ĐỀ THI VÀ LỜI GIẢI VMO 2012

Thức hiện bởi Math.vn *

HÀ NỘI, 2012

*Diễn đàn toán học http://math.vn

Mục lục

1 Đề thi VMO 2012

1.1 Ngày thứ nhất 11/12/2012

Bài 1 (5 điểm). Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi $x_1 = 3$ và $x_n = \dfrac{n+2}{3n}(x_{n-1}+2)$ với mọi $n \geq 2$. Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$ và tính giới hạn đó.

Bài 2 (5 điểm). Cho các cấp số cộng $(a_n), (b_n)$ và số nguyên $m > 2$. Xét m tam thức bậc hai $P_k(x) = x^2 + a_k x + b_k,\ k = 1, 2, 3, \ldots, m$. Chứng minh rằng nếu hai tam thức $P_1(x),\ P_m(x)$ đều không có nghiệm thực thì tất cả các tam thức còn lại cũng không có nghiệm thực.

Bài 3 (5 điểm). Trong mặt phẳng, cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O và có các cặp cạnh đối không song song. Gọi M, N tương ứng là giao điểm của các đường thẳng AB và CD, AD và BC. Gọi P, Q, S, T tương ứng là giao điểm các đường phân giác trong của các cặp góc $\angle MAN$ và $\angle MBN$, $\angle MBN$ và $\angle MCN$, $\angle MCN$ và $\angle MDN$, $\angle MDN$ và $\angle MAN$. Giả sử bốn điểm P, Q, S, T đôi một phân biệt.

1. Chứng minh rằng bốn điểm P, Q, S, T cùng nằm trên một đường tròn. Gọi I là tâm của đường tròn đó.

2. Gọi E là giao điểm của các đường chéo AC và BD. Chứng minh rằng ba điểm E, O, I thẳng hàng.

Bài 4 (5 điểm). Cho số nguyên dương n. Có n học sinh nam và n học sinh nữ xếp thành một hàng ngang, theo thứ tự tùy ý. Mỗi học sinh (trong số $2n$ học sinh vừa nêu) được cho một số kẹo bằng đúng số cách chọn ra hai học sinh khác giới với X và đứng ở hai phía của X. Chứng minh rằng tổng số kẹo mà tất cả $2n$ học sinh nhận được không vượt quá $\dfrac{1}{3}n(n^2-1)$.

1.2 Ngày thứ hai 12/12/2012

Bài 5 (7 điểm). Cho một nhóm gồm 5 cô gái, kí hiệu là G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, và 12 chàng trai. Có 17 chiếc ghế được xếp thành một hàng ngang. Người ta xếp nhóm người đã cho ngồi vào các chiếc ghế đó sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:

1. Mỗi người ngồi đúng 1 ghế.

2. Các cô gái xếp theo đúng thứ tự $1, 2, 3, 4, 5$.

3. Giữa G_1, G_2 có ít nhất 3 chàng trai.

4. Giữa G_4, G_5 có ít nhất 1 chàng trai và nhiều nhất là 4 chàng trai.

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp như vậy ? (Hai cách xếp được coi là khác nhau nếu tồn tại một chiếc ghế mà người ngồi ở chiếc ghế đó trong hai cách xếp là khác nhau).

Bài 6 (7 điểm). Cho a, b là hai số tự nhiên lẻ thoả mãn a là ước của b^2+2 và b là ước của a^2+2. Chứng minh rằng a và b là các số hạng của dãy số tự nhiên (v_n) xác định bởi

$$v_1 = v_2 = 1, v_{n+2} = 4v_{n+1} - v_n, \ \forall n \geq 1.$$

Bài 7 (6 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn các điều kiện:

1. $f(x)$ là toàn ánh.
2. $f(x)$ đơn điệu tăng.
3. $f(f(x)) = f(x) + 12x, \forall x \in \mathbb{R}$.

2 Lời giải các bài toán VMO 2012

Bài 1 (5 điểm) Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi $x_1 = 3$ và $x_n = \dfrac{n+2}{3n}(x_{n-1}+2)$ với mọi $n \geq 2$. Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$ và tính giới hạn đó.

