**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**
**ĐỒNG THÁP**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT**
**CẤP TỈNH NĂM HỌC 2011 - 2012**

**Đề thi chính thức**

# ĐỀ THI MÔN: TOÁN

***Ngày thi: 09/10/2011***

***Thời gian làm bài: 180 phút (Không kể thời gian phát đề)***

**(Đề thi gồm có: 01 trang)**

**<u>Câu 1:</u>** (3 điểm)

Giải phương trình:

$$x^2+2x\sqrt{x-\frac{1}{x}}=3x+1$$

**<u>Câu 2:</u>** (3 điểm)

Cho hai số dương x, y thỏa mãn điều kiện $x\geq 1, y\geq 1$ và $3(x+y)=4xy$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x^3+y^3+3\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$$

**<u>Câu 3:</u>** (2 điểm)

Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+x+2=y^2$ .

**<u>Câu 4:</u>** (3 điểm)

Cho tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c và $c\leq b$. Hai điểm M, N tương ứng di động trên 2 cạnh AB, AC sao cho MN chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau. Xác định vị trí của M và N để MN có độ dài nhỏ nhất.

**<u>Câu 5:</u>** (3 điểm)

Cho dãy số $\{u_n\}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n^2-2}{2u_n-3} \quad (n\geq 1, n\in N) \end{cases}$$

Hãy xác định công thức tổng quát của $u_n$ theo n.

**<u>Câu 6:</u>** (3 điểm)

Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hình vuông OABC có đỉnh A(3 ; 4) và điểm B có hoành độ âm.

a) Tìm toạ độ các đỉnh B và C của hình vuông OABC.

b) Gọi E và F theo thứ tự là các giao điểm của đường tròn (C) ngoại tiếp OABC với trục hoành và trục tung (E và F khác gốc tọa độ O). Tìm toạ độ điểm M trên (C) sao cho tam giác MEF có diện tích lớn nhất.

**<u>Câu 7:</u>** (3 điểm)

Với mọi n nguyên và $n\geq 3$, tính tổng sau đây $P=\frac{1}{C_3^3}+\frac{1}{C_4^3}+\frac{1}{C_5^3}+...+\frac{1}{C_n^3}$ **.HẾT**

Họ và tên thí sinh: ___________________________ Số báo danh: ______________________________

Chữ ký GT1:________________________________ Chữ ký GT2:_______________________________

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỒNG THÁP

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT
CẤP TỈNH NĂM HỌC 2011-2012

# HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC MÔN: TOÁN

**Ngày thi: 09/10/2011**

**(Hướng dẫn chấm gồm có: 06 trang)**

## I. Hướng dẫn chung

1) Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng, chính xác, chặt chẽ thì cho đủ số điểm của câu đó.

2) Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải bảo đảm không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm.

## II. Đáp án và thang điểm

**Câu 1:** (3 điểm)

| NỘI DUNG | ĐIỂM |
|---|---|
| Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x \ge 1 \\ -1 \le x < 0 \end{array}\right.$ | 0,5 |
| Chia hai vế của pt cho $x \neq 0$ ta được $$x + 2\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 3 + \frac{1}{x}$$ | 0,5 |
| $$\Leftrightarrow x - \frac{1}{x} + 2\sqrt{x - \frac{1}{x}} - 3 = 0$$ | 0,5 |
| $$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x - \frac{1}{x}} = 1 \\ \sqrt{x - \frac{1}{x}} = -3 (\text{loai}) \end{array}\right. \Rightarrow \sqrt{x - \frac{1}{x}} = 1$$ | 0,5 |
| $$x - \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$ | 0,5 |
| So sánh điều kiện, ta có nghiệm phương trình là $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ | 0,5 |

**Câu 2:** (3 điểm)

| NỘI DUNG | ĐIỂM |
|---|---|
| Đặt $x + y = a$ với $a \ge 2$. Khi đó $xy = \frac{3a}{4}$. Suy ra x, y là nghiệm của phương trình $$t^2 - at + \frac{3a}{4} = 0 \qquad (1)$$ | 0,25 |
| Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = a^2 - 3a \ge 0 \Rightarrow a \ge 3$ (vì a ≥ 2) | 0,25 |
| Vì $x, y \ge 1$ nên $(x-1)(y-1) \ge 0$. Hay là: $$xy - (x+y) + 1 \ge 0$$ | 0,25 |

