Vietnamese Mathematical Olympiad 2012

January 11, 12, 2012

Bài toán

1. Cho dãy số thực $\{x_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ x_n = \frac{2+n}{3n}(x_{n-1}+2), \end{cases}$$

với mọi $n \geq 2$. Chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$. Tìm giới hạn đó.

2. Cho hai cấp số cộng (a_n), (b_n) và số nguyên lớn hơn 2. Xét m tam thức bậc hai $P_k(x) = x^2 + a_k x + b_k$, $k = 1, 2, 3, \dots m$. Chứng minh rằng nếu hai tam thức $P_1(x)$, $P_m(x)$ đều không có nghiệm thực thì tất cả các đa thức còn lại cũng không có nghiệm thực.

3. Trong mặt phẳng, cho tứ giác lồi$ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O và có các cặp cạnh đối không song song. Gọi M, N tương ứng là giao điểm của các đường thẳng AB và CD, AD và BC. Gọi P, Q, S, T tương ứng là giao điểm của các đường phân giác trong của các cặp góc $\angle MAN$ và $\angle MBN$, $\angle MBN$ và $\angle MCN$, $\angle MCN$ và $\angle MDN$, $\angle MDN$ và $\angle MAN$. Giả sử bốn điểm P, Q, S, T đôi một phân biệt.

a) Chứng minh rằng bốn điểm P, Q, S, T cùng nằm trên một đường tròn. Gọi I là tâm đường tròn đó.

b) Gọi E là giao điểm của các đường chéo AC và BD. Chứng minh rằng E, O, I thẳng hàng.

4. Cho số nguyên dương n. Có n học sinh nam và n học sinh nữ xếp thành một hàng ngang, theo thứ tự tùy ý. Mỗi học sinh (trong số $2n$ học sinh vừa nêu) được cho một số kẹo bằng đúng số cách chọn ra hai học sinh khác giới với X và đứng ở hai phía của X. Chứng minh rằng tổng số kẹo mà tất cả $2n$ học sinh nhận được không vượt quá $\frac{1}{3}n(n^2-1)$.

5. Cho một nhóm gồm năm cô gái g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 và mười hai chàng trai. Có mười bảy chiếc ghế được xếp thành một hàng ngang. Người ta xếp nhóm người đã cho ngồi vào chiếc ghế đó sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:

a) mỗi ghế có đúng một người ngồi;

b) thứ tự ngồi của các cô gái, xét từ trái qua phải, là g_1, g_2, g_3, g_4, g_5;

c) giữa g_1 và g_2 có ít nhất ba chàng trai;

d) giữa g_4 và g_5 có ít nhất một chàng trai và nhiều nhất bốn chàng trai.

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp như vậy? Hai cách xếp được coi là khác nhau nếu tồn tại một chiếc ghế mà người ngồi chiếc ghế đó trong hai cách xếp là khác nhau.

6. Xét các số tự nhiên lẻ a, b mà a là ước của $b^2 + 2$, và b là ước của $a^2 + 2$. Chứng minh rằng a và b là các số hạng của dãy số tự nhiên (v_n) xác định bởi

$$v_1 = v_2 = 1, \text{ và } v_n = 4v_{n-1} - v_{n-2}, \quad \text{với mọi } n \geq 3.$$

7. Tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ và thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

i) f là toàn ánh từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$;

ii) f là hàm số tăng trên $\mathbb{R}$;

iii) $f(f(x)) = f(x) + 12x$ với mọi số thực x.

Lời giải

1. Cho dãy số thực $\{x_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ x_n = \frac{2+n}{3n}(x_{n-1}+2), \end{cases}$$

với mọi $n \geq 2$. Chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$. Tìm giới hạn đó.

Lời giải. Bằng quy nạp ta sẽ chứng minh $x_n > 1 + \frac{3}{n}$ với mọi $n \geq 2$. Thật vậy, với $n = 2$, ta có $x_2 = \frac{8}{3} > 1 + \frac{3}{2}$. Giả sử $x_n > 1 + \frac{3}{n}$. Khi đó

$$x_{n+1} > \frac{n+3}{3(n+1)}\left(3 + \frac{3}{n}\right) = 1 + \frac{3}{n} > 1 + \frac{3}{n+1}.$$

Do đó,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2n}{3(n+1)}\left(1 + \frac{3}{n} - x_n\right) < 0,\ n \geq 2.$$

Như vậy, (x_n) là dãy giảm bị chặn dưới bởi 1 nên tồn tại giới hạn $\lim x_n = a$. Chuyển qua giới hạn ta có

$$a = \frac{1}{3}(a+2),$$

tức là $a = 1$. Vậy $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$.

