BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM 2012

Môn : Toán
Thời gian : **180** phút (*không kể thời gian giao đề*)
Ngày thi thứ nhất : **11/01/2013**

Bài 1 ($5,0$ *điểm*) Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{\sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x}} + \sqrt{\cos^2 y + \dfrac{1}{\cos^2 y}} = \sqrt{\dfrac{20y}{x+y}} \\ \sqrt{\sin^2 y + \dfrac{1}{\sin^2 y}} + \sqrt{\cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x}} = \sqrt{\dfrac{20x}{x+y}} \end{cases}$$

Bài 2 ($5,0$ *điểm*) Cho dãy số thực (a_n) xác định bởi:

$$a_1 = 1 \text{ và } a_{n+1} = 3 - \frac{a_n + 2}{2^{a_n}} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Chứng minh dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn. Hãy tìm giới hạn đó.

Bài 3 ($5,0$ *điểm*) Cho tam giác không cân ABC. Kí hiệu (I) là đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC và D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của (I) với các cạnh BC, CA, AB. Đường thẳng đi qua E và vuông góc với BI cắt (I) tại K (khác E), đường thẳng đi qua F và vuông góc CI cắt (I) tại L (khác F). Gọi J là trung điểm KL.

a) Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

b) Giả sử B, C cố định, A thay đổi sao cho tỷ số $\frac{AB}{AC} = k$ không đổi. Gọi M, N tương ứng là các giao điểm IE, IF với (I) (M khác E, N khác F). MN cắt IB, IC tại P, Q. Chứng minh đường trung trực PQ luôn qua 1 điểm cố định.

Bài 4 (5,0 *điểm*) Cho trước một số số tự nhiên được viết trên một đường thẳng. Ta thực hiện các bước điền số lên đường thẳng như sau: tại mỗi bước, trước tiên xác định tất cả các cặp số kề nhau hiện có trên đường thẳng theo thứ tự từ trái qua phải, sau đó điền vào giữa mỗi cặp một số bằng tổng của hai số thuộc cặp đó. Hỏi sau 2013 bước, số 2013 xuất hiện bao nhiêu lần trên đường thẳng trong các trường hợp sau:

a) Các số cho trước là: 1 và 1000 ?

b) Các số cho trước là: $1, 2, ..., 1000$ và được xếp theo thức tự tăng dần từ trái qua phải ?

------------------------------------ HẾT ------------------------------------

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị không giải thích thì thêm.

LỜI GIẢI ĐỀ THI VMO 2013

Môn thi: Toán học

Ngày thứ nhất, 11/1/2013

Bài 1. Giải hệ phương trình với $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \sqrt{\sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x}} + \sqrt{\cos^2 y + \dfrac{1}{\cos^2 y}} = \sqrt{\dfrac{20y}{x+y}} \\ \sqrt{\sin^2 y + \dfrac{1}{\sin^2 y}} + \sqrt{\cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x}} = \sqrt{\dfrac{20x}{x+y}}. \end{cases}$$

LỜI GIẢI. Trước hết ta chứng minh hai tính chất sau:
Tính chất 1: Cho x, y là các số thực sao cho $xy > 0$. Khi đó

$$\sqrt{\frac{x}{x+y}} + \sqrt{\frac{y}{x+y}} \le \sqrt{2}.$$

Chứng minh tính chất 1: Do $\dfrac{x}{x+y}$ và $\dfrac{y}{x+y}$ là các số thực dương nên theo bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\sqrt{\frac{x}{x+y}} + \sqrt{\frac{y}{x+y}} \le \sqrt{2}\sqrt{\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y}} \le \sqrt{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.
Tính chất 2: Cho a, b là các số thực dương thỏa $a + b = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} \ge \sqrt{10}.$$

Chứng minh tính chất 2: Bình phương hai vế. ta được bất đẳng thức tương đương

$$a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 2\sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + ab + \frac{1}{ab}} \ge 10$$

Do

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}=4,$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2,$$

$$ab+\frac{1}{ab}=ab+\frac{1}{16ab}+\frac{15}{16ab} \geq \frac{1}{2}+\frac{15}{4}=\frac{17}{4}.$$

Từ đây suy ra trực tiếp tính chất 2. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\frac{1}{2}$.

