SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐỒNG THÁP

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT CẤP TỈNH NĂM HỌC 2010 - 2011

Đề chính thức

ĐỀ THI MÔN TOÁN

Thời gian làm bài: 180 *phút (không kể thời gian phát đề)*

Ngày thi: 10 tháng 10 năm 2010

(Đề thi gồm có: 01 trang)

Câu 1: (*3 điểm*)

Giải phương trình $\sqrt{x^4 - x^2 + 4} + \sqrt{x^4 + 20x^2 + 4} = 7x$

Câu 2: (*3 điểm*)

Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Gọi AE, BF, CK là ba chiều cao và H là trực tâm của tam giác ABC . Biết AE = 3, CK = $2\sqrt{2}$ và BH = 5HF. Chứng minh $\widehat{ABC} = 45^0$.

Câu 3: (*3 điểm*)

Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình

$$2x^2 + 3y^2 - 5xy + 3x - 2y - 3 = 0$$

Câu 4: (*3 điểm*)

Cho dãy số *(u_n)* xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \dfrac{4u_{n-1} + 2}{u_{n-1} + 3} \qquad (n \geq 2) \end{cases}$$

Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số *(u_n)*.

Câu 5: (*2 điểm*)

Xét khai triển $\left[\left(\dfrac{m-2}{n}\right)x^2 + x - \dfrac{m}{n}\right](x+1)^n$ với $m, n \in N^*$ và $2 < m < n$.

Chứng minh rằng trong khai triển hệ số của x^m bằng C_n^{m-2} .

Câu 6: (*3 điểm*)

Cho hai số dương *x, y* thỏa mãn điều kiện $x + y = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \left(1 + x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(1 + y + \frac{1}{y}\right)^3$$

Câu 7: (*3 điểm*)

Trên mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho elip (E) : $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ có hai tiêu điểm F_1 và F_2. M là một điểm di động trên elip (E). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MF_1F_2 . Tìm quỹ tích điểm I. **HẾT**.

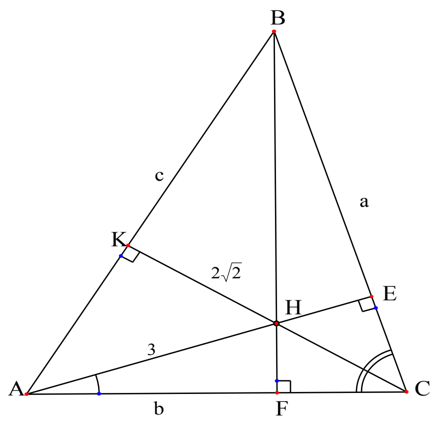
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT CẤP TỈNH**
ĐỒNG THÁP **NĂM HỌC 2010 - 2011**

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC MÔN TOÁN
(Hướng dẫn chấm và biểu điểm gồm có 05 trang)

I. Hướng dẫn chung

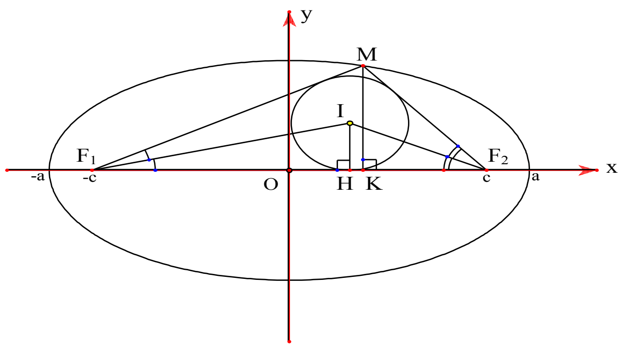
1) Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng thì cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.
2) Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải bảo đảm không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm.