□

2. Cho hai cấp số cộng (a_n), (b_n) và số nguyên lớn hơn 2. Xét m tam thức bậc hai $P_k(x) = x^2 + a_k x + b_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots m$. Chứng minh rằng nếu hai tam thức $P_1(x)$, $P_m(x)$ đều không có nghiệm thực thì tất cả các đa thức còn lại cũng không có nghiệm thực.

Lời giải. Gọi công sai của cấp số cộng (a_n), (b_n) tương ứng là d, s. Đặt $f(t) = (a_1 td)^2 - 4(b_1 + ts) = d^2t^2 + 2t(a_1 d - 2s) + a_1^2 - 4b_1$. Ta thấy $P_k(x)$ vô nghiệm khi và chỉ khi $f(k-1) < 0$.

Nếu $d \neq 0$ thì $f(t)$ là tam thức bậc hai thỏa mãn $f(0) < 0$, $f(m-1) < 0$. Suy ra $f(t) < 0$ với mọi $0 < t < m-1$.

Nếu $d = 0$ thì $f(t) = -4ts + a_1^2 - 4b_1$ là hàm bậc nhất hoặc hàm hằng thỏa mãn $f(0) < 0$, $f(m-1) < 0$. Suy ra $f(t) < 0$, với mọi $0 < t < m-1$.

Trong mọi trường hợp, ta đều có $f(0), \ldots, f(m-1) < 0$. Suy ra $P_1(x), \ldots, P_m(x)$ vô nghiệm.

□

3. Trong mặt phẳng, cho tứ giác lồi$ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O và có các cặp cạnh đối không song song. Gọi M, N tương ứng là giao điểm của các đường thẳng AB và CD, AD và BC. Gọi P, Q, S, T tương ứng là giao điểm của các đường phân giác trong của các cặp góc $\angle MAN$ và $\angle MBN$, $\angle MBN$ và $\angle MCN$, $\angle MCN$ và $\angle MDN$, $\angle MDN$ và $\angle MAN$. Giả sử bốn điểm P, Q, S, T đôi một phân biệt.

a) Chứng minh rằng bốn điểm P, Q, S, T cùng nằm trên một đường tròn. Gọi I là tâm đường tròn đó.

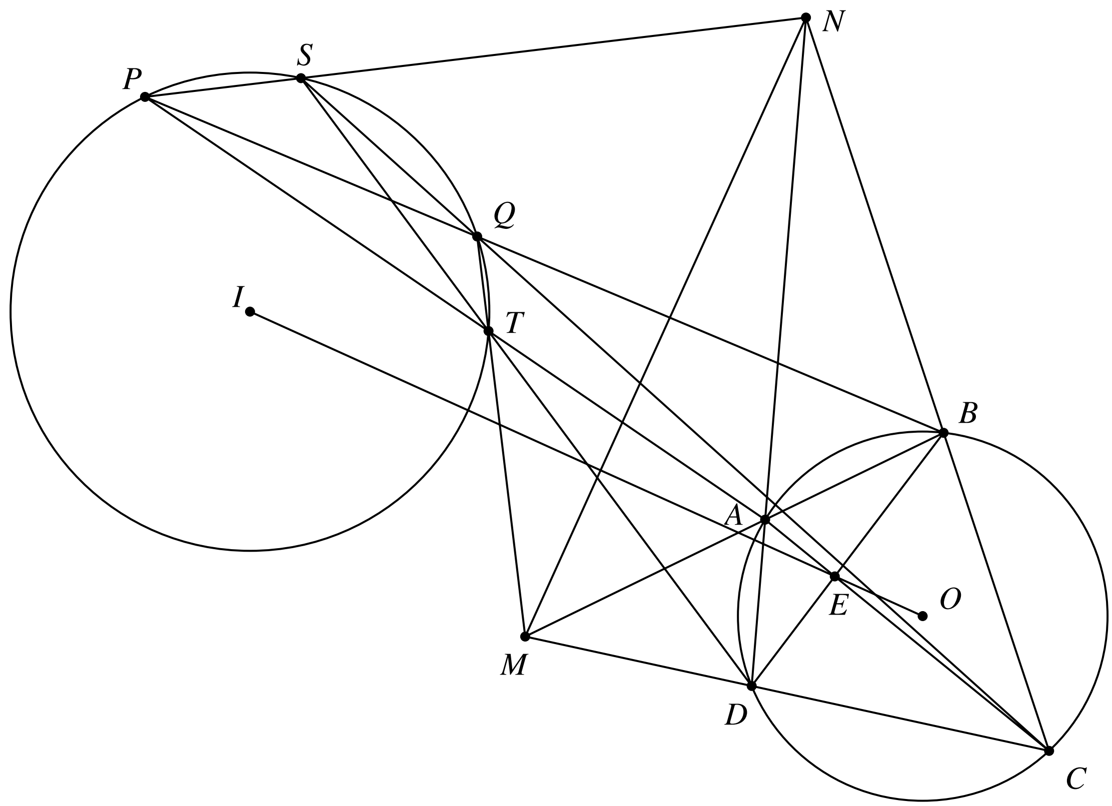
b) Gọi E là giao điểm của các đường chéo AC và BD. Chứng minh rằng E, O, I thẳng hàng.