Quay lại bài toán. Cộng hai phương trình theo vế và áp dụng tính chất 2 ta được

$$\sqrt{\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}}+\sqrt{\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}}+\sqrt{\cos^2 y+\frac{1}{\cos^2 y}}+\sqrt{\sin^2 y+\frac{1}{\sin^2 y}} \geq 2\sqrt{10}.$$

Mặt khác ta lại có tính chất 1 nên

$$\sqrt{\frac{20x}{x+y}}+\sqrt{\frac{20y}{x+y}} \leq 2\sqrt{10}.$$

Từ đây suy ra $x=y$ và $\sin^2 x=\cos^2 x$, hay $x=y=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Thử lại vào hệ thấy thỏa mãn. Vậy tất cả các nghiệm của hệ phương trình là $x=y=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$.■

Bài 2. Cho dãy số thực (a_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=3-\dfrac{a_{n+2}}{2^{a_n}} \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn. Hãy tìm giới hạn đó.

LỜI GIẢI. Xét hàm số $f(x)=3-\frac{x+2}{2^x}$ với $x \in (1;2)$. Rõ ràng hàm số này liên tục, có đạo hàm trên $(1;2)$ và

$$f'(x)=\frac{(x+2)\ln 2-1}{2^x}>0, \forall x \in (1,2).$$

Và từ đây ta suy ra hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(1,2)$ và $1<f(x)<2, \forall x \in (1,2)$.
Từ giả thiết ta có $a_2=\frac{3}{2}>a_1, a_2 \in (1;2)$ và $a_{n+1}=f(a_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Nên $a_3>a_2$ và $a_3 \in (1;2)$.
Giả sử $a_{k+1}>a_k$ và $a_k, a_{k+1} \in (1;2)$, khi đó $f(a_{k+1}>f(a_k)$ và $f(a_{k+1} \in (1;2)$. Hay $a_{k+2}>a_{k+1}$ và $a_{k+2} \in (1,2)$.

Vậy theo nguyên lý quy nạp ta được (a_n) là một dãy tăng và bị chặn trên bởi 2 nên dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn, gọi giới hạn này là x khi đó x là nghiệm của phương trình

$$x = 3 - \frac{x+2}{2^x}, x \in [\frac{3}{2}, 2]. \quad (*)$$

Bây giờ ta chứng minh phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất là $x = 2$.
Thật vậy đặt $g(x) = x + \dfrac{x+2}{2^x} - 3$. Khi đó ta có

$$g'(x) = \frac{2^x + 1 - (x+2)\ln 2}{2^x} \geq \frac{2^{\frac{3}{2}} + 1 - (x+2)\ln 2}{2^x} \geq \frac{2\sqrt{2} + 1 - 4\ln 2}{2^x} > 0, \forall x \in [\frac{3}{2}, 2].$$

Suy ra hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên $[\frac{3}{2}, 2]$, nên phương trình $(*)$ có tối đa một nghiệm trên $[\frac{3}{2}, 2]$. Mà $g(2) = 0$ nên phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất là $x = 2$ trên $[\frac{3}{2}, 2]$.
Vậy $\lim a_n = 2$. ■

