TRẦN NAM DŨNG
(chủ biên)

LỜI GIẢI VÀ BÌNH LUẬN ĐỀ THI CÁC TỈNH, CÁC TRƯỜNG ĐẠI HỌC NĂM HỌC 2009-2010

E-BOOK

Lời nói đầu

Lời cảm ơn

Xin cảm ơn sự nhiệt tình tham gia đóng góp của các bạn:

1. Phạm Tiến Đạt
2. Phạm Hy Hiếu
3. Nguyễn Xuân Huy
4. Mai Tiến Khải
5. Nguyễn Vương Linh
6. Nguyễn Lâm Minh
7. Nguyễn Văn Năm
8. Đinh Ngọc Thạch
9. Lê Nam Trường
10. Võ Thành Văn

Cùng rất nhiều bạn yêu toán khác.

Mục lục

Phần I

Đề toán và lời giải

Chương 1

Số học

"Toán học là bảo vật quý giá hơn bất cứ thứ gì khác mà chúng ta được thừa hưởng từ kho tàng tri thức của nhân loại."
Rene Descartes

1.1 Đề bài

1.1. Giả sử m, n là hai số nguyên dương thoả mãn $\frac{n}{d}$ là số lẻ với $d = (m,\, n)$. Xác định $(a_m + 1,\, a_n - 1)$ với a là số nguyên dương lớn hơn 1.

1.2. Dãy số $\{a_n\}$ được xác định như sau: $a_0 = 0,\, a_1 = 1,\, a_2 = 2,\, a_3 = 6$ và

$$a_{n+4} = 2a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n \quad \text{với mọi } n \geq 0.$$

(a) Chứng minh rằng a_n chia hết cho n với mọi $n \geq 1$.

(b) Chứng minh rằng dãy số $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ chứa vô số số hạng chia hết cho 2009.

1.3. Cho m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, m là số chẵn. Tìm ước số chung lớn nhất của $m^2 + n^2$ và $m^3 + n^3$.

1.4. Cho các số nguyên dương $a,\, b,\, c,\, d$ thỏa mãn $ac + bd$ chia hết cho $a^2 + b^2$. Chứng minh rằng

$$(c^2 + d^2,\, a^2 + b^2) > 1.$$

1.5. Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho phương trình

$$x^2+y^2+x+y=kxy$$

có nghiệm nguyên dương.

1.6. Tìm tất cả các số nguyên dương $x,\ y$ thoả mãn

$$x^2+15y^2+8xy-8x-36y-28=0.$$

1.7. Chứng minh rằng

$$|12^m-5^n|\geq 7$$

với mọi $m,\ n$ nguyên dương.

1.8. Cho n là số nguyên dương sao cho 3^n-1 chia hết cho 2^{2009}. Chứng minh rằng

$$n\geq 2^{2007}.$$

1.9. (1) Cho $a=5^{2^{100}+100}$. Chứng minh số a có ít nhất 25 chữ số 0 đứng liền nhau.

(2) Chứng minh tồn tại vô số số tự nhiên n mà 5^n có ít nhất 100 chữ số 0 đứng liền nhau.

1.10. Cho $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thoả mãn các điều kiện

(i) $f(xy)=f(x)f(y)$ với mọi $x,\ y$ thoả mãn $(x,\ y)=1$;

(ii) $f(x+y)=f(x)+f(y)$ với mọi bộ số nguyên tố $x,\ y$.

Hãy tính $f(2),\ f(3),\ f(2009)$.

1.11. Tìm tất cả các bộ số tự nhiên $a,\ b,\ c,\ d$ đôi một phân biệt thỏa mãn

$$a^2-b^2=b^2-c^2=c^2-d^2.$$

1.12. Cho hai số nguyên dương $p,\ q$ lớn hơn 1, nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên k sao cho $(pq-1)^nk+1$ là hợp số với mọi số nguyên dương n.

1.2 Lời giải

Bài 1.1. *Giả sử m, n là hai số nguyên dương thoả mãn $\dfrac{n}{d}$ là số lẻ với $d = (m,\, n)$. Xác định $(a_m + 1,\, a_n - 1)$ với a là số nguyên dương lớn hơn 1.*

(Đại học Vinh)

Lời giải. Do $d = (m,\, n)$ nên $\left(\dfrac{m}{d},\, \dfrac{n}{d}\right) = 1$. Vì $\dfrac{n}{d}$ là số lẻ nên ta có $\left(\dfrac{2m}{d},\, \dfrac{n}{d}\right) = 1$, suy ra $(2m,\, n) = d$. Theo định lý Bezout, tồn tại u, v nguyên sao cho $2mu + nv = d$. Đặt $D = (a_m + 1,\, a_n - 1)$. Khi đó

$$a^m \equiv -1 \pmod{D},$$

suy ra

$$a^{2m} \equiv 1 \pmod{D}.$$

Ngoài ra ta đã có

$$a^n \equiv 1 \pmod{D}.$$

Từ những điều trên, ta suy ra

$$a^d = a^{2mu+nv} \equiv 1 \pmod{D}.$$

Do $m = dm'$ nên từ đây ta suy ra $a^m \equiv 1 \pmod{D}$. Kết hợp với $a^m \equiv -1 \pmod{D}$ ta suy ra $2 \equiv 0 \pmod{D}$. Từ đây suy ra $D = 1$ hoặc $D = 2$. Dễ thấy với a lẻ thì $D = 2$ còn với a chẵn thì $D = 1$. Đó chính là kết luận của bài toán.

Bình luận. Đây là một bài toán khá căn bản về bậc của một số theo modulo. Trong các bài toán như vậy, định lý Bezout luôn là một kết quả hữu ích.

Bài 1.2. *Dãy số $\{a_n\}$ được xác định như sau: $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 6$ và*

$$a_{n+4} = 2a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n \quad \text{với mọi } n \geq 0.$$

(a) Chứng minh rằng a_n chia hết cho n với mọi $n \geq 1$.

(b) Chứng minh rằng dãy số $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ chứa vô số số hạng chia hết cho 2009.

(Đại học Khoa học tự nhiên)

Lời giải. Phương trình đặc trưng của dãy $\{a_n\}$ có dạng $x_4 - 2x_3 - x_2 + 2x + 1 = 0$, tương đương $(x^2 - x - 1)^2 = 0$. Từ đó số hạng tổng quát của a_n có dạng

$$a_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n + n(c_3\alpha^n + c_4\beta^n),$$

trong đó $\alpha > \beta$ là các nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$. Từ đây, từ các điều kiện ban đầu, ta tìm được $c_1 = c_2 = 0,\ c_3 = \frac{1}{\sqrt{5}},\ c_4 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Suy ra

$$a_n = n\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\beta^n\right).$$

Từ đây ta được $\frac{a_n}{n} = F_n$, với $F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ với mọi $n = 1,\ 2,\ \ldots$ tức là dãy số Fibonacci. Kết luận câu (a) đến đây là hiển nhiên.

Để giải phần (b), ta có thể đi theo các hướng sau.

Cách 1. Dùng quy nạp chứng minh rằng $F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1.}$ Sau đó tiếp tục dùng quy nạp chứng minh rằng F_{kn} chia hết cho F_n. Từ đây, để chứng minh kết luận của bài toán, ta chỉ cần chỉ ra một giá trị nguyên dương n sao cho F_n chia hết cho 2009 là xong. Có thể tính toán được rằng F_{56} chia hết cho 49, còn F_{20} chia hết cho 41, từ đó F_{280} chia hết cho 2009.

Cách 2. Ta chứng minh mệnh đề tổng quát: Với mọi số nguyên dương N, tồn tại vô số số hạng của dãy số Fibonacci chia hết cho N.

Để thực hiện điều này, ta bổ sung thêm số hạng $F_0 = 0$ cho dãy Fibonacci. Chú ý là ta vẫn có hệ thức $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ với mọi $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Gọi r_i là số dư trong phép chia F_i cho N. Xét $N^2 + 1$ cặp số dư $(r_0,\ r_1),\ (r_1,\ r_2),\ \ldots,\ (r_N,\ r_{N+1})$. Do $0 \le r_i \le N - 1$ nên chỉ có N^2 cặp giá trị $(r_i,\ r_{i+1})$ khác nhau. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại cặp chỉ số $i < j$ sao cho $(r_i,\ r_{i+1}) \equiv (r_j,\ r_{j+1})$. Từ đây, do r_{k-1} chính là số dư trong phép chia $r_{k+1} - r_k$ cho N nên ta suy ra $r_{i-1} = r_{j-1}$, $r_{i-2} = r_{j-2}$, $\ldots$, $r_0 = r_{j-i}$. Suy ra dãy số dư tuần hoàn với chu kỳ $j - i$. Vì $r_0 = 0$ nên $r_{k(j-i)} = 0$ với mọi $k = 1,\ 2,\ \ldots$ và ta có $r_{k(j-i)}$ chia hết cho N với mọi $k = 1,\ 2,\ \ldots$ (đpcm).

Bình luận. Ý tưởng dùng nguyên lý Dirichlet để chứng minh tính tuần hoàn của dãy số dư không mới. Đề thi vô địch Liên Xô trước đây có câu: Chứng minh rằng trong dãy số Fibonacci tồn tại ít nhất một số tận cùng bằng bốn chữ số 0.

Đề thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2004 cũng có ý tưởng tương tự:
Cho dãy số (x_n) $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ được xác định bởi: $x_1 = 603$, $x_2 = 102$ và

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n + 2\sqrt{x_{n+1}x_n - 2} \quad \text{với mọi } n \ge 1.$$

Chứng minh rằng

(1) Tất cả các số hạng của dãy số đã cho đều là các số nguyên dương.

(2) Tồn tại vô hạn số nguyên dương n sao cho biểu diễn thập phân của x_n có bốn chữ số tận cùng là 2003.

(3) Không tồn tại số nguyên dương n mà biểu diễn thập phân của x_n có bốn chữ số tận cùng là 2004.

Bài 1.3. *Cho m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, m là số chẵn. Tìm ước số chung lớn nhất của m^2+n^2 và m^3+n^3.*

(Đồng Nai)

Lời giải. Do $(m,\, n)$ nguyên tố cùng nhau và m chẵn nên n lẻ. Đặt

$$d = (m^2+n^2,\, m^3+n^3).$$

Dễ thấy d lẻ. Do $m^3+n^3 = (m+n)(m^2+n^2-mn)$ nên từ đây suy ra

$$d \mid mn(m+n).$$

Từ đây lại suy ra d là ước của $(m+n)^3$. Giả sử $d > 1$. Khi đó gọi p là một ước số nguyên tố của d thì $p \mid (m+n)^3$, suy ra $p \mid m+n$. Mặt khác

$$(m+n)^2 - (m^2+n^2) = 2mn,$$

suy ra $p \mid 2mn$. Vì p lẻ nên $p \mid mn$. Vì p nguyên tố và $(m,\, n) = 1$nên từ đây suy ra $p \mid m$ hoặc $p \mid n$. Nhưng do $p \mid m+n$ nên từ đây lại suy ra $p \mid n$ và tương ứng là $p \mid m$. Mâu thuẫn. Vậy điều giả sử là sai, tức là $d = 1$.

Bài 1.4. *Cho các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $ac+bd$ chia hết cho a^2+b^2. Chứng minh rằng*

$$(c^2+d^2,\, a^2+b^2) > 1.$$

(Đại học Sư phạm)

Lời giải. Trước hết xét trường hợp $(a,\, b) = 1$. Giả sử p là một ước nguyên tố của a^2+b^2. Khi đó $p \mid ac+bd$. Từ đẳng thức

$$(ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2),$$

ta suy ra $p \mid ad-bc$. Từ đây, ta lần lượt có

$$p \mid c(ac+bd) + d(ad-bc) = a(c^2+d^2),$$

$$p \mid d(ac+bd) - c(ad-bc) = b(c^2+d^2).$$

Vì $(a,\, b) = 1$ nên theo định lý Bezout tồn tại u, v sao cho $au+bv = 1$. Từ các điều trên, ta có

$$p \mid u \cdot a(c^2+d^2) + v \cdot b(c^2+d^2) = (au+bv)(c^2+d^2) = c^2+d^2,$$

suy ra p là ước số chung của a^2+b^2 và c^2+d^2, tức là $(a^2+b^2,\ c^2+d^2)>1$.

Bây giờ giả sử $(a,\ b)=D>1$. Đặt $a=Dx$, $b=Dy$ thì ta có $Dxc+Dyd \vdots D^2(x^2+y^2)$, suy ra $xc+yd \vdots x^2+y^2$. Theo kết quả ở trên thì $(x^2+y^2,\ c^2+d^2)>1$. Từ đó, một cách hiển nhiên $(D^2(x^2+y^2),\ c^2+d^2)>1$, tức là $(a^2+b^2, c^2+d^2)>1$.

Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Bình luận. Định lý Bezout mọi lúc, mọi nơi!

Bài 1.5. *Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho phương trình*

$$x^2+y^2+x+y=kxy \tag{1}$$

có nghiệm nguyên dương.

(Phổ thông Năng khiếu)

Lời giải. Giả sử k là một giá trị sao cho phương trình (1) có nghiệm nguyên dương. Khi đó tồn tại nghiệm $(x_0,\ y_0)$ của (1) với x_0+y_0 nhỏ nhất. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $x_0 \geq y_0$. Xét phương trình bậc hai

$$x^2-(ky_0-1)x+y_0^2+y_0=0. \tag{2}$$

Theo giả sử ở trên thì x_0 là một nghiệm của (2). Theo định lý Viet thì

$$x_1=ky_0-1-x_0=\frac{y_0^2+y_0}{x_0}$$

cũng là một nghiệm của (2). Dễ thấy x_1 là một số nguyên dương, vì thế $(x_1,\ y_0)$ cũng là một nghiệm nguyên dương của (1). Từ giả thiết x_0+y_0 nhỏ nhất ta suy ra

$$x_1+y_0 \geq x_0+y_0.$$

Tức là $\dfrac{y_0^2+y_0}{x_0} \geq x_0$, suy ra $y_0^2+y_0 \geq x_0^2$. Từ đây ta có bất đẳng thức kép

$$y_0^2 \leq x_0^2 \leq y_0^2+y_0 < (y_0+1)^2,$$

suy ra $x_0=y_0$. Thay vào (1) ta được $2+\dfrac{2}{x_0}=k$, suy ra x_0 chỉ có thể bằng 1 hoặc 2, tương ứng k bằng 4 hoặc 3. Với $k=3$ ta có $(2,\ 2)$ là nghiệm của (1), với $k=4$ ta có $(1,\ 1)$ là nghiệm của (1). Vậy $k=3$ và $k=4$ là tất cả các giá trị cần tìm.

Ta cũng có thể đánh giá k khác một chút, như sau.

Cách 1. Từ đẳng thức $x_0^2+y_0^2+x_0+y_0=kx_0y_0$, chia hai vế cho x_0, y_0, ta được

$$\frac{x_0}{y_0}+\frac{y_0}{x_0}+\frac{1}{y_0}+\frac{1}{x_0}=k.$$

Mặt khác, cũng theo lý luận ở trên thì $ky_0-1-x_0\geq x_0$ nên suy ra $\frac{x_0}{y_0}\leq\frac{k}{2}-\frac{1}{2y_0}$. Từ đó ta có

$$k\leq\frac{k}{2}-\frac{1}{2y_0}+\frac{y_0}{x_0}+\frac{1}{y_0}+\frac{1}{x_0}=\frac{k}{2}+\frac{1}{2y_0}+\frac{y_0}{x_0}+\frac{1}{x_0}\leq\frac{k}{2}+\frac{5}{2}.$$

Từ đó suy ra $k\leq 5$. Hơn nữa k chỉ có thể bằng 5 khi $x_0=y_0=1$ (trường hợp này dẫn đến mâu thuẫn). Trường hợp $k=3$ ta có nghiệm $x=y=2$, $k=4$ ta có nghiệm $x=y=1$. Còn với $k\leq 2$ thì rõ ràng là phương trình vô nghiệm.

Cách 2. Lý luận như trên thì

$$x_0\leq x_1=\frac{y_0^2+y_0}{x_0}\leq y_0+1.$$

Như vậy y_0+1 nằm ngoài hai nghiệm của tam thức $f(x)=x^2-(ky_0-1)x+y_0^2+y_0$, suy ra $f(y_0+1)\geq 0$. Từ đó

$$k\leq\frac{2(y_0+1)}{y_0}=2+\frac{2}{y_0}\leq 4.$$

Bình luận. Kỹ thuật sử dụng trong lời giải trên được gọi là kỹ thuật phương trình Markov. Kỹ thuật này hiện nay đã trở nên khá quen thuộc. Dưới đây là một số bài toán có thể giải được bằng kỹ thuật này:

1. Chứng minh rằng nếu x, y là các số nguyên dương sao cho $n=\frac{x^2+y^2}{xy+1}$ là một số nguyên thì n là một số chính phương.

   (IMO 1988)

2. Hãy tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho phương trình

   $$x+y+z+t=n\sqrt{xyzt}$$

   có nghiệm nguyên dương.

   (VMO 2002)

Sẽ thú vị nếu chúng ta xét bài toán tìm tất cả các nghiệm của (1) khi $k=3$ và $k=4$.

Bài 1.6. *Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thoả mãn*

$$x^2 + 15y^2 + 8xy - 8x - 36y - 28 = 0.$$

(Cần Thơ)

Lời giải. Biến đổi phương trình đã cho, ta viết được nó dưới dạng

$$(x+4y-4)^2 - (y+2)^2 = 40,$$

$$(x+3y-6)(x+5y-2) = 40.$$

Do x, y là các số nguyên dương và $x+3y-6 < x+5y-2$ nên ta có thể phân tích $40 = 1\cdot 40 = 2\cdot 20 = 4\cdot 10$. Đến đây ta giải từng trường hợp.

Trường hợp 1. $x+3y-6 = 1$ và $x+5y-2 = 0$. Giả ra, ta tìm được $x = -45.5$ và $y = 17.5$, loại.

Trường hợp 2. $x+3y-6 = 2$ và $x+5y-2 = 20$. Giải ra, ta tìm được $x = -13$ và $y = 7$, loại.

Trường hợp 3. $x+3y-6 = 4$ và $x+5y-2 = 10$. Giải ra, ta tìm được $x = 7$ và $y = 1$, nhận.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm nguyên dương duy nhất là $(x,\ y) = (7,\ 1)$.

Bài 1.7. *Chứng minh rằng*

$$|12^m - 5^n| \geq 7$$

với mọi m, n nguyên dương.

(Hải Phòng)

Lời giải vắn tắt. Giả sử ngược lại tồn tại m, n nguyên dương sao cho $|12^m - 5^n| < 7$. Do $|12^m - 5^n|$ không chia hết cho 2, 3, 5 nên chỉ có thể xảy ra trường hợp

$$|12^m - 5^n| = 1.$$

+ Nếu $12^m - 5^n = 1$ thì xét modul 4 suy ra mâu thuẫn.

+ Nếu $12^m - 5^n = -1$ thì xét modul 6 suy ra n chẵn, sau đó xét modul 13 suy ra mâu thuẫn.

Bài 1.8. *Cho n là số nguyên dương sao cho $3^n - 1$ chia hết cho 2^{2009}. Chứng minh rằng*

$$n \geq 2^{2007}.$$

(Bình Định)

Lời giải. Vì n nguyên dương nên ta có thể đặt $n = 2^k m$, với $k,\, m \in \mathbb{N}$, m lẻ. Ta có

$$3^n - 1 = \left(3^{2^k}\right)^m - 1 = \left(3^{2^k} - 1\right)\left[\left(3^{2^k}\right)^{m-1} + \left(3^{2^k}\right)^{m-2} + \cdots + 3^{2^k} + 1\right].$$

Do m lẻ nên $\left(3^{2^k}\right)^{m-1} + \left(3^{2^k}\right)^{m-2} + \cdots + 3^{2^k} + 1$, suy ra $3^n - 1 \,\vdots\, 2^{2009}$ khi và chỉ khi $3^{2^k} - 1 \,\vdots\, 2^{2009}$. Từ đây suy ra $k \geq 2$, và ta có phân tích

$$\begin{aligned} 3^{2^k} - 1 &= (3-1)(3+1)(3^2+1)\left(3^{2^2}+1\right)\cdots\left(3^{2^{k-1}}+1\right) \\ &= 2^3(3^2+1)\left(3^{2^2}+1\right)\cdots\left(3^{2^{k-1}}+1\right). \end{aligned}$$

Nhận thấy rằng $3^{2^i} + 1$ $(i = 1,\, 2,\, \ldots,\, k-1)$ chia hết cho 2 nhưng lại không chia hết cho 4. Do đó $3^{2^k} - 1$ chia hết cho 2^{k+2} nhưng không chia hết cho 2^{k+3}. Điều này có nghĩa là $3^{2^k} - 1 \,\vdots\, 2^{2009}$ khi và chỉ khi $2^{k+2} \,\vdots\, 2^{2009}$, tức là $k \geq 2007$. Vậy $n \geq 2^{2007} m \geq 2^{2007}$. Đó là điều phải chứng minh.

Bình luận. Từ bài toán trên, ta có thể đưa ra bài toán tổng quát: Cho số nguyên dương n sao cho $3^n - 1$ chia hết cho 2^k, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Chứng minh rằng $n \geq 2^{k-2}$ (hoặc cũng có thể chứng minh $n \,\vdots\, 2^{k-2}$).

Bài 1.9. *(1) Cho $a = 5^{2^{100}+100}$. Chứng minh số a có ít nhất 25 chữ số 0 đứng liền nhau.*

(2) Chứng minh tồn tại vô số số tự nhiên n mà 5^n có ít nhất 100 chữ số 0 đứng liền nhau.

(Bắc Ninh)

Hướng dẫn. Hãy chứng minh rằng $5^{2^{100}+100} - 5^{100}$ tận cùng bằng ít nhất 100 chữ số 0 (tức là chia hết cho 10100!) và $5^{100} < 10^{75}$.

Bình luận. Bài toán này kiến thức sử dụng không khó nhưng phát biểu khá đẹp và thú vị.

Bài 1.10. *Cho $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thoả mãn các điều kiện*

(i) $f(xy) = f(x)f(y)$ với mọi $x,\, y$ thoả mãn $(x,\, y) = 1$;

(ii) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ với mọi bộ số nguyên tố $x,\, y$.

Hãy tính $f(2),\, f(3),\, f(2009)$.

(Ninh Bình)

Lời giải. Thay $x = 2$, $y = 3$ vào (i), ta được $f(6) = f(2)f(3)$. Thay $x = y = 3$ vào (ii), ta được $f(6) = 2f(3)$. Từ đây suy ra $f(2) = 2$. Từ đó $f(4) = 2f(2) = 4$. Đặt $f(3) = a$, ta lần lượt tính được

$$\begin{aligned} f(5) &= f(3) + f(2) = a + 2, \\ f(7) &= f(5) + f(2) = a + 4, \\ f(12) &= f(7) + f(5) = 2a + 6. \end{aligned}$$

Mặt khác $f(12) = f(3)f(4) = 4a$ nên ta suy ra $2a + 6 = 4a$, tức là $a = 3$. Vậy $f(3) = 3$. Từ đây suy ra $f(5) = 5$, $f(7) = 7$. Ta lại có

$$f(11) + f(3) = f(14) = f(2)f(7) = 2 \cdot 7 = 14,$$

suy ra

$$f(11) = f(14) - f(3) = 11.$$

Để tính $f(2009)$, ta sẽ lần lượt tính $f(41)$ và $f(49)$. Vì 41 là số nguyên tố nên

$$f(41) + f(3) = f(44) = f(4)f(11) = 4f(11) = 44,$$

suy ra $f(41) = 41$. Ta có

$$f(49) = f(47) + f(2) = 2 + f(47).$$

Mà

$$f(47) + f(5) = f(52) = f(4)f(13) = 4(f(11) + f(2) = 4(11 + 2) = 52,$$

suy ra $f(47) = 47$ và $f(49) = 49$. Cuối cùng

$$f(2009) = f(41)f(49) = 41 \cdot 49 = 2009.$$

Bình luận. Điều đáng ngại nhất trong lời giải bài này là rất dễ nhầm vì ngộ nhận. Sẽ thú vị nếu xét bài toán tổng quát: Chứng minh $f(n) = n$ với mọi n nguyên dương.

Bài 1.11. *Tìm tất cả các bộ số tự nhiên a, b, c, d đôi một phân biệt thỏa mãn*

$$a^2 - b^2 = b^2 - c^2 = c^2 - d^2.$$

(Đại học Khoa học tự nhiên)

Lời giải. Bài toán tương đương với việc tìm một cấp số cộng thực sự gồm bốn số chính phương. Ta chứng minh rằng không tồn tại một cấp số cộng như vậy. Giả sử ngược lại tồn tại bốn số chính phương A^2, B^2, C^2, D^2 lập thành một cấp số cộng tăng, tức là $B^2 - A^2 = C^2 - B^2 = D^2 - C^2$. Trong các cấp số như thế, chọn cấp số có công sai nhỏ nhất. Ta có thể giả sử rằng các số chính phương này đôi một nguyên tố cùng nhau, và tính chẵn lẻ của các phương trình chứng tỏ rằng mỗi một số chính phương này phải lẻ. Như vậy tồn tại các số nguyên nguyên tố cùng nhau u, v sao cho $A = u - v$, $C = u + v$, $u^2 + v^2 = B^2$, và công sai của cấp số cộng bằng $\dfrac{C^2 - A^2}{2} = 2uv$.

Ta cũng có $D^2 - B^2 = 4uv$, và có thể viết thành $\left(\dfrac{D+B}{2}\right)\left(\dfrac{D-B}{2}\right) = uv$. Hai thừa số ở vế trái nguyên tố cùng nhau, và u và v cũng thế. Như vậy tồn tại bốn số nguyên đôi một nguyên tố cùng nhau a, b, c, d (trong đó có đúng một số chẵn) sao cho $u = ab$, $v = cd$, $D + B = 2ac$ và $D - B = 2bd$. Từ đây suy ra $B = ac - bd$, và như vậy ta có thể thế vào phương trình $u^2 + v^2 = B^2$ để được $(ab)^2 + (cd)^2 = (ac - bd)^2$. Phương trình này là đối xứng đối với bốn biến số nên ta có thể giả sử c là chẵn và a, b, d là lẻ. Từ phương trình bậc hai này ta suy ra c là hàm hữu tỷ của căn bậc hai của $a^4 - a^2d^2 + d^4$, từ đó suy ra tồn tại số nguyên lẻ m sao cho $a^4 - a^2d^2 + d^4 = m^2$.

Vì a và d là lẻ nên tồn tại các số nguyên nguyên tố cùng nhau x và y sao cho $a^2 = k(x+y)$ và $d^2 = k(x-y)$, trong đó $k = \pm 1$. Thay vào phương trình nói trên, ta được $x^2 + 3y^2 = m^2$, từ đó rõ ràng là y phải là số chẵn và x lẻ. Đổi dấu x nếu cần, ta có thể giả sử $m + x$ chia hết cho 3, ta có $3\left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{m+x}{2}\right)\left(\dfrac{m-x}{2}\right)$, từ đó suy ra $\dfrac{m+x}{2}$ là ba lần số chính phương còn $\dfrac{m-x}{2}$ là số chính phương. Như vậy ta có các số nguyên nguyên tố cùng nhau r, s (một số chẵn và một số lẻ) sao cho $\dfrac{m+x}{2} = 3r^2$, $\dfrac{m-x}{2} = s^2$, $m = 3r^2 + s^2$, $x = 3r^2 - s^2$ và $y = \pm 2rs$.

Thay x và y vào các biểu thức của a^2 và d^2 (và biến đổi nếu cần) ta được $a^2 = k(s+r)(s-3r)$ và $d^2 = k(s-r)(s+3r)$. Vì các thừa số ở vế phải là nguyên tố cùng nhau nên bốn đại lượng $(s-3r)$, $(s-r)$, $(s+r)$, $(s+3r)$ phải có trị tuyệt đối chính phương, với công sai $2r$. Các đại lượng này tất cả phải cùng dấu vì nếu ngược lại thì tổng của hai số chính phương lẻ bằng hiệu của hai số chính phương lẻ, tức là, $1 + 1 \equiv 1 - 1 \pmod 4$, mâu thuẫn.

Vì thế, ta phải có $|3r| < s$, và do $m = 3r^2 + s^2$ ta có $12r^2 < m$. Mặt khác, từ phương trình bậc bốn ta có $m < a^2 + d^2$, như vậy ta có bất đẳng thức $|2r| < \left|\sqrt{\dfrac{2}{3}}\max\{a,\, d\}\right|$.

Như vậy ta có bốn số chính phương lập thành một cấp số cộng với công sai $|2r| <$

$|2abcd|$, và số cuối cùng chính là công sai của cấp số cộng ban đầu. Điều này mâu thuẫn với cách chọn bốn số chính phương ban đầu, phép chứng minh hoàn tất.

Bình luận. Đây là một bài toán kinh điển của lý thuyết phương trình Diophant. Fermat đề xuất toán này năm 1640 trong bức thư gửi Frenicle. Sau đó ông có nói là chứng minh được, nhưng không ai biết về chứng minh này. Weil nói rằng Euler đã công bố chứng minh vào năm 1780, nhưng trong chứng minh có đôi chỗ có vấn đề, và Weil cũng nói rằng một chứng minh tốt hơn được đưa ra bởi J.Itars vào năm 1973.

Bài toán này được đưa vào đề thi e rằng là hơi quá sức, bởi trong phòng thi, nếu không biết trước, khó lòng có thể tìm ra được lời giải trong vòng 180 (cùng với 3 bài toán khác). Tình huống này khiến ta nhớ đến bài 3 của kỳ TST 2009.