Lời giải. (của bạn **Nguyễn Văn Linh**, sinh viên đại học Ngoại thương Hà Nội, gửi cho **HEXAGON**.)

a) Không mất tổng quát ta có thể giả sử D nằm giữa M và C, B nằm giữa N và C. Các trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

Ta có $\widehat{PQS} = \widehat{QBN} - \widehat{QCB} = \frac{1}{2}(\widehat{NBM} - \widehat{BCD}) = \frac{1}{2}\widehat{BMC}$.

Tương tự, $\widehat{PTS} = \frac{1}{2}\widehat{BMC}$. Do đó $\widehat{PTS} = \widehat{PQS}$. Kéo theo 4 điểm P, R, S, T cùng thuộc một đường tròn. Ta có điều phải chứng minh.



b) Do Q là giao của phân giác góc MCB và MBN nên Q là tâm đường tròn bàng tiếp góc C của tam giác MBC. Suy ra MQ là phân giác ngoài của góc BMC.

Tương tự, MT là phân giác ngoài của góc BMC. Do đó M, T, Q thẳng hàng.

Ta có

$$
\begin{aligned}
\widehat{MTA} &= 360^\circ - \widehat{MDA} - \widehat{TMD} - \widehat{TAD} \\
&= 360^\circ - \widehat{MDA} - \widehat{TMA} - \widehat{AMD} - \widehat{TAM} - \widehat{MAD} \\
&= 180^\circ - 2\widehat{MDA} - \widehat{TMA} - \widehat{TAM} \\
&= 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{MDA} = \widehat{QBA}.
\end{aligned}
$$

Do đó tứ giác $TQBA$ nội tiếp. Ta suy ra $MT.MQ = MA.MB$ hay M nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (I). Tương tự, N nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (I). Suy ra $MN \perp OI$.

Để chứng minh O, I, E thẳng hàng, ta sẽ chứng minh $OE \perp MN$. Đây là một kết quả quen thuộc có tên là định lý Brocard. Có nhiều cách để chứng minh kết quả này. Ở đây chúng tôi giới thiệu cách giải bằng cực và đối cực.

Do AC giao BD tại E nên E lần lượt nằm trên đường đối cực của M, N đối với đường tròn (O). Suy ra MN là đường đối cực của E đối với (O), từ đó $OE \perp MN$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Bài số 3 là một bài toán không khó nhưng khá thú vị. Câu a) tương đối đơn giản, chỉ cần những biến đổi góc thông thường và không cần điều kiện tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Câu b) đòi hỏi sử dụng định lý Brocard nhưng đây là một kết quả quen thuộc. Chứng minh $OI \perp MN$ bằng cách sử dụng phương tích cũng là hướng đi đơn giản và tự nhiên. Tuy nhiên, ý tưởng của bài toán không mới, nó bắt nguồn từ bài toán 2978 trên tạp chí Crux Mathematicorum năm 2004 Volume 30.