Lời giải. Trước hết ta có nhận xét sau: Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$ thì với mọi $u, v \in [a, b], u \neq v$ ta có

$$\left| \frac{f(u) - f(v)}{u - v} \right| \leq \max_{[a,b]} |f'(x)|.$$

Đặt $f(x) = 1 - \dfrac{x+2}{2^x}$ với $x \in [1, 2]$, khi đó $f(2) = 0$ và $f'(x) = \dfrac{(x+2)\ln 2 - 1}{2^x} > 0, \forall x \in [1, 2]$. Từ đây suy ra $f(x) \leq 0, \forall x \in [1, 2]$ hay $\dfrac{x+2}{2^x} \leq 1, \forall x \in [1, 2]$. Do đó

$$f'(x) = \frac{x+2}{2^x}\ln 2 - \frac{1}{2^x} \leq \ln 2 - \frac{1}{2^x} \leq \ln 2 - \frac{1}{4} < \frac{3}{4}, \forall x \in [1, 2].$$

Từ giả thiết ta có $a_{n+1} = 2 + f(a_n)$ và bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được $a_n \in (1, 2), \forall n \in \mathbb{N}^*$ và do $a_{n+1} - 2 = f(a_n) - f(2)$ suy ra

$$|a_{n+1} - 2| = \left| \frac{f(a_n) - f(2)}{a_n - 2} \right| |a_n - 2|, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do có nhận xét ở đầu bài và $\max\limits_{[1,2]} f'(x) \leq \dfrac{3}{4}$ nên

$$|a_{n+1} - 2| \leq \frac{3}{4}|a_n - 2|, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đây suy ra

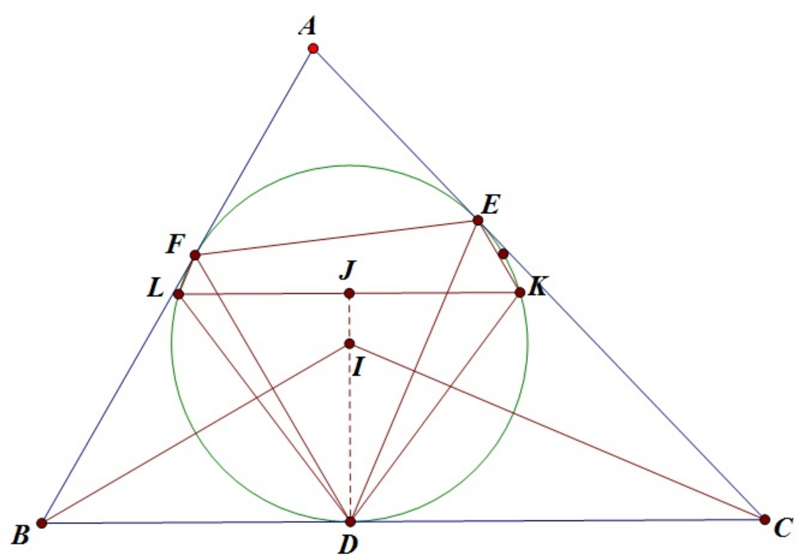
$$|a_n - 2| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Hay $\lim a_n = 2$. ■

Bài 3. Cho tam giác không cân ABC. Kí hiệu (I) là đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC và D, E, F là các tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB. Đường thẳng qua E vuông góc BI cắt (I) tại K khác E, đường thẳng qua F vuông góc CI cắt (I) tại L khác F. Gọi J là trung điểm KL.

a) Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

b) Giả sử B, C cố định, A thay đổi sao cho tỷ số $\dfrac{AB}{AC} = k$ không đổi. Gọi M, N tương ứng là các giao điểm IE, IF với (I) (M khác E, N khác F). MN cắt IB, IC tại P, Q. Chứng minh đường trung trực PQ luôn qua 1 điểm cố định.