Lời giải trên đây được lấy từ

`http://mathpages.com/home/kmath044/kmath044.htm.`

Bạn có thể vào link này để đọc lại chứng minh và xem thêm những thông tin thú vị về bài toán này.

Bài 1.12. *Cho hai số nguyên dương p, q lớn hơn 1, nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên k sao cho $(pq-1)^n k+1$ là hợp số với mọi số nguyên dương n.*

(Ninh Bình)

Lời giải. Vì $(p,\, q)=1$ nên theo định lí phần dư Trung Hoa, tồn tại số nguyên k thoả mãn
$$\begin{cases} k \equiv 1 \pmod p \\ k \equiv -1 \pmod q \end{cases}.$$

Khi đó

+ Nếu n chẵn thì $(pq-1)^n \equiv 1 \pmod q$, suy ra $(pq-1)^n k \equiv -1 \pmod q$, dẫn tới $(pq-1)^n k+1 \,\vdots\, q$.

+ Nếu n lẻ thì $(pq-1)^n \equiv -1 \pmod p$, suy ra $(pq-1)^n k \equiv -1 \pmod p$, dẫn tới $(pq-1)^n k+1 \,\vdots\, p$.

Vậy $(pq-1)^n k+1$ là hợp số với mọi số nguyên dương n.

Chương 2

Phương trình, hệ phương trình

"Mọi phát kiến của nhân loại đều có bàn tay hướng dẫn của Toán học, bởi vì chúng ta không thể có một người chỉ đường nào khác."
Charles Darwin

2.1 Đề bài

2.1. Giải phương trình

$$\frac{1}{2}\log_2(x+2)+x+2=\log_2\frac{2x+1}{x}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{x+2}.$$

2.2. Giải phương trình

$$9\left(\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}\right)=x+3.$$

2.3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2=y+a \\ y^2=z+a \\ z^2=x+a \end{cases},$$

trong đó a là tham số thoả mãn điều kiện $0<a<1$.

2.4. Giải phương trình

$$\frac{\sin x-\cos x}{\sin 3x-\cos 3x}=\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin x+\cos x}.$$

2.5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + x + y = 0 \\ x^4 - 4x^2y + 3x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

2.6. Giải phương trình

$$-2x^3 + 10x^2 - 17x + 8 = 2x^2\sqrt[3]{5x - x^3}.$$

2.7. (a) Tìm tất cả các giá trị của tham số thực a sao cho phương trình

$$a(\sin 2x + 1) + 1 = (a - 3)(\sin x + \cos x)$$

có nghiệm.

(b) Phương trình $2^x - 1 - x^2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm số thực? Hãy giải thích.

2.8. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 \end{cases}.$$

2.9. Tìm tất cả các nghiệm thực của phương trình

$$3x^2 + 11x - 1 = 13\sqrt{2x^3 + 2x^2 + x - 1}.$$

2.10. Giải trong tập hợp các số thực hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{2009} x_i = 2009 \\ \sum\limits_{i=1}^{2009} x_i^8 = \sum\limits_{i=1}^{2009} x_i^6 \end{cases}.$$

2.11. Cho a, b, c là các số thực dương. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} ax - aby + \dfrac{1}{xy} = bc^2 \\ abz - bc^2x + \dfrac{1}{zx} = a \\ bc^2 - az + \dfrac{1}{yz} = ab \end{cases}.$$

2.12. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 9y^3(3x^3 - 1) = -125 \\ 45x^2y + 75x = 6y^2 \end{cases}.$$

2.2 Lời giải

Bài 2.1. *Giải phương trình*

$$\frac{1}{2}\log_2(x+2)+x+2=\log_2\frac{2x+1}{x}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{x+2}. \qquad (1)$$

(Đại học Vinh)

Lời giải. Điều kiện để phương trình (1) xác định là $x\in\left(-2,\ -\frac{1}{2}\right)\cup(0,\ +\infty)$. Bây giờ, ta biến đổi phương trình (1) như sau

$$\log_2\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+2}+x+3=\log_2\left(2+\frac{1}{x}\right)-\left(4+\frac{2}{x}\right)+\frac{2}{x}+4+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2,$$

$$\log_2\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+2}+x+2=\log_2\left(2+\frac{1}{x}\right)-2\left(2+\frac{1}{x}\right)+\left(2+\frac{1}{x}\right)^2. \qquad (2)$$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t-2t+t^2$ với $t>0$. Ta có

$$f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}+2t-2\geq 2\sqrt{\frac{1}{t\ln 2}2t}-2=2\sqrt{\frac{2}{\ln 2}}-2>0,$$

nên $f(t)$ là hàm đồng biến với $t>0$. Mặt khác, ta thấy rằng phương trình (2) có dạng

$$f\left(\sqrt{x+2}\right)=f\left(2+\frac{1}{x}\right),$$

nên từ việc sử dụng kết quả $f(t)$ đồng biến, ta thấy rằng nó tương đương với

$$\sqrt{x+2}=2+\frac{1}{x}.$$

Bình phương hai vế và thu gọn, ta viết được phương trình này thành

$$x^3-2x^2-4x-1=0.$$

Giải ra, ta tìm được $x=-1$ (nhận), $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ (nhận) và $x=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ (loại). Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{-1,\ \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

Bình luận. Với bài toán vừa có hàm log (hay mũ) và vừa có hàm đa thức (phân thức) thông thường thì việc nghĩ đến dùng tính đơn điệu của hàm số để giải là điều dễ hiểu. Bài này chỉ khó hơn đề đại học một tí.

Bài 2.2. *Giải phương trình*

$$9\left(\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}\right)=x+3.$$

(Hà Nội)

Lời giải. Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$. Nhân hai vế của phương trình với $\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}$, ta được

$$9[(4x+1)-(3x-2)]=(x+3)\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}\right).$$

Sau khi thu gọn, ta viết được phương trình này dưới dạng

$$9(x+3)=(x+3)\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}\right).$$

Do $x+3>0$ nên ta có phương trình tương đương

$$9=\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}.$$

Đến đây ta có thể giải bằng nhiều cách.

Cách 1. Kết hợp với phương trình $\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}=\frac{x+3}{9}$ để được phương trình $\sqrt{4x+1}=\frac{x+84}{9}$ từ đó giải được bằng cách bình phương hai vế.

Cách 2. Giải phương trình $9=\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}$ bằng phương pháp bình phương liên tiếp.

Cách 3. Chú ý rằng $f(x)=\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}$ là một hàm số tăng trên miền xác định. Do đó phương trình $f(x)=9$ có không quá một nghiệm. Nhận thấy $x=6$ là nghiệm của phương trình $f(x)=9$, suy ra $x=6$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=9$, và cũng là nghiệm duy nhất của phương trình đề bài.

Bài 2.3. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^2=y+a \\ y^2=z+a \\ z^2=x+a \end{cases},$$

trong đó a là tham số thoả mãn điều kiện $0<a<1$.

(Ninh Bình)

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x = \max\{x,\ y,\ z\}$. Từ đó suy ra $z^2 = \max\{x^2,\ y^2,\ z^2\}$. Đến đây, ta xét hai trường hợp.

Trường hợp 1. $z \geq 0$. Trong trường hợp này, ta dễ dàng tìm được nghiệm của hệ đã cho là $x = y = z = \dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{4} + a}$.

Trường hợp 2. $z < 0$. Nếu $x \geq 0$ thì từ phương trình thứ ba ta có $z^2 \geq a$, suy ra $z \leq -\sqrt{a} < -a$, dẫn tới $y^2 < 0$, mâu thuẫn. Vậy ta phải có $0 > x \geq y$. Từ $x + a \geq z + a$ ta có $z^2 \geq y^2$, suy ra $y \geq z$ (vì $y,\ z < 0$). Như thế $y + a \geq z + a$, dẫn tới $x^2 \geq y^2$, hay $x \leq y$ (vì $x,\ y < 0$). Từ đây và từ $x \geq y$, ta có $x = y$. Thay vào hai phương trình đầu, ta tìm được $x = y = z$. Với kết quả vừa tìm được này, thay vào hệ đã cho ta dễ dàng giải ra được $x = y = z = \dfrac{1}{2} - \sqrt{\dfrac{1}{4} + a}$.

Tóm lại, hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = y = z = \dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{4} + a}$ và $x = y = z = \dfrac{1}{2} - \sqrt{\dfrac{1}{4} + a}$.

Bài 2.4. *Giải phương trình*

$$\frac{\sin x - \cos x}{\sin 3x - \cos 3x} = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x + \cos x}.$$

(Đồng Nai)

Lời giải. Sử dụng hằng đẳng thức

$$\begin{aligned}\sin 3x - \cos 3x &= 3\sin x - 4\sin^3 x + 3\cos x - 4\cos^3 x\\ &= (\sin x + \cos x)[3 - 4(\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x)]\\ &= (\sin x + \cos x)(2\sin 2x - 1),\end{aligned}$$

ta được điều kiện để phương trình có nghĩa là $(\sin x + \cos x)(2\sin 2x - 1) \neq 0$ và trong điều kiện đó, phương trình được rút gọn lại thành

$$\sin x - \cos x = (\sin^3 x - \cos^3 x)(2\sin 2x - 1),$$

tương đương

$$(\sin x - \cos x)[1 - (\sin^2 x + \sin x\cos x + \cos^2 x)(2\sin 2x - 1)] = 0,$$

hay

$$(\sin x - \cos x)\left(-\sin^2 2x - \frac{3}{2}\sin 2x + 2\right) = 0.$$

Từ đó giải ra được phương trình.

Bình luận. Bài này giống đề thi đại học hơn, không có ý tưởng gì.

Bài 2.5. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + x + y = 0 \\ x^4 - 4x^2y + 3x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

(Đồng Nai)

Lời giải. Hệ phương trình đã cho có thể viết lại thành

$$\begin{cases} (x^2 + y) + x(1 - 2y) = 0 \\ (x^2 + y)^2 + 3x^2(1 - 2y) \geq 0 \end{cases}.$$

Từ phương trình thứ nhất, ta tìm được $x^2 + y = -x(1 - 2y)$. Thay vào phương trình thứ hai, ta có

$$x^2(1 - 2y)^2 + 3x^2(1 - 2y) = 0,$$

hay

$$2x^2(1 - 2y)(2 - y) = 0,$$

suy ra $x = 0$, hoặc $1 - 2y = 0$, hoặc $2 - y = 0$.

+ Xét $x = 0$. Khi đó từ $x^2 + y = -x(1 - 2y)$, ta tìm được $x = y = 0$.

+ Xét $1 - 2y = 0$. Từ đây và từ $x^2 + y = -x(1 - 2y)$, ta suy ra $x^2 = -y = -\frac{1}{2} < 0$, vô nghiệm.

+ Xét $2 - y = 0$. Thay vào phương trình thứ nhất, ta có $x^2 - 3x + 2 = 0$. Giải ra tìm được $x = 1$ hoặc $x = 2$.

Tóm lại, hệ đã cho có ba nghiệm là $(x,\ y) = (0,\ 0),\ (1,\ 2)$ và $(2,\ 2)$.

Bài 2.6. *Giải phương trình*

$$-2x^3 + 10x^2 - 17x + 8 = 2x^2\sqrt[3]{5x - x^3}.$$

(Bình Định)

Lời giải. Dễ thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia hai vế của phương trình cho x^3, ta được

$$-2+\frac{10}{x}-\frac{17}{x^2}+\frac{8}{x^3}=2\sqrt[3]{\frac{5}{x^2}-1},$$

tương đương

$$8t^3-17t^2+10t-2=2\sqrt[3]{5t^2-1}, \tag{1}$$

với $t=\frac{1}{x}$ $(t\neq 0)$.
Ta tiếp tục biến đổi phương trình (1) thành

$$(2t-1)^3+2(2t-1)=5t^2-1+2\sqrt[3]{5t^2-1}.$$

Xét hàm số $f(x)=x^3+2x$ thì $f'(x)=3x^2+2>0$ nên f là một hàm số tăng trên $\mathbb{R}$. Phương trình cuối cùng có thể viết lại thành

$$f(2t-1)=f\left(\sqrt[3]{5t^2-1}\right).$$

Do f là hàm số tăng nên phương trình này tương đương với

$$2t-1=\sqrt[3]{5t^2-1},$$

hay

$$8t^3-12t^2+6t-1=5t^2-1.$$

Giải ra ta được $t=0$ (loại), $t=\frac{17\pm\sqrt{97}}{16}$. Tương ứng ta tìm được $x=\frac{17\pm\sqrt{97}}{12}$.

Bài 2.7. *(a) Tìm tất cả các giá trị của tham số thực a sao cho phương trình*

$$a(\sin 2x+1)+1=(a-3)(\sin x+\cos x)$$

có nghiệm.

(b) Phương trình $2^x-1-x^2=0$ có bao nhiêu nghiệm số thực? Hãy giải thích.

Hướng dẫn. (a) Đặt $t=\sin x+\cos x$ thì $t\in\left[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right]$. Đưa bài toán về tìm a sao cho phương trình $at^2+(3-a)t+1=0$ có nghiệm $t\in\left[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right]$. Có thể giải bằng phương pháp tam thức bậc hai hoặc khảo sát hàm số $y=\frac{3t+1}{t-t^2}$ trên đoạn $\left[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right]$. Đáp số: $a\leq 1$ hoặc $a\geq 9$.

(b) Đặt $f(x) = 2^x - 1 - x^2$ thì $f''(x) = 2^x \ln^2 2 - 2$. Phương trình $''(x) = 0$ có một nghiệm thực, suy ra $f'(x)$ có không quá hai nghiệm thực và $f(x)$ có không quá ba nghiệm thực. Mặt khác, ta có 0, 1 là nghiệm của $f(x)$, ngoài ra $f(4) = -1$, $f(5) = 6$ nên $f(x)$ có một nghiệm nữa nằm giữa 4 và 5. Suy ra số nghiệm thực của phương trình là 3.

Bài 2.8. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 & (1) \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 & (2) \end{cases}$$

(Đồng Nai)

Lời giải. Nếu $y = 0$ thì từ phương trình (1) suy ra $x = 0$, và phương trình (2) không được thoả mãn. Vậy $y \neq 0$. Chia hai vế của phương trình (1) cho y^5, ta được

$$\left(\frac{x}{y}\right)^5 + \frac{x}{y} = y^5 + y. \tag{3}$$

Xét hàm số $f(x) = x^5 + x$, ta có $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$, suy ra f là hàm số tăng trên $\mathbb{R}$. Phương trình (3) có thể viết lại thành $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y)$ và do f là hàm tăng nên tương đương với $\frac{x}{y} = y$, suy ra $x = y^2$. Thay vào phương trình (2), ta được

$$\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6. \tag{4}$$

Giải ra ta được $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (4). Từ đó hệ ban đầu có nghiệm duy nhất $(x,\ y) = (1,\ 1)$ và $(x,\ y) = (1,\ -1)$.

Ghi chú. Tham khảo thêm lời giải bài 2.2 (Hà Nội) và bài 2.6 (Bình Định).

Bài 2.9. *Tìm tất cả các nghiệm thực của phương trình*

$$3x^2 + 11x - 1 = 13\sqrt{2x^3 + 2x^2 + x - 1}.$$

(Cần Thơ)

Bài 2.10. *Giải trong tập hợp các số thực hệ phương trình sau*

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{2009} x_i = 2009 \\ \sum\limits_{i=1}^{2009} x_i^8 = \sum\limits_{i=1}^{2009} x_i^6 \end{cases}.$$

(Đại học Sư phạm)

Lời giải. Giả sử $(x_1, x_2, \ldots, x_{2009})$ là một nghiệm của hệ. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$2009\sum_{i=1}^{2009} x_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{2009} x_i\right)^2,$$

suy ra

$$\sum_{i=1}^{2009} x_i^2 \geq 2009. \tag{1}$$

Bây giờ áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cho các bộ số $(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_{2009}^2)$ và $(x_1^6, x_2^6, \ldots, x_{2009}^6)$ được sắp thứ tự như nhau, ta có

$$\left(\sum_{i=1}^{2009} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{2009} x_i^6\right) \leq 2009\sum_{i=1}^{2009} x_i^8. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$\sum_{i=1}^{2009} x_i^8 \geq \sum_{i=1}^{2009} x_i^6. \tag{3}$$

Từ phương trình thứ hai của hệ đã cho ta suy ra dấu bằng xảy ra ở (3), tức là dấu bằng phải xảy ra ở (1) và ở (2), tức là ta phải có tất cả các x_i bằng nhau. Từ đó suy ra tất cả các x_i bằng 1. Vậy $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2009} = 1$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình.

Bài 2.11. *Cho a, b, c là các số thực dương. Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} ax - aby + \dfrac{1}{xy} = bc^2 \\ abz - bc^2x + \dfrac{1}{zx} = a \\ bc^2 - az + \dfrac{1}{yz} = ab \end{cases}.$$

(Phổ thông Năng khiếu)

Hướng dẫn. Viết hệ dưới dạng

$$\begin{cases} Ax - By + \dfrac{1}{xy} = C \\ Bz - Cx + \dfrac{1}{zx} = A \\ C - Az + \dfrac{1}{yz} = B \end{cases}.$$

rồi giải hệ tìm A, B, C theo x, y, z (phương pháp giải theo tham số).

Bài 2.12. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} 9y^3(3x^3-1) = -125 \\ 45x^2y + 75x = 6y^2 \end{cases}.$$

(Đồng Tháp)

Lời giải. ***Cách 1.*** Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 27x^3y^3 + 125 = 9y^3 \\ 45x^2y + 75x = 6y^2 \end{cases}.$$

Từ phương trình thứ nhất suy ra $y \neq 0$. Nhân hai vế của phương trình thứ hai với $\frac{3}{2}y$, ta được

$$\begin{cases} 27x^3y^3 + 125 = 9y^3 \\ \frac{135}{2}x^2y^2 + \frac{225}{2}xy = 9y^3 \end{cases}.$$

Trong hệ hai phương trình này, trừ tương ứng vế theo vế cho ta

$$27(xy)^3 - \frac{135}{2}(xy)^2 - \frac{225}{2}xy + 125 = 0.$$

Giải ra ta tìm được $xy = -\frac{5}{3}$, hoặc $xy = \frac{10}{3}$, hoặc $xy = \frac{5}{6}$. Thay vào phương trình thứ nhất ở trên, ta tìm được tương ứng $y = 0$ (loại), $y = 5$ và $y = \frac{5}{2}$. Từ đó suy ra các nghiệm x tương ứng là $x = \frac{2}{3}$ và $x = \frac{1}{3}$.

Tóm lại, hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x,\ y) = \left(\frac{2}{3},\ 5\right), \left(\frac{1}{3},\ \frac{5}{2}\right)$.

Cách 2. Viết lại hệ phương trình dưới dạng

$$\begin{cases} 27x^3y^3 + 125 = 9y^3 \\ 45x^2y + 75x = 6y^2 \end{cases}.$$

Từ phương trình thứ nhất suy ra $y \neq 0$. Do đó hệ trên có thể được viết dưới dạng tương đương là

$$\begin{cases} 27x^3 + \dfrac{125}{y^3} = 9 \\ \dfrac{45x^2}{y} + \dfrac{75x}{y^2} = 6 \end{cases},$$

hay

$$\begin{cases} (3x)^3 + \left(\dfrac{5}{y}\right)^3 = 9 \\ 3x \cdot \dfrac{5}{y} \cdot \left(3x + \dfrac{5}{y}\right) = 6 \end{cases}.$$

Đặt $a = 3x$ và $b = \dfrac{5}{y}$. Thế thì ta có

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 9 \\ ab(a+b) = 6 \end{cases}.$$

Bằng một chút biến đổi đơn giản, dễ thấy hệ này tương đương với

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 2 \end{cases}.$$

Giải ra ta tìm được $a = 2$, $b = 1$ (tương ứng với $x = \dfrac{2}{3}$, $y = 5$) hoặc $a = 1$, $b = 2$ (tương ứng với $x = \dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{5}{2}$).

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x,\ y) = \left(\dfrac{2}{3},\ 5\right),\ \left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{5}{2}\right)$.

Bình luận. Thực chất bài hệ trên xuất phát từ đề thi đề nghị 30-4 lần thứ XIV của trường THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 8x^3y^3 + 27 = 18y^3 \\ 4x^2y + 6x = y^2 \end{cases}.$$

Chương 3

Bất đẳng thức và cực trị

"Đừng quá lo lắng về những khó khăn bạn gặp phải trong toán học. Tôi dám chắc tôi còn gặp nhiều khó khăn hơn bạn."

Albert Einstein

3.1 Đề bài

3.1. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $1 \geq x \geq y \geq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^3y^2 + y^3 + x^2}{x^2 + y^2 + 1} \geq xy.$$

3.2. Cho a, b, c là ba số thực cho trước thỏa mãn $D = ac - b^2 > 0$ và hàm số $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Chứng minh rằng tồn tại hai số nguyên u, v không đồng thời bằng 0 sao cho

$$|f(x, y)| \leq 2\sqrt{\frac{D}{3}}.$$

3.3. Tìm điều kiện của số dương k sao cho với mọi a, b, c dương thỏa mãn $abc = 1$, ta luôn có

$$\frac{1}{a^k(b+c)} + \frac{1}{b^k(c+a)} + \frac{1}{c^k(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

3.4. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn

$$a < b < c, \quad a+b+c = 0, \quad ab+bc+ca = -3.$$

Chứng minh rằng

$$-2 < abc < 2 \quad \text{và} \quad -2 < a < -1 < b < 1 < c < 2.$$

3.5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và $SA = SB = SC = a$, trong đó a là một số thực dương cho trước.

(1) Chứng minh rằng $SD < \sqrt{3}a$.

(2) Xác định độ dài cạnh SD theo a để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích lớn nhất.

3.6. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. M là một điểm tuỳ ý bên trong tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\frac{MB \cdot MC}{bc} + \frac{MC \cdot MA}{ca} + \frac{MA \cdot MB}{ab} \geq 1.$$

3.7. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi R và r lần lượt là bán kính hình cầu ngoại tiếp và nội tiếp của nó. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{R}{r}$.

3.8. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{a+2b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+2c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+2a}\right)^2 \geq \frac{1}{3}.$$

3.9. Với ba số dương x, y, z, ta kí hiệu M là số lớn nhất trong ba số

$$\ln z + \ln\left(\frac{x}{yz} + 1\right), \quad \ln\frac{1}{z} + \ln(xyz+1), \quad \ln y + \ln\left(\frac{1}{xyz} + 1\right).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của M khi x, y, z thay đổi.

3.10. Cho x, y, z là ba số thực không âm có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$x^2+y^2+z^2+xyz \geq 4.$$

3.11. Cho các số thực dương a, b, c thỏa $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2} \leq 1.$$

3.12. (1) Xác định giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^{3/2}-\frac{3x}{2}$ trên $(0, +\infty)$.

(2) Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^3}{b^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{c^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{a^3}} \geq \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}.$$

3.13. Giả sử phương trình $x^4+ax^3+bx^2+cx+1=0$ có ít nhất một nghiệm thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của $a^2+b^2+c^2$.

3.2 Lời giải

Bài 3.1. *Cho hai số thực x, y thỏa mãn $1 \geq x \geq y \geq 0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{x^3y^2+y^3+x^2}{x^2+y^2+1} \geq xy.$$

(Hà Nội)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $x^3y^2+y^3 \geq 2xy^2\sqrt{xy}$. Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$2y^2\sqrt{xy}+x \geq y(x^2+y^2+1),$$

tương đương

$$(x-y)+2y^2\sqrt{xy}-y(x^2+y^2) \geq 0.$$

Do $(1-x^2)(x-y) \geq 0$ nên $x-y \geq x^2(x-y)$. Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$x^2(x-y)+2y^2\sqrt{xy}-y(x^2+y^2) \geq 0.$$

Bất đẳng thức này được viết lại như sau

$$x^2(x-y)+y^2(x+y)-y(x^2+y^2) \geq y^2\left(x+y-2\sqrt{xy}\right),$$

hay

$$x(x-y)^2 \geq y^2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2.$$

Ta có

$$x(x-y)^2 = x\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geq x^2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geq y^2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2,$$

nên bất đẳng thức cuối đúng. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=1$ và $x=y=0$.

Bình luận. Lời giải trên sử dụng kỹ thuật "thuần nhất hóa", một kỹ thuật rất hữu hiệu đối với các dạng bài toán không thuần nhất. Chẳng hạn, bạn đọc có thể thử sử dụng kỹ thuật này để giải hai bài toán sau:

1. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geq 2(ab+bc+ca).$$

2. Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$2(a^2+b^2+c^2)+abc+8 \geq 5(a+b+c).$$

Một điều thú vị là sử dụng kết quả hai bài toán này, ta có thể giải bài toán thi APMO 2004: Cho a, b, c là các số thực dương. Khi đó

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca).$$

Bài 3.2. *Cho $a,\ b,\ c$ là ba số thực cho trước thỏa mãn $D = ac - b^2 > 0$ và hàm số $f(x,\ y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Chứng minh rằng tồn tại hai số nguyên u, v không đồng thời bằng 0 sao cho*

$$|f(u,\ v)| \leq 2\sqrt{\frac{D}{3}}.$$

(Đại học Khoa học tự nhiên)

Lời giải. Để ý rằng $|-f(x,\ y)| = |f(x,\ y)|$ nên ta chỉ cần xét $a \geq 0$ là được. Kết hợp với giả thiết $D = ac - b^2 > 0$, ta có $a > 0$ và $c > 0$. Lúc này ta có

$$f(x,\ y) = a\left(x + \frac{by}{a}\right)^2 + \frac{D}{a}y^2 \geq 0.$$

Do đó yêu cầu của bài toán tương đương với việc chỉ ra cặp số nguyên $(u,\ v)$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$f(u,\ v) \leq 2\sqrt{\frac{D}{3}}.$$

Gọi $A = \{(x,\ y) \mid x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z},\ x^2 + y^2 > 0\}$. Thế thì ta có $f(x,\ y) > 0$ với mọi $(x,\ y) \in A$. Gọi $(u,\ v) \in A$ sao cho $f(u,\ v) = \min\limits_{(x,\ y)\in A} f(x,\ y)$ và đặt $K = f(u,\ v)$, $K > 0$. Rõ ràng u, v phải là hai số nguyên tố cùng nhau, do đó tồn tại hai số nguyên s, t sao cho

$$us - vt = 1. \qquad (*)$$

Đặt $g(x,\ y) = f(ux+ty,\ vx+sy)$, ta có

$$\min_{(x,\ y)\in A} g(x,y) = \min_{(x,\ y)\in A} f(ux+ty,\ vx+sy) = f(u,\ v) = K$$

(đạt được tại $x = 1$ và $y = 0$). Đặt $L = uta + vsc + btv + usb$, sau một vài tính toán đơn giản ta viết được

$$g(x,\ y) = f(ux+ty,\ vx+sy) = f(u,\ v)\cdot x^2 + 2Lxy + f(t,\ s)\cdot y^2.$$

Từ $(*)$, ta có

$$K \cdot f(t,\ s) = f(u,\ v)\cdot f(t,\ s) = L^2 + D,$$

suy ra

$$g(x,\ y) = K\left(x + \frac{Ly}{K}\right)^2 + \frac{Dy^2}{K}.$$

Bây giờ, ta chọn số n như sau

$$n = \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{L}{K} \right\rfloor & \text{nếu } \left\{ \dfrac{L}{K} \right\} \leq \dfrac{1}{2} \\ \left\lfloor \dfrac{L}{K} \right\rfloor + 1 & \text{nếu } \left\{ \dfrac{L}{K} \right\} > \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Dễ thấy $\left| n - \dfrac{L}{K} \right| \leq \dfrac{1}{2}$, do đó

$$K \leq g(n,\, -1) = K \left(n - \frac{L}{K} \right)^2 + \frac{D}{K} \leq \frac{K}{4} + \frac{D}{K},$$

suy ra $K^2 \leq \dfrac{4D}{3}$, hay $K \leq 2\sqrt{\dfrac{D}{3}}$. Đó là điều phải chứng minh.

Bài 3.3. *Tìm điều kiện của số dương k sao cho với mọi a, b, c dương thỏa mãn $abc = 1$, ta luôn có*

$$\frac{1}{a^k(b+c)} + \frac{1}{b^k(c+a)} + \frac{1}{c^k(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

(Bắc Ninh)

Lời giải. Xét $t > 0$, cho $a = b = t$ và $c = \dfrac{1}{t^2}$. Bất đẳng thức đã cho trở thành

$$\frac{1}{2} t^{2k-1} + \frac{2t^{2-k}}{t^3+1} \geq \frac{3}{2}.$$

Nếu $k < \dfrac{1}{2}$ thì cho $t \to +\infty$, vế trái tiến dần về 0, trong khi vế phải là hằng số và lớn hơn 0, mâu thuẫn. Do đó ta phải có $k \geq \dfrac{1}{2}$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $k \geq 2$. Thật vậy, giả sử $\dfrac{1}{2} \leq k < 2$, cho $t \to 0$, vế trái tiến dần về 0, trong khi đó vế phải là hằng số là lớn hơn 0, mâu thuẫn. Vậy ta phải có $k \geq 2$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh với $k \geq 2$ thì bất đẳng thức đã cho đúng. Sử dụng bất đẳng thức Chebyshev cho hai bộ đơn điều cùng chiều

$$\left(\frac{1}{a^{k-2}},\, \frac{1}{b^{k-2}},\, \frac{1}{c^{k-2}} \right) \quad \text{và} \quad \left(\frac{1}{a^2(b+c)},\, \frac{1}{b^2(c+a)},\, \frac{1}{c^2(a+b)} \right),$$

ta được

$$\sum \frac{1}{a^k(b+c)} \geq \frac{1}{3} \left(\sum \frac{1}{a^{k-2}} \right) \left[\sum \frac{1}{a^2(b+c)} \right].$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$\frac{1}{a^{k-2}}+\frac{1}{b^{k-2}}+\frac{1}{c^{k-2}} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{a^{k-2}b^{k-2}c^{k-2}}}=3.$$

Kết hợp với trên, ta có

$$\frac{1}{a^k(b+c)}+\frac{1}{b^k(c+a)}+\frac{1}{c^k(a+b)} \geq \frac{1}{a^2(b+c)}+\frac{1}{b^2(c+a)}+\frac{1}{c^2(a+b)}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{1}{a^2(b+c)}+\frac{1}{b^2(c+a)}+\frac{1}{c^2(a+b)} \geq \frac{3}{2},$$

tương đương

$$\frac{bc}{a(b+c)}+\frac{ca}{b(c+a)}+\frac{ab}{c(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Đây chính là bất đẳng thức Nesbitt được áp dụng cho ba số dương bc, ca, ab. Tóm lại, ta có $k \geq 2$ là tập hợp các giá trị cần tìm.

