SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐỒNG THÁP

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT CẤP TỈNH NĂM HỌC 2010 - 2011

Đề dự bị

ĐỀ THI MÔN TOÁN

Thời gian làm bài: 180 *phút (không kể thời gian phát đề)*

Ngày thi: 10 tháng 10 năm 2010

(Đề thi gồm có: 01 trang)

Câu 1: (*3 điểm)*

Giải phương trình

$$\sqrt{3x^3+x^2}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{5x^3+5x}$$

Câu 2: (*3 điểm)*

Giả sử điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác không đều ABC, M là trọng tâm của tam giác đó. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để đường thẳng OM vuông góc với đường trung tuyến CC_1 là $a^2+b^2=2c^2$

Câu 3: (*3 điểm)*

Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình

$$x^3=y^3+xy+13$$

Câu 4: (*3 điểm)*

Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_1=2 \\ u_{n+2}=\dfrac{u_{n+1}.u_n}{3u_n-2u_{n+1}} \qquad (n\in N) \end{cases}$$

Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

Câu 5: (*2 điểm)*

Chứng minh rằng $2C_n^0+\dfrac{2^2C_n^1}{2}+\dfrac{2^3C_n^2}{3}+\dfrac{2^4C_n^3}{4}+...+\dfrac{2^{n+1}C_n^n}{n+1}=\dfrac{3^{n+1}-1}{n+1}$

(n là số nguyên dương, C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử)

Câu 6: (*3 điểm)*

Cho các số a,b,c thỏa mãn $0<a,b,c<\dfrac{5}{2}$ và $ab+bc+ca=\dfrac{25}{3}$.Chứng minh

$$\frac{1}{5-2a}+\frac{1}{5-2b}+\frac{1}{5-2c}\ge\frac{9}{5}\ .$$

Câu 7: (*3 điểm)*

Trên mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-4y+4=0$ và đường thẳng $(d): x+y-2=0$. Chứng minh rằng (d) luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm điểm C thuộc (C) sao cho tam giác ABC có chu vi lớn nhất.**HẾT**.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỒNG THÁP

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2010 - 2011

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI DỰ BỊ MÔN TOÁN

(Hướng dẫn chấm và biểu điểm gồm có 08 trang)

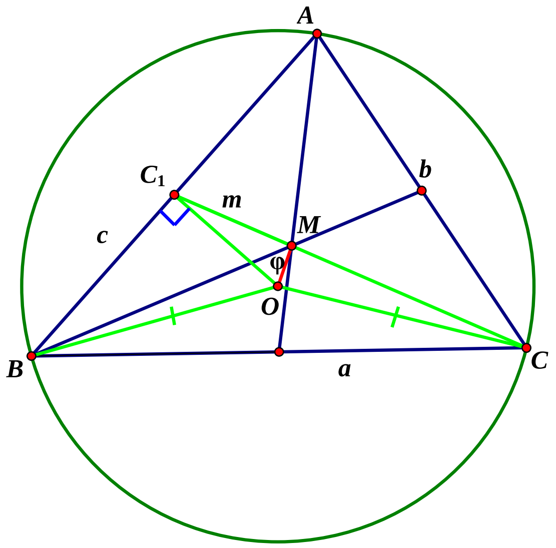
I. Hướng dẫn chung

1) Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng thì cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.

2) Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải bảo đảm không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm.

II. Đáp án và thang điểm

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1	Giải phương trình $\sqrt{3x^3+x^2}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{5x^3+5x}$ (1)	**3đ**
	• Ta có: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2\left(3x+1\right)}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{\left(x^2+1\right).5x}$ (2) • Điều kiện: $\begin{cases}3x+1\ge 0\\2x-1\ge 0\\5x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -\frac{1}{3}\\x\ge \frac{1}{2}\\x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge \frac{1}{2}$	0.5
	• Vì $x\ge \frac{1}{2}$ nên viết lại (2) dưới dạng $x.\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{\left(x^2+1\right)5x}$ (3) • Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki cho hai dãy $\left(x;1\right)$ $\left(\sqrt{3x+1};\sqrt{2x-1}\right)$ ta được $x.\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x-1}\le\sqrt{\left(x^2+1\right)5x}$ (4)	1.0
	• Từ (3) suy ra trong (4) có dấu bằng, vì thế ta có $x.\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x+1}\Leftrightarrow 2x^3-x^2-3x-1=0$ $\Leftrightarrow\left(2x+1\right)\left(x^2-x-1\right)=0$ $\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\vee x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$	1.0
	• Do điều kiện $x\ge\frac{1}{2}$ nên nghiệm của phương trình (1) là $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ • Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	0.5
Câu 2	Giả sử điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác không đều ABC, M là trọng tâm của tam giác đó. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để đường thẳng OG vuông góc với đường trung tuyến CC_1 là $a^2+b^2=2c^2$	**3đ**



