (1+2+\dots+N_1) \cdot c = \frac{N_1(N_1+1)}{2} c = (N_1+1)c \frac{N_1}{2} > [(N_1+1)c]^2$$

$\Rightarrow a_{N_1+1} > (N_1 + 1)c \Leftrightarrow \frac{a_{N_1+1}}{N_1 + 1} > c$ , tức là nhận xét trên cũng đúng với  $n = N_1 + 1$ .

Theo nguyên lí quy nạp, nhận xét được chứng minh. Từ đây ta cũng suy ra đpcm.

### Bài 21.

Khảo sát sự hội tụ của dãy số cho bởi công thức sau

$$u_0 = a \in \mathbb{R}, u_{n+1} = \sqrt[3]{7u_n - 6}, n = 0, 1, 2, \dots$$

#### Gợi ý.

Đặt  $f(x) = \sqrt[3]{7x - 6}$ , dễ thấy  $f(x)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Ta thấy phương trình  $f(x) = x$  có 3 nghiệm phân biệt là  $x = -3, x = 1, x = 2$ .

Xét dấu của  $f(x)$  trên từng khoảng  $(-\infty, -3), (-3, 1), (1, 2), (2, +\infty)$ , ta được:

$$\begin{cases} a < 1 \Rightarrow \lim u_n = -3 \\ a = 1 \Rightarrow \lim u_n = 1 \\ a > 1 \Rightarrow \lim u_n = 2 \end{cases}$$

### Bài 22.

Cho  $\alpha \in (0, 2)$ . Tính giới hạn của dãy sau theo các giá trị  $u_0, u_1$  cho trước

$$u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + (1 - \alpha)u_n, n = 0, 1, 2, \dots$$

#### Gợi ý.

Ta có:  $u_{n+1} - u_n = (\alpha - 1)(u_n - u_{n-1}) = \dots = (\alpha - 1)^n (u_1 - u_0)$ .

Suy ra:  $u_{n+1} - u_0 = \sum_{k=1}^{n+1} (u_k - u_{k-1}) = \sum_{k=0}^n (\alpha - 1)^k (u_1 - u_0) = (u_1 - u_0) \sum_{k=0}^n (\alpha - 1)^k = (u_1 - u_0) \cdot \frac{1 - (\alpha - 1)^{n+1}}{1 - (\alpha - 1)}$

Từ  $\alpha \in (0, 2)$ , ta được:  $-1 < \alpha - 1 < 1 \Rightarrow |\alpha - 1| < 1 \Rightarrow \lim [(\alpha - 1)^n] = 0$ .

Do đó:  $\lim(u_{n+1} - u_0) = \lim \left[ (u_1 - u_0) \cdot \frac{1 - (\alpha - 1)^{n+1}}{1 - (\alpha - 1)} \right] = \frac{u_1 - u_0}{2 - \alpha}$ .

Vậy  $\lim u_n = \frac{u_1 - u_0}{2 - \alpha} + u_0 = \frac{(1 - \alpha)u_0 + u_1}{2 - \alpha}$ .

### Bài 23. (Việt Nam TST 1991)

Cho dãy thực dương  $\{x_n\}$  được xác định bởi

$$x_1 = 1, x_2 = 9, x_3 = 9, x_4 = 1, x_{n+4} = \sqrt[4]{x_n \cdot x_{n+1} \cdot x_{n+2} \cdot x_{n+3}}, n \geq 1.$$

Chứng minh dãy này có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

**Gợi ý.**

Xét dãy  $\{y_n\}$   $y_n = \log_3 x_n, \forall n$ , tức là

$$y_1 = 0, y_2 = 2, y_3 = 2, y_4 = 0, y_{n+4} = \frac{y_n + y_{n+1} + y_{n+2} + y_{n+3}}{4}, n \geq 1.$$

Ta sẽ chứng minh dãy  $\{y_n\}$  này hội tụ. Thật vậy:

Từ công thức tổng quát này, suy ra

$$4y_{n+4} = y_n + y_{n+1} + y_{n+2} + y_{n+3} \Leftrightarrow 4y_{n+4} + 3y_{n+3} + 2y_{n+2} + y_{n+1} = 4y_{n+3} + 3y_{n+2} + 2y_{n+1} + y_n$$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$4y_{n+4} + 3y_{n+3} + 2y_{n+2} + y_{n+1} = 4y_3 + 3y_2 + 2y_1 + y_0 = 4.0 + 3.2 + 2.2 + 1.0 = 10$$

Suy ra nếu dãy  $\{y_n\}$  có giới hạn là  $\ell$  thì  $10\ell = 10 \Leftrightarrow \ell = 1$ .

Ta cũng dùng dãy phụ để chứng minh dãy này có giới hạn.

Xét dãy  $u_n = \max\{y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+3}\}$ ,  $v_n = \min\{y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+3}\}$ ,  $\forall n$ .

Bằng quy nạp, dễ thấy  $y_n \leq 9, \forall n$ .

Ta chứng minh được dãy  $\{u_n\}$  giảm và bị chặn dưới, dãy  $\{v_n\}$  tăng và bị chặn trên nên cả hai dãy này đều hội tụ tại một điểm. Suy ra dãy  $\{y_n\}$  hội tụ tại  $\ell = 1$ .

Vậy dãy  $\{x_n\}$  hội tụ và  $\lim x_n = 3$ .

## F – CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI.

### Bài 1.

Trên hypebol  $xy = 1$ , ta lần lượt lấy các điểm  $A_n, B_n$  với các hoành độ tương ứng là  $\frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n}$ .

Kí hiệu  $M_n$  là tâm của đường tròn đi qua  $A_n, B_n$  và các đỉnh của hypebol. Hãy tìm giới hạn của dãy  $\{M_n\}$  khi  $n$  tiến tới vô cực.

### Bài 2.

Giả sử  $x_{k+1} = \frac{1}{2} \left( 2x_k + \frac{a}{x_k^2} \right), (a > 0, x_0 > 0)$ .

a. Chứng minh rằng dãy số  $\{x_n\}$  có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

b. Kí hiệu  $z_n$  là hiệu giữa  $x_k$  và gi

ới hạn tương ứng của dãy với giả thiết rằng  $z_1 \neq 0$ . Chứng minh rằng với mọi  $k > 1$  thì ta có các bất đẳng thức sau

$$z_k > 0, z_{k+1} < \frac{2}{3} z_k, z_{k+1} < \frac{1}{\sqrt[3]{a}} z_k$$

### Bài 3.

Giả sử  $x_1, x_2, x_3, \dots$  là tập hợp tất cả các nghiệm dương của phương  $\tan x = x$  được xếp theo thứ tự tăng dần. Tính giới hạn của dãy  $y_n = x_{n+1} - x_n, n = 1, 2, 3, \dots$

### Bài 4.

Giả sử dãy  $\{a_n\}$  là dãy các số dương và dãy  $\{x_n\}$  xác định bằng cách sau

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = x_n + a_n x_{n+1}, n \geq 1.$$

Chứng minh rằng giữa các phần tử của dãy  $\{x_n\}$  có vô hạn các số nguyên dương và nguyên âm.

### Bài 5.

Giả sử  $p$  là số nguyên tố và  $a, b$  sao cho  $a^2 + ab - b^2 \equiv 0 \pmod{p}$ . Xét dãy số nguyên dương sau

$$v_0 = a, v_1 = b, v_{n+1} = v_n + v_{n-1}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng số dư  $v_n \pmod p$  tuần hoàn và có chu kì không phụ thuộc vào  $a, b$ .