Bình luận. Có thể thấy bài này cho ta một kết quả tổng quát cho bài toán thi IMO 1995: Nếu a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $abc=1$ thì

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Mặt khác khi thay lũy thừa k ở từng phân số bởi a, b, c ta được một bất đẳng thức thú vị với chiều ngược lại là

$$\frac{1}{a^a(b+c)}+\frac{1}{b^b(c+a)}+\frac{1}{c^c(a+b)} \leq \frac{3}{2}.$$

Chứng minh bất đẳng thức này bằng cách dùng bất đẳng thức Bernoulli.

Bài 3.4. *Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn*

$$a<b<c, \quad a+b+c=0, \quad ab+bc+ca=-3.$$

Chứng minh rằng

$$-2<abc<2 \quad \text{và} \quad -2<a<-1<b<1<c<2.$$

(Ninh Bình)

Lời giải. Xét hàm số

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$
$$= x^3 - 3x - abc.$$

Ta có $f'(x) = 3(x^2-1)$, $f'(x)$ có hai nghiệm $x = -1$ và $x = 1$. Do $f(x)$ có ba nghiệm phân biên biệt $a < b < c$ nên ta phải có $-1 < b < 1$ và $f(-1)f(1) < 0$. Mà $f(-1) = 2 - abc$, $f(1) = -(2+abc)$, nên $-(2-abc)(2+abc) < 0$, hay $-2 < abc < 2$. Lại có $f(-2) = -(2+abc) = f(1)$ và $f(2) = 2 - abc = f(-1)$, suy ra $f(-2)f(-1) < 0$ và $f(1)f(2) < 0$. Điều này này có nghĩa là $-2 < a < -1$ và $1 < c < 2$.

Tóm lại, ta có

$$-2 < abc < 2 \quad \text{và} \quad -2 < a < -1 < b < 1 < c < 2.$$

Đó là điều phải chứng minh.

Bình luận. Bài này bản chất chính là bài chọn đội tuyển Anh năm 1995: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn đồng thời các tính chất $a < b < c$, $a+b+c = 6$ và $ab+bc+ca = 9$. Chứng minh rằng

$$0 < a < 1 < b < 3 < c < 4.$$

Nhưng đã bị che giấu đi, người ra đề đã sử dụng phép đặt đổi biến $(a,\ b,\ c) \mapsto (a+2,\ b+2\ c+2)$ rồi biến đổi để ra được bài "Ninh Bình" trên.

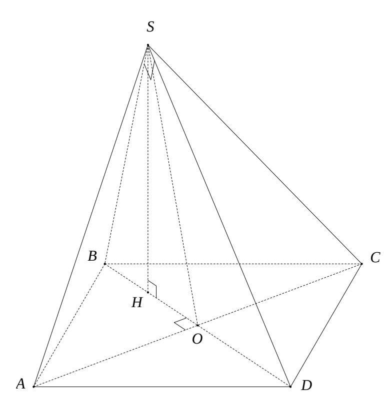
Bài 3.5. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng a và $SA = SB = SC = a$, trong đó a là một số thực dương cho trước.*

(1) Chứng minh rằng $SD < \sqrt{3}a$.

(2) Xác định độ dài cạnh SD theo a để khối chóp S.ABCD có thể tích lớn nhất.

(Đồng Nai)

Lời giải.



(1) Xét chóp $S.ABC$ có các cạnh bên bằng nhau nên SH là đường cao của chóp với H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Do $AB = BC$ nên H thuộc đường trung trực BD của AC, suy ra $AC \perp (SBD)$.

Tương tự với chóp $A.BSD$ có các cạnh bên bằng nhau mà $AO \perp (SBD)$ nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBD. Vì $OB = OD$ nên tam giác SBD vuông tại S. Từ đó ta tính được

$$BD^2 = SB^2 + SD^2 = a^2 + SD^2,$$

suy ra

$$AO^2 = AB^2 - BO^2 = AB^2 - \frac{BD^2}{4} = a^2 - \frac{a^2 + SD^2}{4} = \frac{3a^2 - SD^2}{4}.$$

Do $AO^2 > 0$ nên ta phải có $SD^2 < 3a^2$, hay $SD < \sqrt{3}a$.

(2) Theo trên, ta có $AC = 2AO = \sqrt{3a^2 - SD^2}$. Do tam giác SBD vuông tại S có SH là đường cao nên

$$SH = \frac{2S_{SBD}}{BD} = \frac{SB \cdot SD}{BD} = \frac{a \cdot SD}{BD}.$$

Do vậy

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{6} SH \cdot BD \cdot AC = \frac{1}{6} a \cdot SD \cdot \sqrt{3a^2 - SD^2}.$$

Theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$SD \cdot \sqrt{3a^2 - SD^2} \le \frac{SD^2 + (3a^2 - SD^2)}{2} = \frac{3a^2}{2},$$

suy ra

$$V_{S.ABCD} \le \frac{a^3}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $SD^2 = 3a^2 - SD^2$, hay $SD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Vậy thể tích hình chóp $S.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất khi $SD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Bài 3.6. *Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. M là một điểm tuỳ ý bên trong tam giác ABC. Chứng minh rằng*

$$\frac{MB \cdot MC}{bc} + \frac{MC \cdot MA}{ca} + \frac{MA \cdot MB}{ab} \ge 1.$$

(Bình Định)

Lời giải. Trên mặt phẳng phức, giả sử các đỉnh A, B, C của tam giác ABC lần lượt có tọa vị là u, v, w. Giả sử tọa vị của M là x. Thế thì ta có $a = |v-w|$, $b = |w-u|$, $c = |u-v|$, $MA = |x-u|$, $MB = |x-v|$ và $MC = |x-w|$. Do đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{|x-v||x-w|}{|u-v||u-w|} + \frac{|x-w||x-u|}{|v-w||v-u|} + \frac{|x-u||x-v|}{|w-u||w-v|} \geq 1,$$

hay

$$\left|\frac{(x-v)(x-w)}{(u-v)(u-w)}\right| + \left|\frac{(x-w)(x-u)}{(v-w)(v-u)}\right| + \left|\frac{(x-u)(x-v)}{(w-u)(w-v)}\right| \geq 1.$$

Sử dụng bất đẳng thức cơ bản $|m|+|n|+|p| \geq |m+n+p|$, ta có

$$\left|\frac{(x-v)(x-w)}{(u-v)(u-w)}\right| + \left|\frac{(x-w)(x-u)}{(v-w)(v-u)}\right| + \left|\frac{(x-u)(x-v)}{(w-u)(w-v)}\right| \geq$$
$$\geq \left|\frac{(x-v)(x-w)}{(u-v)(u-w)} + \frac{(x-w)(x-u)}{(v-w)(v-u)} + \frac{(x-u)(x-v)}{(w-u)(w-v)}\right|.$$

Mặt khác, dễ dàng kiểm tra được

$$\frac{(x-v)(x-w)}{(u-v)(u-w)} + \frac{(x-w)(x-u)}{(v-w)(v-u)} + \frac{(x-u)(x-v)}{(w-u)(w-v)} = 1,$$

nên từ trên ta có ngay điều phải chứng minh.

Bình luận. Đây là một bài bất đẳng thức hay ứng dụng số phức. Bất đẳng thức này sẽ rất khó chứng minh nếu chỉ dùng các kiến thức của hình học phẳng sơ cấp.

Bài 3.7. *Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi R và r lần lượt là bán kính hình cầu ngoại tiếp và nội tiếp của nó. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{R}{r}$.*

(Bình Định)

Lời giải. Gọi h là chiều cao của hình chóp và a là độ dài của cạnh hình vuông đáy. Ta dễ dàng tính được

$$R = \frac{a^2+2h^2}{4h}, \quad r = \frac{a\sqrt{a^2+4h^2}-a^2}{4h}.$$

Do đó

$$\frac{R}{r} = \frac{a^2+2h^2}{a\sqrt{a^2+4h^2}-a^2}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$a\sqrt{a^2h+4h^2}-a^2 \le \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)a^2+\left(\sqrt{2}-1\right)(a^2+4h^2)}{2}-a^2$$
$$=\left(\sqrt{2}-1\right)(a^2+2h^2),$$

suy ra

$$\frac{a^2+2h^2}{a\sqrt{a^2+4h^2}-a^2} \ge \frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left(\sqrt{2}+1\right)a^2=\left(\sqrt{2}-1\right)(a^2+4h^2)$, hay $a^2=2\left(\sqrt{2}-1\right)h^2$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $\frac{R}{r}$ là $\sqrt{2}+1$.

Bài 3.8. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\left(\frac{a}{a+2b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+2c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+2a}\right)^2 \ge \frac{1}{3}.$$

(Đại học Sư phạm)

Lời giải. ***Cách 1.*** Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$(a+2b)^2 \le 3(a^2+2b^2).$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{a^2}{a^2+2b^2}+\frac{b^2}{b^2+2c^2}+\frac{c^2}{c^2+2a^2} \ge 1.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz một lần nữa, ta được

$$\frac{a^2}{a^2+2b^2}+\frac{b^2}{b^2+2c^2}+\frac{c^2}{c^2+2a^2} \ge \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2(a^2+2b^2)+b^2(b^2+2c^2)+c^2(c^2+2a^2)}=1.$$

Bài toán được chứng minh xong. Dễ thấy đẳng thức chỉ xảy ra khi $a=b=c$.

Cách 2. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức chặt hơn là

$$\left(\frac{a}{a+2b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+2c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+2a}\right)^2+\frac{18abc}{(a+2b)(b+2c)(c+2a)} \ge 1.$$

Đặt $x=\frac{a}{a+2b}$, $y=\frac{b}{b+2c}$ và $c=\frac{c}{c+2a}$. Khi đó ta có

$$\frac{2b}{a}=\frac{1}{x}-1, \quad \frac{2c}{b}=\frac{1}{y}-1, \quad \frac{2c}{a}=\frac{1}{z}-1,$$

suy ra

$$8 = \left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{y} - 1\right)\left(\frac{1}{z} - 1\right),$$

hay

$$9xyz = 1 - (x+y+z) + xy + yz + zx.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$x^2 + y^2 + z^2 + 18xyz \geq 1.$$

Thay $18xyz = 2 - 2(x+y+z) + 2(xy+yz+zx)$ vào, ta viết được bất đẳng thức này thành

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) + 1 \geq 0,$$

hay

$$(x+y+z-1)^2 \geq 0.$$

Bình luận. Bất đẳng thức đã cho vẫn đúng khi thay giả thiết a, b, $c > 0$ bởi giả thiết $(a+2b)(b+2c)(c+2a) \neq 0$.

Bài 3.9. *Với ba số dương x, y, z, ta kí hiệu M là số lớn nhất trong ba số*

$$\ln z + \ln\left(\frac{x}{yz} + 1\right), \quad \ln\frac{1}{z} + \ln(xyz+1), \quad \ln y + \ln\left(\frac{1}{xyz} + 1\right).$$

Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của M khi x, y, z thay đổi.

(Đại học Sư phạm)

Lời giải. Từ định nghĩa của số M, ta có

$$M \geq \ln z + \ln\left(\frac{x}{yz} + 1\right), \quad M \geq \ln y + \ln\left(\frac{1}{xyz} + 1\right),$$

suy ra

$$2M \geq \ln z + \ln\left(\frac{x}{yz} + 1\right) + \ln y + \ln\left(\frac{1}{xyz} + 1\right) = \ln\frac{(x+yz)(xyz+1)}{xyz}.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$\frac{(x+yz)(xyz+1)}{xyz} \geq 4,$$

suy ra $2M \geq \ln 4$, hay $M \geq \ln 2$. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$ nên ta có kết luận $\min M = \ln 2$.

Bài 3.10. *Cho x, y, z là ba số thực không âm có tổng bằng 3. Chứng minh rằng*

$$x^2+y^2+z^2+xyz \geq 4.$$

(Lương Thế Vinh, Đồng Nai)

Lời giải. Ta biết rằng trong ba số $x-1$, $y-1$ và $z-1$ luôn có hai số cùng dấu với nhau. Giả sử hai số đó là $x-1$ và $y-1$, thế thì ta có $z(x-1)(y-1) \geq 0$, suy ra

$$xyz \geq z(x+y-1) = z(2-z).$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì

$$x^2+y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{(3-z)^2}{2}.$$

Do vậy, ta chỉ cần chứng minh được bất đẳng thức sau là đủ

$$\frac{(3-z)^2}{2}+z^2+z(2-z) \geq 4.$$

Biến đổi tương đương ta được $\frac{1}{2}(z-1)^2 \geq 0$, hiển nhiên đúng. Ta có đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 3.11. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{a^2+2}+\frac{b}{b^2+2}+\frac{c}{c^2+2} \leq 1.$$

(Kon Tum)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{a}{a^2+2} \leq \frac{a}{2a+1} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2(2a+1)}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2a+1)}\right]+\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2b+1)}\right]+\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2c+1)}\right] \leq 1,$$

hay

$$\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1} \geq 1. \qquad (*)$$

Đến đây có nhiều cách đánh giá.

Cách 1. Giả sử $c = \min\{a,\ b,\ c\}$, ta có $ab \geq 1$. Sau đó sử dụng bất đẳng thức quen thuộc

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}+1} \quad \forall x,\ y > 0,\ xy \geq 1$$

cho $x = 2a$, $y = 2b$, ta có

$$\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} \geq \frac{2}{2\sqrt{ab}+1}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{2}{2\sqrt{ab}+1} + \frac{1}{2c+1} \geq 1.$$

Công việc này khá đơn, ta chỉ cần đặt ẩn $t = \sqrt{ab}$ rồi thay $c = \dfrac{1}{t^2}$ vào rồi biến đổi tương đương là được.

Cách 2. Đặt $a = x^3$, $b = y^3$ và $c = z^3$, ta có

$$\frac{1}{2a+1} = \frac{1}{2x^3+1} = \frac{xyz}{2x^3+xyz} = \frac{yz}{yz+2x^2},$$

suy ra bất đẳng thức $(*)$ tương đương với

$$\frac{yz}{yz+2x^2} + \frac{zx}{zx+2y^2} + \frac{xy}{xy+2z^2} \geq 1.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được

$$\frac{yz}{yz+2x^2} + \frac{zx}{zx+2y^2} + \frac{xy}{xy+2z^2} \geq \frac{(yz+zx+xy)^2}{yz(yz+2x^2)+zx(zx+2y^2)+xy(xy+2z^2)} = 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Cách 3. Quy đồng và rút gọn, ta có bất đẳng thức $(*)$ tương đương

$$(2a+1)(2b+1)+(2b+1)(2c+1)+(2c+1)(2a+1) \geq (2a+1)(2b+1)(2c+1),$$

hay

$$a+b+c \geq 3.$$

Bất đẳng thức này đúng theo AM-GM.

Bình luận. Một bài toán thú vị được đặt ra từ bài toán này, đó là: Tìm tất cả các giá trị của k để bất đẳng thức sau

$$\frac{a}{a^2+k} + \frac{b}{b^2+k} + \frac{c}{c^2+k} \leq \frac{3}{1+k}$$

đúng với mọi a, b, c dương thỏa mãn $abc = 1$.
Đây là một bài toán khó. Hiện đã chứng minh được bất đẳng thức này đúng cho $\frac{1}{5} \le k \le 5$ (với lời giải sơ cấp), còn giá trị tốt nhất của k là một số rất lẻ.

Nói riêng về bất đẳng thức $(*)$, nó chính là một trường hợp riêng của bài toán chọn đội tuyển Romania năm 1999: Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực dương thỏa mãn $a_1a_2\cdots a_n = 1$. Khi đó

$$\frac{1}{a_1+n-1} + \frac{1}{a_2+n-1} + \cdots + \frac{1}{a_n+n-1} \le 1.$$

Trong bất đẳng thức này, cho $n = 3$ và thay lần lượt a_1, a_2, a_3 bởi $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$, ta sẽ thu được $(*)$.

Bài 3.12. *(1) Xác định giá trị nhỏ nhất của hàm số* $y = x^{3/2} - \frac{3x}{2}$ *trên* $(0, +\infty)$.

(2) Cho các số dương a, b, c. *Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{a^3}{b^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{c^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{a^3}} \ge \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

(Cần Thơ)

Lời giải. (1) Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$x^{3/2} + x^{3/2} + 1 \ge 3x.$$

Từ đó suy ra

$$y = x^{3/2} - \frac{3x}{2} \ge -\frac{1}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 1$.

(2) Sử dụng kết quả câu (1), ta có

$$\sqrt{\frac{a^3}{b^3}} \ge \frac{3}{2}\cdot\frac{a}{b} - \frac{1}{2}, \quad \sqrt{\frac{b^3}{c^3}} \ge \frac{3}{2}\cdot\frac{b}{c} - \frac{1}{2}, \quad \sqrt{\frac{c^3}{a^3}} \ge \frac{3}{2}\cdot\frac{c}{a} - \frac{1}{2}.$$

Cộng lại ta được

$$\sqrt{\frac{a^3}{b^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{c^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{a^3}} \ge \frac{3}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) - \frac{3}{2}.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{3}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)-\frac{3}{2} \geq \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3,$$

hiển nhiên đúng theo AM-GM. Ta có đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bình luận. Đây là một dạng bài cũ và không có ý tưởng gì mới mẻ. Hơn nữa, việc cho thêm câu (1) lại càng làm cho nó trở nên tầm thường hơn, vì kết quả câu (1) đã gợi mở ngay đường đi nước bước của câu (2).

Bài 3.13. *Giả sử phương trình $x^4+ax^3+bx^2+cx+1=0$ có ít nhất một nghiệm thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của $a^2+b^2+c^2$.*

(Phổ thông Năng khiếu)

Lời giải. Gọi x_0 là nghiệm của phương trình đã cho. Dễ thấy $x_0 \neq 0$, từ đó suy ra

$$b=-\left(x_0^2+\frac{1}{x_0^2}+ax_0+\frac{c}{x_0}\right).$$

Do đó

$$a^2+b^2+c^2=a^2+c^2+\left(x_0^2+\frac{1}{x_0^2}+ax_0+\frac{c}{x_0}\right)^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được

$$\begin{aligned}\left[a^2+c^2+\left(x_0^2+\frac{1}{x_0^2}+ax_0+\frac{c}{x_0}\right)^2\right]\left[(-x_0)^2+\left(-\frac{1}{x_0}\right)^2+1\right] &\geq \\ &\geq \left(-ax_0-\frac{c}{x_0}+x_0^2+\frac{1}{x_0^2}+ax_0+\frac{c}{x_0}\right)^2 \\ &= \left(x_0^2+\frac{1}{x_0^2}\right)^2,\end{aligned}$$

suy ra

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{\left(x_0^2+\frac{1}{x_0^2}\right)^2}{x_0^2+\frac{1}{x_0^2}+1}.$$

Mặt khác dễ dàng chứng minh được

$$\frac{\left(x_0^2+\dfrac{1}{x_0^2}\right)^2}{x_0^2+\dfrac{1}{x_0^2}+1} \geq \frac{4}{3},$$

với dấu bằng đạt được tại $x_0 = \pm 1$, nên

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{4}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{a}{-x_0} = \dfrac{c}{-\dfrac{1}{x_0}} = x_0^2+\dfrac{1}{x_0^2}+ax_0+\dfrac{c}{x_0} \\ x_0 \pm 1 \\ b = -\left(x_0^2+\dfrac{1}{x_0^2}+ax_0+\dfrac{c}{x_0}\right) \end{cases}.$$

Giải hệ này ta tìm được $a = b = c = -\dfrac{2}{3}$ (ứng với $x_0 = 1$) và $a = c = \dfrac{2}{3}$, $b = -\dfrac{2}{3}$ (ứng với $x_0 = -1$). Vậy giá trị nhỏ nhất của $a^2+b^2+c^2$ là $\dfrac{4}{3}$.

Bình luận. Có thể thấy rằng bài toán này được lấy ý tưởng từ bài toán Tournament of the Towns 1993: Nếu a, b là các số thực sao cho phương trình $x^4+ax^3+2x^2+bx+1=0$ có ít nhất một nghiệm thực thì $a^2+b^2 \geq 8$.

Chương 4

Phương trình hàm và đa thức

"Toán học có cội rễ sâu xa trong đời sống hàng ngày và là nền tảng của mọi tiến bộ kĩ thuật."

N. A. Court

4.1 Đề bài

4.1. Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(f(xy) - xy) + xf(y) + yf(x) = f(xy) + f(x)f(y) \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}^+.$$

4.2. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sao cho

$$f(x^3 + y) = f^3(x) + \frac{f(xy)}{f(x)} \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}^+.$$

4.3. Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

(i) f đơn ánh;

(ii) $f(2x - f(x)) = x$;

(iii) Tồn tại x_0 sao cho $f(x_0) = x_0$.

4.4. Tìm tất cả các hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) = f(1-\cos x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4.5. Tìm tất cả các hàm số f xác định trên $\mathbb{R}$ thoả

$$f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)\cos y \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

4.6. Tìm tất cả các đa thức $P(x,\ y)$ có hệ số thực thỏa mãn

$$P(x,\ y) = P(x+y,\ y-x) \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

4.7. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(n)) = 3n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

4.8. Giả sử đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn điều kiện

$$P(n) = 1^{2010} + 2^{2010} + \cdots + n^{2010} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tính $P\left(-\frac{1}{2}\right)$.

4.9. Cho đa thức $f(x) = x^4 - 2011x^3 + (2010+a)x^2 - 2009x + a$, với a là số nguyên. Chứng minh rằng đa thức này không thể có hai nghiệm nguyên (phân biệt hay trùng nhau).

4.10. Tìm đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện $P(1) = 2010$ và

$$(x-y)P(x+y) - (x+y)P(x-y) = 4xy(x^2-y^2) \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

4.11. Tìm đa thức $f(x)$ khác đa thức không, có hệ số hữu tỉ và có bậc nhỏ nhất thỏa mãn

$$f\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right) = 4\sqrt{3} + \sqrt[3]{9}.$$

4.12. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y)+f(xy)=f(x)+f(y)+f(x)f(y) \quad \forall x,\ y\in\mathbb{R}.$$

4.13. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau đây

(i) $f(m)>f(n)$ với mọi $m>n$ thuộc $\mathbb{N}^*$;

(ii) $f(f(n))=4n+9$ với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$;

(iii) $f(f(n)-n)=2n+9$ với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$.

4.14. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y)=f(x)f(y)-f(xy)+1 \quad \forall x,\ y\in\mathbb{Q}.$$

4.2 Lời giải

Bài 4.1. *Tìm tất cả các hàm liên tục* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *thỏa mãn*

$$f(f(xy)-xy)+xf(y)+yf(x) = f(xy)+f(x)f(y) \quad \forall x,\, y \in \mathbb{R}^+.$$

(Đại học Vinh)

Lời giải. Chọn $y = 1$ ta được $f[(x)-x]+xf(1)+f(x) = f(x)+f(x)f(1)$. Từ đây suy ra

$$f[f(x)-x] = f(1)[f(x)-x].$$

Phương trình đầu có thể viết lại thành

$$f(1)[f(xy)-xy] = f(xy)-xy+[f(x)-x][f(y)-y].$$

Khi đó đặt $g(x) = f(x)-x$ ta được $f(1)g(xy) = g(xy)+g(x)g(y)$ hay

$$g(1)g(xy) = g(x)g(y). \tag{1}$$

Cũng từ phương trình đầu ta suy ra được $f(x) > x$ và như vậy $g(x) > 0$. Vì $f(x)$ liên tục nên $g(x)$ cũng liên tục. Thay $x = e^u$, $y = e^v$ với u, v thuộc $\mathbb{R}$ và đặt $g(e^t) = h(t)$ thì từ (1) ta suy ra

$$h(0)h(u+v) = h(u)h(v) \tag{2}$$

với mọi u, v thuộc $\mathbb{R}$, trong đó $h(u) > 0$ với mọi u thuộc $\mathbb{R}$ và h cũng là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Tiếp tục đặt $k(x) = \ln h(x)$ thì từ (2) ta suy ra

$$k(0)+k(u+v) = k(u)+k(v) \tag{3}$$

với mọi u, v thuộc R và k cũng là hàm liên tục. Từ đây dễ dàng suy ra (sử dụng phương trình hàm Cauchy cho hàm số $m(x) = k(x)-k(0)$) $k(x) = ax+b$ với a, b là các hằng số thực. Như vậy

$$h(x) = e^{ax+b}, \quad g(x) = g(e^{\ln x}) = e^{a\ln x+b} = e^b(x^a).$$

Cuối cùng $f(x) = x+Cx^a$ trong đó C là một hằng số dương và a là một hằng số thực.

Bình luận. Bài toán này là một bài toán khá căn bản. Điểm mấu chốt là đưa được về phương trình (1). Kỹ thuật giải các phương trình hàm dạng (1) có thể tham khảo thêm ở cuốn Phương trình hàm của GS Nguyễn Văn Mậu.

Bài 4.2. *Tìm tất cả các hàm* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *sao cho*

$$f(x^3+y) = f^3(x) + \frac{f(xy)}{f(x)} \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}^+.$$

(Đại học Khoa học tự nhiên)

Lời giải. Chọn $y = 1$ ta được

$$f(x+1) = f^3(x) + 1. \tag{1}$$

Chọn $x = 1$ ta được

$$f(y+1) = f^3(1) + \frac{f(y)}{f(1)}. \tag{2}$$

Đặt $f(1) = a$ thì sử dụng (1) ta lần lượt tính được

$$f(2) = a^3+1, \quad f(9) = f(2^3+1) = (a^3+1)^3+1. \tag{3}$$

Mặt khác, sử dụng (2) ta có

$$\begin{aligned} f(3) &= a^3 + \frac{f(2)}{a} = a^3 + a^2 + \frac{1}{a}, \\ f(4) &= a^3 + \frac{f(3)}{a} = a^3 + a^2 + a + \frac{1}{a^2}, \\ f(5) &= a^3 + a^2 + a + 1 + \frac{1}{a^3}, \quad \ldots, \\ f(9) &= a^3 + a^2 + a + 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^7}. \end{aligned} \tag{4}$$

Từ (3) và (4) ta suy ra

$$(a^3+1)^3 + 1 = a^3 + a^2 + a + 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^7}.$$

Quy đồng và phân tích nhân tử ta được phương trình này tương đương với

$$(a-1)(a^3-a+1)g(a) = 0,$$

trong đó

$$g(a) = a^{12} + a^{11} + 2a^{10} + 4a^9 + 5a^8 + 6a^7 + 7a^6 + 6a^5 + 5a^4 + 4a^3 + 3a^2 + 2a + 1.$$

Giải ra ta tìm được $a = 1$. Vậy ta có $f(x+1) = f(x) + 1$ và $f(x^3) = f^3(x)$. Từ đây suy ra $f(x+n) = f(x) + n$ với mọi n nguyên dương. Với $r = \dfrac{p}{q}$ thuộc $\mathbb{Q}^+$, ta tính $f((r+q^2)^3)$ bằng hai cách như sau

Một mặt

$$f((r+q^2)^3) = f^3(r+q^2) = [f(r)+q^2]^3.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} f((r+q^2)^3) &= f\left(r^3 + 3\cdot\frac{p^2}{q^2}\cdot q^2 + 3\cdot\frac{p}{q}\cdot q^4 + q^6\right) = f(r^3+3p^2+3pq^3+q^6) \\ &= f(r^3)+3p^2+3pq^3+q^6 = f^3(r)+3p^2+3pq^3+q^6. \end{aligned}$$

Từ đây ra được phương trình

$$q^2 f^2(r) + q^4 f(r) = p^2 + pq^3.$$

Giải phương trình này, với chú ý $f(r) > 0$, ta được $f(r) = \dfrac{p}{q} = r$. Vậy $f(r) = r$ với mọi r thuộc $\mathbb{Q}^+$. Bây giờ để ý rằng với mọi $x, y > 0$ ta có

$$f(x+y) = f\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 + y\right) = f^3\left(\sqrt[3]{x}\right) + \frac{f\left(\sqrt[3]{x}y\right)}{f\left(\sqrt[3]{x}\right)} = f(x) + \frac{f\left(\sqrt[3]{x}y\right)}{f\left(\sqrt[3]{x}\right)} > f(x),$$

suy ra $f(x)$ là hàm tăng trên $\mathbb{R}^+$. Cuối cùng, với mỗi x thuộc $\mathbb{R}^+$, xét dãy số hữu tỷ $\{u_n\}$ tăng và dần về x (suy ra $u_n \le x$), ta có $f(x) \ge f(u_n) = u_n$. Chuyển sang giới hạn, ta được

$$f(x) \ge x.$$

Tương tự, xét dãy số hữu tỷ $\{v_n\}$ giảm và tiến dần về x (suy ra $v_n \ge x$), khi đó ta có $f(x) \le f(v_n) = v_n$. Chuyển sang giới hạn, ta được

$$f(x) \le x.$$

Kết hợp lại, ta được $f(x) = x$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}^+$. Vậy $f(x) = x$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}^+$ là nghiệm duy nhất của bài toán.