Hình 1:

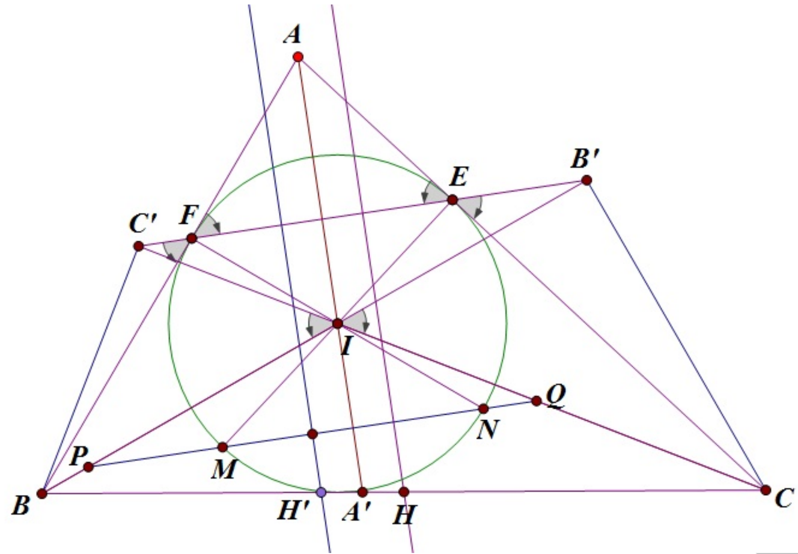
Lời giải.

Phần a). Theo tính chất tiếp tuyến cắt nhau và giả thiết ta có các dây cung song song với nhau, cụ thể $FL||ED$ và $EK||FD$.
Do đó $DL = EF = DK$ nên D nằm trên trung trực của LK, vì I cũng nằm trên trung trực của LK cùng với M là trung điểm của LK dẫn đến I, J, D thẳng hàng.

Phần b). Kẻ đường phân giác trong AA' của tam giác ABC và giả thiết có ngay A' cố định.
Giả sử đường thẳng EF cắt các đường thẳng IB, IC lần lượt ở B', C' tương ứng.
Khi đó ta có

$$\widehat{B'IC} = \frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2} = \widehat{B'EC}.$$

Do đó tứ giác $B'EIC$ nội tiếp và suy ra $BB' \perp B'C$.
Chứng minh tương tự ta có $CC' \perp C'B$, kết hợp lại ta suy ra tứ giác $B'CBC'$ nội tiếp đường tròn đường kính BC với tâm là H.
Mặt khác $EF||PQ$ và $EF \perp AA'$ nên đường trung trực của PQ và $B'C'$ đều song song



Hình 2:

với AA'.
Gọi H′ là điểm đối xứng với H qua A′ , thì H′ cố định và suy ra H′ nằm trên đường trung trực của PQ. ∎

Bài 4. Cho trước một số số tự nhiên được viết trên một đường thẳng. Ta thực hiện các bước điền số lên đường thẳng như sau: tại mỗi bước, trước tiên xác định tất cả các cặp số kề nhau hiện có trên đường thẳng theo thứ tự từ trái qua phải, sau đó điền vào giữa mỗi cặp một số bằng tổng của hai số thuộc cặp đó. Hỏi sau 2013 bước, số 2013 xuất hiện bao nhiêu lần trên đường thẳng trong các trường hợp sau:

a) Các số cho trước là: 1 và 1000?

b) Các số cho trước là: $1, 2, ..., 1000$ và được xếp theo thức tự tăng dần từ trái qua phải ?

Lời giải. Ta xét bài toán với hai số nguyên ban đầu trên đường thẳng là $x > y > 0$. Đặt $D_{2013}(x, y)$ là số các số 2013 xuất hiện trên đường thẳng sau 2013 bước. Trước hết ta có các nhận xét và định nghĩa sau:

- Các số xuất hiện trên đường thẳng sau các bước đều có dạng $mx + ny$ và ta ký hiệu số này là $(m; n)$.
- Dễ dàng chứng minh bằng quy nạp sau k bước có $2^k + 1$ số trên đường thẳng. Và trừ số đứng chính giữa là $(1, 1)$ thì các số ở nửa đầu có $m > n$ và nửa sau có $m < n$.
- $D_n(x, y) = D_{2013}(x, y), \forall n \geq 2013$.

Định nghĩa quy trình Oclit với phép toán trừ: Gọi $(a, b) = 1$ với a, b là các số nguyên dương.