Lời giải 1. Ta dự đoán dãy đã cho giảm bằng cách chứng minh $x_{n-1} > x_n$ với mọi $n > 3$ hay

$$x_{n-1} > \frac{n+2}{3n}(x_{n-1}+2) \Leftrightarrow x_{n-1} > 1 + \frac{3}{n-1} \quad (1).$$

Như vậy ta quy về việc phải chứng minh $x_n > 1 + \dfrac{3}{n}$ với mọi $n > 2$ bằng quy nạp:

- Với $n = 2$ thì hiển nhiên đúng.
- Với $n > 2$ thì $x_n = \dfrac{n+2}{3n}(x_{n-1}+2) > \dfrac{n+2}{3n}(\dfrac{3}{n-1}+1+2)$.

Nhưng mà $\dfrac{n+2}{3n}(\dfrac{3}{n-1}+3) > 1 + \dfrac{3}{n}$ thành thử $x_n > 1 + \dfrac{3}{n}$ với mọi $n > 2$.
Như vậy (1) đúng, kéo theo dãy đã cho giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên có giới hạn hữu hạn là l. Thay vào biểu thức giới hạn ta có $l = \frac{1}{3}(l+2) \Rightarrow l = 1$. ∎

Lời giải 2. Ta có $x_2 = \dfrac{10}{3}, x_3 = \dfrac{80}{27}, x_4 = \dfrac{67}{27}$, do đó ta dự đoán dãy giảm và chứng minh $x_{n-1} - x_n > 0$ với mọi $n \geq 3$.
Thậy vậy $x_{n-1} - x_n > 0 \Leftrightarrow x_n > \dfrac{n+2}{n-1}$.
Với $n = 3$ ta có $x_3 > \dfrac{5}{2}$.
Giả sử $x_n > \dfrac{n+2}{n-1}$ với mọi $n \geq 3$, ta xét $x_{n+1} = \dfrac{n+3}{3n+3}(x_n+2)$.
Theo giả thiết quy nạp ta có

$$x_{n+1} > \frac{n+3}{3n+3}(\frac{n+2}{n-1}+2) = \frac{n(n+3)}{n^2-1} > \frac{n+3}{n}.$$

Theo nguyên lý quy nạp ta có $x_{n-1} - x_n > 0$ với mọi $n \geq 3$ và hiển nhiên $x_n > 0$ với mọi n nên dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn L.
Lấy giới hạn hai vế của đẳng thức $x_n = \dfrac{n+2}{3n}(x_{n-1}+2)$ ta được $L = \dfrac{1}{3}(L+2) \Rightarrow L = 1$. ∎

Bài 2 (5 điểm) Cho các cấp số cộng $(a_n), (b_n)$ và số nguyên $m > 2$. Xét m tam thức bậc hai $P_k(x) = x^2 + a_k x + b_k,\ k = 1, 2, 3, \ldots, m$. Chứng minh rằng nếu hai tam thức $P_1(x),\ P_m(x)$ đều không có nghiệm thực thì tất cả các tam thức còn lại cũng không có nghiệm thực.

Lời giải 1. Gọi a, b là các công sai của hai cấp số cộng (a_n) và (b_n) và giả sử $P_k(x)$ có nghiệm $x = c$ với $1 < k < m$ nào đó.