Bình luận. Cái khó khăn và "gian nan" nhất của bài toán là tính $f(1)$, khi tính $f(1)$ xong rồi thì bài toán trở nên vô cùng đơn giản. Để tính $f(1)$ ta đưa về giải phương trình nhận $f(1)$ làm nghiệm bằng cách tính $f(9)$ theo hai cách dựa vào (1) và (2).

Sau khi tính được $f(1) = 1$ ta dễ dàng chứng minh được $f(x) = x$ trên $\mathbb{Q}^+$ và từ $f(x)$ đồng biến, ta có $f(x) = x$ với mọi số thực dương x.

Xem thêm bài giảng "giải phương trình hàm bằng cách lập phương trình" ở cùng tài liệu này.

Bài 4.3. *Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn* *(i)* *f đơn ánh;*

(ii) $f(2x-f(x))=x$;

(iii) *Tồn tại x_0 sao cho $f(x_0)=x_0$.*

(Đại học Khoa học tự nhiên)

Gợi ý. Chúng ta liên hệ bài toán này với một bài toán sau: "Tìm $g(x)$ liên tục thỏa mãn điều kiện $g(x+g(x))=g(x)$". Chỉ cần đặt $g(x)=x-f(x)$ ta sẽ được bài toán này.

Dễ dàng chứng minh quy nạp được rằng $g(x+ng(x))=g(x)$. Nếu tồn tại $g(x)$ khác $g(y)$ ta có thể chọn y trên khoảng x, $x+g(x)$. Và tính liên tục được thể dùng một cách linh hoạt ở chỗ tồn tại một đường thẳng $x-ny=c$ với n tự nhiên, c tùy ý thỏa mãn nó cắt đồ thị trong khoảng x, $x+g(x)$ tại hai điểm a và b, như vậy ta được $a-nf(a)=c$, $b-nf(b)=c$, suy ra $f(c)=f(a)=f(b)$, vô lí vì hai điểm cắt nhau là phân biệt.

Bài 4.4. *Tìm tất cả các hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x)=f(1-\cos x)\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

(Bắc Ninh)

Gợi ý. Bài toán này có cách làm quen thuộc là, xét dãy $\{a_n\}$ trong đó a_0 tùy ý và $a_{n+1}=1-\cos a_n$. Ta chứng minh dãy này hội tụ đến 0. Từ đó áp dụng tính liên tục ta suy ra $f(x)=\text{const}$.

Bài 4.5. *Tìm tất cả các hàm số f xác định trên $\mathbb{R}$ thoả*

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y\quad \forall x,\ y\in\mathbb{R}.$$

(Bình Định)

Lời giải. Thay x bởi $x+\dfrac{\pi}{2}$, y bởi $\dfrac{\pi}{2}$, ta được $f(x+\pi)+f(x)=0$. Từ đó suy ra

$$f(-x+\pi)=-f(-x).$$

Thay x bởi 0, y bởi x, ta được

$$f(x)+f(-x)=2f(0)\cos x.$$

Từ đây kết hợp với trên ta có

$$f(\pi-x)=-f(-x)=f(x)-2f(0)\cos x.$$

Bây giờ, thay x bởi $\frac{\pi}{2}$, y bởi $x-\frac{\pi}{2}$, ta được

$$f(x)+f(\pi-x)=2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x.$$

Thay $f(\pi-x)=f(x)-2f(0)\cos x$ vào, ta tìm được

$$f(x)=f(0)\cos x+f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin x.$$

Thay vào thử lại thấy thoả mãn. Vậy $f(x)=a\cos x+b\sin x$ với a, b là các hằng số thực bất kì là tất cả các hàm số thoả mãn điều kiện đề bài.

Bài 4.6. *Tìm tất cả các đa thức $P(x,\ y)$ có hệ số thực thỏa mãn*

$$P(x,\ y)=P(x+y,\ y-x)\quad\forall x,\ y\in\mathbb{R}.$$

(Hải Phòng)

Lời giải. Với mọi x, $y\in\mathbb{R}$, ta có

$$P(x,\ y)=P(x+y,\ y-x)=P((x+y)+(y-x),\ (y-x)-(x+y))=P(2y,\ -2x).$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}P(x,\ y)&=P(2y,\ -2x)=P(2(-2x),\ -2(2y))=P(-4x,\ -4y)\\&=P(2(-4y),\ -2(-4x))=P(-8y,\ 8x)=P(2(8x),\ -2(-8y))\\&=P(16x,\ 16y).\end{aligned}$$

Đến đây, tiến hành quy nạp, ta tìm được

$$P(x,\ y)=P(16^{-n}x,\ 16^{-n}y)\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

Cho n tiến đến vô cùng ta được $P(x,\ y)=P(0,\ 0)=\text{const}$. Vậy $P(x,\ y)=a$ với a là một hằng số bất kì, chính là đáp số của bài toán.

Bài 4.7. *Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(f(n))=3n\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

(Đại học Sư phạm)

Gợi ý. Ý tưởng là xây dựng hàm. Dễ thấy f là đơn ánh. Từ $f(f(n))=3n$, ta suy ra $f(3n)=f(f(f(n)))=3f(n)$. Từ đây cho $n=0$ suy ra $f(0)=0$. Với mọi $n>0$ thì cũng từ $f(f(n))=3n$ ta suy ra $f(n)\neq n$. Từ đẳng thức $f(3n)=3f(n)$ ta suy ra nếu $n=3^k m$ thì $f(n)=3^k f(m)$. Như vậy hàm số f sẽ hoàn toàn xác định nếu ta tìm được $f(m)$ với m không chia hết cho 3.

Bài 4.8. *Giả sử đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn điều kiện*

$$P(n) = 1^{2010} + 2^{2010} + \cdots + n^{2010} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tính $P\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

(Đại học Sư phạm)

Lời giải vắn tắt. Ý tưởng là dùng chia hết ta chứng minh rằng tồn tại vô hạn n để $P(n)$ chia hết cho $2n+1$. Thật vậy chỉ cần chọn $2n+1 = p$ với p nguyên tố, ta chứng minh

$$A = 1^{2k} + 2^{2k} + \cdots + \left(\frac{p-1}{2}\right)^{2k} \vdots\, p.$$

Đặt $B = \left(\dfrac{p+1}{2}\right)^{2k} + \cdots + (p-1)^{2k}$. Dễ thấy $A - B \vdots\, p$. Ta chứng minh $A + B \vdots\, p$. Ta có ta có nhận xét nếu $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p-1\}$ là hệ thặng dư thu gọn môđun p thì $\{a,\ 2a,\ \ldots,\ (p-1)a\}$ cũng là hệ thặng dư thu gọn môđun p (với $(a,\ p) = 1$). Như vậy $A + B \equiv (A+B)a^{2k} \pmod p$ và ta chỉ cần chọn a thỏa mãn $a^{2k} - 1 \not\vdots\, p$. Việc này có thể chọn dễ dàng với $p > 2k$ (ví dụ chọn a là căn nguyên thuỷ môđun p). Như vậy ta có $P\left(\dfrac{p-1}{2}\right) \vdots\, p$. Do đó $P\left(-\dfrac{1}{2}\right) \vdots\, p$. Chọn p đủ lớn ta suy ra $P\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

Bài 4.9. *Cho đa thức $f(x) = x^4 - 2011x^3 + (2010+a)x^2 - 2009x + a$, với a là số nguyên. Chứng minh rằng đa thức này không thể có hai nghiệm nguyên (phân biệt hay trùng nhau).*

(Phú Yên)

Lời giải. Giả sử x_0 là nghiệm nguyên của $f(x)$, ta có $f(x_0) = 0$, $f(1) = 2a - 2009$ là số lẻ. Suy ra $f(x_0) - f(1)$ là số lẻ. Mặt khác, theo định lý Bezout, $f(x_0) - f(1)$ chia hết cho $x_0 - 1$ nên $x_0 - 1$ là số lẻ. Suy ra x_0 là số chẵn.

Giả sử ngược lại, đa thức $f(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2. Ta xét hai trường hợp.

Trường hợp 1. $f(x)$ có hai nghiệm nguyên x_1, x_2 với $x_1 \neq x_2$. Khi đó

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \\ &= x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3 - 2011(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + (2010+a)(x_1+x_2) - 2009. \end{aligned}$$

Mâu thuẫn vì vế phải là một số lẻ, do x_1, x_2 đều chẵn.

Trường hợp 2. $f(x)$ có hai nghiệm nguyên $x_1 = x_2$. Khi đó ta có $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. Nhưng điều này không xảy ra vì $f'(x_1) = 4x_1^3 - 6033x_1^2 + 2(2010+a)x_1 - 2009$ là số lẻ, do x_1 chẵn.

Vậy điều giả sử là sai. Bài toán được chứng minh.

Bình luận. Trong tuyển tập đề thi Olympic 30/4 năm 2007 có đề toán này với $f(x) = x^4 - 2007x^3 + (2006+a)x^2 - 2005x + a$. Rõ ràng cả hai bài toán này đều là trường hợp đặc biệt của một bài toán tổng quát hơn: Nếu $f(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên sao cho $f(1)$ lẻ và $f'(0)$ lẻ thì $f(x)$ không thể có hai nghiệm nguyên.

Bài 4.10. *Tìm đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện $P(1) = 2010$ và*

$$(x-y)P(x+y) - (x+y)P(x-y) = 4xy(x^2-y^2) \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

(Cần Thơ)

Lời giải. Thay $y = x$ ta được $P(0) = 0$. Đặt $P(x) = xQ(x)$ và thay vào phương trình thì ta được

$$Q(x+y) - Q(x-y) = 4xy.$$

Thay $y = x$ ta được

$$Q(2x) - Q(0) = 4x^2.$$

Từ đó suy ra $Q(x) = x^2 + Q(0)$. Do $Q(1) = 1 \cdot Q(1) = P(1) = 2010$ nên $Q(0) = 2009$. Vậy $Q(x) = x^2 + 2009$ và $P(x) = x(x^2+2009)$.

Bài 4.11. *Tìm đa thức $f(x)$ khác đa thức không, có hệ số hữu tỉ và có bậc nhỏ nhất thỏa mãn*

$$f\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right) = 4\sqrt{3} + \sqrt[3]{9}.$$

(Ninh Bình)

Lời giải. Trước hết, ta sẽ chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề. Nếu a, b, c là các số hữu tỉ thỏa mãn $a\sqrt[3]{9} + b\sqrt[3]{3} + c = 0$ thì $a = b = c = 0$.

Chứng minh. Giả sử $a \neq 0$. Do $a\sqrt[3]{9} + b\sqrt[3]{3} + c = 0$ nên ta có $\sqrt[3]{3}$ là một nghiệm của đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Với $g(x) = x^3 - 3$, tồn tại duy nhất cặp đa thức $h(x)$, $r(x) \in \mathbb{Q}[x]$ thỏa mãn $g(x) = f(x)h(x) + r(x)$ và $\deg r(x) < \deg f(x)$. Vì $g(x)$ bất khả quy nên $\deg r(x) = 1$ hay $r(x) = cx + d$ với $c, d \in \mathbb{Q}$, $c \neq 0$.

Mà $\sqrt[3]{3}$ cũng là một nghiệm của $g(x)$ nên $\sqrt[3]{3}$ cũng là nghiệm của $r(x)$, suy ra $c\sqrt[3]{3} + d = 0$, hay $\sqrt[3]{3} = -\dfrac{d}{c}$. Từ đây suy ra $\sqrt[3]{3}$ là số hữu tỉ, mâu thuẫn. Vậy ta phải có $a = 0$. Tương tự suy ra $a = b = c = 0$.

Trở lại bài toán, giả sử tồn tại $f(x)$ thỏa mãn đề bài, xét $F(x) = \dfrac{1}{4}[f(x^2+x) - x^2]$. Ta có $F(x) \in \mathbb{Q}[x]$ và $F\left(\sqrt[3]{3}\right) = \sqrt{3}$.

Với $G(x) = x^3 - 3$, tồn tại duy nhất cặp đa thức $H(x)$, $R(x) \in \mathbb{Q}[x]$ thỏa mãn $F(x) = G(x)H(x) + R(x)$ và $0 < \deg R(x) < 3$. Dễ thấy $R\left(\sqrt[3]{3}\right) = \sqrt{3}$.

Giả sử $R(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, $c \in \mathbb{Q}$. Thế thì ta có

$$a\sqrt[3]{9} + b\sqrt[3]{3} + c = \sqrt{3}.$$

Lấy bình phương hai vế rồi thu gọn, ta được

$$(b^2+2ac)\sqrt[3]{9} + (3a^2+2bc)\sqrt[3]{3} + 6ab + c^2 = 3.$$

Sử dụng kết quả bổ đề trên, ta có

$$\begin{cases} b^2 + 2ac = 0 \\ 3a^2 + 2bc = 0 \\ 6ab + c^2 = 3 \end{cases},$$

suy ra

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b = 0 \\ c = \pm\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 0 \\ \dfrac{b}{a} = \pm\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right. .$$

Điều này có nghĩa là $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, mâu thuẫn.

Vậy không tồn tại đa thức $f(x)$ thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

(Chú ý có thể lí luận như sau: Với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $\left(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}\right)^n = a\sqrt[3]{9} + b\sqrt[3]{3} + c$, với a, b, $c \in \mathbb{Q}$.

Giả sử tồn tại $f(x)$ thỏa mãn đề bài, khi đó theo tính chất trên ta thấy rằng tồn tại a, b, $c \in \mathbb{Q}$ sao cho $a\sqrt[3]{9} + b\sqrt[3]{3} + c = \sqrt{3}$. Đến đây ta tiến hành như trong lời giải ở trên.)

Bài 4.12. *Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(x+y) + f(xy) = f(x) + f(y) + f(x)f(y) \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

(Ninh Bình)

Bình luận. Bài 12 và bài 14 thực sự là tương đương với nhau (Ở bài 14, ta đặt $f(x) = 1 + g(x)$ thì sẽ có $g(x+y) + g(xy) = g(x)g(y) + g(x) + g(y)$. Dưới đây ta trình bày lời giải một bài toán khó hơn cả hai bài trên. Bài toán này tương đương với bài toán Indian MO 2003:

Bài toán. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện*

$$f(x+y) = f(x)f(y) - f(xy) + 1 \tag{1}$$

với x, y thuộc $\mathbb{R}$.

Lời giải. Cho $y = 1$ vào phương trình (1) thì ta được

$$f(x+1) = f(1)f(x) - f(x) + 1.$$

Từ đó, nếu đặt $f(1) = a$ thì ta lần lượt có

$$\begin{aligned}
&f(2) = a \cdot a - 2 + 1 = a^2 - a + 1,\\
&f(3) = a(a^2 - a + 1) - (a^2 - a + 1) + 1 = a^3 - 2a^2 + 2a,\\
&f(4) = a(a^3 - 2a^2 + 2a) - (a^3 - 2a^2 + 2a) + 1 = a^4 - 3a^3 + 4a^2 - 2a + 1.
\end{aligned}$$

Mặt khác, nếu thay $x = y = 2$ vào (1) thì ta được

$$f(4) = f(2)f(2) - f(4) + 1.$$

Từ đó ta được phương trình

$$2(a4 - 3a^3 + 4a^2 - 2a + 1) = (a^2 - a + 1)^2 + 1.$$

Giải phương trình này ta tìm được $a = 0$, hoặc $a = 1$, hoặc $a = 2$. Như vậy ta có 3 trường hợp để xét.

Trường hợp 1. $a = 0$. Khi đó $f(x+1) = 1 - f(x)$. Từ đó $f(0) = 0$, $f(-1) = 0$. Thay $y = -1$ vào (1), ta được $f(x-1) = 1 - f(-x)$. Thay $x = -1$, $y = x$ vào (1), ta được $f(1-x) = 1 - f(-x)$. Suy ra $f(x-1) = f(1-x)$, tức f là hàm chẵn. Thay $y = -x$ vào (1), ta được $1 = f(x)f(-x) - f(-x^2) + 1$, suy ra $f^2(x) - f(x^2) = 0$. Cuối cùng, thay $y = x$ vào (1), ta được $f(2x) = f^2(x) - f(x^2) + 1 = 1$. Thay $x = \dfrac{1}{2}$ vào đẳng thức này, ta suy ra mâu thuẫn. Vậy $a \neq 0$.

Trường hợp 2. $a = 1$. Khi đó $f(x+1) = 1$ với mọi x, tức là $f(x) = 1$ với mọi x.

Trường hợp 3. $a = 2$. Khi đó ta có $f(x+1) = f(x) + 1$, từ đó suy ra $f(-1) = 0$. Thay $y = -1$ thì ta được $f(x-1) = 1 - f(-x)$, suy ra

$$f(-x) = 1 - f(x-1) = 1 - [f(x) - 1] = 2 - f(x).$$

Thay y bởi $-y$ vào (1), ta được

$$f(x-y) = f(x)f(-y) - f(-xy) + 1 = f(x)[2-f(y)] + f(xy) - 2 + 1. \quad (2)$$

Cộng (1) với (2), ta được

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x).$$

Thay $y = x$ vào (2) và chú ý rằng $f(0) = 1$ thì ta được

$$f^2(x) = f(x^2) + 2f(x) - 2,$$

suy ra

$$[f(x)-1]^2 = f(x^2) - 1.$$

Từ đó, nếu đặt $g(x) = f(x) - 1$ thì ta có

$$g(0) = 0, \quad g(x+y) + g(x-y) = 2g(x), \quad g(x^2) = g^2(x).$$

Từ đây, áp dụng lý thuyết căn bản về phương trình hàm Cauchy, dễ dàng tìm được $g(x) = x$.

Vậy có hai hàm số thoả mãn điều kiện đề bài là $f(x) = 1$ và $f(x) = 1 + x$.

Ghi chú. Nếu xét hàm $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ thì sẽ làm bài toán dễ hơn.

Bài 4.13. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau đây*

(i) $f(m) > f(n)$ *với mọi* $m > n$ *thuộc* $\mathbb{N}^*$;

(ii) $f(f(n)) = 4n + 9$ *với mọi* n *thuộc* $\mathbb{N}^*$;

(iii) $f(f(n) - n) = 2n + 9$ *với mọi* n *thuộc* $\mathbb{N}^*$.

(Phổ thông Năng khiếu)

Lời giải. Cách 1. Vì f tăng thực sự nên $f(n) \geq n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Ngoài ra, cũng do f tăng thực sự nên với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$ mà $m < n$ ta có $n - m \leq f(n) - f(m)$. Từ đó ta có

$$[f(n+1) - (n+1)] - [f(n) - n] \leq f(f(n+1) - n - 1)) - f(f((n) - n)),$$

hay

$$f(n+1) - f(n) - 1 \leq 2(n+1) + 9 - (2n+9).$$

Như thế
$$f(n+1)-f(n)\le 3 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$
Giả sử có n mà $f(n+1)=f(n)+1$, nghĩa là $f(n+1)-(n+1)=f(n)-n$. Từ đó
$$f(f(n+1)-(n+1))=f(f(n)-n).$$
Dẫn đến $2(n+1)+9=2n+9$, mâu thuẫn. Tóm lại, ta có
$$2\le f(n+1)-f(n)\le 3 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*. \qquad (*)$$
Ta có $f(f(n))-f(f(n)-n)=2n$. Mặt khác từ $(*)$ ta lại có
$$f(f(n))-f(f(n)-n)=[f(f(n))-f(f(n)-1)]+[f(f(n)-1)-f(f(n)-2)]+$$
$$+\cdots+[f(f(n)-n+1)-f(f(n)-n)]\ge 2n.$$
Từ đó suy ra
$$[f(f(n))-f(f(n)-1)]=[f(f(n)-1)-f(f(n)-2)]=\cdots=$$
$$=[f(f(n)-n+1)-f(f(n)-n)]=2.$$
Giả sử $f(2)=f(1)+3$. Khi đó $f(2)-2=f(1)+1>f(1)$. Từ đó $f(f(2)-2)>f(f(1))$ hay $2\cdot 2+9>4\cdot 1+9$, vô lí. Như vậy ta phải có $f(2)=f(1)+2$.

Lại giả sử $f(3)=f(2)+3$. Khi đó $f(3)-3=f(2)$. Như thế $f(f(3)-3)=f(f(2))$ hay $2\cdot 3+9=2.4+9$, vô lí. Như vậy ta cũng có $f(3)=f(2)+2$.

Giả sử có $k\ge 4$ sao cho $f(k+1)=f(k)+3$. Khi đó do $3\le k-1$ nên sử dụng $(*)$ ta được
$$f(f(k))=f(f(k+1)-3)=f(f(k+1)-k-1)+2(k-2),$$
hay $4k+9=2(k+1)+9+2k-4$, vô lí. Do đó với mọi n ta có $f(n+1)=f(n)+2$.

Như thế dãy $\{f(n)\}$ là cấp số cộng với công sai là 2. Vì thế $f(n)=2n+b$. Thay biểu thức của $f(n)$ vào hệ thức $f(f(n))=4n+9$ ta được
$$4n+9=f(2n+b)=2(2n+b)+b.$$
Từ đó $b=3$ và $f(n)=2n+3$. Dễ thấy $f(n)=2n+3$ thỏa mãn (i) và (iii). Vậy hàm số duy nhất cần tìm là $f(n)=2n+3$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Cách 2. (Vắn tắt) Thay n bởi $2n$ trong (iii), ta được
$$f(f(2n)-2n)=4n+9.$$
So sánh với (ii), ta suy ra
$$f(n)=f(2n)-2n.$$
Từ đó sử dụng quy nạp theo n (xét n chẵn, n lẻ) để chứng minh $f(n)=2n+3$ với mọi n nguyên dương.

Bài 4.14. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$f(x+y) = f(x)f(y) - f(xy) + 1 \quad \forall x,\ y \in \mathbb{Q}.$$

(Bắc Giang)

Chương 5

Hình học

"Giữa những bộ óc thông minh ngang nhau và trong những điều kiện tương tự, ai có tinh thần hình học thì người đó sẽ thắng và thu được một cường lực hoàn toàn mới mẻ."
Blaise Pascal

5.1 Đề bài

5.1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi D là một điểm trên đoạn BC, đường tròn (P) tiếp xúc với DC, DA tại E, F và tiếp xúc trong với (O) tại K. Chứng minh rằng E, F, I thẳng hàng.

5.2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Với M là một điểm thuộc cạnh AB, chọn điểm N thuộc cạnh $D'C'$ sao cho $AM + D'N = a$.

(1) Chứng minh rằng MN đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.

(2) Tính thể tích chóp $B'.A'MCN$ theo a. Xác định vị trí của M để khoảng cách từ B' tới mặt phẳng $(A'MCN)$ đạt giá trị lớn nhất. Tính khoảng cách lớn nhất đó theo a.

(3) Tìm quỹ tích hình chiếu vuông góc của C xuống MN khi M chạy trên AB.

5.3. Cho đường tròn (O) và hai điểm biên B, C sao cho B, C không phải là đường kính. Điểm A chuyển động trên cung lớn BC (khác B, C). Gọi M là trung điểm cạnh AB và N là hình chiếu vuông góc của M lên AC. Cho trước số thực a khác 1 và gọi K là điểm chia đoạn HN theo tỉ số a, với H là trung điểm cạnh BC. Vẽ đường thẳng d qua K và vuông góc với HN. Chứng minh rằng d luôn tiếp xúc với một đường cong cố định.

5.4. Cho hai đường thẳng a, b cắt nhau tại M và không vuông góc với nhau. Dựng parabol tiếp xúc a tại A và tiếp xúc b tại B, với A, B là hai điểm cho trước thuộc a, b.

5.5. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. D, E, F lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho tam giác DEF vuông cân tại D. Tìm tập hợp trung điểm I của EF.

5.6. Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích là V. Diện tích các tam giác ABC, ABD lần lượt là S_1, S_2. Gọi x là số đo góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (ABD). M là một điểm thuộc cạnh CD sao cho khoảng cách từ M đến hai mặt phẳng (ABC)và (ABD) bằng nhau.

(a) Chứng minh rằng $V = \dfrac{2S_1S_2\sin x}{3AB}$ và $\dfrac{CM}{DM} = \dfrac{S_1}{S_2}$.

(b) Tính diện tích tam giác AMB theo V, S_1, S_2, x.

5.7. Cho KL và KN là các tiếp tuyến của đường tròn (C), với L, N thuộc (C). Lấy M bất kì trên đường thẳng KN (M, K khác phía so với N). Giả sử (C) cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KLM tại điểm thứ hai là P. Q là chân đường vuông góc hạ từ N xuống ML. Chứng minh rằng

$$\angle MPQ = 2\angle KML.$$

5.8. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Đường tròn (O) đi qua A, B cắt đoạn AH tại K. Điểm L thuộc đoạn AB sao cho $KL \parallel AC$. Gọi $E = BK \cap CL$. Đường thẳng AE cắt lại (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh rằng

$$\angle AFL = \angle BAC.$$

5.9. Cho tam giác ABC. Dựng các điểm X, Y sao cho hai tam giác ABX, ACY đồng dạng ngược hướng. Dựng các điểm T, K sao cho các tam giác BXA, BTC, KXY đồng dạng cùng hướng. Chứng minh rằng hai tam giác BTC và KXY có chung tâm đường tròn ngoại tiếp.

5.10. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là trung điểm của BC, D là hình chiếu của H trên cạnh AC, M là trung điểm HD. Chứng minh rằng AM vuông góc với BD.

5.11. Tam giác ABC $(AB > AC)$ nội tiếp (O). Phân giác ngoài tại A cắt (O) tại E. Gọi F là hình chiếu của E trên AB. Chứng minh rằng

$$2AF = AB - AC.$$

5.12. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$. Gọi a, b, c, d theo thứ tự là phân giác ngoài của các góc $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$. $K = a \cap b$, $L = b \cap c$, $M = b \cap d$, $N = d \cap a$. Chứng minh rằng tứ giác $KLMN$ nội tiếp một đường tròn và đường tròn đó có bán kính bằng $\dfrac{KM \cdot LN}{AB + BC + CD + DA}$.

5.13. Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AA_0, BB_0, CC_0 đồng quy tại H. Các điểm A_1, A_2 thuộc (O) sao cho đường tròn ngoại tiếp các tam giác $A_1B_0C_0$, $A_2B_0C_0$ tiếp xúc với (O). Tương tự ta có các điểm B_1, B_2 và các điểm C_1, C_2. Chứng minh rằng các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy tại một điểm thuộc OH.

5.14. Cho tam giác nhọn ABC có trung tuyến CM vuông góc với phân giác trong AL tại đỉnh A (với M, L lần lượt thuộc các cạng AB, BC). Đặt $AC = b$, $AB = c$.

(a) Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AL} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{c+b}\overrightarrow{AC}.$$

(b) Giả sử $CM = k \cdot AL$, $k > 0$. Chứng minh rằng

$$\cos A = \frac{9 - 4k^2}{9 + 4k^2}.$$

5.15. Cho hình vuông $ABCD$. Trên các cạnh CB và CD lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $\dfrac{BE}{BC} = k$ và $\dfrac{DF}{DC} = \dfrac{1-k}{1+k}$, với $0 < k < 1$. Đoạn thẳng BD cắt AE và AF tại H và G tương ứng. Đường vuông góc với EF kẻ từ A cắt BD tại P. Chứng minh rằng

$$\frac{PG}{PH} = \frac{DG}{BH}.$$

5.16. Trong mặt phẳng (P)cho điểm O cố định và $d$là đường thẳng quay quanh O. Lấy S ngoài (P)có hình chiếu vuông góc trên (P) là H, với $H \not\equiv O$. Qua S dựng đường vuông góc với mặt phẳng xác định bởi S và d. Đường thẳng này cắt (P) tại N. Tìm quỹ tích điểm N khi d thay đổi.

5.17. Cho đường tròn tâm O và một dây cung AB cố định không là đường kính. Một điểm P thay đổi trên cung lớn AB. Gọi I là trung điểm của AB. Lấy các điểm M, N trên các tia PA, PB tương ứng sao cho $\angle PMI = \angle PNI = \angle APB$.

(a) Chứng minh đường cao kẻ từ đỉnh P của tam giác PMN đi qua một điểm cố định.

(b) Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác PMN đi qua một điểm cố định.

5.18. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi I, I_1, I_2, I_3 là tâm đường tròn nội tiếp và bàng tiếp các góc A, B, C tương ứng. Đường tròn ngoại tiếp tam giác II_2I_3 cắt (O) tại hai điểm M_1, N_1. Gọi J_1 là giao điểm của AI và (O). Kí hiệu d_1 là đường thẳng đi qua J_1 và vuông góc với M_1N_1. Tương tự xác định các đường thẳng d_2, d_3. Chứng minh các đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy tại một điểm.