- Một bước Oclit là một quy tắc biến đổi $(a, b) = (a - b, b)$ với $a > b$.

- Ta đặt $Oc(a, b) = k$ nếu ta thực hiện đúng k bước Oclit để biến đổi $(a, b) = (1, 1)$.

Bổ đề 1: Sau k bước thì mọi số $(m; n)$ đều thỏa mãn $(m, n) = 1$, xuất hiện tối đa đúng một lần và có $Oc(m, n) \leq k - 1$.

Chứng minh bằng quy nạp: Ta có các số xuất hiện trên đường thẳng sau k bước với hai số ban đầu là a, b chính là hợp thành theo thứ tự của các số thực hiện sau $k - 1$ bước với các cặp số ban đầu là $x, x + y$ và $x + y, y$. Do tính đối xứng của các số, nên ta xét các số thuộc nửa đầu. Khi đó với mọi số $(m; n)$, $m > n$ đều tồn tại m', n' sao cho $mx + ny = m'x + n'(x + y)$ với $(m', n') = 1$ và $Oc(m', n') \leq k - 2$. Do $m = m' + n', n = n'$ và $(m, n) = (m' + n', n') = (m', n')$ nên $Oc(m, n) \leq k - 1$. Vậy theo nguyên lý quy nạp bổ đề 1 được chứng minh.

Bổ đề 2: Đặt $S_k = \{(a; b) | (a, b) = 1, Oc(a, b) = k - 1\}$. Khi đó $|S_k| = 2^{k-1}$.

Chứng minh bằng quy nạp: Ta có với mọi $(a, b) \in S_k$ thì $(a + b, b)$ và $(a, a + b)$ đều thuộc S_{k+1} và ngược lại. Vậy theo quy nạp bổ đề 2 được chứng minh. Từ bổ đề này nếu đặt $T_k = \{(a; b) | (a, b) = 1, Oc(a, b) \leq k - 1\}$ thì $|T_k| = 2^k - 1$.

Bổ đề 3: Số nghiệm nguyên dương $(x; y)$ với $(x, y) = 1$ của phương trình $x + 2y = h$ là $\dfrac{\phi(h)}{2}$.

Bổ đề 4: Gọi T là số các số 2013 xuất hiện trên đường thẳng sau 2013 bước. Khi đó $T = 2D_{2013}(1, 2) - 2$.

Chứng minh: Từ giả thiết ta có:

$$T = \sum_{k=1}^{999} D_{2013}(k, k + 1).$$

Mà $D_{2013}(k, k + 1) = D_{2014}(1, k) - D_{2013}(1, k + 1) = D_{2013}(1, k) - D_{2013}(1, k + 1)$ (do nhận xét 3).
Nên $T = 2D_{2013}(1, 2) - T_{2013}(1, 1000) = 2D_{2013}(1, 2) - 2$ (đpcm).

Trở lại bài toán.
Câu a: Từ các bổ đề trên số các số 2013 xuất hiện trên đường thẳng sau 2013 bước chính là số nghiệm của phương trình

$$x + 1000y = 2013, (x, y) = 1.$$

Rỏ ràng hệ này có hai nghiệm là $(13, 2)$ và $(1, 1012)$. Vậy có 2 số 2013 xuất hiện trên đường thẳng.

Câu b: Sau k bước trừ hai số $(0; 1)$ và $(1; 0)$ thì $2^k - 1$ số còn lại đều có $Oc(m, n) \leq k - 1$ mà theo bổ đề 2 thì có tất cả là $2^k - 1$ số có $Oc(m, n) \leq k - 1$ và do mỗi số xuất hiện tối đa một lần nên các số $(m; n)$ có $Oc(m, n) \leq k - 1$ đều xuất hiện trên đường thẳng sau k bước đúng một lần. Khi đó theo bổ đề 3 và bổ đề 4 thì $T = \phi(2013) - 2 = 1200 - 2 = 1198$. ∎