### Bài 6.

Giả sử  $\{a_n\}$  là dãy hữu hạn các số thực  $1 \leq n \leq N$ . Ta gọi  $a_k$  là một số được đánh dấu nếu như có ít nhất một trong các số  $a_k, a_k + a_{k+1}, \dots, a_k + a_{k+1} + \dots + a_{k+2011}$  là không âm (nếu  $n \geq N$  thì coi  $a_n = 0$ ). Chứng minh rằng tổng tất cả các số được đánh dấu là không âm.

### Bài 7.

Cho dãy số sau 
$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = p, a_2 = p^2 - q, \\ a_{n+3} = pa_{n+2} - qa_{n+1} + a_n, n \geq 0 \end{cases}$$

Biết  $a_n \geq 0, \forall n$  và  $a_m a_n \geq a_{m-1} a_{n+1}, \forall m > n$ . Chứng minh rằng đa thức  $P(x) = x^3 - px^2 + qx - 1$  có đúng ba nghiệm thực.

### Bài 8.

Cho dãy số nguyên dương  $\{a_n\}$  thỏa mãn điều kiện  $0 < a_{n+1} - a_n < \sqrt{a_n}, \forall n \geq 1$ .

Chứng minh rằng với mọi  $x, y$  mà  $0 < x < y < 1$  thì tồn tại  $k, l \in \mathbb{N}^*$  sao cho  $x < \frac{a_k}{a_l} < y$ .

### Bài 9.

Cho số thực  $m > 0$  và dãy số  $\{a_n\}$  thỏa mãn

$$a_0 = 1, a_1 = m + \frac{1}{m}, a_{n+1} = \left( \frac{a_n^2}{a_{n-1}^2} - 2 \right) a_n, n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng tổng  $y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$  bị chặn.

### Bài 10.

Cho hai dãy số  $(a_n), (b_n)$  thỏa mãn điều kiện

$$(a_n - a_{n-1})(a_n - a_{n-2}) + (b_n - b_{n-1})(b_n - b_{n-2}) = 0, \forall n > 2$$

Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương  $k$  sao cho  $a_k = a_{k+2011}$ .

**Bài 11.**

Chứng minh rằng với mọi  $a \in \left(1; e^{\frac{1}{e}}\right)$  thì dãy số  $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = a^{u_n}, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$  hội tụ.

**Bài 12.**

Cho hai dãy số thực dương  $(a_n), (b_n)$  thỏa mãn điều kiện

$$(i) \ a_0 = 1 \geq a_1, a_n(b_{n+1} + b_{n-1}) = a_{n-1}b_{n-1} + a_{n+1}b_{n+1}, n \geq 1$$

$$(ii) \ \sum_{i=1}^n b_i \leq n\sqrt{n}, n \geq 1.$$

Tìm công thức tổng quát của  $(a_n)$ .

**Bài 13.**

Cho dãy số nguyên dương  $\{b_n\}$  và dãy số  $\{a_n\}$  với  $a_1$  cố định được xác định như sau

$$a_{n+1} = a_n^{b_n} + 1, n \geq 1.$$

Tìm tất cả các số nguyên dương  $m$  lớn hơn 2 thỏa mãn điều kiện:

(i) Dãy số  $a_n \pmod m$  tuần hoàn.

(ii) Tồn tại các số nguyên dương  $q, u, v$  sao cho  $2 \leq q \leq m-1$  và dãy  $b_{u+bt} \pmod q$  tuần hoàn.

**\* Tài liệu tham khảo.**

[1] Đề thi chọn đội tuyển các trường, đề thi HSG các tỉnh, thành phố năm học 2011 – 2012.

[2] Trần Nam Dũng, Tài liệu giáo khoa chuyên Toán 11, NXB Giáo dục, 2010.

[3] Trần Lưu Cường, Toán Olympic cho Sinh viên, NXB Giáo dục, 1998.

[4] Tủ sách tạp chí THPT, Các bài toán thi Olympic Toán THPT, NXB Giáo dục, 2007.

[5] Tuyển tập 30 năm tạp chí THPT, NXB Giáo dục, 1996.

[6] Các diễn đàn Toán học <http://mathscope.org>, <http://mathlinks.ro>.