5.2 Lời giải

Bài 5.1. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi D là một điểm trên đoạn BC, đường tròn (P) tiếp xúc với DC, DA tại E, F và tiếp xúc trong với (O) tại K. Chứng minh rằng E, F, I thẳng hàng.*

(Đại học Vinh)

Bài 5.2. *Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Với M là một điểm thuộc cạnh AB, chọn điểm N thuộc cạnh $D'C'$ sao cho $AM + D'N = a$.*

(1) Chứng minh rằng MN đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.

(2) Tính thể tích chóp $B'.A'MCN$ theo a. Xác định vị trí của M để khoảng cách từ B' tới mặt phẳng $(A'MCN)$ đạt giá trị lớn nhất. Tính khoảng cách lớn nhất đó theo a.

(3) Tìm quỹ tích hình chiếu vuông góc của C xuống MN khi M chạy trên AB.

(Hà Nội)

Bài 5.3. *Cho đường tròn (O) và hai điểm biên B, C sao cho B, C không phải là đường kính. Điểm A chuyển động trên cung lớn BC (khác B, C). Gọi M là trung điểm cạnh AB và N là hình chiếu vuông góc của M lên AC. Cho trước số thực a khác 1 và gọi K là điểm chia đoạn HN theo tỉ số a, với H là trung điểm cạnh BC. Vẽ đường thẳng d qua K và vuông góc với HN. Chứng minh rằng d luôn tiếp xúc với một đường cong cố định.*

(Đại học Khoa học tự nhiên)

Bài 5.4. *Cho hai đường thẳng a, b cắt nhau tại M và không vuông góc với nhau. Dựng parabol tiếp xúc a tại A và tiếp xúc b tại B, với A, B là hai điểm cho trước thuộc a, b.*

(Đại học Khoa học tự nhiên)

Bài 5.5. *Cho tam giác ABC vuông cân tại A. D, E, F lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho tam giác DEF vuông cân tại D. Tìm tập hợp trung điểm I của EF.*

(Bắc Ninh)

Bài 5.6. *Cho khối tứ diện ABCD có thể tích là V. Diện tích các tam giác ABC, ABD lần lượt là S_1, S_2. Gọi x là số đo góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (ABD). M là một điểm thuộc cạnh CD sao cho khoảng cách từ M đến hai mặt phẳng (ABC)và (ABD) bằng nhau.*

(a) *Chứng minh rằng* $V = \dfrac{2S_1S_2\sin x}{3AB}$ *và* $\dfrac{CM}{DM} = \dfrac{S_1}{S_2}$.

(b) *Tính diện tích tam giác AMB theo V, S_1, S_2, x.*

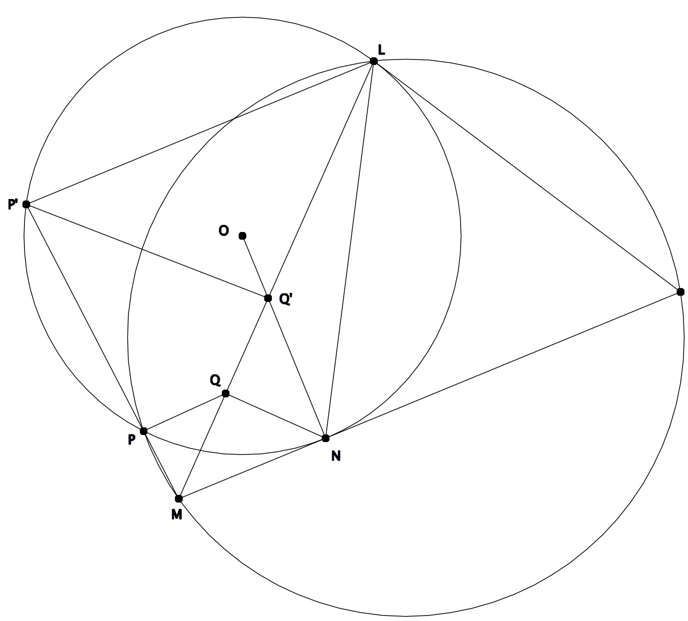
(Ninh Bình)

Bài 5.7. *Cho KL và KN là các tiếp tuyến của đường tròn (C), với L, N thuộc (C). Lấy M bất kì trên đường thẳng KN (M, K khác phía so với N). Giả sử (C) cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KLM tại điểm thứ hai là P. Q là chân đường vuông góc hạ từ N xuống ML. Chứng minh rằng*

$$\angle MPQ = 2\angle KML.$$

(Hải Phòng)

Lời giải.



Gọi $P' \equiv MP \cap (O)$, $P' \neq P$ và $Q' \equiv ON \cap ML$. Khi ấy, ta có

$$MN^2 = \overline{MQ} \cdot \overline{MQ'} = \overline{MP} \cdot \overline{MP'},$$

suy ra $PQQ'P'$ là tứ giác nội tiếp. Vì vậy $\angle MPQ = \angle P'Q'M$. Ta đi chứng minh $LP' \parallel MK$.

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}(PM,\, PN) &\equiv (LP',\, LN) \equiv (PL,\, PN) - (PL,\, PM) \equiv (NL,\, NK) + (KN,\, KL)\\ &\equiv (LN,\, LK) \equiv (NK,\, NL) \equiv (MK,\, NL) \pmod \pi,\end{aligned}$$

nên $LP' \parallel MK$. Dẫn đến $ON \perp P'L$, suy ra $OQ' \perp P'L$. Nhưng $O \in$ đường trung trực của LP', vì vậy $Q' \in$ đường trung trực của LP', theo đó ta được

$$\angle P'Q'M = 2 \cdot \angle Q'LP' \equiv 2 \cdot \angle MLP' = 2 \cdot \angle KML \text{ (do } LP' \parallel MK),$$

suy ra $\angle MPQ = 2 \cdot \angle KML$. Đó là điều phải chứng minh.

Bài 5.8. *Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Đường tròn (O) đi qua A, B cắt đoạn AH tại K. Điểm L thuộc đoạn AB sao cho $KL \parallel AC$. Gọi $E = BK \cap CL$. Đường thẳng AE cắt lại (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh rằng*

$$\angle AFL = \angle BAC.$$

Bài 5.9. *Cho tam giác ABC. Dựng các điểm X, Y sao cho hai tam giác ABX, ACY đồng dạng ngược hướng. Dựng các điểm T, K sao cho các tam giác BXA, BTC, KXY đồng dạng cùng hướng. Chứng minh rằng hai tam giác BTC và KXY có chung tâm đường tròn ngoại tiếp.*

(Đại học Sư phạm)

Bài 5.10. *Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là trung điểm của BC, D là hình chiếu của H trên cạnh AC, M là trung điểm HD. Chứng minh rằng AM vuông góc với BD.*

(Đồng Nai)

Lời giải. Gọi K là hình chiếu của B lên AC. Khi ấy ta có $HD \parallel BK$, lại có H là trung điểm của BC dẫn đến D là trung điểm của KC. Qua B, A, vẽ các tia By, Ax. Khi ấy, ta thu được $(AH,\, AD,\, AM,\, Ax) = (BC,\, BK,\, BD,\, By) = -1$. Nhưng dễ thấy, AH, AD, Ax lần lượt vuông góc với BC, BK, By. Suy ra $AM \perp BD$. Đó là điều phải chứng minh.

Bài 5.11. *Tam giác ABC $(AB > AC)$ nội tiếp (O). Phân giác ngoài tại A cắt (O) tại E. Gọi F là hình chiếu của E trên AB. Chứng minh rằng*

$$2AF = AB - AC.$$

(Đồng Nai)

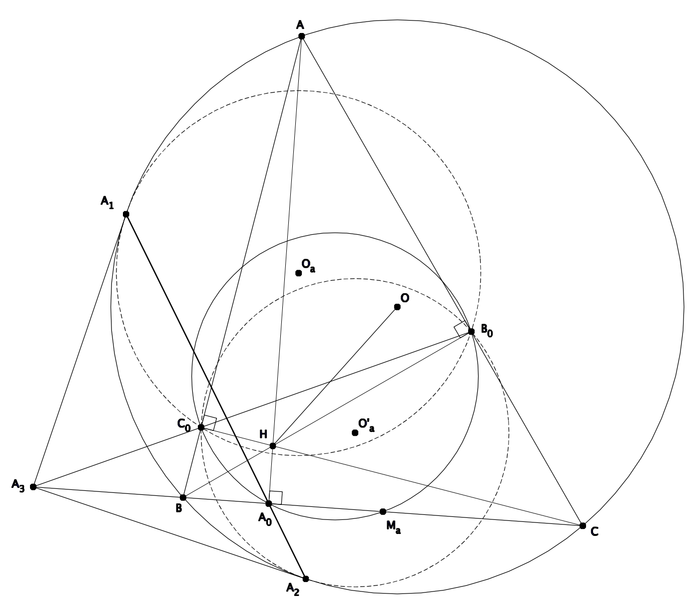
Bài 5.12. *Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$. Gọi a, b, c, d theo thứ tự là phân giác ngoài của các góc $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$. $K = a \cap b$, $L = b \cap c$, $M = b \cap d$, $N = d \cap a$. Chứng minh rằng tứ giác $KLMN$ nội tiếp một đường tròn và đường tròn đó có bán kính bằng $\dfrac{KM \cdot LN}{AB + BC + CD + DA}$.*

(Đại học Sư phạm)

Bài 5.13. *Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AA_0, BB_0, CC_0 đồng quy tại H. Các điểm A_1, A_2 thuộc (O) sao cho đường tròn ngoại tiếp các tam giác $A_1B_0C_0$, $A_2B_0C_0$ tiếp xúc với (O). Tương tự ta có các điểm B_1, B_2 và các điểm C_1, C_2. Chứng minh rằng các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy tại một điểm thuộc OH.*

(Đại học Sư phạm)

Lời giải.



Gọi (O_a) và (O'_a) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp các tam giác $\triangle A_1B_0C_0$ và $\triangle A_2B_0C_0$. Gọi t_a và t'_a lần lượt là các tiếp tuyến chung tại A_1 và A_2 của (O_a) và (O'_a) với (O). Kí hiệu $([BC])$ ám chỉ đường tròn đường kính BC.

Ta có t_a, BC và B_0C_0 lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn $((O_a),\ (O))$, $((O),\ ([BC]))$ và $(([BC]),\ (O_a))$. Do đó t_a, BC và B_0C_0 đồng quy tại A_3. Lập luận tương tự, ta cũng có t_a, BC và B_0C_0 đồng quy tại A'_3, vì vậy $A_3 \equiv A'_3$. Hay nói cách khác, $A_3 \equiv B_0C_0 \cap BC$. Xác định tương tự cho B_3, C_3.

Bây giờ, gọi M_a là trung điểm của BC. Do $(A_3A_0BC) = -1$ nên theo hệ thức Maclauren, ta thu được $\overline{A_3B} \cdot \overline{A_3C} = \overline{A_3A_0} \cdot \overline{A_3M_a}$. Từ đó suy ra A_3 có cùng phương tích wrt (O) và đường tròn 9-điểm Euler, kí hiệu là $(\mathscr{E})$ wrt $\triangle ABC$. Lập luận tương tự cho B_3, C_3. Ta kết luận A_3, B_3, C_3 thẳng hàng $(*)$. Suy ra đường thẳng d đi qua A_3, B_3, C_3 là trục đẳng phương của (O) và $(\mathscr{E})$. Vậy nên $O\mathscr{E} \equiv OH \perp d$ $(**)$.

Để ý rằng A_3, B_3, C_3 lần lượt là cực của A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 wrt (O). Kết hợp với $(*)$, ta suy ra A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy tại điểm S đồng thời cũng là cũng là cực của d wrt (O), do đó $OS \perp d$. Kết hợp với $(**)$, ta suy ra $S \in OH$.

Tóm lại, các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy tại một điểm thuộc OH.

Bài 5.14. *Cho tam giác nhọn ABC có trung tuyến CM vuông góc với phân giác trong AL tại đỉnh A (với M, L lần lượt thuộc các cạng AB, BC). Đặt $AC = b$, $AB = c$.*

(a) Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AL} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{c+b}\overrightarrow{AC}.$$

(b) Giả sử $CM = k \cdot AL$, $k > 0$. Chứng minh rằng

$$\cos A = \frac{9-4k^2}{9+4k^2}.$$

(Kon Tum)

Bài 5.15. *Cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh CB và CD lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $\dfrac{BE}{BC} = k$ và $\dfrac{DF}{DC} = \dfrac{1-k}{1+k}$, với $0 < k < 1$. Đoạn thẳng BD cắt AE và AF tại H và G tương ứng. Đường vuông góc với EF kẻ từ A cắt BD tại P. Chứng minh rằng*

$$\frac{PG}{PH} = \frac{DG}{BH}.$$

(Phú Yên)

Bài 5.16. *Trong mặt phẳng (P)cho điểm O cố định và $d$là đường thẳng quay quanh O. Lấy S ngoài (P)có hình chiếu vuông góc trên (P) là H, với $H \not\equiv O$. Qua S dựng đường vuông góc với mặt phẳng xác định bởi S và d. Đường thẳng này cắt (P) tại N. Tìm quỹ tích điểm N khi d thay đổi.*

(Phú Yên)

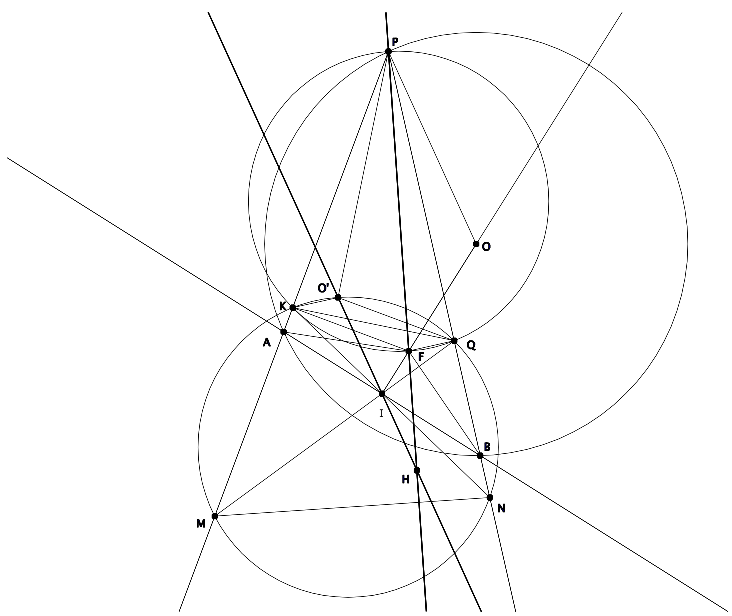
Bài 5.17. *Cho đường tròn tâm O và một dây cung AB cố định không là đường kính. Một điểm P thay đổi trên cung lớn AB. Gọi I là trung điểm của AB. Lấy các điểm M, N trên các tia PA, PB tương ứng sao cho $\angle PMI = \angle PNI = \angle APB$.*

(a) Chứng minh đường cao kẻ từ đỉnh P của tam giác PMN đi qua một điểm cố định.

(b) Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác PMN đi qua một điểm cố định.

(Phổ thông Năng khiếu)

Lời giải.



(a) Gọi K và Q lần lượt là giao điểm của IN với PA và IM với PB. Từ đó, theo giải thiết đầu bài, ta thu được $MKQN$ là tứ giác nội tiếp. Gọi F là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle OAB$. Ta có

$$\angle AFI = \angle AOB = 2\angle APB = 180^\circ - \angle PKN = \angle MKN \equiv \angle AKI.$$

Dẫn đến A, K, F, I đồng viên. Suy ra $\angle FKA = \angle FIA = 90^\circ$. Lập luận tương tự ta cũng thu được, $\angle FQE = 90^\circ$. Dẫn đến P, K, Q nội tiếp đường tròn đường kính PF. Từ đây ta thấy, PF cũng chính là đường cao hạ từ P đến MN. Mà F cố định. Ta suy ra điều cần chứng minh.

(b) Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PMN và H là trực tâm của tam giác PMN. Ta có O' nằm trên trung trực của PM. Mặt khác, ta sẵn có Q nằm trên trung trực của PM. Do đó, $QO' \perp PA$. Tương tự ta cũng có $O'K \perp PQ$. Bây giờ gọi K', Q' lần lượt là hình chiếu của K, Q lên PQ, PK và M', N' lần lượt là hình chiếu của M, N lên PN, PM. Khi ấy ta có các hệ thức sau

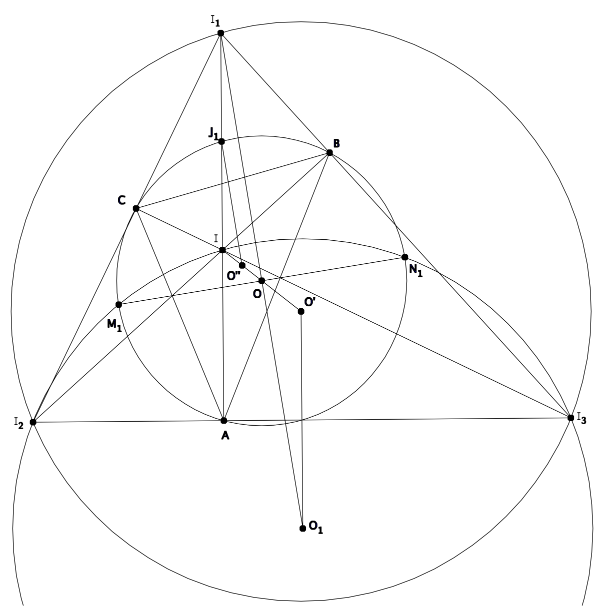
$$\overline{O'K'} \cdot \overline{O'K} = \overline{O'Q'} \cdot \overline{O'Q}, \quad \overline{IQ} \cdot \overline{IM} = \overline{IA} \cdot \overline{IN}, \quad \overline{HN} \cdot \overline{HN'} = \overline{HM} \cdot \overline{HM'}.$$

Điều này ám chỉ O', I, H có cùng phương tích với đường tròn đường kính KN và đường tròn đường kính QM. Suy ra, O', I, H thẳng hàng. Kết luận, $O'H$, tức đường thẳng Euler của tam giác PMN luôn đi qua I cố định. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 5.18. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi I, I_1, I_2, I_3 là tâm đường tròn nội tiếp và bàng tiếp các góc A, B, C tương ứng. Đường tròn ngoại tiếp tam giác II_2I_3 cắt (O) tại hai điểm M_1, N_1. Gọi J_1 là giao điểm của AI và (O). Kí hiệu d_1 là đường thẳng đi qua J_1 và vuông góc với M_1N_1. Tương tự xác định các đường thẳng d_2, d_3. Chứng minh các đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy tại một điểm.*

(Phổ thông Năng khiếu)

Lời giải.



Dễ thấy I là trực tâm của tam giác $\triangle I_1I_2I_3$. Do vậy, nếu gọi O_1 và O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle II_2I_3$ và $\triangle I_1I_2I_3$. Theo một kết quả quen thuộc, ta có O_1 và O' là ảnh của nhau qua phép đối xứng với đường thẳng I_2I_3 và I_1IO_1O' là hình bình hành. Suy ra, I_1O_1 đi qua trung điểm của $O'I$, đồng thời cũng chính là tâm đường tròn 9-điểm Euler của $\triangle I_1I_2I_3$, do vậy ba điểm I_1, O, O_1 thẳng hàng. Hơn nữa, để ý rằng M_1N_1 chính là trục đẳng phương của (ABC) và (O_1) nên $I_1O \perp M_1N_1$. Lập luận tương tự cho các đỉnh I_2, I_3. Khi ấy, ta thu được, các đường thẳng d_1', d_2', d_3' qua I_1, I_2, I_3 lần lượt vuông góc với M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 đồng quy tại O.

Xét phép vị tự tâm I, tỉ số $k = \frac{1}{2}$, biến I_1, I_2, I_3 lần lượt thành J_1, J_2, J_3. Cho nên $\mathscr{H}(I,\, k)$ biến d_1', d_2', d_3' lần lượt thành các đường thẳng d_1, d_2, d_3. Dẫn đến d_1, d_2, d_3 đồng quy tại ảnh của O qua $\mathscr{H}(I,\, k)$. Ta thu được điều phải chứng minh.

Chú ý. Bài toán này còn có thể giải ngắn gọn hơn bằng định lý Carnot mở rộng. Nội dung của định lý như sau:

Xét hai tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$. Khi ấy các đường thẳng qua A, B, C vuông góc lần lượt với $B'C'$, $C'A'$ và $A'B'$ đồng quy khi và chỉ khi các đường vuông góc kẻ lần lượt từ A', B', C' đến BC, CA, AB đồng quy.

Chứng minh xin giành cho bạn đọc.

Chương 6

Tổ hợp

"Không có bài toán nào không giải được. Chúng ta phải biết và sẽ biết."
David Hilbert

6.1 Đề bài

6.1. Một người ham thích làm toán mỗi ngày làm một hoặc hai bài toán, nhưng mỗi tuần làm không quá 10 bài. Chứng minh rằng có một số ngày liên tiếp người ấy làm đúng 30 bài toán.

6.2. Sau khi khai trương được đúng 10 ngày, một nhân viên thư viện cho biết

(1) Mỗi ngày có đúng tám người đến đọc sách;

(2) Không có người nào đến thư viện một ngày quá một lần ;

(3) Trong hai ngày bất kỳ của 10 ngày đó thì có ít nhất là 15 người khác nhau cùng đến thư viện.

Căn cứ đồng thời cả ba điều kiện mà nhân viên thư viện cung cấp hãy cho biết số người tối thiểu đã đến thư viện trong 10 ngày nói trên là bao nhiêu?

6.3. Chứng minh rằng nếu chọn ra 15 số bất kỳ từ tập hợp $\{2, 3, \ldots, 2010\}$ sao cho chúng đôi một nguyên tố cùng nhau thì sẽ có ít nhất một số nguyên tố được chọn.

6.4. Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng với mọi dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ta luôn chọn được số tự nhiên $k \le n$ sao cho

$$|(a_1 + \cdots + a_k) - (a_{k+1} + \cdots + a_n)| \le \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}.$$

6.5. Giả sử ta có thể chọn được n số phân biệt từ tập $\{1, 2, 3, \ldots, 2n-1\}$ sao cho các số được chọn không có hai số nào chia hết cho nhau. Chứng minh rằng không có số nào trong các số trên nhỏ hơn 2^k, trong đó k là số xác định bởi điều kiện $3^k < 2n < 3^{k+1}$.

6.6. Cho tập hợp $X = \{1, 2, \ldots, 2010\}$. Tìm số nguyên N lớn nhất sao cho mỗi hoán vị $\omega_X = (a_1, a_2, \ldots, a_{2010})$ của X đều tồn tại 30 số hạng liên tiếp có tổng không nhỏ hơn N.

6.7. Tập hợp các số nguyên dương được tô bởi hai màu đen và trắng. Giả thuyết rằng, tổng của hai số khác màu luôn bị tô màu đen và có vô hạn số bị tô màu trắng. Chứng minh rằng tổng và tích của hai số bị tô màu trắng cũng sẽ bị tô màu trắng.

6.8. Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Tìm số cách chia tập S thành 3 tập con khác rỗng sao cho mỗi tập con không chứa hai số nguyên liên tiếp.

6.9. Cho n là số nguyên lớn hơn 1 và $P_1, P_2, \ldots, P_n$ là các tập con có hai phần tử và đôi một phân biệt của tập hợp $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ thỏa mãn tính chất: nếu $i \ne j$ mà $P_i \cap P_j \ne \emptyset$ thì tồn tại k để $P_k = \{i, j\}$. Chứng minh rằng với mỗi số $i \in S$ xuất hiện đúng hai lần trong các tập P_j với $j = 1, 2, \ldots, n$.

6.10. Cho số nguyên n không nhỏ hơn 3. Giả sử mỗi số nguyên dương không lớn hơn $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3$ được tô một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh tồn tại dãy các số cùng màu thỏa mãn

(1) $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$;

(2) $x_2 - x_1 \le x_3 - x_2 \le \cdots \le x_n - x_{n-1} \le C_n^2$.

6.11. Cho tập hợp A gồm $n \geq 5$ phần tử. Xét k tập con bất kì gồm ba phần tử của A. Hãy tìm số k nhỏ nhất sao cho với mọi cách chọn k tập con trên luôn tồn tại hai tập con có chung nhau đúng một phần tử.

6.12. Cho tập $S = \{1, 2, 3, \ldots, 2009\}$. A là tập con có n phần tử của S. Tìm n nhỏ nhất sao với mọi cách chọn tập A thì trong A luôn có hai phần tử a, b mà $\dfrac{a}{b} = 3$.

6.13. Cho tập $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2009\}$. Chứng minh rằng, có thể tô màu mỗi phần tử của tập A bằng một trong hai màu đen trắng sao cho mọi cấp số cộng công sai khác 0 gồm 18 phần tử của A đều được tô bởi đủ cả hai màu.

6.14. Tập hợp $A \subset \mathbb{R}$ được gọi là có tính chất T nếu A có không ít hơn bốn phần tử và $ab + cd$ thuộc A với mọi a, b, c, d phân biệt thuộc A.

(a) Hãy chỉ ra tập hợp A gồm bốn phần tử, có tính chất T.

(b) Có hay không tập hợp $A \subset (0, +\infty)$ gồm bốn phần tử và có tính chất T.

6.15. Cho số nguyên dương $n > 10$. Tìm $m \in \mathbb{N}^*$ lớn nhất thỏa mãn điều kiện: Tồn tại m tập con A_j của tập $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$, mỗi tập con gồm n phần tử sao cho $|A_i \cap A_j \cap A_k| \leq 1$ với mọi $1 \leq i < j < k \leq n$.

6.16. Cho $A = \{1, 2, \ldots, 2n\}$. Một tập con của A được gọi là tốt nếu nó có đúng hai phần tử x, y và $|x - y| \in \{1, n\}$. Tìm số các tập hợp $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ thoả mãn điều kiện A_i là tập con tốt với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$ và $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A$.

6.2 Lời giải

Bài 6.1. *Một người ham thích làm toán mỗi ngày làm một hoặc hai bài toán, nhưng mỗi tuần làm không quá* 10 *bài. Chứng minh rằng có một số ngày liên tiếp người ấy làm đúng* 30 *bài toán.*

Lời giải. Gọi a_i là số bài toán người đó làm trong ngày thứ i. Theo giả thiết, $a_i = 1$ hoặc $a_i = 2$, và do trong một tuần người đó làm không quá 10 bài, nên phải tồn tại vô hạn $k \in \mathbb{N}$ sao cho $a_k = 1$. (1)

Đặt $S_i = a_1 + \cdots + a_i$ (quy ước $S_0 = 0$). Như vậy, bài toán tương đương với việc chứng minh tồn tại $i \neq j$ sao cho $S_j = S_i + 30$ (khi i, j thỏa mãn điều kiện đó thì $a_{i+1} + \cdots + a_j = 30$ và bài toán kết thúc). $(*)$

Giả sử $S_j \neq S_i + 30 \; \forall i,\ j \in \mathbb{N}$. Do các a_i chỉ nhận giá trị 1 hoặc 2, nên $S_{i+1} - S_i \leq 2$. Kết hợp với giả thiết phản chứng, suy ra tồn tại i, $j \in \mathbb{N}$ sao cho $S_j = S_i + 31$.

Ta sẽ chứng minh $a_{i+1} = a_{j+1} = 2$. Thật vậy,

+ Nếu $a_{i+1} = 1$, thì $S_j - S_{i+1} = 30$ (vô lí). Do đó $a_{i+1} = 2$.

+ Nếu $a_{j+1} = 1$, thì $S_{j+1} - S_{i+1} = 30$ (vô lí). Do đó $a_{j+1} = 2$.

Vậy ta phải có $a_{i+1} = a_{j+1} = 2$. Quá trình được lặp lại với a_{i+2}, a_{j+2}, $\ldots$, do đó $a_k = 2$ với mọi $k \geq i$, tức số các chỉ số k sao cho $a_k = 1$ là hữu hạn. (2)

Từ (1) và (2) rõ ràng là mâu thuẫn. Vậy điều giả sử là sai, hay tồn tại i, j sao cho $S_j = S_i + 30$. Kết hợp với nhận xét $(*)$, chứng minh của bài toán kết thúc.

Bình luận. Ta có thể chứng minh kết luận của bài toán mà không dùng đến điều kiện mỗi tuần không làm quá 10 bài. Cách làm vẫn là phản chứng. Ý tưởng cơ bản là sẽ có một số ngày liên tiếp người này làm 29 bài toán, và sau đó sẽ là những ngày làm hai bài.

Bài 6.2. *Sau khi khai trương được đúng* 10 *ngày, một nhân viên thư viện cho biết*

(1) Mỗi ngày có đúng tám người đến đọc sách;

(2) Không có người nào đến thư viện một ngày quá một lần ;

(3) Trong hai ngày bất kỳ của 10 *ngày đó thì có ít nhất là* 15 *người khác nhau cùng đến thư viện.*

Căn cứ đồng thời cả ba điều kiện mà nhân viên thư viện cung cấp hãy cho biết số người tối thiểu đã đến thư viện trong 10 *ngày nói trên là bao nhiêu?*

Lời giải. Gọi x_i là số người đến đọc sách được i ngày $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ K)$ và $K \le 10$. Gọi n là số người đã đến thư viện trong 10 ngày đó thì ta có

$$n = x_1 + x_2 + \cdots + x_K, \tag{1}$$

và

$$80 = x_1 + 2x_2 + \cdots + Kx_K. \tag{2}$$

Gọi y là số cách chọn hai ngày sao cho không có người nào đến thư viện quá một lần trong hai ngày đó. Vì trong hai ngày bất kỳ của 10 ngày có ít nhất là 15 người khác nhau cùng đến thư viện, nên trong hai ngày bất kỳ của 10 ngày đó có không quá một người đến thư viện trong cả hai ngày đó. Như vậy, ta có

$$C_{10}^2 = C_2^2 x_2 + C_3^2 x_3 + \cdots + C_K^2 x_K + y. \tag{3}$$

Nhận xét rằng $x_i - \dfrac{2}{3} i x_i + \dfrac{1}{3} C_i^2 x_i = \dfrac{(i-2)(i-3)}{6} x_i \ge 0$. Lấy $(1) - \dfrac{2}{3}(2) + \dfrac{1}{3}(3)$, ta có $n \ge \left[\dfrac{115}{3}\right] + 1$, suy ra $n \ge 39$.