Ngày thứ hai, 12/1/2013

Bài 5. Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa $f(0) = 0; f(1) = 2013$ và

$$(x-y)\left(f\left(f^2(x)\right) - f\left(f^2(y)\right)\right) = (f(x) - f(y))\left(f^2(x) - f^2(y)\right)$$

đúng với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, trong đó $f^2(x) = (f(x))^2$

Lời giải. Cho $y = 0$ để mà có $xf\left(f^2(x)\right) = f^3(x)$, từ đó nếu chúng ta nhân 2 vế với xy và giản lược đi sẽ có:

$$x^2 f^3(y) + y^2 f^3(x) = xyf(x)f(y)\left(f(x) + f(y)\right).$$

Thay $y = 1$ với $k = 2013$, chúng ta có:

$$f^3(x) + k^3x^2 = kx\left(f(x) + k\right)f(x).$$

Từ đây dẫn đến được:

$$(f(x) - kx)\left(f^2(x) - k^2x\right) = 0.$$

Như vậy, chúng ta thấy là hoặc $f(x) = kx$ hoặc $f^2(x) = k^2x$ với mọi x. Hễ với $x \notin \{0; 1\}$ mà $f^2(x) = k^2x$ (tất nhiên $x > 0$), từ việc $xf\left(f^2(x)\right) = f^3(x)$, $(*)$, chúng ta có:

$$xf(k^2x) = k^2xf(x).$$

Từ đó $f^2(k^2x) = k^4f^2(x) = k^5x$, mà vì $f^2(k^2x) \in \{k^6x^2; k^4x\}$, cho nên điều này chỉ có thể xảy ra với và chỉ với $x = \frac{1}{k}$.

Nếu $f^2\left(\frac{1}{k}\right) = k^2\left(\frac{1}{k}\right) = k$ thì từ $(*)$ sẽ có:

$$\frac{1}{k}f(k) = kf\left(\frac{1}{k}\right).$$

Mà $f(k) = k^2$, cho nên dẫn tới:

$$k = kf\left(\frac{1}{k}\right).$$

Tức là đem đến sự mâu thuẫn sau: $f^2\left(\frac{1}{k}\right) = k = 1$.
Vậy $f(x) = 2013x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. ∎

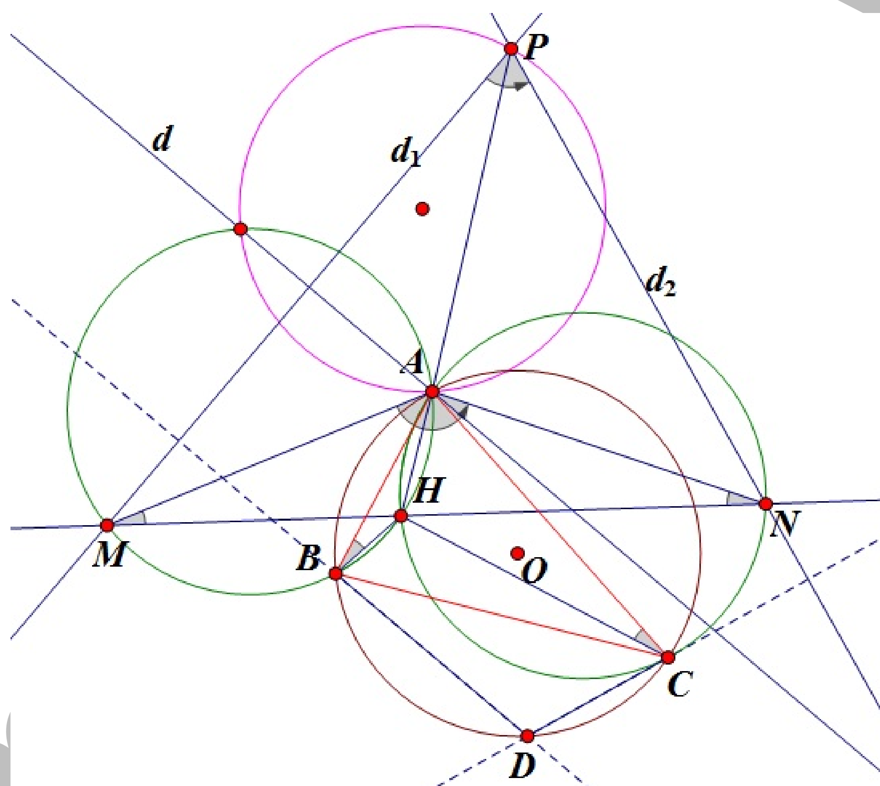
Bài 6. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) và D thuộc cung BC không chứ điểm A. Đường thẳng Δ thay đổi đi qua trực tâm H của tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH, ACH tại M, N (M, N khác H).