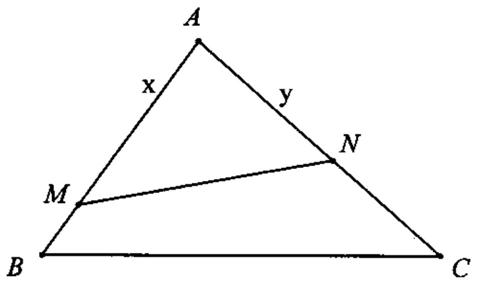
| | |
|---|---|
| $\Leftrightarrow \dfrac{3a}{4} - a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 4$<br>Vậy ta có $3 \leq a \leq 4$. | 0,25 |
| Mặt khác, từ giả thiết ta lại có $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{4}{3}$. | 0,25 |
| Suy ra: $P = (x+y)^3 - 3xy(x+y) + 3\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)^2 - \dfrac{6}{xy}$ | 0,25 |
| $= a^3 - \dfrac{9}{4}a^2 - \dfrac{8}{a} + \dfrac{16}{3}$ | 0,25 |
| Xét hàm số $f(a) = a^3 - \dfrac{9}{4}a^2 - \dfrac{8}{a} + \dfrac{16}{3}$ với $a \in [3;4]$, ta có:<br>$f'(a) = 3a^2 - \dfrac{9}{2}a + \dfrac{8}{a^2}$ | 0,25 |
| $= 3a\left(a - \dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{8}{a^2} > 0, \forall a \in [3;4]$ | 0,25 |
| $\begin{array}{c\|ccc} a & 3 & & 4 \\ \hline f'(a) & & + & \\ \hline f(a) & & & \frac{94}{3} \\ & \frac{113}{12} & \nearrow & \end{array}$ | 0,25 |
| Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra:<br>$\min P = \dfrac{113}{12}$, đạt tại $a = 3 \Leftrightarrow x = y = \dfrac{3}{2}$ | 0,25 |
| $\max P = \dfrac{94}{3}$, đạt tại $a = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = 3 \\ x = 3, y = 1 \end{array}\right.$ | 0,25 |

**Câu 3:** (2 điểm)

| NỘI DUNG | ĐIỂM |
|---|---|
| $x^2 + x + 2 = y^2 \Leftrightarrow 4y^2 - 4x^2 - 4x - 1 = 7 \Leftrightarrow (2y)^2 - (2x+1)^2 = 7$ | 0,25 |
| $\Leftrightarrow (2y + 2x + 1)(2y - 2x - 1) = 7$ | 0,25 |
| $= 7 \times 1 = 1 \times 7 = (-7) \times (-1) = (-1) \times (-7)$ | 0,25 |
| $\begin{cases} 2y + 2x + 1 = 7 \\ 2y - 2x - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y + 2x = 6 \\ 2y - 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ | 0.25 |

| | |
|---|---|
| $\begin{cases}2y+2x+1=1\\2y-2x-1=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y+2x=0\\2y-2x=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=2\end{cases}$ | 0,25 |
| $\begin{cases}2y+2x+1=-7\\2y-2x-1=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y+2x=-8\\2y-2x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=-2\end{cases}$ | 0,25 |
| $\begin{cases}2y+2x+1=-1\\2y-2x-1=-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y+2x=-2\\2y-2x=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$ | 0,25 |
| Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm là: $(x;y)=(1;2);(1;-2);(-2;2);(-2;-2)$ | 0,25 |

**Câu 4:** (3 điểm)

| NỘI DUNG | ĐIỂM |
|---|---|
|   Đặt $AM=x$ và $AN=y$ $(0<x\le c\,;0<y\le b)$<br>Ta có $S_{AMN}=\frac{1}{2}S_{ABC}$ | 0,25 |
| $\Leftrightarrow\frac{1}{2}xy\sin A=\frac{1}{4}bc\sin A$<br>$\Leftrightarrow y=\frac{bc}{2x}$ | 0,25 |
| $y=\frac{bc}{2x}\le b\Rightarrow x\ge\frac{c}{2}\Rightarrow\frac{c}{2}\le x\le c$ | 0,25 |
| Theo định lý cosin trong tam giác AMN, ta có<br>$MN^2=x^2+y^2-2xy\cos A$ | 0,25 |
| $=x^2+\frac{b^2c^2}{4x^2}-bc\cos A$ | 0,25 |
| Đặt $t=x^2,\frac{c^2}{4}\le t\le c^2$<br>Xét hàm<br>$f(t)=t+\frac{b^2c^2}{4}.\frac{1}{t}-bc.\cos A\quad,t\in\left[\frac{c^2}{4};c^2\right]$<br>$f'(t)=1-\frac{b^2c^2}{4}\frac{1}{t^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{bc}{2}\\t=-\frac{bc}{2}(l)\end{array}\right.$ | 0,25 |
| Trường hợp 1: $b\le 2c\Rightarrow\frac{bc}{2}\le c^2$ | 0,5 |

| $t$ | | $\frac{c^2}{4}$ | | $\frac{bc}{2}$ | | $c^2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | | $-$ | $0$ | $+$ | | |
| $f(t)$ | | | ↘ | | ↗ | | |