Vậy số người tối thiểu đi đến thư viện trong 10 ngày là 39. Bảng số liệu dưới đây cho thấy giá trị này có thể đạt được (A_i là tập hợp chỉ số của những người đến thư viện vào ngày thứ i).

$A_1 = \{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$, $A_2 = \{1,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16\}$,
$A_3 = \{1,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20,\ 21,\ 22,\ 23\}$, $A_4 = \{2,\ 3,\ 10,\ 17,\ 24,\ 25,\ 26,\ 27\}$,
$A_5 = \{2,\ 4,\ 11,\ 18,\ 28,\ 29,\ 30,\ 31\}$, $A_6 = \{2,\ 5,\ 12,\ 19,\ 32,\ 33,\ 34,\ 35\}$,
$A_7 = \{6,\ 13,\ 20,\ 32,\ 28,\ 24,\ 36,\ 37\}$, $A_8 = \{7,\ 14,\ 21,\ 33,\ 29,\ 39,\ 26,\ 38\}$,
$A_9 = \{8,\ 15,\ 22,\ 34,\ 30,\ 39,\ 25,\ 36\}$, $A_{10} = \{9,\ 16,\ 23,\ 35,\ 31,\ 27,\ 38,\ 37\}$.

Bình luận. Bài này có thể phát biểu dưới ngôn ngữ tập hợp như sau: Cho A_1, A_2, $\ldots$, A_{10} là các tập con của $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ thoả mãn đồng thời các điều kiện

(i) $|A_i| = 8$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, 10$.

(ii) $|A_i \cap A_j| = 1$ với mọi i khác j.

Tìm giá trị nhỏ nhất của n để điều này có thể xảy ra.

Bài này được lấy trong tuyển tập đề thi Olympic 30/4 năm 2007. Tuy nhiên có lẽ là nó cũng được lấy từ một tài liệu khác.

Bài 6.3. *Chứng minh rằng nếu chọn ra* 15 *số bất kỳ từ tập hợp* $\{2,\ 3,\ \ldots,\ 2010\}$ *sao cho chúng đôi một nguyên tố cùng nhau thì sẽ có ít nhất một số nguyên tố được chọn.*

Lời giải. Giả sử tồn tại 15 hợp số dương $a_1 < a_2 < \cdots < a_{15}$ thuộc đoạn $[2,\ 2010]$ sao cho chúng đôi một nguyên tố cùng nhau.

Gọi $p_1, p_2, \ldots, p_{15}$ là ước nguyên tố nhỏ nhất của $a_1, a_2, \ldots, a_{15}$. Rõ ràng các số p_i phải đôi một phân biệt (ngược lại, nếu tồn tại $i \neq j$ sao cho $p_i = p_j$ thì $(a_i,\ a_j) \geq p_i$).

Gọi j là chỉ số sao cho $p_j = \max\{p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_{15}\}$ thì kiểm tra trực tiếp được $p_j \geq 47$. Và khi đó, $a_j \geq p_i^2 \geq 47^2 > 2010$ (vô lí).

Vậy điều giả sử là sai và ta có điều phải chứng minh.

Bài 6.4. *Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng với mọi dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ta luôn chọn được số tự nhiên $k \leq n$ sao cho*

$$|(a_1 + \cdots + a_k) - (a_{k+1} + \cdots + a_n)| \leq \max\{|a_1|,\ |a_2|,\ \ldots,\ |a_n|\}.$$

(Đại học Khoa học tự nhiên)

Bình luận. Điều khó chịu nhất trong bài này là số lượng số hạng rất lớn trong dấu trị tuyệt đối và sẽ rất dễ gây rối trong quá trình giải quyết. Ta sẽ tìm cách để giảm số giá trị này đi.

Lời giải. Đặt $S_0 = 0$, $S_i = a_1 + \cdots + a_i$, $T_i = (a_1 + \cdots + a_i) - (a_{i+1} + \cdots + a_n) = 2S_i - S_n$ và $H = \max\{|a_1|,\ |a_2|,\ \ldots,\ |a_n|\}$. Theo đề bài, ta cần chứng minh tồn tại số k sao cho $|T_k| \leq H$ (đến đây, số số hạng trong dấu trị tuyệt đối chỉ còn là 2, và bài toán đã gọn hơn nhiều).

Vì $T_0 = -S_n$ và $T_n = S_n$ nên tồn tại chỉ số $k < n$ sao cho $T_k T_{k+1} \leq 0$. Từ đây ta có

$$2H \geq 2|a_{k+1}| = |T_{k+1} - T_k| = |T_{k+1}| + |T_k|,$$

suy ra ít nhất một trong hai bất đẳng thức $|T_{k+1}| \leq H$, $|T_k| \leq H$ đúng và ta có điều phải chứng minh.

Bài 6.5. *Giả sử ta có thể chọn được n số phân biệt từ tập* $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2n-1\}$ *sao cho các số được chọn không có hai số nào chia hết cho nhau. Chứng minh rằng không có số nào trong các số trên nhỏ hơn* 2^k*, trong đó k là số xác định bởi điều kiện* $3^k < 2n < 3^{k+1}$.

(Đại học Khoa học tự nhiên)

Lời giải. Một lượng điều kiện khá ít và khá khó sử dụng ... Cần được gỡ rối theo từng bước.

Giả sử dãy số $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ thuộc đoạn $[1,\ 2n-1]$ thỏa mãn hai số bất kì không chia hết cho nhau. Ta cần chứng minh $a_1 \geq 2^k$.

Trước hết, đặt $a_i = 2^{b_i} \cdot c_i$, trong đó c_i lẻ. Từ giả thiết, ta suy ra được các c_i phải đôi một phân biệt và nằm trong đoạn $[1,\ 2n-1]$, tức $(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n)$ là một hoán vị của $(1,\ 3,\ \ldots,\ 2n-1)$.

Bây giờ xét hai trường hợp sau.

+ $c_1 = 1$ ($c_1 = 3$ cách giải tương tự). Khi đó, $a_1 = 2^{b_1}$. Xét dãy s với $s_i = 2^{t_i} \cdot 3^i$. Rõ ràng dãy s là một phần của dãy a ban đầu, nên nó cũng phải thỏa mãn các tính chất của dãy a, tức hai số bất kì trong dãy s không chia hết cho nhau. Như vậy dãy t là một dãy mà các phần tử đôi một phân biệt và nhỏ hơn b_1, và do phần tử lớn nhất trong dãy s là $s_k = 3^k$ nên $b_1 \geq k$, tức $a_1 \geq 2^k$.

+ $c_1 \geq 5$. Giả sử $a_1 < 2^k$. Như thế ta có $2^{b_1} \cdot c_1 < 2^k$, suy ra $5 \leq c_1 < 2^{k-b_1}$, hay $k - b_1 \geq 3$. Mặt khác, ta lại có

$$c_1 \cdot 3^{b_1+1} < 2^{k-b_1} \cdot 3^{b_1} < 9 \cdot 2^{k-b_1-3} \cdot 3^{b_1+1} < 3^2 \cdot 3^{k-b_1-3} \cdot 3^{b_1+1} = 3^k,$$

nên tồn tại dãy $s_0,\ s_1,\ \ldots,\ s_{b_1+1}$ là dãy con của dãy a sao cho $s_i = 2^{t_i} \cdot 3^i \cdot c_1$. Lưu ý rằng $t_0 = b_1$. Do s là dãy con của a nên hai phần tử bất kì trong s không chia hết cho nhau. Theo đó, các phần tử $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_{b_1+1}$ phải đôi một phân biệt và nhỏ hơn b_1, mà rõ ràng điều này là vô lí. Vậy điều giả sử là sai, hay ta có $a_1 \geq 2^k$.

Bài 6.6. *Cho tập hợp $X = \{1,\ 2,\ \ldots,\ 2010\}$. Tìm số nguyên N lớn nhất sao cho mỗi hoán vị $\omega_X = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2010})$ của X đều tồn tại* 30 *số hạng liên tiếp có tổng không nhỏ hơn N.*

(Đại học Sư phạm)

Lời giải. Trước hết, ta tìm giá trị lớn nhất của N. Xét một hoán vị $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2010})$ của $(1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Theo giả thiết, mỗi nhóm 30 số hạng liên tiếp đều có tổng không nhỏ hơn N, nên

$$\begin{aligned} 1 + \cdots + 2010 &= (a_1 + \cdots + a_{30}) + (a_{31} + \cdots + a_{60}) + \cdots + (a_{1981} + \cdots + a_{2010}) \\ &\geq 67N. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra

$$N \leq \frac{2010 \cdot 2011}{67} = 30165.$$

Bây giờ ta chỉ ra một hoán vị sao cho không thể thay N bằng số nhỏ hơn. Thật vậy, kiểm tra trực tiếp hoán vị $(2010, 1, 2009, 2, \ldots, 1006, 1005)$ là hoán vị đảm bảo không thể thay N bởi số nhỏ hơn.

Tóm lại ta có giá trị lớn nhất của N là 30165.

Bài 6.7. *Tập hợp các số nguyên dương được tô bởi hai màu đen và trắng. Giả thuyết rằng, tổng của hai số khác màu luôn bị tô màu đen và có vô hạn số bị tô màu trắng. Chứng minh rằng tổng và tích của hai số bị tô màu trắng cũng sẽ bị tô màu trắng.*
(Đồng Nai)

Lời giải. Bài này đã từng xuất hiện trong kì thi VMEO 2006, và lời giải của nó như sau.

Do tập các số nguyên dương bị chặn dưới, và tồn tại vô số số được tô màu trắng, nên tồn tại số nguyên dương bé nhất được tô màu trắng. Kí hiệu số đó là p.

+ *Bước 1.* Ta sẽ chứng minh bất kì số nào được tô màu trắng cũng là bội của p. Thật vậy, giả sử tồn tại số $k = lp + r$ $(0 < r < p)$ được tô màu trắng. Khi đó, theo cách chọn số p, ta có $p < k$. Mặt khác, do $k = p + (k - p)$ và k, p cùng có màu trắng, nên $k - p$ cũng phải có màu trắng (ngược lại thì k sẽ có màu đen).

Tiếp tục như vậy, ta sẽ có các số $k - 2p$, $k - 3p$, $\ldots$, $k - lp$ có màu trắng, tức r có màu trắng. Nhưng do $0 < r < p$ nên điều này trái với cách chọn p là số nguyên dương bé nhất được tô màu trắng. Do vậy, tất cả các số được tô màu trắng đều phải là bội của p.

+ *Bước 2.* Ta sẽ chứng minh bất kì số nào là bội của p đều được tô màu trắng. Thật vậy, giả sử tồn tại số $k = pq$ có màu đen. Khi đó,

$(q+1)p = qp + p$ có màu đen;

$(q+2)p = (q+1)p + p$ có màu đen;

$\ldots$

Như vậy, tất cả các số lớn hơn k và là bội của p đều có màu đen. Mặt khác, theo bước 1 thì tất cả các số màu trắng đều là bội của p. Như vậy, số lượng số màu trắng phải là hữu hạn, trái giả thiết số lượng số màu trắng là vô hạn. Vậy điều giả sử là sai và bước 2 được giải quyết.

Từ hai bước trên ta có kết luận rằng, một số có màu trắng khi và chỉ khi số đó là bội của p. Từ đây, kết luận của bài toán là hiển nhiên.

Bài 6.8. *Cho tập hợp* $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. *Tìm số cách chia tập* S *thành ba tập con khác rỗng sao cho mỗi tập con không chứa hai số nguyên liên tiếp.*

(Đại học Sư phạm)

Lời giải. Kí hiệu $S(n)$ là số cách chia tập S thành ba tập con không chứa khác rỗng mà bất kì tập con nào cũng không chứa hai phần tử liên tiếp nhau. Ta sẽ tìm cách tính $S(n+1)$ theo $S(n)$.

Giả sử ta đã chia được ba tập con và tổng số phần tử của chúng là n. Bổ sung thêm phần tử $n+1$. Ta có hai khả năng xảy ra.

+ *Khả năng 1.* $n+1$ không tạo thành một tập con mới (tức tập chứa $n+1$ có ít nhất một phần tử khác). Khi đó, rõ ràng ta có hai cách bổ sung $n+1$ (vào một trong hai tập không chứa n). Vậy số cách xây dựng tập con trong trường hợp này là $2S(n)$.

+ *Khả năng 2.* $n+1$ tạo thành một tập con mới. Khi đó, n số từ 1 đến n phải nằm trong hai tập hợp còn lại. Có thể thấy ngay chỉ có một cách chia thỏa mãn (một tập chứa các số chẵn và tập còn lại chứa các số lẻ). Do đó, số cách trong trường hợp này là một cách.

Vậy ta thu được công thức truy hồi

$$S(n+1) = 2S(n) + 1,$$

hay

$$S(n+1) + 1 = 2[S(n) + 1]. \qquad (*)$$

Mặt khác, kiểm tra trực tiếp ta có $S(3) = 1$. Kết hợp với $(*)$, ta dễ dàng tìm được công thức tổng quát của $S(n)$ là $S(n) = 2^{n-2} - 1$ với $n \geq 3$.

Như vậy, số cách chia tập hợp thỏa mãn đề bài là $S(1) = S(2) = 0$ và $S(n) = 2^{n-2} - 1$ với $n \geq 3$.

Bình luận. Bài này không khó trong việc lập công thức truy hồi, nhưng lại rất dễ sai (vì quên rằng $n+1$ có thể tự lập thành một tập mới). Để tránh bị bỏ sót, nên tính trực tiếp một số giá trị đầu tiên.

Bài 6.9. *Cho* n *là số nguyên lớn hơn* 1 *và* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *là các tập con có hai phần tử và đôi một phân biệt của tập hợp* $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ *thỏa mãn tính chất: nếu* $i \neq j$ *mà* $P_i \cap P_j \neq \emptyset$ *thì tồn tại* k *để* $P_k = \{i, j\}$. *Chứng minh rằng với mỗi số* $i \in S$ *xuất hiện đúng hai lần trong các tập* P_j *với* $j = 1, 2, \ldots, n$.

Lời giải. Với mỗi $1 \leq i \leq n$, kí hiệu x_i là số lần xuất hiện của số i trong các tập hợp. Theo giả thiết, ta có $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 2n$.

Cũng theo giả thiết, nếu $|P_i \cap P_j| \neq 0$ thì tồn tại $P_k = \{i,\ j\}$. Và rõ ràng, ứng với mỗi bộ $(i,\ j)$ mà $|P_i \cap P_j| \neq 0$ (không kể thứ tự của i và j) thì các P_k là phân biệt. Cho nên số các bộ $(i,\ j)$ mà $|P_i \cap P_j| \neq 0$ không vượt quá n.

Nhưng, số bộ số này lại bằng

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} C_{x_i}^2 &= \frac{(x_1^2 + \cdots + x_n^2) - (x_1 + \cdots + x_n)}{2} \\ &\geq \frac{(x_1 + \cdots + x_n)^2}{2n} - \frac{x_1 + \cdots + x_n}{2} \geq 2n - n = n.\end{aligned}$$

Như vậy dấu bằng trong bất đẳng thức trên phải xảy ra, tức $x_1 = \cdots = x_n = 2$ và đây chính là điều phải chứng minh.

Bài 6.10. *Cho số nguyên n không nhỏ hơn* 3. *Giả sử mỗi số nguyên dương không lớn hơn $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3$ được tô một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh tồn tại dãy các số cùng màu thỏa mãn*

(1) $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$;

(2) $x_2 - x_1 \leq x_3 - x_2 \leq \cdots \leq x_n - x_{n-1} \leq C_n^2$.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh bài toán bằng quy nạp. Giả sử mệnh đề của bài toán đã đúng tới n, tức luôn tồn tại dãy $1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq C_n^1 + C_n^2 + C_n^3$ có cùng màu và thỏa mãn $x_2 - x_1 \leq x_3 - x_2 \leq \cdots \leq x_n - x_{n-1} \leq C_n^2$. Không mất tính tổng quát, giả sử n số này có màu đỏ. Xét mệnh đề với $n+1$.

+ Giả sử tồn tại số x_{n+1} cũng có màu đỏ và $C_n^2 \leq x_{n+1} - x_n \leq C_{n+1}^2$. Khi đó,

$$x_{n+1} \leq C_{n+1}^2 + x_n \leq C_{n+1}^2 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + C_{n+1}^3 - 1,$$

nên số x_{n+1} thỏa mãn toàn bộ các điều kiện để được bổ sung vào dãy, tức ta có dãy $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n+1}$ thỏa mãn đề bài.

+ Nếu tất cả các số $x_n + i$, với $C_n^2 \leq i \leq C_{n+1}^2$ đều có màu xanh, thì chú ý rằng $C_{n+1}^2 - C_n^2 = \dfrac{(n+1)n}{2} - \dfrac{n(n-1)}{2} = n$, nên dãy $x_n + i$ gồm $n+1$ số và ngay lập tức thỏa mãn tất cả các điều kiện của bài toán.

Vậy mệnh đề đúng với $n+1$. Theo đó, ta chỉ cần chứng minh bài toán với $n = 3$, tức cần chứng minh tồn tại ba số x_1, x_2, x_3 sao cho

(1) x_1, x_2, x_3 cùng màu.

(2) $1 \le x_1 < x_2 < x_3 \le 7$.

(3) $x_2 - x_1 \le x_3 - x_2 \le 3$.

Ta sử dụng phản chứng. Giả sử tồn tại cách tô sao cho không tìm được ba số như vậy. Không mất tính tổng quát, giả sử 2 được màu đỏ. Nếu 2 được tô màu đỏ, dẫn đến cả 3, 4, 5 đều có màu xanh (nếu không, thì số được tô màu đỏ sẽ hợp với 1, 2 tạo thành dãy thỏa mãn đề bài). Nhưng khi đó, $(3,\ 4,\ 5)$ lại thỏa mãn cả ba điều kiện trên, mâu thuẫn. Do vậy 2 có màu xanh.

Bây giờ giả sử 3 có màu đỏ. Lí luận tương tự như trên, ta được 5 và 6 có màu xanh, 4 và 7 có màu đỏ, dẫn đến dãy $(1,\ 4,\ 7)$ thỏa mãn cả ba điều kiện trên, mâu thuẫn. Do vậy 3 có màu xanh. Khi đó, 4, 5, 6 có màu đỏ và dãy $(4,\ 5,\ 6)$ lại thỏa mãn cả ba điều kiện kể trên.

Như vậy, điều mà ta đã giả sử ở trên là sai. Hay nói một cách khác, bài toán đúng với $n = 3$. Phép chứng minh được hoàn tất.

Bài 6.11. *Cho tập hợp A gồm $n \ge 5$ phần tử. Xét k tập con bất kì gồm ba phần tử của A. Hãy tìm số k nhỏ nhất sao cho với mọi cách chọn k tập con trên luôn tồn tại hai tập con có chung nhau đúng một phần tử.*

(Đại học Khoa học tự nhiên)

Lời giải. Một cách tự nhiên, không ít bạn đã nghĩ như sau: Chọn các tập $A_{i-2} = (1,\ 2,\ i)$ với $3 \le i \le n$. Ta chọn được $n-2$ tập như thế, và khi chọn thêm một tập nữa thì luôn có hai tập giao nhau tại đúng một phần tử. Nên dự đoán số tập là $n-1$ và tìm cách đi chứng minh nó. Bây giờ, cần kiểm chứng lại xem điều đó có đúng hay không ...

Ta kí hiệu các tập con của A là $A_1, A_2, \ldots, A_{K_n}$ và đánh số các phần tử của tập A từ 1 đến n (trong đó, K_n là giá trị tốt nhất để tồn tại K_n tập hợp, mà hai tập hợp bất kì giao nhau tại 0 hoặc 2 phần tử). Ta sẽ chứng minh $K_n = K_{n-4} + 4$.

Theo bước suy luận ở trên, rõ ràng ta có $K_n \ge n-1$. Theo đó, do $|A_i| = 3$ nên tồn tại một phần tử thuộc vào ít nhất ba tập hợp. Không mất tính tổng quát, giả sử phần tử đó là 1, và nó thuộc vào ba tập hợp A_1, A_2, A_3.

Theo giả thiết, $|A_1 \cap A_2| = 2$, nên tồn tại một phần tử khác (kí hiệu là 2) thuộc vào cả hai tập hợp này, tức là $A_1 = \{1,\ 2,\ 3\}$ và $A_2 = \{1,\ 2,\ 4\}$. Xét tập hợp A_3, ta có hai trường hợp nhỏ.

+ *Trường hợp 1.* $2 \in A_3$. Khi đó, $A_3 = \{1,\ 2,\ 5\}$, và do đó, nếu một tập A_i nào đó có phần tử chung với ít nhất một trong ba tập A_1, A_2, A_3, nó sẽ phải có dạng $(1,\ 2,\ i)$. Như thế, số tập tối đa có thể chọn là $\max\{n-1,\ K_{n-6}+3\} \le \max\{n-1,\ K_{n-4}+3\}$.

+ *Trường hợp 2.* $2 \notin A_3$. Khi đó, $A_3 = (1,\ 3,\ 4)$, và kiểm tra trực tiếp cho thấy nếu A_i có phần tử chung với ít nhất một trong ba tập đó thì nó chỉ có dạng duy nhất là $(2,\ 3,\ 4)$. Như thế, $K_n - 4$ tập còn lại sẽ là tập con của $\{5,\ 6,\ \ldots,\ n\}$, và như thế thì số tập con tối đa trong tình huống này là $K_{n-4}+4$.

Kết hợp cả hai trường hợp này ta được $K_n = K_{n-4}+4$. Vậy ta chỉ cần xét bài toán tại trường hợp cơ sở là $n = 5, 6, 7, 8$, thậm chí có thể xét ngay tại trường hợp $n = 1$, 2, 3, 4. Kiểm tra trực tiếp cho thấy $K_1 = K_2 = 0$, $K_3 = 1$, $K_4 = 4$. Do đó, giá trị lớn nhất của K_n sẽ là

$$K_n = \begin{cases} n & \text{với } n \equiv 0 \pmod 4 \\ n-1 & \text{với } n \equiv 1 \pmod 4 \\ n-2 & \text{với } n \equiv 2,\ 3 \pmod 4 \end{cases}.$$

Và việc chỉ ra các tập hợp thỏa mãn đề bài xin được dành cho các bạn (chú ý đến các bước chứng minh phía trên để dựng).

Tóm lại, ta có kết luận giá trị nhỏ nhất của m để trong m tập con bất kì của A luôn có hai tập giao nhau tại đúng một phần tử là

$$m = \begin{cases} n+1 & \text{với } n \equiv 0 \pmod 4 \\ n & \text{với } n \equiv 1 \pmod 4 \\ n-1 & \text{với } n \equiv 2,\ 3 \pmod 4 \end{cases}.$$

Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Bài 6.12. *Cho tập $S = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2009\}$. A là tập con có n phần tử của S. Tìm n nhỏ nhất sao với mọi cách chọn tập A thì trong A luôn có hai phần tử a, b mà $\dfrac{a}{b} = 3$.*

(Bắc Ninh)

Lời giải. Với mỗi số nguyên dương x, ta kí hiệu $v(x)$ là số nguyên không âm lớn nhất thỏa mãn $3^{v(x)} \mid x$ (nói cách khác, nếu đặt $v(x) = k$ thì x chia hết cho 3^k và không chia hết cho 3^{k+1}). Bây giờ, ta chia tập S thành các tập con S_i thỏa mãn

$$S_i = \{x \in S \mid v(x) = i\}.$$

Ta chứng minh rằng số phần tử được chọn là nhiều nhất nếu ta chọn các tập S_0, S_2, S_4, … Thật vậy, với mỗi số nguyên dương k không chia hết cho 3, xét tập $T_k = \{k,\ 3k,\ 3^2k,\ \ldots\}$. Rõ ràng các tập T_k phủ kín S.

Xét một giá trị k bất kì. Khi đó, trong tập A được chọn sẽ không tồn tại hai phần tử liên tiếp cùng nằm trong T_k. Như thế, nếu đặt s là số nguyên không âm lớn nhất sao cho $3^s \cdot k < 2009$ thì ta chỉ có thể chọn được nhiều nhất $\left\lfloor \frac{s+1}{2} \right\rfloor$ phần tử thuộc T_k, và giá trị đó đạt được nếu ta chọn các số k, 3^2k, 3^4k, ...

Do mệnh đề trên đúng với số k nguyên dương bất kì, nên gộp lại, số phần tử được chọn sao cho không có phần tử nào nhiều gấp ba lần phần tử kia nằm trong các tập $S_0, S_2, \ldots$ Tính toán trực tiếp, ta có

$$|S_0| = 1340, \quad |S_1| = 446, \quad |S_2| = 149, \quad |S_3| = 50 \quad |S_4| = 16,$$
$$|S_5| = 6, \quad |S_6| = 2, \quad |S_i| = 0 \quad \forall i \geq 7.$$

Và do đó, nếu ta chọn 1507 phần tử nằm trong các tập S_0, S_2, S_4, S_6 thì bất kì hai phần tử a, b phân biệt nào thuộc S cũng đều thỏa mãn $a \neq 3b$. Vậy tập hợp A cần có ít nhất 1508 phần tử, hay giá trị nhỏ nhất của n là 1508.

Bài 6.13. *Cho tập $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2009\}$. Chứng minh rằng, có thể tô màu mỗi phần tử của tập A bằng một trong hai màu đen trắng sao cho mọi cấp số cộng công sai khác 0 gồm 18 phần tử của A đều được tô bởi đủ cả hai màu.*

(Hải Phòng)

Lời giải. Rất có thể một số bạn sẽ cố gắng tìm một cách tô (xây dựng cấu hình cụ thể) cho bài toán, và sẽ rất nhanh chóng cảm thấy khó khăn với giá trị rất lớn của các con số. Một số khác sẽ đi tìm một phương án tiếp cận nhẹ nhàng hơn ...

Do mỗi màu chỉ được tô bởi một trong hai màu đen hoặc trắng, nên số cách tô màu 2009 số này là 2^{2009}. Ta đếm số cách tô sao cho có một cấp số cộng gồm 18 số cùng màu. Rõ ràng, ta sẽ tô 18 số này cùng màu, và tô màu tùy ý cho 1991 số còn lại. Như vậy, số cách tô dẫn đến xuất hiện một cấp số cộng có 18 số cùng màu sẽ nhỏ hơn $2a \cdot 2^{1991} = a \cdot 2^{1992}$, do chắc chắn sẽ có những cách trùng nhau trong các cách tô này (ở đây, kí hiệu a là số lượng cấp số cộng gồm 18 số).

Bài toán sẽ được giải quyết nếu ta chứng minh được số cách tô xuất hiện cấp số cộng cùng màu nhỏ hơn tổng số cách tô. Khi đó sẽ có một cách tô mà không có 18 số cùng màu nào lập thành một cấp số cộng). Tức ta cần chứng minh $a \cdot 2^{1992} < 2^{2009}$, hay là $a < 2^{17}$.

Bây giờ ta đếm số lượng cấp số cộng. Xét một cấp số cộng x, $x+d$, $x+2d$, ..., $x+17d$, trong đó x, $d > 0$ và $x + 17d \leq 2009$. Tức là $d \leq \frac{2009-x}{17}$. Do x là một số bất kì trong $[1, 2009]$, nên bất đẳng thức của d cho ta

$$a \leq \sum_{k=1}^{2009} \frac{2009-k}{17} = \frac{2009 \cdot 2010}{17 \cdot 2} < 2^{17}.$$

Điều kiện $a < 2^{17}$ được thỏa mãn và phép chứng minh kết thúc.

Bình luận. Phiên bản đầu tiên của bài toán này xuất hiện trong IMO Shortlist 1987 do Romania đề nghị, sau đó được chọn là bài 6 (bài khó nhất) của German TST 1988. Bài toán gốc được phát biểu như sau: Chứng minh rằng có thể tô màu các số nguyên dương từ 1 đến 1987 bởi bốn màu sao cho mỗi số được tô bởi đúng một màu và không tồn tại bất kì cấp số cộng nào chứa 10 số cùng màu.

Các bạn có thể tham khảo lời giải của bài này trong cuốn IMO Compendium (trang 496 - 497) hoặc Polya's Footsteps (trang 146 - 147) (tuy nhiên cũng khá giống với lời giải ở trên).

Bài 6.14. *Tập hợp $A \subset \mathbb{R}$ được gọi là có tính chất T nếu A có không ít hơn bốn phần tử và $ab + cd$ thuộc A với mọi a, b, c, d phân biệt thuộc A.*

(a) Hãy chỉ ra tập hợp A gồm bốn phần tử, có tính chất T.

(b) Có hay không tập hợp $A \subset (0, +\infty)$ gồm bốn phần tử và có tính chất T.

(Đại học Sư phạm)

Lời giải.