□

4. Gọi các bạn nam lần lượt là $x_1, x_2, \cdots, x_n$ và các bạn nữ lần lượt là $y_1, y_2, \cdots, y_n$. Bằng tính toán trực tiếp ta thấy nếu các bạn nam nữ xếp xen kẽ $x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n$ thì tổng số kẹo của $2n$ bạn đúng bằng $\frac{n(n^2-1)}{3}$.

Lời giải. Để chứng minh kết luận bài toán ta sẽ chứng tỏ rằng một cách xếp hàng bất kỳ đều có thể chuyển dần về cách xếp xen kẽ như trên mà trong quá trình chuyển tổng số kẹo mà các bạn nhận được không bị giảm đi. Giả sử một cách xếp hàng bất kỳ đã có đúng r bạn nam và r bạn nữ ở cuối được xếp xen kẽ ($0 \le r < n$). Không mất tổng quát, ta có thể giả sử hàng có một trong hai dạng sau:

i) $\cdots, y_{r+1}, \underbrace{x_{r+k}, \cdots, x_{r+1}}_{k \text{ bạn nam liên tiếp}}, \underbrace{x_r, y_r, x_{r-1}, y_{r-1}, \cdots, x_1, y_1}_{r \text{ cặp nam, nữ xen kẽ}}.$

ii) $\cdots, x_{r+1}, \underbrace{y_{r+k}, \cdots, y_{r+1}}_{k \text{ bạn nữ liên tiếp}}, \underbrace{x_r, y_r, x_{r-1}, y_{r-1}, \cdots, x_1, y_1}_{r \text{ cặp nam, nữ xen kẽ}},$ khi $k > 1$.

Trong trường hợp i), ta chuyển bạn y_{r+1} đến vị trí ngay trước bạn x_r. Khi đó chỉ có số kẹo của các bạn $y_{r+1}, x_{r+k}, \cdots, x_{r+1}$ thay đổi. Bằng tính toán trực tiếp ta thấy tổng số kẹo tăng một lượng là $(k^2 - k)$.

Trong trường hợp ii), ta chuyển bạn x_{r+1} đến vị trí ngay trước bạn y_{r+1}. Khi đó chỉ có số kẹo của các bạn $x_{r+1}, y_{r+k}, \cdots, y_{r+2}$ thay đổi. Ta tính được tổng số kẹo cũng tăng một lượng là $(k^2 - k)$.

Như vậy, sau không quá n lần chuyển thì hàng được xếp xen kẽ nam, nữ. Do đó tổng số kẹo trong một cách xếp bất kỳ luôn nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{n(n^2-1)}{3}$. □

Nhận xét:

- Điểm mấu chốt trong lời giải là đoán nhận được tổng số kẹo đạt giá trị lớn nhất khi các bạn nam nữ xếp xen kẽ.
- Sau đó để chứng minh số kẹo trong một cách xếp bất kỳ luôn nhỏ hơn hoặc bằng trường hợp xếp xen kẽ chúng ta đã sử dụng phương pháp "hiệu chỉnh địa phương" (local adjustment method) như ở trên. Phương pháp này có thể áp dụng để giải nhiều bài toán tổ hợp như: bài toán cực trị tổ hợp, chứng minh một lớp các đối tượng tổ hợp hay tồn tại một cấu hình tổ hợp thỏa mãn một tính chất nào đó.

Lời giải bài toán số 4 trong ngày thi thứ nhất VMO 2012 là của thầy **Vũ Thế Khôi**, Viện Toán học, gửi cho **HEXAGON**.

5. Cho một nhóm gồm năm cô gái g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 và mười hai chàng trai. Có mười bảy chiếc ghế được xếp thành một hàng ngang. Người ta xếp nhóm người đã cho ngồi vào chiếc ghế đó sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:

a) mỗi ghế có đúng một người ngồi;

b) thứ tự ngồi của các cô gái, xét từ trái qua phải, là g_1, g_2, g_3, g_4, g_5;

c) giữa g_1 và g_2 có ít nhất ba chàng trai;

d) giữa g_4 và g_5 có ít nhất một chàng trai và nhiều nhất bốn chàng trai.