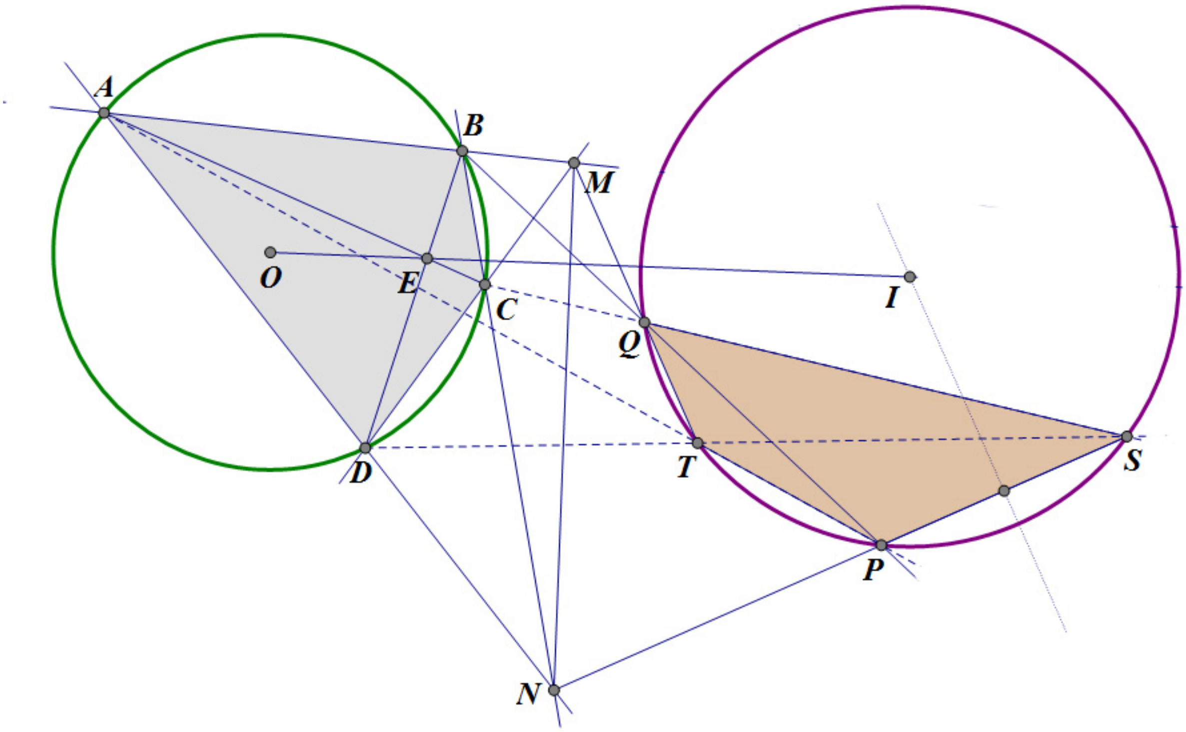
Theo tính chất cấp số cộng ta có $P_m(x) - P_k(x) = (m-k)(ax+b)$ và $P_k(x) - P_1(x) = (k-1)(ax+b)$.
Suy ra $P_m(c) = (m-k)(ac+b)$ và $P_1(c) = -(k-1)(ac+b)$ nên $P_m(c).P_1(c) < 0$.
Nhưng $P_m(c) > 0$ và $P_1(c) > 0$ nên điều suy ra ở trên là không thể.
Vậy không có tam thức nào có nghiệm. ■

Bài 3 (5 điểm) Trong mặt phẳng, cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O và có các cặp cạnh đối không song song. Gọi M, N tương ứng là giao điểm của các đường thẳng AB và CD, AD và BC. Gọi P, Q, S, T tương ứng là giao điểm các đường phân giác trong của các cặp góc $\angle MAN$ và $\angle MBN$, $\angle MBN$ và $\angle MCN$, $\angle MCN$ và $\angle MDN$, $\angle MDN$ và $\angle MAN$. Giả sử bốn điểm P, Q, S, T đôi một phân biệt.

1. Chứng minh rằng bốn điểm P, Q, S, T cùng nằm trên một đường tròn. Gọi I là tâm của đường tròn đó.

2. Gọi E là giao điểm của các đường chéo AC và BD. Chứng minh rằng ba điểm E, O, I thẳng hàng.

Lời giải 1.



1. Xét $\pmod{\pi}$, ta có

$$\begin{aligned}(PT, PQ) &\equiv (PA, PB) \\ &\equiv (AP, AB) + (BA, BP) \\ &\equiv \frac{1}{2}\Big((AD, AB) + (BA, BC)\Big).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ST, SQ) &\equiv (SD, SC)\\ &\equiv (DS, DC) + (CD, CS)\\ &\equiv \frac{1}{2}\Big((DA, DC) + (CD, CB).\Big)\end{aligned}$$

Do đó ta cần chứng minh

$$(AD, AB) + (BA, BC) \equiv (DA, DC) + (CD, CB).$$

Mà điều này hiển nhiên đúng vì

$$(AD, AB) \equiv (CD, CB) \text{ và } (BA, BC) \equiv (DA, DC).$$

2. Theo định lý Brocard, ta có $OE \perp MN$. Vì vậy ta sẽ chứng minh $OI \perp MN$.
Với trường hợp các điểm như hình vẽ (các trường hợp còn lại hoàn toàn tương tự), ta thấy rằng S là tâm bàng tiếp trong góc C của $\triangle NCD$ nên NS là phân giác ngoài của $\widehat{CND}$.
Tương tự, ta có P là tâm bàng tiếp trong góc B của $\triangle ABN$. Từ đó suy ra NP là phân giác ngoài của $\widehat{ANB}$. Vì vậy N, S, P thẳng hàng.
Cũng từ P là tâm bàng tiếp trong góc B của $\triangle ABN$, ta suy ra

$$\widehat{APN} = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot \widehat{ABN} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{ADS}.$$