Bài 6.15. *Cho số nguyên dương $n > 10$. Tìm $m \in \mathbb{N}^*$ lớn nhất thỏa mãn điều kiện: Tồn tại m tập con A_j của tập $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$, mỗi tập con gồm n phần tử sao cho $|A_i \cap A_j \cap A_k| \leq 1$ với mọi $1 \leq i < j < k \leq n$.*

(Đại học Khoa học tự nhiên)

Lời giải. Quá trình chứng minh được thực hiện theo bốn bước như sau.

+ *Bước 1.* $m \leq 8$. Để có điều này, ta sẽ chứng minh mỗi phần tử thuộc vào không quá bốn tập hợp. Ngược lại, giả sử tồn tại một phần tử (kí hiệu là 1) thuộc vào năm tập hợp khác nhau (kí hiệu là $A_1, A_2, \ldots, A_5$). Xét các tập $B_i = A_i \setminus \{1\}$. Khi đó, theo giả thiết ta được $|B_i \cap B_j \cap B_k| = 0$ với mọi $1 \leq i < j < k \leq 5$, tức mỗi phần tử từ 2 đến $2n$ chỉ thuộc vào nhiều nhất hai tập B. Do vậy số phần tử tối đa của năm tập này là $2(2n-1)$. (1)

Mặt khác, $|B_i| = n - 1$, nên năm tập này có tổng số phần tử là $5(n-1)$. (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra $5(n-1) \leq 2(2n-1)$, hay $n \leq 3$ (vô lí). Vậy điều giả sử là sai, hay mỗi phần tử chỉ thuộc vào tối đa bốn tập hợp. Như vậy, m tập hợp có tối đa $8n$ phần tử, tức $m \leq 8$.

+ *Bước 2.* $m \leq 6$. Gọi K_4 là số các phần tử thuộc vào đúng bốn tập hợp. Kết hợp với giả thiết cùng với kiểm tra trực tiếp, ta được $k \leq 6$, tức tổng số phần tử của m tập hợp sẽ không vượt quá $6 \cdot 4 + (2n-6) \cdot 3 = 6n+6$. Như thế, $mn \leq 6n+6$, hay $m \leq 6$.

+ *Bước 3.* $m \leq 5$. Định nghĩa K_3 tương tự như K_4. Theo giả thiết, ta có nhận xét: giá trị lớn nhất của K_3 chính là số cách chọn ba số khác nhau trong sáu số từ 1 đến 6 (và do đó, $K_3 \leq C_6^3 = 20$). Do $m \leq 6$ nên $K_4 \leq 3$ (K_4 kí hiệu ở bước 2). Ngoài ra, để ý rằng, nếu có một phần tử i thuộc vào bốn tập hợp (chẳng hạn là A_1, A_2, A_3, A_4), thì sẽ không có phần tử j nào khác thuộc vào (A_i, A_j, A_k) $(1 \leq i < j < k \leq 4)$, tức K_3 phải giảm đi bốn phần tử. Như vậy, tổng số phần tử lớn nhất của các tập hợp sẽ là $4.K_4 + (20-4K_4) \cdot 3 + (2n-20) \cdot 2 \leq 4n+20$, hay $mn \leq 4n+20$. Kết hợp với $n > 10$ (bây giờ mới thấy được tại sao $n > 10$), ta phải có $m \leq 5$.

+ *Bước 4.* $m \leq 4$. Tiếp tục đánh giá tương tự bước 3, ta được

$$mn \leq 4K_4 + (10-4K_4) \cdot 3 + (2n-10) \cdot 2 \leq 4n+10.$$

Từ đó suy ra $m \leq 4$.

Cuối cùng, ta sẽ dựng bốn tập hợp thỏa mãn đề bài. Xét các tập sau đây

$$\begin{aligned} &A_1 = \{1, 2, \ldots, n\}, && A_2 = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}, \\ &A_3 = \{1, 3, \ldots, 2n-1\}, && A_4 = \{2, 4, \ldots, 2n\}, \end{aligned}$$

thì rõ ràng tất cả các điều kiện của bài toán được thỏa mãn. Vậy giá trị lớn nhất của m là 4.

Bình luận. Các bước đánh giá m trong bài này thể hiện vẻ đẹp của toán rời rạc: luôn biến ảo đến khó lường, và luôn phải nhạy cảm để phát hiện những mấu chốt cuối cùng. Điều để lại ấn tượng nhiều nhất khi làm bài này là việc sử dụng các bất đẳng thức yếu hơn để chứng minh các bất đẳng thức mạnh hơn - một điều không hề thường gặp trong các bài toán của chúng ta, cũng là thử thách cho sự kiên trì và nhạy bén trong tất cả các tình huống có thể xảy ra.

Bài này được ra trong đề thi APMC 2001 (Austrian-Polish Mathematical Competition).

Bài 6.16. *Cho* $A = \{1, 2, \ldots, 2n\}$. *Một tập con của* A *được gọi là tốt nếu nó có đúng hai phần tử* x, y *và* $|x-y| \in \{1, n\}$. *Tìm số các tập hợp* $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ *thoả mãn điều kiện* A_i *là tập con tốt với mọi* $i = 1, 2, \ldots, n$ *và* $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A$.

(Phổ thông Năng khiếu)

Lời giải. Từ giả thiết, ta sẽ viết lại bài toán như sau (các bạn tự kiểm tra tính tương đương của bài toán này so với bài ban đầu): "Cho một hình chữ nhật kích thước $2 \times n$ được chia thành các ô vuông đơn vị. Đánh số các ô từ trái qua phải là $1, 2, \ldots, n$ (hàng 1) và $n+1, n+2, \ldots, 2n$ (hàng 2). Lát chúng bằng các quân domino 1×2 sao cho chúng phủ kín hình chữ nhật và không có hai quân nào đè lên nhau. Ngoài ra, với n lẻ, ta được bổ sung thêm một quân domino "đặc biệt" có thể phủ kín hai ô n và $n+1$. Đếm số cách lát thỏa mãn đề bài".

Với bài toán này, xét S_n là số cách lát thỏa mãn đề bài với hình chữ nhật kích thước $2 \times n$. Ta sẽ tìm cách xây dựng công thức truy hồi cho S_n.

Giả sử ta đã lát được hình chữ nhật $2 \times (n+1)$ bằng các quân domino. Xét quân domino phủ lên ô vuông n. Có ba khả năng xảy ra.

+ *Khả năng 1.* Quân domino đó phủ lên hai ô $(n,\ 2n)$. Rõ ràng phần còn lại là một hình chữ nhật kích thước $2 \times n$, và số cách lát trong tình huống này là S_n.

+ *Khả năng 2.* Quân domino đó phủ lên hai ô $(n,\ n+1)$. Như vậy, buộc phải có một quân domino phủ lên hai ô $(2n-1,\ 2n)$ và khi đó, phần còn lại là một hình chữ nhật kích thước $2 \times (n-1)$. Tức số cách lát trong tình huống này là S_{n-1}.

+ *Khả năng 3.* Quân domino đó phủ lên hai ô $(n,\ n+1)$ (với n lẻ). Khi đó, phần còn lại chỉ có thể lát được bằng các quân domino nằm ngang (nếu có một quân domino nào nằm dọc thì nó sẽ chia hình chữ nhật thành hai phần, mỗi phần có một số lẻ ô chưa được lát (do quân domino "đặc biệt" gây ra)). Tức trong trường hợp này chỉ có một cách lát duy nhất.

Như vậy ta xây dựng được công thức truy hồi như sau

> $S_{2k} = S_{2k-1} + S_{2k-2} - 1$ (lưu ý rằng khi n chẵn thì không có quân domino "đặc biệt" nên phải bớt đi một cách của S_{2k-1}).
>
> $S_{2k+1} = S_{2k} + S_{2k-1}$ (lập luận tương tự với quân domino "đặc biệt").

Và bằng quy nạp ta sẽ thu được $S_{2k} = F_{2k}$, $S_{2k+1} = F_{2k+1} + 1$, trong đó F_k là số Fibonacci thứ k của dãy Fibonacci được xác định bởi công thức

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Cuối cùng ta được công thức tổng quát

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] + \frac{1-(-1)^n}{2}.$$

Bình luận. Đây chỉ là biến thể của một bài toán quen thuộc: "Có bao nhiêu cách lát đường đi $2 \times n$ bằng các quân domino?". Tuy nhiên cách phát biểu làm cho bài toán khó hình dung hơn. Đây cũng là một đặc điểm rất điển hình của bài toán tổ hợp: cùng một bài toán có thể có nhiều cách phát biểu khác nhau, và quan trọng là ta phải tìm được cách phát biểu thuận lợi cho lời giải.

Phần II

Một số bài giảng toán

Chương 7

Giải phương trình hàm bằng cách lập phương trình

"Cuộc sống là chuỗi những phương trình mà ta kiếm tìm lời giải."

[1][2]Giải bài toán bằng cách lập phương trình và hệ phương trình là một phương pháp thông dụng trong các bài toán đại số. Ý tưởng là để tìm một ẩn số nào đó, ta đưa vào các ẩn số phụ, sử dụng các dữ kiện đã cho tạo ra mối liên hệ giữa các ẩn số đó (các phương trình), giải hệ phương trình, tìm ra giá trị của ẩn số cần tìm. Phương pháp tương tự cũng có thể áp dụng cho các bài toán hình học tính toán (chẳng hạn bài toán giải tam giác, tứ giác), các bài toán đếm (phương pháp dãy số phụ).

Trong bài này, chúng ta đề cập tới phương pháp lập phương trình, hệ phương trình để giải các bài toán phương trình hàm. Ý tưởng chung cũng là để tìm một giá trị $f(x)$ hoặc $f(a)$ nào đó, ta sử dụng phương trình hàm để tìm ra mối liên kết giữa các đại lượng, nói cách khác, tạo ra các phương trình số. Giải các phương trình số này, ta có thể tìm ra $f(x)$ hoặc $f(a)$ với a là một giá trị nào đó.

Với những phương trình hàm có hai (hoặc nhiều hơn) phương trình điều kiện, ta có thể tìm cách kết hợp các phương trình đó để tìm ra $f(x)$. Phương pháp cơ bản vẫn là tạo ra các mối liên kết, hay các phương trình bằng cách tính một giá trị bằng hai cách khác nhau.

Ví dụ 7.1. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện*

(i) $f(-x) = -f(x)$ *với mọi x thuộc* $\mathbb{R}$;

[1]Bài viết được viết bởi TS Trần Nam Dũng.

[2]Trích bài viết Giải phương trình hàm bằng cách lập phương trình, Kỷ yếu Hội nghị Khoa học kỷ niệm 25 seminar Giải tích và Toán sơ cấp, Bắc Giang 11/2009.

(ii) $f(x+1) = f(x) + 1$ *với mọi* x *thuộc* $\mathbb{R}$;

(iii) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}$ *với mọi* x *khác* 0.

Lời giải. Tất cả các điều kiện đều trên một biến x. Trong trường hợp này, ta có thể dùng một chút khái niệm về đồ thị để hiểu con đường đi đến lời giải. Ta xem các số thực như các đỉnh của một đồ thị. Đỉnh x sẽ được nối với các đỉnh $x+1$, $-x$, $\frac{1}{x}$. Các điều kiện đề bài sẽ cho chúng ta các mối liên hệ giữa giá trị của hàm số tại các đỉnh được nối bởi một cạnh. Nếu chúng ta tìm được một chu trình thì một cách tự nhiên, chúng ta sẽ có một phương trình (để tránh hàm số có hai giá trị khác nhau).

Ta thử tìm một chu trình như vậy

$$x \to x+1 \to \frac{1}{x+1} \to -\frac{1}{x+1} \to 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} \to \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \to \frac{1}{x} \to x.$$

Đặt $y = f(x)$ thì từ chu trình ở trên, ta lần lượt có

$$f(x+1) = y+1, \quad f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{y+1}{(x+1)^2}, \quad f\left(-\frac{1}{x+1}\right) = -\frac{y+1}{(x+1)^2},$$

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = 1 - \frac{y+1}{(x+1)^2}, \quad f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{1 - \frac{y+1}{(x+1)^2}}{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} = \frac{x^2+2x-y}{x^2},$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x-y}{x^2}, \quad f(x) = 2x - y.$$

Từ đó suy ra $2x˘y = y$, tức là $y = x$. Vậy $f(x) = x$.

Trong lý luận trên, ta cần đến điều kiện x khác 0 và -1. Tuy nhiên từ hai điều kiện $f(-x) = -f(x)$, $f(x+1) = f(x) + 1$ ta dễ dàng suy ra $f(0) = 0$ và $f(-1) = 1$. Vậy $f(x) = x$ là tất các nghiệm của bài toán.

Ví dụ 7.2. *Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *thoả mãn điều kiện*

$$f(x^2 - y) = xf(x) - f(y) \quad \text{với mọi } x,\ y \text{ thuộc } \mathbb{R}.$$

Lời giải. Thay $x = y = 0$ vào phương trình hàm, ta được $f(0) = -f(0)$, suy ra $f(0) = 0$. Thay $y = 0$ vào phương trình hàm, ta được

$$f(x^2) = xf(x). \tag{1}$$

Từ đó suy ra

$$f(x^2-y)=f(x^2)-f(y).$$

Thay $x=0$, ta được $f(-y)=-f(y)$. Thay y bằng $-y$, ta được

$$f(x^2+y)=f(x^2)-f(-y)=f(x^2)+f(y)$$

với mọi x, y. Từ đó, kết hợp với tính chất hàm lẻ, ta suy ra $f(x+y)=f(x)+f(y)$ với mọi x, y. Bây giờ ta có $f((x+1)^2)$ một mặt có thể tính theo công thức (1), tức là bằng $(x+1)f(x+1)=(x+1)[f(x)+f(1)]$. Mặt khác, ta có thể khai triển

$$f((x+1)^2)=f(x^2+2x+1)=f(x^2)+2f(x)+f(1)=xf(x)+2f(x)+f(1).$$

Từ đó ta được phương trình $(x+1)[f(x)+f(1)]=xf(x)+2f(x)+f(1)$, suy ra $f(x)=f(1)x$. Đặt $f(1)=a$, ta được $f(x)=ax$. Thử lại vào phương trình ta thấy nghiệm đúng.

Vậy $f(x)=ax$ với $a\in\mathbb{R}$ là tất cả các nghiệm của bài toán.

Phương pháp tạo ra các mối liên kết cũng có thể áp dụng hiệu quả trong các bài toán phương trình hàm trên $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$. Ta xem xét một số ví dụ.

Ví dụ 7.3. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ thoả mãn các điều kiện*

(i) $f(x+1)=f(x)+1$ *với mọi x thuộc $\mathbb{Q}^+$;*

(ii) $f(x^2)=f^2(x)$ *với mọi x thuộc $\mathbb{Q}^+$.*

Lời giải. Từ điều kiện (ii), ta suy ra được $f(1)=1$. Sử dụng kết quả này kết hợp với điều kiện (i) ta dễ dàng suy ra $f(n)=n$ với mọi n thuộc $\mathbb{Z}^+$ và $f(r+n)=f(r)+n$ với mọi r thuộc $\mathbb{Q}^+$ và n thuộc $\mathbb{Z}^+$. Bây giờ ta tính $f(r)$ với $r=\dfrac{p}{q}$, p, $q\in\mathbb{Z}^+$. Ý tưởng ta sẽ tính $f((r+q)^2)$ theo $f(r)$ bằng hai cách. Trước hết

$$f((r+q)^2)=f^2(r+q)=(f(r)+q)^2. \tag{1}$$

Mặt khác

$$f((r+q)^2)=f(r^2+2p+q^2)=f(r^2)+2p+q^2=f^2(r)+2p+q^2. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $f^2(r)+2qf(r)+q2=f^2(r)+2p+q^2$, do đó $f(r)=\dfrac{p}{q}=r$.

Vậy $f(r)=r$ với mọi r thuộc $\mathbb{Q}^+$.

Ví dụ 7.4. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sao cho*

$$f(m^2+n^2) = f^2(m) + f^2(n) \quad \text{với mọi } m,\ n \text{ thuộc } \mathbb{N}.$$

Lời giải. Cho $m = n = 0$, ta được $f(0) = 2f^2(0)$, suy ra $f(0) = 0$. Cho $m = 1, n = 0$, ta được $f(1) = 0$ hoặc $f(1) = 1$. Ta xét trường hợp $f(1) = 1$, trường hợp $f(1) = 0$ xét tương tự. Với $f(1) = 1$, ta lần lượt tính được

$$f(2) = f(1^2+1^2) = f^2(1) + f^2(1) = 2,$$
$$f(4) = f(2^2+0^2) = f^2(2) + f^2(0) = 4,$$
$$f(5) = f(2^2+1^2) = f^2(2) + f^2(1) = 5.$$

Nhưng làm sao để tính, chẳng hạn $f(3)$? Rõ ràng $f(3)$ không thể tính được theo sơ đồ trên được, vì 3 không biểu diễn được dưới dạng tổng của hai bình phương.

Ta nhớ lại một bài toán lớp 3. Có một cái cân đĩa với hai quả cân 1kg, 5kg và một bao đường nặng 10kg. Hãy cân ra 7kg đường bằng một lần cân. Rõ ràng, với cách cân thông thường thì ta chỉ cân được 1kg đường, 4kg đường $(5-1)$, 5kg đường và 6kg đường. Tuy nhiên, nếu tinh ý một chút, ta có thể có phương án cân được 7kg đường như sau: Đặt vào đĩa bên trái quả cân 1kg và 10kg đường, đĩa bên phải là quả cân 5kg, sau đó chuyển dần đường từ bên trái sang bên phải sao cho cân cân bằng, khi đó số đường còn lại ở đĩa bên phải là 7kg!

Bây giờ ta cũng thủ thuật tương với bài toán này. Ta không tính được trực tiếp $f(3)$ nhưng ta lại có $f^2(5) = f(25) = f(3^2+4^2) = f^2(3) + f^2(4)$. Từ đó ta được $f(3) = 3$.

Tương tự như vậy ta có thể tính được $f(6)$ nhờ vào đẳng thức $6^2+8^2 = 10^2$, trong đó $f(8) = f(2^2+2^2) = 2f^2(2) = 8$, $f(10) = f(3^2+1^2) = f^2(3) + f^2(1) = 10$.

Tiếp tục, để tính $f(7)$, ta để ý $7^2+1^2 = 50 = 5^2+5^2$, từ đó $f(7) = 7$. Cũng như thế, do $11^2+2^2 = 10^2+5^2$ nên ta suy ra $f(11) = 11$.

Cách làm này có thể tổng quát hoá như thế nào? Ý tưởng là nếu $m^2+n^2 = p^2+q^2$ (1) thì $f^2(m) + f^2(n) = f^2(p) + f^2(q)$. Do đó nếu ta đã tính được $f(n)$, $f(p)$, $f(q)$ thì $f(m)$ cũng sẽ tính được.

Làm thế nào để có được những đẳng thức dạng (1) ở dạng tổng quát, cho phép ta chứng minh $f(n) = n$ với mọi n bằng quy nạp? Chú ý rằng (1) có thể viết lại thành $(m-p)(m+p) = (q-n)(q+n) = N$. Do đó nếu chọn những số N có hai cách phân tích thành tích của những số có cùng tính chẵn lẻ, ta sẽ tìm được nghiệm cho (1). Chọn $N = 8k = 2\cdot 4k = 4\cdot 2k$ và $N = 16k = 4\cdot 4k = 8\cdot 2k$, ta được hệ

$$m-p = 2, \quad m+p = 4k, \quad q-n = 4, \quad q+n = 2k,$$

và

$$m-p=4, \quad m+p=4k, \quad q-n=8, \quad q+n=2k.$$

Từ đó được các hằng đẳng thức tương ứng

$$(2k+1)^2+(k-2)^2=(2k-1)^2+(k+2)^2,$$

và

$$(2k+2)^2+(k-4)^2=(2k-2)^2+(k+4)^2.$$

Từ hai đẳng thức này, với chú ý là ta đã chứng minh được $f(n)=n$ với $n=0$, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ta dễ dàng chứng minh bằng quy nạp được rằng $f(n)=n$ với mọi $n\in\mathbb{N}$.

Trường hợp $f(1)=0$, cũng bằng cách lý luận nêu trên ta suy ra $f(n)=0$ với mọi n thuộc N.

Bài tập

1. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ thoả mãn các điều kiện
   (i) $f(x+1)=f(x)+1$ với mọi x thuộc $\mathbb{Q}$;
   (ii) $f(x^3)=f^3(x)$ với mọi x thuộc $\mathbb{Q}$.
2. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\backslash 0\to\mathbb{R}$ thoả mãn đồng thời các điều kiện
   (i) $f(1)=1$;
   (ii) $f\left(\dfrac{1}{x+y}\right)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)+f\left(\dfrac{1}{y}\right)$ với mọi x, y mà $xy(x+y)\neq 0$;
   (iii) $(x+y)f(x+y)=xyf(x)f(y)$ với mọi x, y mà $xy(x+y)\neq 0$.
3. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn
   $$f(x^5-y^5)=x^2f(x^3)-y^2f(y^3) \quad \text{với mọi } x,\ y \text{ thuộc } \mathbb{R}.$$
4. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ thoả mãn điều kiện
   $$f(a^3+b^3+c^3)=f^3(a)+f^3(b)+f^3(c) \quad \text{với mọi } a,\ b,\ c \text{ thuộc } \mathbb{Z}.$$
5. Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện
   (i) $f(x^2)=f^2(x)$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$;
   (ii) $f(x+1)=f(x)+1$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.
   Chứng minh rằng $f(x)=x$.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu, *Phương trình hàm*, Nhà xuất bản Giáo dục 2001.

[2] Nguyễn Trọng Tuấn, *Bài toán hàm số qua các kỳ thi Olympic*, Nhà xuất bản Giáo dục 2005.

[3] Phan Đức Chính, Lê Đình Thịnh, Phạm Tấn Dương, *Tuyển tập các bài toán sơ cấp*, Tập 1, Đại số, Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp 1977.

[4] Phan Huy Khải, *Các bài toán về hàm số*, Nhà xuất bản Giáo dục 2007.

[5] B. J. Venkatachala, *Functional Equations – A Problem Solving Approach*, PRISM 2002.

[6] Pierre Bornsztein, Mobinool Omarjee, *Cours – Equations fonctionelles*, Electronic Edition 2003.

[7] Titu Andreescu, Iurie Boreico, *Functional Equations*, Electronic Edition 2007.

Chương 8

Dãy truy hồi loại $u_{n+1} = f(u_n)$

[1]

Cách tính chất chung

Cho $\mathbb{I}$ là một khoảng đóng của $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ là một ánh xạ.

(a) Giả sử f đơn điệu trên $\mathbb{I}$.

+ *Trường hợp f tăng trên* $\mathbb{I}$. Vì với mọi n nguyên dương thì $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$ nên ta thấy rằng $u_{n+1} - u_n$ cùng dấu với $u_1 - u_0$. Chính xác hơn,

$$u_0 \leq u_1 \Rightarrow u_1 \leq u_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow \cdots$$

$$u_0 \geq u_1 \Rightarrow u_1 \geq u_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow u_n \geq u_{n+1} \Rightarrow \cdots$$

Như vậy (u_n) đơn điệu và có chiều biến thiên phụ thuộc vào vị trí tương đối của u_0 và u_1. Trong mỗi ví dụ chỉ còn phải xem (u_n) bị chặn dưới hay bị chặn trên.

+ *Trường hợp f giảm trên* $\mathbb{I}$. Ánh xạ $f \circ f$ tăng trên $\mathbb{I}$, vậy theo trường hợp trên, các dãy con với chỉ số chẵn và chỉ số lẻ đều đơn điệu (và có chiều ngược nhau).

(b) Giả sử f liên tục trên $\mathbb{I}$. Nếu $u_n \to L$ thì L thuộc $\mathbb{I}$, chuyển qua giới hạn khi n dần đến vô cùng trong biểu thức $u_{n+1} = f(u_n)$, ta suy ra $f(L) = L$. Thường thì ta có thể giải phương trình $f(L) = L$ (ẩn là L thuộc $\mathbb{I}$) và từ đó xác định được các giới hạn "khả dĩ" của (u_n).

Ta nói một phần tử x của $\mathbb{I}$ là một *điểm bất động* của f khi và chỉ khi $f(x) = x$.

[1] Trích từ Giáo trình Giải tích 1, Jean-Marie Monier, Nhà xuất bản Giáo dục 1999.

Các ví dụ minh họa

Ví dụ 8.1. *Khảo sát sự hội tụ của dãy (u_n) được xác định bởi công thức $u_0 = 1$ và $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2+1}$ với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$*

Lời giải. Trước hết, một phép quy nạp đơn giản cho thấy rằng với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, u_n thuộc $[0, +\infty)$.

Với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - un = -\dfrac{u_n^3}{u_n^2+1} \leq 0$, vậy (u_n) giảm.

Vì (u_n) giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên nó hội tụ đến một số thực L và $L \geq 0$. Chuyển qua giới hạn khi n tiến tới $+\infty$, ta có $L = \dfrac{L}{L^2+1}$, từ đó $L = 0$. Cuối cùng ta được $u_n \to 0$.

Ví dụ 8.2. *Khảo sát sự hội tụ của dãy (u_n) được xác định bởi công thức $u_0 > 0$ và $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a^2}{u_n}\right)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, trong đó a là một hằng số dương cho trước.*

Lời giải. Trước hết, một phép quy nạp đơn giản cho thấy với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, u_n tồn tại và thuộc $(0, +\infty)$.

Điểm bất động duy nhất thuộc $(0, +\infty)$ của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a^2}{u_n}\right)$ là $x = a$.

Với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - a = \dfrac{u_n^2 + a^2 - 2au_n}{2u_n} = \dfrac{(u_n - a)^2}{2u_n} \geq 0$.

Với mọi n thuộc $\mathbb{N}^*$, $u_n + 1 - u_n = \dfrac{a^2 - u_n^2}{2u_n} \leq 0$.

Vậy (u_n) giảm và bị chặn dưới bởi a nên hội tụ đến một số thực L thuộc $[L, +\infty)$, số thực đó chỉ có thể là a theo lời giải của $f(x) = x$. Cuối cùng $u_n \to a$.

Ví dụ 8.3. *Khảo sát sự hội tụ của dãy (u_n) được xác định bởi công thức $u_0 > 0$ và $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+8}{6}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.*

Lời giải. Phép quy nạp đơn giản chứng tỏ rằng với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Phép giải phương trình $f(x) = x$ với x thuộc $\mathbb{R}^+$ cho thấy f có hai điểm bất động là 2 và 4. Khảo sát hàm số $f(x)$, ta thấy f tăng trên $(0, +\infty)$ và các khoảng đóng $[0, 2]$, $[2, 4]$, $[4, +\infty)$ đều ổn định đối với f (nghĩa là $f([0, 2])$ thuộc $[0, 2]\ldots$).

Vì f tăng, (u_n) đơn điệu nên chiều biến thiên phụ thuộc vào dấu của $u_1 - u_0$. Vì $f(x) - x = \dfrac{(x-2)(x-4)}{6}$, nên dấu của $u_1 - u_0$ phụ thuộc vào vị trí tương đối của u_0 so với 2 và 4.

+ *Trường hợp 1.* u_0 thuộc $[0, 2]$. Ở đây $u_1 \geq u_0$, vậy bằng một phép quy nạp đơn giản ta có với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$. Hơn nữa, với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, u_n thuộc $[0, 2]$. Vậy (u_n) tăng và bị chặn trên bởi 2, nên hội tụ đến số thực L thuộc $[0, 2]$. Ta đã thấy L thuộc $\{2, 4\}$. Vậy $L = 2$.

+ *Trường hợp 2.* u_0 thuộc $[2, 4)$. Bằng cách tương tự ta thấy rằng (u_n) giảm và bị chặn dưới bởi 2 nên hội tụ đến một số thực L thuộc $[2, u_0]$ thuộc$[2, 4)$. Ta đã biết L thuộc $\{2, 4\}$, vậy $L = 2$.

+ *Trường hợp 3.* $u_0 = 4$. Dãy (u_n) không đổi và bằng 4, hội tụ đến 4.

+ *Trường hợp 4.* u_0 thuộc $(4, +\infty)$. Ở đây (u_n) tăng. Nếu (u_n) hội tụ đến một số thực L thì ta có $L \geq u_0 > 4$, mâu thuẫn với L thuộc $\{2, 4\}$. Do đó (u_n) tăng và phân kỳ, vậy $u_n \to +\infty$.

Ta nói rằng 2 là *điểm bất động hút* và 4 là *điểm bất động đẩy* của f.

Ví dụ 8.4. *Khảo sát sự hội tụ của dãy (u_n) được xác định bởi công thức $u_0 = 1$ và $u_{n+1} = \dfrac{1}{2+u_n}$ với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$*

Lời giải. Phép quy nạp đơn giản cho thấy rằng với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Cho $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, x \to \dfrac{1}{2+x}$. Phép giải phương trình $f(x) = x$ (với $x > 0$) cho thấy có một và chỉ một điểm bất động, ký hiệu là A và $A = \sqrt{2} - 1$.

Với mọi n thuộc N, ta có

$$|u_{n+1} - A| = \left|\frac{1}{2+u_n} - \frac{1}{2+A}\right| = \frac{|u_n - A|}{(2+u_n)(2+A)} \leq \frac{1}{4}|u_n - A|.$$

Bằng một phép quy nạp đơn giản, ta suy ra với mọi n thuộc $\mathbb{N}$, $|u_n - A| \leq \dfrac{1}{4^n}|u_0 - A|$. Vậy $u_n \to A$.