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp như vậy? Hai cách xếp được coi là khác nhau nếu tồn tại một chiếc ghế mà người ngồi chiếc ghế đó trong hai cách xếp là khác nhau.

Lời giải. Năm cô gái $g_1, g_2, ..., g_5$ sẽ chia hàng ngang thành sáu khoảng (bốn khoảng giữa các cô gái và hai khoảng đầu, cuối). Ta nhận thấy một cách xếp chỗ sẽ hoàn toàn xác định bởi số lượng x_i các chàng trai trong mỗi khoảng và thứ tự của các chàng trai từ trái qua phải. Như vậy số cách xếp sẽ bằng 12! nhân với số nghiệm của phương trình sau:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12, \tag{1}$$

trong đó x_i là các số nguyên thỏa mãn:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 3, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, 4 \geq x_5 \geq 1, x_6 \geq 0.$$

Lần lượt xét các trường hợp $x_5 = 1, 2, 3, 4$ và đổi biến $y_1 = x_1, y_2 = x_2 - 3, y_3 = x_3, y_4 = x_4, y_5 = x_6$. Ta thấy số nghiệm của phương trình (1) bằng tổng số nghiệm của các phương trình

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 9 - t,\ t = 1, 2, 3, 4,$$

trong đó $y_i \geq 0$.

Đến đây ta sử dụng kết quả quen thuộc là số nghiệm của phương trình

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n, \quad x_i \geq 0 \tag{2}$$

đúng bằng $\binom{n+k-1}{k-1.}$

Như vậy tóm lại số cách xếp chỗ bằng $(12!) \sum_{t=1}^{4} \binom{13-t}{4} = (12!) \times 1161$.

Nhận xét: Đây là một bài tổ hợp đếm thuộc loại dễ. Ý tưởng tự nhiên là phải chuyển bài toán về việc tính số nghiệm không âm của phương trình (2). Việc tính số nghiệm của phương trình (2) là một ví dụ quen thuộc trong tổ hợp đếm, nó thường được phát biểu dưới dạng bài toán tính số cách bỏ n quả bóng vào k hộp cho trước, hoặc chia n cái kẹo cho k người, ... □

Lời giải bài toán số 5 của VMO 2012 là của thầy **Vũ Thế Khôi**, Viện Toán học, gửi cho **HEXAGON**.

6. Xét các số tự nhiên lẻ a, b mà a là ước của $b^2 + 2$, và b là ước của $a^2 + 2$. Chứng minh rằng a và b là các số hạng của dãy số tự nhiên (v_n) xác định bởi

$$v_1 = v_2 = 1, \text{ và } v_n = 4v_{n-1} - v_{n-2}, \quad \text{với mọi } n \geq 3.$$

Lời giải. Trước tiên ta nhắc lại kết quả quen thuộc sau

Bổ đề 1. *Nếu x, y là các số nguyên dương thỏa mãn $xy \mid x^2 + y^2 + 2$ thì $\frac{x^2+y^2+2}{xy} = 4$.*

Chứng minh. Giả sử rằng $xy \mid x^2 + y^2 + 2$, khi đó tồn tại số nguyên dương k sao cho $x^2 + y^2 + 2 = kxy$. Kí hiệu S là tập tất cả các cặp số nguyên dương (z, t) thỏa mãn tính chất $z^2 + t^2 + 2 = kzt$. Khi đó S là tập khác rỗng. Trong tất cả các cặp số (z, t) thuộc S ta chọn cặp mà có tổng $z + t$ bé nhất. Không mất tính tổng quát, giả sử $z \geq t$. Khi đó z là nghiệm nguyên dương của phương trình bậc hai

$$Z^2 - ktZ + t^2 + 2 = 0.$$

Do đó phương trình này còn có một nghiệm nguyên z' nữa. Theo định lý Viet, thì

$$\begin{cases} z + z' = kt \\ z \cdot z' = t^2 + 2. \end{cases}$$

Từ đẳng thức thứ hai, ta suy ra z' là số nguyên dương. Vậy thì cặp (z', t) cũng thuộc vào S, do đó $z't \geq z + t$, hay $z' \geq z$. Tuy nhiên, lại từ đẳng thức thứ hai, ta suy $z^2 \leq t^2 + 2 \leq z^2 + 2$. Suy ra $t^2 + 2 = z^2, z^2 + 1$ hoặc $z^2 + 2$. Vì z, t là các số nguyên dương nên hai trường hợp đầu tiên không thể xảy ra. Vậy $t^2 + 2 = z^2 + 2$, hay $z = t$.