a) Xác định vị trí của đường thẳng Δ để diện tích tam giác AMN lớn nhất.

b) Kí hiệu d_1 là đường thẳng qua M vuông góc DB, d_2 là đường thẳng qua N vuông góc DC. Chứng minh giao điểm P của d_1 và d_2 luôn thuộc 1 đường tròn cố định.

LỜI GIẢI. Phần a).
Ta dễ dàng chứng minh được $\widehat{AMH} = \widehat{ABH} = \widehat{ACH} = \widehat{ANH}$.
Do đó tam giác $AM = AN$ và cũng từ trên ta suy ra $\widehat{MAN} = 2A$ nên diện tích tam giác AMN chỉ phụ thuộc vào AM.
Mà AM lớn nhất khi và chỉ khi AM là đường kính của (ABH) hay đường thẳng Δ vuông góc với AH.

Phần b).
Trước hết ta thấy rằng $\widehat{MPN} + \widehat{BDC} = 180^\circ$ nên $\widehat{MPN} = A$.



Hình 3:

Xét đường tròn tâm A bán kính AM, có $N \in (A; AM)$ và $\widehat{MAN} = 2A = 2\widehat{MPN}$ nên $P \in (A, AM)$.
Kẻ đường thẳng d qua A và song song với BD suy ra d cố định, và $d \perp d_1$. Cùng với $AM = AP$ suy ra P đối xứng với M qua d.
Mà $M \in (ABH)$ nên P nằm trên đường tròn là ảnh của (ABH) qua phép đối xứng trục là đường thẳng d. ∎

Bài 7. Tìm tất cả bộ sắp thứ tự $\left(a, b, c, a', b', c'\right)$ thỏa

$$\begin{cases} ab + a'b' \equiv 1 \pmod{15} \\ ac + a'c' \equiv 1 \pmod{15} \\ bc + b'c' \equiv 1 \pmod{15}. \end{cases}$$

Với $a, b, c, a', b', c' \in \{0, 1...14\}$

Lời giải. Trước hết để đơn giản ta quy ước $x \equiv r(\mod p)$ là $x = r$ nếu ta đang xét trên $\mod p$.
Ta xét trong $\mod 3$, hệ này gọi là hệ (I)

$$\begin{cases} ab + a'b' \equiv 1(\mod 3) \\ bc + b'c' \equiv 1(\mod 3) \\ ca + c'a' \equiv 1(\mod 3). \end{cases}$$