- Giả sử $m = C_1M$ và $\varphi = \widehat{C_1MO}$ $\left(0 \le \varphi \le 180^0\right)$, từ giả thiết của bài toán ta suy ra được $O \ne M$ và $MC = 2C_1M$. Áp dụng định lý côsin vào các tam giác C_1MO và CMO ta có:

$$OC_1^2 = OM^2 + C_1M^2 - 2.OM.C_1M.\cos\varphi$$

$$BO^2 = CO^2 = OM^2 + MC^2 + 2.OM.MC.\cos\varphi$$

0.5

$$= OM^2 + 4C_1M^2 + 4.OM.C_1M\cos\varphi$$

- Do đó: $BC_1^2 = BO^2 - OC_1^2 = 3C_1M^2 + 6.OM.C_1M\cos\varphi$

0.5

$$\Rightarrow c^2 = 4BC_1^2 = 12m^2 + 24.OM.C_1M.\cos\varphi \qquad (1)$$

0.5

- Ta lại có: $18m^2 = 2m_c^2 = a^2 + b^2 - \dfrac{c^2}{2}$ (hệ thức trung tuyến)

0.5

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 18m^2 + \frac{c^2}{2}$$

- Khi đó:

0.5

$$a^2 + b^2 = 2c^2 \Leftrightarrow 18m^2 = \frac{3}{2}c^2$$
$$\Leftrightarrow c^2 = 12m^2$$
$$\Leftrightarrow \cos\varphi = 0 \quad \text{(do (1))}$$
$$\Leftrightarrow \varphi = 90^0$$
$$\Leftrightarrow OM \perp CC_1$$

5.0

- Vậy điều kiện cần và đủ để đường thẳng OM vuông góc với đường trung tuyến CC_1 là $a^2 + b^2 = 2c^2$.

Câu 3 Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình **3đ**

$$x^3 = y^3 + xy + 13$$

- Đặt $y = x + a$ với $a \in Z$

0.5

$$x^3 = (x+a)^3 + x(x+a) + 13$$

$$\Leftrightarrow (3a+1)x^2 + a(3a+1)x + a^3 + 13 = 0 \qquad (1)$$

- Điều kiện để phương trình có nghiệm

0.5

$$\Delta \ge 0 \Leftrightarrow a^2(3a+1)^2 - 4(3a+1)(a^3+13) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (3a+1)(a^3 - a^2 + 52) \le 0$$

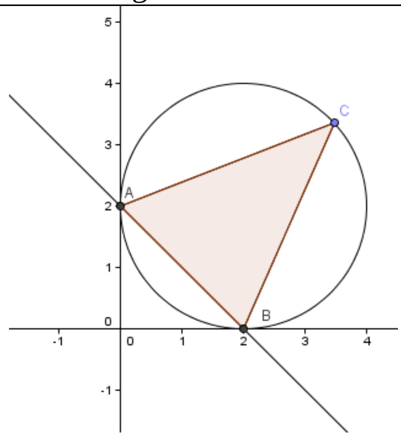
- Nếu $a \le -4$ thì

$$\Leftrightarrow (3a+1)(a^3 - a^2 + 52) \le [(3(-4)+1][(-4)^3 - (-4)^2 + 52] = 308 > 0$$