Do đó A, D, S, P đồng viên.
Vì vậy $\overline{NA} \cdot \overline{ND} = \overline{NS} \cdot \overline{NP}$ hay N nằm trên trục đẳng phương của (O) và (I).
Tương tự, ta suy ra MN là trục đẳng phương của (O) và (I) hay $MN \perp OI$. ■

Bài 4 (5 điểm) Cho số nguyên dương n. Có n học sinh nam và n học sinh nữ xếp thành một hàng ngang, theo thứ tự tùy ý. Mỗi học sinh (trong số $2n$ học sinh vừa nêu) được cho một số kẹo bằng đúng số cách chọn ra hai học sinh khác giới với X và đứng ở hai phía của X. Chứng minh rằng tổng số kẹo mà tất cả $2n$ học sinh nhận được không vượt quá $\frac{1}{3}n(n^2-1)$.

Lời giải 1. Bài này cũng có thể giải bằng quy nạp theo cách sau. Ta dễ dàng kiểm tra khi $n = 1$ thì bài toán đúng. Rỏ ràng trong mọi cách sắp xếp luôn tồn tại ít nhất một cặp nam và nữ cạnh nhau. Gọi một cặp (nữ, nam) là (A, B) và M là tổng số kẹo của các học sinh còn lại khi bỏ cặp (A,B) ra, suy ra $M \le \frac{1}{3}(n-1)(n^2-2n)$. Gọi h, k lần lượt là số học sinh nam và học sinh nữ đứng bên trái cặp (A,B), khi đó $n-h-1, n-k-1$ lần lượt là số học sinh nam và nữ đứng bên phải cặp (A,B). Do đó tổng số kẹo của $2n$ người chính là M cộng với số bộ (nam, nữ, nam) và (nữ, nam, nữ) có sự tham gia của A hoặc B. Bây giờ ta đếm số bộ (nam, nữ, nam) và (nữ, nam, nữ) có sự tham gia của A hoặc B. Ta xét các trường hợp sau:

- Số bộ có cả A và B chính là số bộ (nam, A, B) và bộ (A, B, nữ), suy ra có $h + (n - k - 1)$ bộ.

- Với $h + k$ học sinh đứng bên trái bộ (A,B) và $(n - h - 1) + (n - k - 1)$ học sinh đứng bên phải thì có $hk + (n - h - 1)(n - k - 1)$ cách chọn bộ (nam, nữ) về cùng một phía đối với (A, B) và với mỗi bộ này có đúng một bộ kết hợp với A hoặc B để tạo thành bộ có sự tham gia của của A hoặc B với A, B không nằm giữa.

- Các bộ có A hoặc B nằm giữa mà không có đồng thời A, B thì có $h(n - h - 1) + k(n - k - 1)$.

Từ đây suy ra số bộ (nam, nữ, nam) và (nữ, nam, nữ) có sự tham gia của A hoặc B là:

$$h + (n - k - 1) + hk + (n - h - 1)(n - k - 1) + h(n - h - 1) + (k(n - k - 1)$$

$$= n(n - 1) - (h - k)^2 + (h - k) \leq n(n - 1).$$

Từ đây theo nguyên lý quy nạp tổng số kẹo của $2n$ học sinh bé hơn hoặc bằng $M + n(n - 1) \leq \frac{1}{3}n(n^2 - 1)$ (đpcm). ■

Bài 5 (7 điểm) Cho một nhóm gồm 5 cô gái, kí hiệu là G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, và 12 chàng trai. Có 17 chiếc ghế được xếp thành một hàng ngang. Người ta xếp nhóm người đã cho ngồi vào các chiếc ghế đó sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:

1. Mỗi người ngồi đúng 1 ghế.

2. Các cô gái xếp theo đúng thứ tự $1, 2, 3, 4, 5$.

3. Giữa G_1, G_2 có ít nhất 3 chàng trai.

4. Giữa G_4, G_5 có ít nhất 1 chàng trai và nhiều nhất là 4 chàng trai.

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp như vậy ? (Hai cách xếp được coi là khác nhau nếu tồn tại một chiếc ghế mà người ngồi ở chiếc ghế đó trong hai cách xếp là khác nhau).