II. Đáp án và thang điểm

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1	Giải phương trình: $\sqrt{x^4 - x^2 + 4} + \sqrt{x^4 + 20x^2 + 4} = 7x$ (1)	**3đ**
	• Điều kiện: $x \ge 0$ • Dễ thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (1). • Với $x > 0$, chia cả hai vế của phương trình (1) cho x, ta được phương trình $\sqrt{x^2 - 1 + \frac{4}{x^2}} + \sqrt{x^2 + 20 + \frac{4}{x^2}} = 7$ (2) Đặt $t = x^2 + \frac{4}{x^2}$, điều kiện $t \ge 4$, phương trình (2) trở thành $\sqrt{t-1+} + \sqrt{t+20} = 7$ $\Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 19t - 20} = 15 - t$ $\Leftrightarrow \begin{cases} t \le 15 \\ t^2 + 19t - 20 = (15-t)^2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow t = 5$. • Với $t = 5$ ta được: $x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$ • Do điều kiện $x > 0$ nên phương trình (1) chỉ nhận các nghiệm là $x = 1; x = 2$ • Vậy phương trình (1) có hai nghiệm $x = 1$; $x = 2$.	0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5
Câu 2	Cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Gọi AE, BF, CK là ba chiều cao và H là trực tâm của tam giác ABC . Biết AE = 3, CR = $2\sqrt{2}$ và BH = 5HF. Chứng minh $\widehat{ABC} = 45^0$.	**3đ**
	 • Gọi độ dài ba cạnh của tam giác ABC lần lượt là a, b, c Ta có AE.BC = CK.AB $\Leftrightarrow 3a = 2\sqrt{2}.c$ • Theo định lý sin ta có $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sin A} = \frac{3}{\sin C}$ (1)	0.25 0.25

	• Theo giả thiết ta có $BH = 5HF \Rightarrow BF = 6HF$ Mặt khác $AF = BF.\cot A$ $$AF = HF.\cot \widehat{EAC} = HF.\cot\left(\frac{\pi}{2} - C\right) = HF.\tan C$$ $\Rightarrow 6.\cot A = \tan C \Leftrightarrow 6\cot A.\cot C = 1$ (2) • Từ (1) $\Leftrightarrow \frac{9}{\sin^2 C} = \frac{8}{\sin^2 A} \Leftrightarrow 9\left(1 + \cot^2 C\right) = 8\left(1 + \cot^2 A\right)$ (3) • Từ (2) và (3) $\Rightarrow 32\cot^4 A - 4\cot^2 A - 1 = 0$. Vì $\cot A > 0$ nên $\cot A = \frac{1}{2}$ và $\cot C = \frac{1}{3}$ • Suy ra $\cot B = -\cot(A + C) = \frac{1 - \cot A.\cot C}{\cot A + \cot C} = 1$ • Vậy $\widehat{ABC} = 45^0$ (đpcm).	0.5 0.5 0.25 0.5 0.5 0.25
Câu 3	Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $$2x^2 + 3y^2 - 5xy + 3x - 2y - 3 = 0 \ (1)$$	**3đ**
	• Xem phương trình (1) là phương trình bậc hai đối với x: $$(1) \Leftrightarrow 2x^2 + \left(3 - 5y\right)x + 3y^2 - 2y - 3 = 0$$ • Để có x nguyên thì điều kiện cần là $$\Delta = \left(3 - 5y\right)^2 - 4.2\left(3y^2 - 2y - 3\right) = y^2 - 14y + 33 = k^2$$ là số chính phương (k nguyên, không âm) • Lại xem $y^2 - 14y + 33 - k^2 = 0$ là phương trình bậc hai đối với y. Để có y nguyên thì điều kiện cần là: $$\delta' = 49 - \left(33 - k^2\right) = 16 + k^2 = m^2$$ là một số chính phương (m nguyên dương). Do $m^2 - k^2 = 16 \Leftrightarrow \left(m + k\right)\left(m - k\right) = 16$ và $16 = 8.2 = 4.4 = 16.1$ nên ta suy ra được • <u>Trường hợp 1</u>: $\begin{cases} m + k = 8 \\ m - k = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ k = 3 \end{cases}$ Suy ra phương trình (1) có nghiệm $\left(x;y\right) = \left(15;12\right),\left(1;2\right)$. • <u>Trường hợp 2</u>: $\begin{cases} m + k = 4 \\ m - k = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ k = 0 \end{cases}$. Suy ra phương trình (1) có nghiệm $\left(x;y\right) = \left(13;11\right),\left(3;3\right)$. • <u>Trường hợp 3</u>: $\begin{cases} m + k = 16 \\ m - k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{17}{2} \\ k = \frac{15}{2} \end{cases}$ (loại). • Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm là $\left(x;y\right) = \left(15;12\right),\left(1;2\right),\left(13;11\right),\left(3;3\right)$.	0.5 0.5 0.5 0.25 0.5 0.5 0.25
Câu 4	Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \frac{4u_{n-1} + 2}{u_{n-1} + 3} \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$ Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n).	**3đ**
	Sử dụng các dãy phụ để chuyển dãy đã cho về dãy xác định một cấp số nhân, khi đó áp dụng công thức.	