Ta có các trường hợp sau

1. $a, b, c, a', b', c' \in \{1, 2\}$, khi đó trong 3 số a, b, c phải có hai số bằng nhau, không giảm tổng quát $a = b$ suy ra $a' = b'$. Khi đó $a^2 + a'^2 \equiv 1(\mod 3)$, do $a^2, a'^2 \equiv 1(\mod 3)$ nên phương trình vô nghiệm. Vậy trong 6 số này phải có ít nhất một số bằng 0.
2. Không giảm tổng quát, giả sử $a = 0$. Ta xét các trường hợp sau:
   - $a = b = c = 0$, khi đó $a' = b' = c'$ và $a'^2 = 1$ (suy ra có hai số a'). Vậy trong trường hợp này có tất cả là $2.2 = 4$ nghiệm kể cả hoán vị hai bộ.
   - $a = b = 0$ và $c \neq 0$, khi đó $a' = b' = c'$ và $a'^2 = 1$ (suy ra có hai số a'). Vậy trong trường hợp này có tất cả là $2.3.4 = 24$ nghiệm kể cả hoán vị hai bộ.
   - $a = 0, b, c \neq 0$, khi đó ta có $a'b' = a'c' = 1$ và $bc + b'^2 = 1$, do $b'^2 = 1$ nên $bc \equiv 0(\mod 3)$ (vô lý). Vậy trong trường hợp này hệ vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình (I) có tất cả là $4 + 24 = 28$ nghiệm.
Xét trong $\mod 5$, hệ này gọi là hệ (II)

$$\begin{cases} ab + a'b' \equiv 1(\mod 5) \\ bc + b'c' \equiv 1(\mod 5) \\ ca + c'a' \equiv 1(\mod 5). \end{cases}$$

Ta xét các trường hợp sau:

1. $a, b, c, a', b', c' \neq 0$ từ hệ phương trình suy ra $ab, bc, ca \in \{2, 3, 4\}$.
   - Nếu trong 3 số a, b, c có hai số bằng nhau, giả sử $a = b$ suy ra $a' = b'$, khi đó $a^2 + a'^2 = 1$. Mà phương trình này vô nghiệm (do $a, b, c, a', b', c' \neq 0$). Vậy trong trường hợp này hệ (II) vô nghiệm.

- Ba số a, b, c đôi một khác nhau, suy ra ab, bc, ca cũng đôi một khác nhau. Không giảm tổng quát ta giả sử $ab = 2, bc = 3, ca = 4$, hệ này có hai nghiệm là $(1, 2, 4)$, $(4, 3, 1)$ và ứng với mỗi bộ nghiệm này có đúng hai bộ (a', b', c') thỏa mãn hệ phương trình. Vậy trong trường hợp này có tất cả là $2.4.3! = 48$ nghiệm thỏa hệ (II).

2. Trong 6 số a, b, c, a', b, c' có ít nhất một số bằng 0. Không giảm tổng quát giả sử $a = 0$, khi đó $a', b', c' \neq 0$.

   - $a = b = c = 0$, khi đó $a' = b' = c'$ và $a'^2 = 1$ (có hai số a'). Vậy trong trường hợp này hệ có $2.2 = 4$ nghiệm kể cả hoán vị.
   - $a = b = 0, c \neq 0$, khi đó $a' = b' = c'$ và $a'^2 = 1$ (có hai số a'). Vậy trong trường hợp này hệ có $3.2.4 = 24$ nghiệm kể cả hoán vị.
   - $a = 0, b, c \neq 0$, khi đó $a'b' = a'c' = 1, bc + b'^2 = 1$. Do $b, c, b' \neq 0$ và $b'^2 = 1$ hoặc $b'^2 = -1$ nên $b'^2 = -1, bc = 2$. Ta có b có 4 cách chọn và ứng với mỗi b thì có đúng một c, b' có hai cách chọn và ứng với mỗi b' có đúng một a'. Vậy trong trường hợp này có tất cả là $3.2.8 = 48$ nghiệm kể cả hoán vị.

Vậy hệ này có tất cả là $4 + 24 + 48 + 48 = 124$ nghiệm thỏa hệ (II).

Trở lại bài toán. Với mỗi bộ số (x, r_1, r_2) thỏa $x \equiv r_1 \pmod 3$ và $x \equiv r_2 \pmod 5$ luôn tồn tại duy nhất r sao cho $x \equiv r \pmod{15}$. Do đó số nghiệm của hệ ban đầu là $28.124 = 3472$. ■