Lời giải 1. Nhận xét rằng ta chỉ cần đếm cách sắp xếp các vị trí của 5 cô gái thỏa các yêu cầu của đề bài, với mỗi cách xếp đó thì sẽ có 12! cách xếp 12 chàng trai xen vào các cô gái.
Theo yêu cầu đề bài, ta có khoảng cách của G_1 và G_5 cách nhau ít nhất phải 8 vị trí nên ta đếm:

1. Với vị trí $G_1 = 1, G_5 = 9$ có một cách xếp, khi đó $G_2 = 5, G_3 = 6, G_4 = 7$.

2. Với vị trí $G_1 = 1, G_5 = 10$: Số cách xếp bằng (số cách xếp của ở bước 1) cộng với (số cách xếp mà $G_2 = 5$) và bằng $1 + 3 = 4$.

3. Với vị trí $G_1 = 1, G_5 = 11$: Số cách xếp bằng (số cách xếp của ở bước 2) cộng với (số cách xếp mà $G_2 = 5$)và bằng $4 + 6 = 10$.

4. Với vị trí $G_1 = 1, G_5 = 12$: Số cách xếp bằng (số cách xếp của bước 3) cộng với (số cách xếp mà $G_2 = 5$) và bằng $10 + 10 = 20$.

5. Với vị trí $G_1 = 1, G_5 = 13$: Số cách xếp bằng (số cách xếp của bước 4) cộng với (số cách xếp mà $G_2 = 5$) và bằng $20 + 14 = 34$.
   Ta thấy số cách xếp mà $G_2 = 5$ bằng (số cách xếp mà $G_2 = 5, G_3 = 6$) cộng với (số cách xếp mà $G_2 = 5, G_3 = 7, 8, 9, ...$).
   Mặt khác (số cách xếp mà $G_2 = 5, G_3 = 7, 8, 9...$) bằng (số cách xếp mà $G_2 = 5$ của bước trước đó) và (số cách xếp mà $G_2 = 5, G_3 = 6$) luôn bằng 4 khi $G_5 > 12$ (vì khi đó chỉ có các cách xếp $G_4 = (G_5 - 2), (G_5 - 3), (G_5 - 4), (G_5 - 5)$). Do đó

6. $G_1 = 1, G_5 = 14$: Số cách = $34 + 14 + 4 = 52$.

7. $G_1 = 1, G_5 = 15$: Số cách = $52 + 18 + 4 = 74$.

8. $G_1 = 1, G_5 = 16$: Số cách = $74 + 22 + 4 = 100$.

9. $G_1 = 1, G_5 = 17$: Số cách = $100 + 26 + 4 = 130$.

Vậy với $G_1 = 1$ thì có $1 + 4 + 10 + 20 + 34 + 52 + 74 + 100 + 130$ cách xếp và $G_1 = 2$ thì số cách xếp là bỏ đi số cuối trong dãy trên bằng $1 + 4 + 10 + 20 + 34 + 52 + 74 + 100$, ..., với $G_1 = 9$ thì số cách xếp là bỏ đi 8 số cuối trong dãy trên =1.
Vậy số cách xếp 5 cô gái thỏa mãn yêu cầu là $1.9 + 4.8 + 10.7 + 20.6 + 34.5 + 52.4 + 74.3 + 100.2 + 130$ Nên số cách xếp là $(1.9 + 4.8 + 10.7 + 20.6 + 34.5 + 52.4 + 74.3 + 100.2 + 130).12! = 1161.12!$. ■

Lời giải 2. Đánh số thứ tự các ghế từ trái sang phải là $1, 2, \ldots, 17$.
Gọi x_1 là số chàng trai được xếp bên trái G_1, x_2 là số chàng trai ở giữa G_1 và G_2, x_3 là số chàng trai ở giữa G_2 và G_3, x_4 là số chàng trai ở giữa G_3 và G_4, x_5 là số chàng trai ở giữa G_4 và G_5, x_6 là số chàng trai được xếp ở bên phải G_5.
Khi đó bộ số $(x_1, x_2, ..., x_6)$ hoàn toàn xác định vị trí các cô gái và ta có:

1. $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 12$.

2. $3 \leq x_2$.

3. $1 \leq x_5 \leq 4$.

Đổi biến $y_2 = x_2 - 3$ và $y_5 = x_5 - 1$ ta được $x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 + x_6 = 8$ với các ẩn không âm và có thêm điều kiện $y_5 \leq 3$.
Tiếp theo, sử dụng bài toán chia kẹo của Euler ở dạng $x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 8 - y_5$ ta được đáp số (phần phân ghế cho các cô gái) là $C_{12}^4 + C_{11}^4 + C_{10}^4 + C_9^4 = 1161$.