	• Đặt $u_n = x_n + 2$, thay vào công thức truy hồi ta được $$x_n + 2 = \frac{4\left(x_{n-1}+2\right)+2}{x_{n-1}+5} \Rightarrow x_n = \frac{2x_{n-1}}{x_{n-1}+5}$$ • Suy ra: $\frac{1}{x_n} = \frac{x_{n-1}+5}{2x_{n-1}} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2x_{n-1}}$ (1) • Ta lại đặt $y_n = \frac{1}{x_n}$, thay vào (1) ta được $y_n = \frac{5}{2}y_{n-1} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y_n + \frac{1}{3} = \frac{5}{2}\left(y_{n-1}+\frac{1}{3}\right)$ • Tiếp tục đặt: $v_n = y_n + \frac{1}{3} \Rightarrow v_1 = -\frac{2}{3}$ và $v_n = \frac{5}{2}v_{n-1}, \forall n \ge 2$ • Suy ra dãy $\left(v_n\right)$ là một CSN có công bội $q = \frac{5}{2}$. Áp dụng công thức tính số hạng tổng quát của một CSN ta được $$v_n = v_1.q^{n-1} = -\frac{2}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}, \quad \forall n \ge 2$$ Từ đó ta sẽ được $$y_n = -\frac{2}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{3} \Rightarrow x_n = \frac{1}{-\frac{2}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{3}} \Rightarrow u_n = \frac{4.5^{n-1} - 2^{n-1}}{2.5^{n-1} + 2^{n-1}}$$ • Vậy công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) là $u_n = \frac{4.5^{n-1} - 2^{n-1}}{2.5^{n-1} + 2^{n-1}}$.	0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5
Câu 5	Xét khai triển $\left[\left(\frac{m-2}{n}\right)x^2 + x - \frac{m}{n}\right](x+1)^n$ với $m,n \in N^*$ và $2 < m < n$. Chứng minh rằng trong khai triển hệ số của x^m bằng C_n^{m-2}.	**2đ**
	• Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x + ... + C_n^n x^n$ Suy ra hệ số của x^m trong khai triển $\left[\left(\frac{m-2}{n}\right)x^2 + x - \frac{m}{n}\right](x+1)^n$ là $$A_m = \left(\frac{m-2}{n}\right)C_n^{m-2} + C_n^{m-1} - \frac{m}{n}C_n^m.$$ • Ta có $C_n^k = \frac{n-k+1}{k}.C_n^{k-1}$, nên $$A_m = \left(\frac{m-2}{n}\right)C_n^{m-2} + C_n^{m-1} - \frac{m}{n}.\frac{n-m+1}{m}C_n^{m-1}$$ $$= \left(\frac{m-2}{n}\right)C_n^{m-2} + \frac{m-1}{n}C_n^{m-1}$$ $$= \left(\frac{m-2}{n}\right)C_n^{m-2} + \frac{m-1}{n}.\frac{n-(m-1)+1}{m-1}C_n^{m-1}$$ $= C_n^{m-2}$ (đpcm).	0.5 0.5 0.25 0.25 0.25 0.25
Câu 6	Cho hai số dương x, y thỏa mãn điều kiện $x + y = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = \left(1 + x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(1 + y + \frac{1}{y}\right)^3$	**3đ**
	• Theo bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương, ta có: $$\left(1 + x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{7}{2}\right)^3 + \left(\frac{7}{2}\right)^3 \ge 3.\frac{7}{2}.\frac{7}{2}\left(1 + x + \frac{1}{x}\right) \quad (1)$$	0.5