0.5

Nếu $a = 0$ thì $\Leftrightarrow (3a+1)(a^3 - a^2 + 52) = 52 > 0$

	Nếu $a \ge 1$ thì $\Leftrightarrow (3a+1)(a^3-a^2+52)>0$ • Do đó $a \in \{-3\,;-2\,;-1\}$ • Kiểm tra trực tiếp, phương trình chỉ có nghiệm nguyên khi $a=-1$ Khi đó (1) $\Leftrightarrow -2x^2+2x+12=0 \Rightarrow x=-2$; $x=3$ • Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(-2\,;-3)$ và $(3\,;\,2)$	0.5
Câu 4	Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_0=1 \\ u_1=2 \\ u_{n+2}=\dfrac{u_{n+1}.u_n}{3u_n-2u_{n+1}} \quad (n\in N) \end{cases}$ Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n)	**3đ**
	• Ta có $u_n \ne 0 \quad \forall n \in N$ $u_{n+2}=\dfrac{u_{n+1}.u_n}{3u_n-2u_{n+1}} \Rightarrow \dfrac{1}{u_{n+2}}=\dfrac{3}{u_{n+1}}-\dfrac{2}{u_n}$ $\Rightarrow \dfrac{1}{u_{n+2}}+1=3\left(\dfrac{1}{u_{n+1}}+1\right)-2\left(\dfrac{1}{u_n}+1\right)$ • Đặt $v_n=\dfrac{1}{u_n}+1$, khi đó ta có dãy (v_n) được xác định bởi $\begin{cases} v_0=2 \\ v_1=\dfrac{3}{2} \\ v_{n+2}=3v_{n+1}-2v_n \quad (n\in N) \end{cases}$ • Suy ra $v_n=a.r_1^n+b.r_2^n$ với r_1 , r_2 là 2 nghiệm của phương trình đặt trưng $x^2-3x+2=0$ $\Rightarrow v_n=a.(1)^n+b.(2)^n$ • Ta có $\begin{cases} v_0=2 \\ v_1=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ a+2b=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{5}{2} \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow v_n=\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}.2^n$ • Vậy $u_n=\dfrac{2}{3-2^n}$	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5
Câu 5	Chứng minh rằng $2C_n^0+\dfrac{2^2C_n^1}{2}+\dfrac{2^3C_n^2}{3}+\ldots+\dfrac{2^{n+1}C_n^n}{n+1}=\dfrac{3^{n+1}-1}{n+1}$	**3đ**
	• Khai triển $(1+x)^{n+1}=C_{n+1}^0+C_{n+1}^1x+C_{n+1}^2x^2+C_{n+1}^3x^3+\ldots+C_{n+1}^{n+1}x^{n+1}$ • Sử dụng công thức: $C_{n+1}^{k+1}=\dfrac{n+1}{k+1}C_n^k$ ta được $(1+x)^{n+1}=1+(n+1)\left[C_n^0x+\dfrac{1}{2}C_n^1x^2+\dfrac{1}{3}C_n^2x^3+\ldots+\dfrac{1}{n+1}C_n^nx^{n+1}\right]$ • Suy ra: $C_n^0x+\dfrac{1}{2}C_n^1x^2+\dfrac{1}{3}C_n^2x^3+\ldots+\dfrac{1}{n+1}C_n^nx^{n+1}=\dfrac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1}$ • Cho $x=2$ ta có $2C_n^0+\dfrac{2^2C_n^1}{2}+\dfrac{2^3C_n^2}{3}+\ldots+\dfrac{2^{n+1}C_n^n}{n+1}=\dfrac{3^{n+1}-1}{n+1}$ (đpcm)	0.25 0.25 0.5 0.5 0.5
Câu 6	Cho các số a,b,c thỏa mãn $0<a,b,c<\dfrac{5}{2}$ và $ab+bc+ca=\dfrac{25}{3}$ .Chứng minh	**3đ**

	$\frac{1}{5-2a}+\frac{1}{5-2b}+\frac{1}{5-2c}\ge\frac{9}{5}$.	
	• Theo điều kiện của giả thiết, sử dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số $a+a+(5-2a)\ge 3\sqrt[3]{a^2(5-2a)}$ $\Rightarrow \frac{1}{5-2a}\ge\frac{27}{125}a^2$ • Suy ra $\frac{1}{5-2a}+\frac{1}{5-2b}+\frac{1}{5-2c}\ge\frac{27}{125}(a^2+b^2+c^2)$ • Ta có $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ • Suy ra $\frac{1}{5-2a}+\frac{1}{5-2b}+\frac{1}{5-2c}\ge\frac{27}{125}(ab+bc+ca)=\frac{27}{125}.\frac{25}{3}=\frac{9}{5}$ • Dấu = xảy ra khi $a=b=c=\frac{5}{3}$	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5
Câu 7	Trên mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-4y+4=0$ và đường thẳng $(d): x+y-2=0$. Chứng minh rằng (d) luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm điểm C thuộc (C) sao cho tam giác ABC có chu vi lớn nhất	**3đ**
	 • Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (C): $\begin{cases}x^2+y^2-4x-4y+4=0\\x+y-2=0\end{cases}$ (1) Hệ phương trình (1) có hai nghiệm là $(2;0);(0;2)$ Suy ra (d) luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B • Phương trình (1) có thể viết thành dạng $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ (2). Từ dạng của phương trình (2) ta có thể đặt tọa độ của điểm $C\in(C)$ dưới dạng sau: $C(2+2\sin\alpha;2+2\cos\alpha)$ với $\alpha\in[0;2\pi)$ • Ta có: $CV_{\Delta ABC}=AB+BC+CA=2\sqrt{2}+\sqrt{8+8\sin\alpha}+\sqrt{8+8\cos\alpha}$ $\overset{B.C.S}{\le} 2\sqrt{2}+\sqrt{(1+1)(8+8\sin\alpha+8+8\cos\alpha)}=2\sqrt{2}+4\sqrt{2+\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}$ $\le 2\sqrt{2}+4\sqrt{2+\sqrt{2}}$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\sqrt{8+8\sin\alpha}=\sqrt{8+8\cos\alpha}\\\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}$ • Vậy tam giác ABC có chu vi lớn nhất khi $C\left(2+\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right)$	0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5

------------------------------Hết------------------------------