Vì còn có 12 chàng trai có thể hoán đổi vị trí ở 12 chiếc ghế dành cho họ nên số cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán là 1161.12!. ■

Lời giải 3. Gọi k là số học sinh nam giữa G_1 và G_2, suy ra có A_{12}^k cách chọn k học sinh nam trong 12 học sinh nam và xem đây là nhóm một.
Gọi h là số học sinh nam giữa G_4 và G_5, suy ra có A_{12-k}^h cách chọn h học sinh nam trong $12-k$ học sinh còn lại và cũng xem đây là nhóm hai.
Cuối cùng ta xem G_3 là nhóm ba.
Xếp ba nhóm này cùng với $12-h-k$ học sinh còn lại tạo thành một dãy gồm $15-h-k$ vị trí theo thứ tự nhóm 1, nhóm 2, nhóm 3, suy ra có $\dfrac{(15-h-k)!}{3!}$. Hay có $A_{12}^k.A_{12-k}^h.\dfrac{(15-h-k)!}{3!} = 12!.C_{15-h-k}^3$ cách xếp các học sinh sao cho có k học sinh nam ở giữa G_1, G_2 và có h học sinh nam ở giữa G_4, G_5.
Vậy số cách xếp thỏa yêu cầu đề bài là

$$\sum_{h=1}^{4}\sum_{k=3}^{12-h} 12!.C_{15-h-k}^3 = 12!\sum_{h=1}^{4} C_{12-h}^4 = 12!(C_{13}^5 - C_9^5) = 1161.12!.$$

Bài 6 (7 điểm) Cho a, b là hai số tự nhiên lẻ thoả mãn a là ước của b^2+2 và b là ước của a^2+2. Chứng minh rằng a và b là các số hạng của dãy số tự nhiên (v_n) xác định bởi

$$v_1 = v_2 = 1, v_{n+2} = 4v_{n+1} - v_n, \ \forall n \geq 1.$$

Lời giải 1. Từ giả thiết chúng ta có:

$$\frac{v_{n+3}+v_{n+2}}{v_{n+1}} = \frac{v_{n+2}+v_n}{v_n} = 4 \, \forall \, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Từ đó mà có $v_{n+2}v_n - v_{n+1}^2 = v_{n+3}v_{n+1} - v_{n+2}^2$, vậy dãy $w_n = v_{n+2}v_n - v_{n+1}^2$ là dãy hằng, dẫn đến $w_n = v_{n+2}v_n - v_{n+1}^2 = w_1 = 2$. Kết hợp với $v_{n+1} + v_n = 4v_{n+1}$ để có các cặp $(v_{n+2};\ v_{n+1})$ và $(v_{n+1};\ v_n)$ đều là các cặp nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x^2 - 4xy + y^2 + 2 = 0 \ \ (E).$$

Lại thấy rằng $a^2 + b^2 + 2 \vdots ab$, tức là tồn tại số $k \in \mathbb{Z}^+$ sao cho cặp $(a;\ b)$ là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - kxy + y^2 + 2 = 0 \ (*).$$

Xét phương trình $(*)$, giả sử $k \in \mathbb{Z}^+$ là số làm cho nó có cặp nghiệm nguyên dương. Khi đó ta giả sử cặp $(x_0;\ y_0)$ là cặp thỏa $x_0 + y_0$ đạt giá trị nhỏ nhất, do tính đối xứng nên ta có thể giả sử $x_0 \geq y_0$. Từ việc $x_0^2 - 4x_0y_0 + y_0^2 + 2 = 0$, theo định lý Viette ta dẫn đến $2 + y_0^2 \vdots x_0$ và có cặp nghiệm nữa cảm sinh là $(x_0^*;\ y_0)$ với $x_0^* = \dfrac{2+y_0^2}{x_0}$. Mặt khác lại thấy rằng hễ $y_0 < x_0$ thế thì:

$$x_0^2 \geq (y_0+1)^2 = y_0^2 + 2y_0 + 1 > y_0^2 + 2.$$

Vậy $x_0^* + y_0 = \dfrac{2+y_0^2}{x_0} + y_0 < \dfrac{x_0^2}{x_0} + y_0 = x_0 + y_0$, điều này trái với giả sử đã đặt ra! Tức là bắt buộc $x_0 = y_0$, tuy nhiên điều đó lại dẫn đến $\dfrac{2+x_0^2}{x_0^2} = k \in \mathbb{Z}^+$. Tức là x_0^2 là ước của 2, cho nên là $x_0 = y_0 = 1$, tức $k = 4$, cho nên hễ a; b thỏa yêu cầu đề bài thì nó phải là nghiệm của (E).
Bây giờ giả sử $(x;\ y)$ là cặp nghiệm của (E) với $x \geq y$, ta để ý rằng $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ có nhóm các đơn vị là