	$\left(1+y+\frac{1}{y}\right)^3+\left(\frac{7}{2}\right)^3+\left(\frac{7}{2}\right)^3\ge 3.\frac{7}{2}.\frac{7}{2}\left(1+y+\frac{1}{y}\right)\quad(2)$ • Cộng từng vế của (1), (2), ta có $\left(1+x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(1+y+\frac{1}{y}\right)^3+\frac{7^3}{2}\ge 3\left(\frac{7}{2}\right)^2.\left(2+x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ • Mặt khác ta lại có $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ge 4\sqrt{xy}.\sqrt{\frac{1}{xy}}=4\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ nên $\left(1+x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(1+y+\frac{1}{y}\right)^3+\frac{7^3}{2}\ge 3\left(\frac{7}{2}\right)^2.\left(2+x+y+\frac{4}{x+y}\right)$ Theo giả thiết $a+b=4$ nên $S+\frac{7^3}{2}\ge 3.\left(\frac{7}{2}\right)^2.7\Leftrightarrow S\ge\frac{343}{4}$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}1+x+\frac{1}{x}=\frac{7}{2}\\1+y+\frac{1}{y}=\frac{7}{2}\\x=y\\x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow x=y=2$ • Vậy $\min S=\frac{343}{4}$.	0.5 0.5 0.5 0.5 0.5
Câu 7	Trên mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho elip (E) : $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ có hai tiêu điểm F_1 và F_2. M là một điểm di động trên elip (E). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MF_1F_2. Tìm quỹ tích điểm I.	**3đ**
	 • Theo giả thiết ta có $a=5$, $b=4\Rightarrow c=3$ Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm di động trên elip $I(x;y)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MF_1F_2. • Dựng $IH\perp Ox$, $MK\perp Ox$ Gọi p là nửa chu vi tam giác MF_1F_2 , ta có $p=\frac{1}{2}(MF_1+MF_2+F_1F_2)=\frac{1}{2}(2a+2c)=a+c=8$ $\Rightarrow HF_1=p-HF_2=(a+c)-\left(a-\frac{c}{a}x_0\right)=c+\frac{c}{a}x_0\quad(1)$ Mà $HF_1=x_H-x_{F_1}=x+c\quad(2)$ • Từ (1) và (2) $\Rightarrow x+c=c+\frac{c}{a}x_0\Rightarrow x_0=\frac{ax}{c}=\frac{5x}{3}$	0.25 0.5 0.5 0.5

	• Ta có $r = IH = \frac{S}{p} = \frac{F_1F_2.MK}{2p} \Rightarrow y = \frac{cy_0}{a+c} \Rightarrow y_0 = \frac{a+c}{c}y = \frac{8y}{3}$	0.5
	• Ta có $\frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{\left(\frac{5x}{3}\right)^2}{25} + \frac{\left(\frac{8}{3}y\right)^2}{16} = 1$	0.5
	• Suy ra quỹ tích điểm I là elip có phương trình $\frac{x^2}{9} + \frac{4y^2}{9} = 1$.	0.25

-------------------------------Hết-------------------------------