Từ đẳng thức $z^2 + t^2 + 2 = kzt$, thay thế $z = t$, ta suy ra $2z^2 + 2 = kz^2$. Điều này cho ta $z^2 \mid 2$, hay $z = 1$. Vậy $z = t = 1$, do đó $k = 4$. □

Quay trở lại bài toán, từ a, b là các số lẻ ta suy ra $\gcd(a, b) = 1$. Do đó $ab \mid a^2 + b^2 + 2$. Như vậy (a, b) thỏa mãn một phương trình Markov $x^2 + y^2 + 2 = 4xy$. Ta coi $a \geq b$. Ta viết lại phương trình $x^2 + y^2 + 2 = 4xy$ ở dạng $(2x - y)^2 - 3y^2 = -2$. Đặt $\alpha = \frac{x+y}{2}$, $\beta = \frac{x-y}{2}$ hay tương đương $x = \alpha + \beta$, $y = \alpha - \beta$. Khi ấy ta có $\alpha^2 - 3\beta^2 = 1$. Như vậy, ta thấy mỗi nghiệm (x, y) của phương trình $x^2 + y^2 + 2 = 4xy$ cho ta một nghiệm (α, β) của phương trình $\alpha^2 - 3\beta^2 = 1$ (do x, y cùng tính chẵn lẻ) và ngược lại, mỗi nghiệm (α, β) của phương trình Pell đó cho ta một nghiệm của phương trình Markov kia. Tuy nhiên, tất cả các nghiệm của phương trình $\alpha^2 - 3\beta^2 = 1$ là

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = 2,\ \alpha_{k+2} = 4\alpha_{k+1} - \alpha_k \\ \beta_0 = 0,\ \beta_1 = 1,\ \beta_{k+2} = 4\beta_{k+1} - \beta_k. \end{cases}$$

Thành thử, nếu a, b thỏa mãn yêu cầu thì tương ứng chúng sẽ thuộc vào các số hạng của hai dãy (x_n) và (y_n) được cho bởi hệ

$$\begin{cases} x_n = \alpha_n + \beta_n \\ y_n = \alpha_n - \beta_n. \end{cases}$$

Ta có $x_0 = 1, x_1 = 3, x_{k+2} = 4x_{k+1} - x_k$ và $y_0 = y_1 = 1, y_{k+2} = 4y_{k+1} - y_k$ với mọi số tự nhiên k. Dễ thấy rằng $x_k = v_{k+1}, y_{k+1} = v_k$ nên các số a, b thuộc cùng số hạng của dãy (v_n) đã cho.

$\square$

Lời giải bài toán số 6 của thầy **Hà Duy Hưng**, trường chuyên SPHN gử cho **HEXAGON**.

7. Tìm tất cả các hàm số f xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ và thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

i) f là toàn ánh từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$;

ii) f là hàm số tăng trên $\mathbb{R}$;

iii) $f(f(x)) = f(x) + 12x$ với mọi số thực x.

Lời giải. (của bạn Thanh Toan trên diễn đàn Mathscope). Trước hết do f là hàm tăng và $f(0) = 0$ nên ta có ngay $f(x) > 0, \forall x > 0$; $f(x) < 0, \forall x < 0$. Đặt $f_n(x) = \underbrace{f(f(...f(x)))}_{n \text{ lần } f}$

Xét phương trình đặc trưng của dãy $f_n(x)$ ta có: $t^2 - t - 12 = 0$ có hai nghiệm $t_1 = -3, t_2 = 4$. Khi đó ta tính được:

$$f_n(x) = \frac{4x - f(x)}{7}(-3)^n + \frac{3x + f(x)}{7}4^n. \tag{3}$$

Dễ thấy f là đơn ánh và kết hợp với giả thiết f là toàn ánh ta được f là song ánh. Do đó từ (3) ta được:

$$f_{-n}(x) = \frac{4x - f(x)}{7}(-3)^{-n} + \frac{3x + f(x)}{7}4^{-n}, \tag{4}$$

trong đó

$$f_{-n}(x) = \underbrace{f^{-1}\left(f^{-1}\left(...f^{-1}(x)\right)\right)}_{n \text{ lần } f^{-1}}.$$