Ở đây không cần khảo sát các dãy con với chỉ số chẵn và chỉ số lẻ.

Ví dụ 8.5. *Khảo sát sự hội tụ của dãy (u_n) được xác định bởi công thức $u_0 \geq 0$ và $u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n^2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.*

Lời giải. Một phép quy nạp đơn giản chỉ ra rằng $u_n \geq 0$ với mọi n tự nhiên.

Xét $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$ là một hàm liên tục. Ta có với mọi x thuộc $[0, +\infty)$, phương trình $f(x) = x$ chỉ có một nghiệm duy nhất là $x = 1$. Vậy nếu u_n hội tụ thì chỉ có thể hội tụ đến 1.

Ánh xạ f khả vi trên $[0, +\infty)$, $f'(x) = -\dfrac{4x}{(1+x^2)^2} \leq 0$ với mọi x thuộc $[0, +\infty)$, vậy f giảm. Vì $f'(1) = -1$, ta không thể lập luận như trong ví dụ 4.

Ta sẽ chứng minh rằng $u_{2p} \to 1$ và $u_{2p+1} \to 1$. Cho $g = f \circ f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $g(x) = \dfrac{2(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2+4}$. Ta tính

$$g(x) - x = -\frac{(x-1)^3(x^2+x+2)}{(1+x^2)^2+4}.$$

+ *Trường hợp 1.* u_0 thuộc $[0, 1]$. Khi ấy với mọi p thuộc $\mathbb{N}$, u_{2p} thuộc $[0, 1]$ và u_{2p+1} thuộc $[1, +\infty)$. Vậy, với mọi p thuộc N,

$$u_{2p+2} - u_{2p} = g(u_{2p}) - u_{2p} \geq 0, \quad u_{2p+3} - u_{2p+1} = g(u_{2p+1}) - u_{2p+1} \leq 0.$$

Do đó (u_{2p}) và (u_{2p+1}) giảm. Hơn nữa, vì với mọi p thuộc $\mathbb{N}$, $u_{2p} \leq 1 \leq u_{2p+1}$, nên ta suy ra rằng (u_{2p}) hội tụ đến một phần tử L thuộc $[0, +\infty)$ và (u_{2p+1}) hội tụ đến một phần tử L' thuộc $[0, +\infty)$. Vì g liên tục trên $[0, +\infty)$ và vì $x = 1$ là nghiệm thuộc $[0, +\infty)$ duy nhất của phương trình $g(x) = x$, nên ta suy ra $L = L' = 1$. Cuối cùng $u_n \to 1$.

+ *Trường hợp 2.* u_0 thuộc $[1, +\infty)$. Vì $u_1 = f(u_0)$ thuộc $[0, 1]$, ta quy về trường hợp trên (bằng cách thay u_0 bởi u_1) và ta có cùng một kết luận $u_n \to 1$.

Bài tập

1. Khảo sát sự hội tụ của các dãy sau

   (a) $u_0 = 1$ và $u_{n+1} = 1 - \dfrac{2}{u_n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

(b) $u_0 > 0$ và $u_{n+1} = \dfrac{3 + u_n^2}{2(u_n + 1)}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

(c) u_0 tùy ý và $u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

2. Khảo sát dãy (u_n) được xác định bởi

$$u_0 \geq 0, \quad u_{n+1} = \frac{6}{2 + u_n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. Khảo sát các dãy (u_n), (v_n) được xác định bởi

$$u_0 = v_0 = 0, \quad u_{n+1} = \sqrt{3 - v_n}, \quad v_{n+1} = \sqrt{3 - u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Chương 9

Các định lý tồn tại trong giải tích và định lý cơ bản của đại số

[1]Trong bài viết nhỏ này, chúng ta đề cập đến một số định lý cơ bản của giải tích có nội dung tồn tại (tồn tại nghiệm, tồn tại cực trị ...) và cuối cùng, sẽ sử dụng chúng để chứng minh định lý cơ bản của đại số: *một đa thức bậc lớn hơn hay bằng* 1 *có hệ số phức luôn có ít nhất một nghiệm phức.* Cách chứng minh đơn giản, dễ hiểu, không quá hình thức sẽ giúp học sinh hiểu rõ các định lý và không cảm thấy sợ chúng. Chúng ta cũng xem xét một số ứng dụng của các định lý này trong việc giải quyết các bài toán ở bậc phổ thông.

Bổ đề về dãy các đoạn thẳng lồng nhau

Bổ đề đơn giản này đóng một vai trò khá quan trọng trong việc chứng minh các kết quả sâu sắc khác của giải tích. Bổ đề được phát biểu như sau: *Nếu* $[a_1,\, b_1] \subset [a_2,\, b_2] \subset \cdots \subset [a_n,\, b_n] \subset \cdots$ *là dãy các đoạn thẳng lồng nhau có* $d_n = b_n - a_n \to 0$ *thì tồn tại duy nhất một điểm* ξ *thuộc tất cả các đoạn thẳng trên.*

Bổ đề này có thể chứng minh khá dễ dàng dựa vào định lý: *một dãy đơn điệu và bị chặn thì có giới hạn.* Cụ thể, dãy $\{a_n\}$ sẽ là dãy tăng và bị chặn trên, còn dãy $\{b_n\}$ sẽ là dãy giảm và bị chặn dưới. Cả hai dãy này sẽ có cùng giới hạn là điểm ξ.

Định lý về sự tồn tại giới hạn của dãy đơn điệu và bị chặn, về phần mình, lại được chứng minh dựa vào một kết quả cơ bản sau: *một tập hợp các số thực bị chặn trên (hay bị chặn dưới) thì có cận trên đúng (cận dưới đúng).* Ở đây, M được gọi là *cận trên đúng* của tập hợp S nếu:

(1) $x \le M$ với mọi x thuộc S;

[1]Bài viết được viết bởi TS Trần Nam Dũng.

(2) Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại x thuộc S sao cho $x > M - \varepsilon$.

Định lý tưởng chừng như hiển nhiên này là một kết quả rất sâu sắc và không đơn giản chút nào. Ta công nhận định lý này và coi đây là định lý nền tảng của giải tích.

Định lý Cauchy về giá trị trung gian

Định lý Cauchy về giá trị trung gian phát biểu rằng: *một hàm số liên tục trên một đoạn nhận mọi giá trị trung gian.* Điều này có nghĩa rằng nếu hàm số liên tục nhận hai giá trị khác nhau, thì nó nhận mọi giá trị nằm giữa hai giá trị này.

Đồ thị của một hàm số liên tục, nói nôm na có tính chất là nó có thể vẽ mà không dứt nét bút khỏi mặt giấy. Còn định nghĩa chặt chẽ như sau. Ta nói hàm số f liên tục tại điểm x_0, nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho nếu $|x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Hàm số được gọi là liên tục trên một đoạn, nếu nó liên tục tại mọi điểm của đoạn. Từ định nghĩa này suy ra, nếu hàm số khác 0 tại một điểm nào đó, thì nó sẽ giữ nguyên dấu tại một khoảng (hay nửa khoảng, nếu điểm đó là đầu mút của đoạn thẳng) chứa điểm này. Ta chỉ cần đến tính chất này.

Để chứng minh định lý Cauchy, thực chất ta chỉ cần chứng minh: một hàm số liên tục trên một đoạn, nhận ở hai đầu mút các giá trị trái dấu, sẽ nhận giá trị 0 trên đoạn này.

Ta chứng minh định lý Cauchy trong cách phát biểu này, tìm kiếm nghiệm của hàm số bằng phương pháp "chia để trị". Ta chia đoạn thẳng thành hai phần. Nếu như tại điểm này hàm số bằng 0 thì định lý được chứng minh. Nếu như tại điểm này hàm số khác 0, thì trên một trong hai đoạn thẳng, hàm số sẽ nhận các giá trị trái dấu tại hai đầu mút. Ta lại chia đoạn thẳng này làm đôi và cứ tiếp tục như thế. Nếu như trong quá trình thực hiện ta không gặp một điểm giữa có giá trị hàm số tại đó bằng 0 thì ta sẽ thu được dãy các đoạn thẳng lồng nhau $[a_1, b_1] \subset [a_2, b_2] \subset \cdots \subset [a_n, b_n] \subset \cdots$ có độ dài dần đến 0. Theo bổ đề về các đoạn thẳng lồng nhau, tồn tại điểm ξ thuộc tất cả các đoạn thẳng. Theo tính chất về bảo toàn dấu, giá trị hàm số tại ξ phải bằng 0. Định lý Cauchy được chứng minh.

Từ định lý Cauchy suy ra một kết quả đơn giản nhưng khá quan trọng về nghiệm của đa thức: *Mọi đa thức bậc lẻ với hệ số thực đều có ít nhất một nghiệm thực.* Thật vậy, mọi đa thức là hàm số liên tục trên toàn trục số. Giả sử $f(x) = x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1x + a_0$. Khi đó, với x dương, ta có

$$f(x) = x^{2n+1}\left(1 + \frac{a_{2n}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^{2n+1}}\right).$$

Như thế, với x đủ lớn, $f(x)$ sẽ lớn hơn $\frac{x^{2n+1}}{2}$, tức là $f(x)$ là một số dương. Hoàn toàn tương tự, có thể chứng minh rằng với x đủ nhỏ thì $f(x)$ sẽ âm. Như thế, theo định lý Cauchy về giá trị trung gian, $f(x)$ có nghiệm.

Định lý Cauchy còn có một hệ quả khác: *một hàm liên tục từ đoạn thẳng vào chính nó có điểm bất động* (nghĩa là: nếu f là một hàm liên tục trên $[a, b]$, $a < b$ và $a \leq f(x) \leq b$ với mọi x thuộc $[a, b]$ thì tồn tại điểm x_0 thuộc $[a, b]$ sao cho $f(x_0) = x_0$). Bạn đọc có thể tự chứng minh kết quả này.

Định lý Veierstrass về cực trị của hàm số liên tục trên một đoạn

Định lý Veiestrass và các mở rộng của nó có nhiều ứng dụng trong toán học. Định lý này được phát biểu khá đơn giản như sau: *hàm liên tục trên một đoạn thẳng sẽ đạt được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn này.*

Ta sẽ chứng minh định lý này. Giả sử $f(x)$ là hàm liên tục trên một đoạn thẳng nào đó. Không mất tính tổng quát, giả sử đó là đoạn $\mathbb{I} = [0, 1]$. Trước hết ta chứng minh rằng f bị chặn trên $\mathbb{I}$. Giả sử ngược lại và f có thể nhận trên $\mathbb{I}$ các giá trị lớn tuỳ ý. Khi đó với mọi số nguyên dương n, tồn tại điểm x_n thuộc $\mathbb{I}$ sao cho $f(x_n) > n$. Như vậy trên $\mathbb{I}$ ta xây dựng được một dãy vô hạn các điểm. Chia đoạn thẳng ra làm đôi. Trên một trong hai đoạn thẳng sẽ có chứa vô số điểm. Lại chia đoạn đó ra làm đôi và cứ tiếp tục như thế. Theo bổ đề về dãy các đoạn thẳng lồng nhau, tồn tại một điểm thuộc vào tất cả các đoạn thẳng này. Từ định nghĩa liên tục suy ra trên một đoạn nhỏ chứa điểm này, hàm số bị chặn, nhưng điều này trái với cách xây dựng điểm này.

Ta đã chứng minh rằng $f(x)$ bị chặn trên. Giả sử f không đạt giá trị lớn nhất. Điều này có nghĩa là tồn tại số M sao cho $f(x) < M$ với mọi x thuộc $\mathbb{I}$, đồng thời $f(x)$ nhận các giá trị gần M tuỳ ý. Với mỗi số nguyên dương m, tồn tại điểm y_m sao cho $f(y_m) > M - \frac{1}{m}$. Ta lại xây dựng một tập hợp vô hạn các điểm. Tiếp tục chia đoạn thẳng $\mathbb{I}$ làm hai phần và làm giống như phần chứng minh tính bị chặn của $f(x)$ ở trên. Và cũng như ở trên, ta tìm được điểm ζ thuộc vào tất cả các đoạn thẳng. Theo cách xây dựng và từ định nghĩa liên tục, ta thấy $f(\zeta)$ phải bằng M. Tương tự chứng minh cho giá trị nhỏ nhất. Định lý Veierstrass được chứng minh.

Mở rộng định lý Veierstrass

Xét hàm hai biến $f = f(x_1, x_2)$, trong đó x_1, x_2 là các số thực. Ví dụ một hàm như vậy là hàm số $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ - khoảng cách từ điểm có toạ độ (x_1, x_2) trên mặt phẳng đến gốc toạ độ. Khoảng cách $d((x_1, x_2), (x'_1, x'_2))$ giữa hai điểm (x_1, x_2) và (x'_1, x'_2) trên mặt phẳng cho bởi công thức $\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}$. Hàm hai biến f được gọi là liên tục tại điểm (x^*_1, x^*_2) nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số $\delta > 0$ sao cho nếu $d((x_1, x_2), (x^*_1, x^*_2)) < \delta$ thì $|f(x_1, x_2) - f(x^*_1, x^*_2)| < \varepsilon$. Hàm số được gọi là liên tục trên hình vuông $\max\{|x_1|, |x_2|\} \leq a$, nếu nó liên tục tại mọi điểm của hình vuông này.

Ta sẽ cần đến một mở rộng sau đây của định lý Veierstrass: *hàm số liên tục trên hình vuông đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.* Cách chứng minh định lý này hoàn toàn tương tự như cách chứng minh nêu trên, điểm khác biệt duy nhất là cần phải chia hình vuông thành bốn phần.

Và bây giờ, phép chứng minh định lý cơ bản của đại số sẽ được chia thành hai phần. Trong phần đầu, ta sẽ lặp lại lý luận nêu trên để chứng minh mođun của đa thức đạt giá trị nhỏ nhất của nó. Và tiếp theo, thay cho định lý Cauchy về giá trị trung gian, ta sẽ sử dụng bổ đề D'Alamber.

Định lý cơ bản của đại số

Trước hết ta cần xây dựng mặt phẳng phức. Một cách hình thức ta đưa vào "số" i, có bình phương bằng -1. Số này không có trên đường thẳng thực. Ta vẽ trên mặt phẳng hai đường thẳng: một đường nằm ngang (mà ta gọi là đường thẳng thực) và một đường khác đi qua gốc toạ độ và vuông góc với đường nằm ngang (mà ta gọi là đường thẳng ảo). Số i, nằm ở trên đường thẳng ảo nằm ở nửa mặt phẳng phía trên và cách gốc toạ độ khoảng cách 1, được gọi là đơn vị ảo.

Như vậy, số 1 được cho tương ứng với véc-tơ $(1, 0)$ và số i - véc-tơ $(0, 1)$. Điểm (a, b) của mặt phẳng tương ứng với số phức $z = a + bi$. Các số phức có thể cộng và nhân theo quy tắc tự nhiên, giống như số thực: nếu $z = a+bi$, $z' = a' + b'i$, thì $z+z' = (a+a') + (b+b')i$, $z \cdot z' = (a+bi)(a'+b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$. Khoảng cách từ điểm $z = a + bi$ đến 0 (tức là số $\sqrt{a^2+b^2}$) được gọi là mođun của số z và ký hiệu là $|z|$. Đa thức bậc n là biểu thức có dạng $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$. Các hệ số a_k là các số phức (trường hợp đặc biệt là các số thực). Đa thức $z^2 - 2$ có hai nghiệm thực là $\pm\sqrt{2}$, đa thức $z^2 + 1$ có hai nghiệm ảo là $\pm i$, còn đa thức $iz + 1$ có một nghiệm là i.

Định lý cơ bản của đại số. *Đa thức bậc $n \geq 1$ có nghiệm phức.*

Chứng minh. Giả sử $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ là đa thức bậc n với hệ số phức $(n \geq 1)$, trong đó $a_n \neq 0$. Xét hàm hai biến $f(z) = |p(z)|$. Hàm số này liên tục. Ta sẽ chứng minh rằng hàm số này "tăng đến vô cùng". Thật vậy

$$f(z) = |a_n||z|^n \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \cdots + \frac{a_0}{a_n z^n} \right|.$$

Nếu như giá trị $|z|$ đủ lớn thì mô-đun của $\frac{a_{n-1}}{a_n z} + \cdots + \frac{a_0}{a_n z^n}$ nhỏ hơn $\frac{1}{2}$ và nghĩa là $f(z) \geq \frac{|a_n||z|^n}{2}$, như vậy (với $|z|$ đủ lớn bằng R) $f(z)$ sẽ lớn hơn $f(0)$. Từ đó suy ra rằng giá trị nhỏ nhất của f không thể đạt được bên ngoài đường tròn bán kính R tâm ở 0 và, hơn thế, không thể đạt được ở ngoài hình vuông bất kì chứa đường tròn này. Nhưng theo định lý Veierstrass, hàm số liên tục f phải đạt giá trị nhỏ nhất trong hình vuông này. Giả sử điểm đó là z^*. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $z^* = 0$ (nếu không đổi biến từ z thành $z - z^*$). Như thế, giả sử f đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm 0.

Nếu $f(0) = 0$ thì định lý được chứng minh. Ta chứng minh rằng trường hợp $f(0) > 0$ không thể xảy ra.

Bổ đề D'Alamber. *Giá trị nhỏ nhất của mô-đun một đa thức đại số bậc $n \geq 0$, đạt tại điểm* 0 *không thể khác* 0.

Thật vậy, giả sử ngược lại $f(0) = |a_0| > 0$ và giả sử $k \geq 1$ là chỉ số nhỏ nhất sao cho a_k khác 0. Gọi ξ là một nghiệm của phương trình $a_0 + a_k z^k = 0$. Đặt $t a_{k+1} \xi^{k+1} + \cdots + t^{n-k} a_n \xi^n = g(t)$ thì lúc đó

$$\begin{aligned} |p(t\xi)| &= |a_0 + a_k t^k \xi^k + a_{k+1} t^{k+1} \xi^{k+1} + \cdots + a_n t^n \xi^n| \\ &= |a_0 - t^k [a_0 + g(t)]| < |a_0| = |p(0)|, \end{aligned}$$

vì với $t > 0$ đủ nhỏ, $|g(t)| < \frac{a_0}{2}$. Mâu thuẫn. Như vậy bổ đề được chứng minh và nghĩa là định lý cơ bản của đại số đã được chứng minh.

Định lý cơ bản của đại số, còn được gọi là định lý Gauss - D'Alamber là một trong những kết quả quan trọng và nổi tiếng nhất trong toán học. Có rất nhiều cách chứng minh cho định lý này và trên đây là một trong những cách chứng minh sơ cấp nhất, thông qua các định lý liên quan đến tính chất của hàm số liên tục, cụ thể là định lý Cauchy và định lý Veierstrass. Tiếp theo, chúng ta sẽ tiếp tục tìm thấy các ứng dụng của định lý Veirstrass trong việc chứng minh các kết quả cơ bản khác của giải tính liên quan đến phép tính vi phân.

Bổ đề Fermat

Bổ đề Fermat cùng với định lý Veierstrass là cơ sở của chuỗi các định lý đẹp đẽ và sâu sắc liên quan đến đạo hàm và vi phân. Định lý được phát biểu như sau: *nếu* *hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên khoảng (a, b) và đạt cực trị tại điểm $\xi \in (a, b)$ thì $f'(\xi) = 0$.*

Rõ ràng ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp ξ là điểm cực tiểu. Để chứng minh bổ đề Fermat, ta xét đạo hàm bên trái và đạo hàm bên phải của f tại điểm ξ:

$$f'(\xi^+) = \lim_{x\to\xi^+} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}, \quad f'(\xi^-) = \lim_{x\to\xi^-} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$

Chú ý rằng, do f đạt cực tiểu tại điểm ξ nên với x đủ gần ξ thì $f(x) - f(\xi)$ luôn không âm. Vì vậy giá trị dưới dấu lim ở đẳng thức thứ nhất luôn không âm, còn ở đẳng thức thứ hai luôn không dương. Vì thế đạo hàm bên phải tại điểm ξ không âm, còn đạo hàm bên trái tại điểm ξ luôn không dương. Vì f khả vi nên hai đạo hàm này bằng nhau và vì thế bắt buộc phải bằng 0. Bổ đề Fermat được chứng minh.

Từ kết quả này, ta sẽ lần lượt thu được các định lý Rolle, Langrange và Cauchy dưới đây.

Các định lý Rolle - Lagrange - Cauchy

Định lý Rolle. *Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b). Ngoài ra, giả sử rằng $f(a) = f(b)$. Khi đó trên khoảng (a, b) tồn tại điểm ξ sao cho $f'(\xi) = 0$.*

Nói một cách khác, giữa hai giá trị bằng nhau của một hàm khả vi luôn có nghiệm của đạo hàm hàm số này.

Để chứng minh định lý Rolle, trước hết ta áp dụng định lý Veirestrass cho hàm liên tục $f(x)$. Hàm số này đạt giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m trên đoạn $[a, b]$. Có thể xảy ra hai trường hợp.

(a) $M = m$. Khi đó $f(x)$ là hàm hằng trên $[a, b]$ và với mọi ξ thuộc (a, b), $f'(\xi) = 0$.

(b) $M > m$. Do $f(a) = f(b)$ nên một trong hai giá trị M và m phải đạt được tại một điểm ξ thuộc (a, b). Nhưng khi đó, hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại điểm này và theo bổ đề Fermat, ta có $f'(\xi) = 0$.

Như vậy định lý đã được chứng minh.

Từ định lý Rolle, ta suy ra *định lý Lagrange*, hay tương đương là *công thức Lagrange.*

Định lý Lagrange. *Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b). Khi đó tồn tại ξ thuộc (a, b) sao cho*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \textit{hay} \quad f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Công thức đầu tiên có một ý nghĩa hình học đơn giản là trên đường cong $y = f(x)$, giữa hai điểm $A(a,\ f(a))$ và $B(b,\ f(b))$ có một điểm C sao cho tiếp tuyến của đường cong tại C song song với dây cung AB.

Công thức ở dạng thứ hai được gọi là công thức Lagrange về số gia hữu hạn. Nó còn có thể viết dưới dạng

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$$

chính là công thức Taylor khai triển đến bậc thấp nhất. Từ đây cũng suy ra công thức tính gần đúng bằng vi phân:

$$f(x + \Delta x) \sim f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Để chứng minh định lý Lagrange, ta chỉ cần xét hàm số

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

rồi áp dụng định lý Rolle cho hàm số này (do $g(a) = g(b) = f(a)$).

Như vậy, định lý Langrange được chứng minh thông qua định lý Rolle. Mặt khác, định lý Rolle chính là một trường hợp đặc biệt của định lý Lagrange. Định lý sau đây mở rộng định lý Lagrange:

Định lý Cauchy. *Nếu mỗi một trong hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đều liên tục trên $[a,\ b]$, khả vi trên $(a,\ b)$ và ngoài ra $g'(x)$ khác 0 với mọi x thuộc $(a,\ b)$ thì trên $(a,\ b)$ tồn tại điểm ξ sao cho*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Chúng tôi dành việc chứng minh định lý Cauchy cho bạn đọc. Chú ý là định lý Lagrange chính là một trường hợp riêng của định lý Cauchy, khi $g(x) = x$.

Từ các định lý cơ bản trên đây, ta còn suy ra nhiều hệ quả và định lý quan trọng khác như quy tắc L'Hopitale về khử dạng vô định, công thức Taylor ...

Cuối cùng chúng ta xem xét những định lý và bài tập có thể giải quyết được bằng cách áp dụng những định lý này.

Một số định lý và bài tập áp dụng

1. Cho parabol $(P): y = x^2 - 2x$ và ellip $(E): \frac{x^2}{9}x2/9 + y2 = 1$.

    (1) Chứng minh rằng (P) cắt (E) tại bốn điểm phân biệt A, B, C, D.

(2) Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn, tìm tâm và bán kính của đường tròn đó.

(Đề thi Đại học Ngoại thương 1997)

2. Cho hai đa thức $P(x) = 4x^3 - 2x^2 - 15x + 9$ và $Q(x) = 12x^3 + 6x^2 - 7x + 1$.

   (1) Chứng minh rằng mỗi đa thức đã cho đều có ba nghiệm thực phân biệt.

   (2) Ký hiệu α và β tương ứng là nghiệm lớn nhất của $P(x)$ và $Q(x)$. Chứng minh rằng $\alpha^2 + 3\beta^2 = 4$.

   (Đề thi VMO 2003)

3. Các số thực p, q phải thoả mãn điều kiện gì để đa thức $x^3 + px + q$ có ba nghiệm thực phân biệt?

4. Trong mặt phẳng cho ba tia Ox, Oy, Oz và đoạn thẳng có độ dài $2p$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất bộ ba điểm A, B, C tương ứng thuộc Ox, Oy, Oz sao cho chu vi các tam giác OAB, OBC, OCA đều bằng nhau và bằng $2p$.

   (Đề thi chọn đội tuyển Việt Nam 1983)

5. Phương trình $\sin x = \dfrac{x}{8}$ có bao nhiêu nghiệm thực?

6. (Quy tắc Descartes về dấu) Cho $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ là một đa thức có hệ số thực. Gọi k là số lần đổi dấu trong dãy các hệ số khác 0 của $P(x)$ (giữ đúng thứ tự và bỏ các hệ số bằng 0). Khi đó số nghiệm dương của đa thức $P(x)$ bằng $k - 2s$, trong đó $0 \le s \le \left\lfloor \dfrac{k}{2} \right\rfloor$. Hãy chứng minh.

7. Chứng minh rằng nếu đa thức $P(x)$ với hệ số thực có tất cả các nghiệm đều thực thì đa thức $P(x) + P'(x)$ cũng có tất cả các nghiệm đều thực.

8. Chứng minh rằng đạo hàm các bậc của hàm số $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ chỉ có các nghiệm thực, hơn nữa là các nghiệm đơn và mỗi nghiệm của đạo hàm bậc n nằm giữa hai nghiệm của đạo hàm bậc $n+1$.

9. Giả sử rằng đa thức bậc bốn $P(x)$ có bốn nghiệm dương. Chứng minh rằng phương trình

$$\frac{1-4x}{x^2}P(x) + \left(1 - \frac{1-4x}{x^2}\right)P'(x) - P''(x) = 0$$

   cũng có bốn nghiệm dương.

   (Đề thi chọn đội tuyển Việt Nam 1994)

10. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương và với mọi x, ta có

$$1+\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x+\cdots+\frac{1}{n}\cos nx \geq 0.$$

11. (Quy tắc L'Hopitale) Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định và khả vi khắp nơi trong một lân cận nào đó của điểm a, ngoại trừ có thể là điểm a. Giả sử rằng

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

và đạo hàm $g'(x)$ khác 0 khắp nơi trong lân cận nói trên của điểm a. Khi đó nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$, thì cũng tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(a)}{g(a)}$, và ta có

$$\lim_{x\to a}\frac{f(a)}{g(a)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Hãy chứng minh.

12. (Mở rộng định lý Rolle) Cho $0 < a < b$. Nếu $f(x)$ bằng 0 tại $n+1$ điểm của đoạn $[a,\, b]$ và tất cả các nghiệm của đa thức $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ đều thực thì tại một điểm ξ nào đó thuộc $(a,\, b)$ ta có đẳng thức

$$a_0f(\xi)+a_1f'(\xi)+\cdots+a_nf^{(n)}(\xi)=0.$$

13. (Mở rộng công thức Lagrange) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và khả vi hai lần tại lân cận điểm x_0. Chứng minh rằng với mọi x thuộc lân cận này, tồn tại ξ nằm giữa x_0 và x sao cho

$$f(x) = f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)(x-x_0)^2}{2}.$$

14. Hàm số $f(x)$ khả vi hai lần trên toàn trục số và bị chặn. Chứng minh rằng tồn tại điểm x_0 sao cho $f''(x_0)=0$.

15. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kỳ 1, tức là $f(x+1) = f(x)$ với mọi x. Chứng minh rằng tồn tại số x_0 sao cho $f(x_0+\pi) = f(x_0)$.

16. Cho hàm số f là hàm số liên tục từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ sao cho $|f(x)-f(y)| \geq |x-y|$ với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng f là toàn ánh.

Phần chính của bài này được viết dựa trên bài báo "Các định lý tồn tại và định lý cơ bản của đại số" của GS V. Tikhomirov đăng trên tạp chí Kvant, số 4/2005.

Tài liệu tham khảo

[1] V. Tikhomirov, *Các định lý tồn tại và định lý cơ bản của đại số*, Kvant, số 4/2005, trang 2-6 (tiếng Nga).

[2] G. Polya, G. Sege, *Các định lý và bài toán của giải tích*, Nhà xuất bản Khoa học, Matcơva 1978 (tiếng Nga).

[3] V. Ilyn, E. Poznyak, *Cơ sở giải tích toán học*, Nhà xuất bản Khoa học, Matxcơva 1998 (tiếng Nga).

[4] Tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ, *Các bài thi Olympic Toán Trung học phổ thông Việt Nam (1990-2006)*, Nhà xuất bản Giáo dục 2007.

[5] Tạp chí Toán Học và Tuổi Trẻ, *The Vietnamese Mathematical Olympiad (1990-2006)*, Selected Problems, Nhà xuất bản Giáo dục 2007.

[6] V. Sadovnichi, A. Podkolzin, *Các bài toán Olympic sinh viên*, Nhà xuất bản Khoa học, Matxcơva 1978 (tiếng Nga).

[7] Bách khoa toàn thư mở wikipedia.

[8] Paulo Ney de Souza, Jorge-Nuno Silva, *Berkeley Problems in Mathematics*, Springer 2001.