$$U_{\sqrt{3}} = \left\{-\left(2-\sqrt{3}\right)^n;\ \left(2-\sqrt{3}\right)^n;\ -\left(2+\sqrt{3}\right)^n;\ \left(2+\sqrt{3}\right)^n:\ \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Vậy nên từ việc (E) chính là $\left(x-2y-y\sqrt{3}\right)\left(x-2y+y\sqrt{3}\right) = \left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)$, sau khi lấy chuẩn (lưu ý rằng $4 \leq N(z) \neq 8\ \forall z \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \setminus U_{\sqrt{3}}$) chúng ta sẽ dẫn đến:

$$x-2y-y\sqrt{3} = \left(1-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^n;\ x-2y+y\sqrt{3} = \left(1+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^n;\ n \in \mathbb{N}.$$

Từ đó (cùng công thức truy hồi của v_n) mà rút ra: $x = v_{n+1};\ y = v_n$. ■

Lời giải 2. Gọi a, b là hai số nguyên dương lẻ, khi đó ta có các tính chất sau

1. Nếu $a = b$ là hai số thỏa điều kiện bài toán thì $a = b = 1$.

2. a, b thỏa điều kiện bài toán $\Leftrightarrow$ tồn tại k chẵn, $k \geq 4$ sao cho $a^2 + b^2 + 2 = kab$.

3. Nếu tồn tại bộ (a, b) với $a > b$ là hai số nguyên dương lẻ thỏa $a^2 + b^2 + 2 = kab$ thì $(k-1)b \leq a < kb$.

4. Nếu có bộ (a, b) với $a > b, k \geq 4$ thỏa phương trình $a^2 + b^2 + 2 = kab$ thì bộ $(b, kb-a)$ gồm các số nguyên dương lẻ thỏa phương trình $a^2 + b^2 + 2 = kab$.

Trở lại bài toán. Giả sử tồn tại một bộ (a, b) thỏa điều kiện bài toán tức là tồn tại k sao cho a, b thỏa phương trình $a^2 + b^2 + 2 = kab$, từ tính chất 1 không giảm tổng quát ta có thể giả sử $a > b \geq 1$. Đặt $u_1 = a, u_2 = b$ và $u_n = ku_{n-1} - u_{n-2}$.
Theo tính chất 4 và bằng quy nạp, ta có nếu $u_1 > u_2 > \cdots > u_k > u_{k+1}$ thì bộ (u_{k+1}, u_{k+2}) gồm các số nguyên dương lẻ thỏa phương trình $a^2 + b^2 + 2 = kab$.
Giả sử $u_k > u_{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là một dãy giảm thực sự, mà điều này lại không thể vì dãy (u_n) gồm các số nguyên dương lẻ.
Do đó tồn tại m nhỏ nhất sao cho $u_m = u_{m+1}$, tức là bộ (u_m, u_{m+1}) gồm các số nguyên dương lẻ thỏa phương trình $a^2 + b^2 + 2 = kab$, kết hợp với tính chất 1 suy ra $u_m = u_{m+1} = 1$ và từ đây suy ra $k = 4$.
Đặt $v_n = u_{m+2-n}, 1 \leq n \leq m+1$, suy ra $v_1 = v_2 = 1$, $v_n = 4v_{n-1} - v_{n-2}, \forall 3 \leq n \leq m+1$ và $v_m = b, v_{m+1} = a$ hay a, b là hai số hạng của dãy số $v_1 = v_2 = 1$, $v_n = 4v_{n-1} - v_{n-2}, \forall 3 \leq n$. ■

Bài 7 (6 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn các điều kiện:

1. $f(x)$ là toàn ánh.
2. $f(x)$ đơn điệu tăng.
3. $f(f(x)) = f(x) + 12x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải 1. Có ngay f là song ánh trên $\mathbb{R}$, vì vậy từ $f(f(0)) = f(0)$ dẫn đến $f(0) = 0$, như vậy cùng với tính tăng thì $f(x) > 0 \ \forall x > 0$ và $f(x) < 0 \ \forall x < 0$. Lại cũng vì là song ánh thế nên f khả nghịch, và ta giả sử nghịch của f là g, để mà có $x = g(x) + 12g(g(x)) \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Đặt hợp cấp n của g tại giá trị $x \in \mathbb{R}$ là $g_n(x)$, ta có ngay công thức truy hồi:

$$f_0(x) = x;\ g_1(x) = g(x);\ 12g_{n+2}(x) + g_{n+1}(x) - g_n(x) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Từ đây mà có được:

$$g_n(x) = \frac{1}{7}\left(\frac{x+3g(x)}{4^{n-1}} + \frac{x-4g(x)}{(-3)^{n-1}}\right).$$

Vì $f(x) \geq 0 \ \forall x \geq 0$, vậy nên $g(x) \geq 0 \ \forall x \geq 0$ và vì vậy $g_n(x) \geq 0 \ \forall x \geq 0$ từ đó:

$$4^{n-1}g_n(x) = \frac{x+3g(x)}{7} + \frac{x-4g(x)}{7}\left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1}.$$

Từ đây $4g(x) = -x \ \forall x > 0$, kẻo không với n đủ lớn $4^{n-1}g_n(x) < 0$ thì bỏ mẹ cuộc đời! Trường hợp $x < 0$ suy luận tương tự với chú ý rằng $g_n(x) \leq 0 \ \forall x \leq 0$, để dẫn đến kết quả của chúng ta là $4g(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$. Tức là $f(x) = 4x \ \forall x \in \mathbb{R}$. ∎

Lời giải 2. Ta dễ có f song ánh và $f(0) = 0$, do f tăng nên $f(x) > 0, \forall x > 0$ và $f(x) < 0, \forall x < 0$. Kết hợp với tính song ánh của f ta được f là một song ánh từ $\mathbb{R}^+$ vào $\mathbb{R}^+$ và từ $\mathbb{R}^-$ vào $\mathbb{R}^-$. Ta xét khi $x > 0$, từ tính chất 3 và tính chất 1 ta suy ra $f(x) > x, \forall x > 0$ và từ đây ta cũng suy ra được $f(f(x)) < 13f(x), \forall x > 0$. Kết hợp với tính chất 1 ta được:

$$x < f(x) < 13x, \forall x > 0, \quad (*).$$

Ta có các tính chất sau của hàm f

- Nếu $f(x) > kx, \forall x > 0 (k > 0)$ thì $f(f(x)) = f(x) + 12x < f(x) + \frac{12}{k}f(x)$, kết hợp với tính chất toàn ánh trên $\mathbb{R}^+$ suy ra $f(x) < (1 + \frac{12}{k})x, \forall x > 0$.
- Nếu $f(x) < hx, \forall x > 0 (h > 0)$ thì $f(f(x)) = f(x) + 12x > f(x) + \frac{12}{h}f(x)$, kết hợp với tính chất toàn ánh trên $\mathbb{R}^+$ suy ra $f(x) > (1 + \frac{12}{h})x, \forall x > 0$.

Đặt $g(x) = 1 + \dfrac{12}{x}$ và xét hai dãy số (a_n) và (b_n) thoả $a_1 = 1, b_1 = 13$, $a_n = g(b_{n-1}), b_n = g(a_{n-1})$. Ta chú ý rằng g là một hàm giảm đồng thời $a_1 < b_1$ nên (a_n) là một dãy tăng, bị chặn và (b_n) là dãy giảm, bị chặn. Nên các dãy $(a_n), (b_n)$ hội tụ, đặt $a = \lim a_n, b = \lim b_n$, suy ra hệ

$$\begin{cases} a = 1 + \dfrac{12}{b} \\ b = 1 + \dfrac{12}{a}. \end{cases}$$

Từ đây suy ra $a = b = 4$. Mặt khác từ $(*)$ và các tính chất a và tính chất b ta được:

$$a_n x < f(x) < b_n x, \forall x > 0.$$

Ở đây do hai dãy $(a_n), (b_n)$ không phụ thuộc x, nên lấy giới han ba vế và kết hợp với tính chất $4 = \lim a_n, 4 = \lim b_n$, khi đó ta được

$$f(x) = 4x, \forall x > 0.$$

Trường hợp $x < 0$ làm hoàn toàn tương tự ta được $f(x) = 4x, \forall x < 0$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy $f(x) = 4x$ là hàm duy nhất cần tìm. ■