Từ (3) và (4) ta được

$$\lim_{n\to+\infty}(-3)^n f_{-n}(x) = \frac{4x - f(x)}{7}; \lim_{n\to+\infty}(4)^{-n} f_n(x) = \frac{3x + f(x)}{7}$$

Từ đó suy ra

$$\lim_{n\to+\infty}(-3)^n f_{-n}(x)\,.\lim_{n\to+\infty}(4)^{-n} f_n(x)=\frac{4x-f(x)}{7}.\frac{3x+f(x)}{7}$$

hay suy ra

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(-\frac{3}{4}\right)^n f_{-n}(x)\,.f_n(x)\right)=\frac{4x-f(x)}{7}.\frac{3x+f(x)}{7}=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(-\frac{3}{4}\right)^n x\right)=0$$

- Nếu $\frac{4x-f(x)}{7}=0;\forall x\in\mathbb{R}$ thì ta có ngay hàm $f(x)=4x$
- Nếu tồn tại x_0 sao cho $\frac{4x-f(x)}{7}\neq 0$ thì ta có $f(x_0)=-3x_0$.

Từ (3) ta được

$$f_n(x_0)=\frac{4x_0-f(x_0)}{7}(-3)^n. \tag{5}$$

Kết hợp với $f(x)>0,\forall x>0$; $f(x)<0,\forall x<0$. Nếu vế trái của (3) dương thì ta chọn được n để vế phải âm. Nếu vế trái của (5) âm thì ta chọn được n để vế phải đương vô lí. Vậy trường hợp 2 không xảy ra. Vậy $f(x)=4x,\forall x\in\mathbb{R}$.

□

Sau đây là lời giải của bạn **Nguyễn Ngọc Trung**, Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQGHN, trích trong tài liệu liệu do thầy **Trần Nam Dũng** tổng hợp.

Lời giải. Nếu $f(x)=f(y)$ thì $f(f(x))=f((f(y))$ nên từ phương trình hàm ta suy ra $12x=12y$, suy ra $x=y$. Vậy f là đơn ánh. Theo đề bài, f là toàn ánh từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ nên từ đây ta có f là song ánh. Gọi f^{-1} là hàm ngược của f thì f^{-1} cũng là hàm tăng.

Thay $x=0$ vào phương trình hàm, ta được $f(f(0))=f(0)$. Do f là song ánh nên từ đây suy ra $f(0)=0$. Lấy f^{-1} hai vế ta suy ra $f-1(0)=0$.

Đặt $f_{-n}(x)=f-1(f-1\cdots f-1(x)))$, n lần, dễ thấy f_{-n} là hàm tăng và $f_{-n}(0)=0$.

Xét dãy a_n với $a_0=f(x)$, $a_1=x$, $a_n=f^{-1}(a_{n-1})$ với $n\geq 2$. Thay $x\to f_{-1}(a_{n-1})$ vào phương trình hàm, ta được $a_{n-2}=a_{n-1}+12a_n$. Giải phương trình sai phân này, ta tìm được

$$f_{-n}(x)=a_{n+1}=\frac{4x-f(x)}{7}(-3)^{-n}+\frac{3x+f(x)}{7}4^{-n}.$$

Xét với $x>0$, cố định. Khi đó $f_{-n}(x)>0$ với mọi n (do f_{-n} là hàm tăng), $3x+f(x)>0$. Cho $n=2k,2k+1$, ta thu được

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-2k-1}>\frac{4x-f(x)}{3x+f(x)},\ \left(\frac{4}{3}\right)^{-2k}>\frac{f(x)-4x}{3x+f(x)}.$$

Cho $k\to+\infty$ ta thu được, $4x\leq f(x)\leq 4x$, suy ra $f(x)=4x$. Từ đó $f(x)=4x$ với mọi $x>0$. Với $x<0$, cố định. Khi đó $f_{-n}(x)<0$ với mọi n, $3x+f(x)<0$. Hoàn toàn tương tự ta cũng suy ra $f(x)=4x$ với mọi $x<0$.

Kết hợp các trường hợp ta được $f(x)=4x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. □