$MN_{\min} \Leftrightarrow x = y = \sqrt{\frac{bc}{2}}$. Khi đó M,N cách A một đọan bằng $\sqrt{\frac{bc}{2}}$ — 0,25

Trường hợp 2: $b > 2c \Rightarrow \frac{bc}{2} > c^2$

| $t$ | | $\frac{c^2}{4}$ | | $c^2$ | | $\frac{bc}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(t)$ | | | ↘ | | | | |

0,5

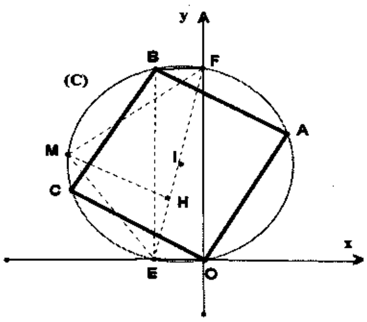
$MN_{\min} \Leftrightarrow x = c; y = \frac{b}{2}$. Khi đó $M \equiv B$ và N là trung điểm AC. — 0,25

**Câu 5:** (3 điểm)

| NỘI DUNG | ĐIỂM |
|---|---|
| $u_{n+1} = \frac{u_n^2 - 2}{2u_n - 3}$<br>$\Rightarrow u_{n+1} - 1 = \frac{u_n^2 - 2 - 2u_n + 3}{2u_n - 2 - 1} = \frac{(u_n - 1)^2}{2(u_n - 1) - 1}$ | 0,25 |
| $\Rightarrow \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{2}{u_n - 1} - \frac{1}{(u_n - 1)^2}$ | 0,25 |
| Đặt $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$<br>Ta có<br>$\begin{cases} v_1 = \frac{1}{2} \\ v_{n+1} = 2v_n - v_n^2 \end{cases}$ | 0,25 |
| $\Rightarrow 1 - v_{n+1} = v_n^2 - 2v_n + 1 = (1 - v_n)^2$ | 0,25 |
| Đặt $w_n = 1 - v_n$<br>Ta có $\begin{cases} w_1 = \frac{1}{2} \\ w_{n+1} = w_n^2 \end{cases}$ | 0,5 |

| | |
|---|---|
| Từ đó theo quy nạp ta có được : $w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{2^{n-1}}}$ | 0,5 |
| $\Rightarrow v_n = 1 - \frac{1}{2^{2^{n-1}}} = \frac{2^{2^{n-1}} - 1}{2^{2^{n-1}}}$ | 0,5 |
| $\Rightarrow u_n = \frac{2^{2^{n-1}}}{2^{2^{n-1}} - 1} + 1 = \frac{2.2^{2^{n-1}} - 1}{2^{2^{n-1}} - 1}$<br>Vậy $u_n = \frac{2.2^{2^{n-1}} - 1}{2^{2^{n-1}} - 1}$ | 0,5 |

**Câu 6:** (3 điểm)

| NỘI DUNG | ĐIỂM |
|---|---|
| ***a)Tìm toạ độ các đỉnh B và C .*** | **1,0** |
|  | |
| Gọi B(x;y) ta có $\begin{cases} \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ OA = AB \end{cases}$ | 0,25 |
| Suy ra B(-1;7). | 0,25 |
| Ta lại có $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$ | 0,25 |
| Suy ra C(- 4;3). | 0,25 |
| ***b)Gọi E và F là các giao điểm (C) với trục hoành và trục tung khác gốc O . Tìm toạ độ điểm M trên (C) sao cho tam giác MEF có diện tích lớn nhất.*** | **2,0** |
| Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông OABC ta có I là trung điểm OB nên suy ra $I\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$. | 0,25 |
| bán kính $R = OI = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ | 0,25 |
| Đường tròn (C) có tâm I và bán kính R = OI = $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ có phương trình là<br>$(C): \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$ (3) | 0,25 |
| Suy ra giao điểm của (C) với các trục toạ độ là : E(-1; 0) và F( 0; 7) . | 0,25 |
| Vì $\widehat{EOF} = 90^o$ nên EF là đường kính của (C).Dựng MH $\perp$ EF ( H $\in$ EF) .Ta có<br>Diện tích tam giác MEF là $S_{MEF} = \frac{1}{2}EF.MH = \frac{5\sqrt{2}}{2}MH$ | 0,25 |

| | |
|---|---|
| Ta có MH $\le$ R nên Max($S_{MEF}$) = $\dfrac{25}{2}$ khi MH là đường trung trực của đọan EF. | 0,25 |
| Khi đó đường thẳng MH có $\overrightarrow{n_{MH}} = \overrightarrow{EF} = (1;7) \Rightarrow (MH): x + 7y - 24 = 0$ (4) | 0,25 |
| Giải (3) và (4) cho M(3;3) hay M(-4;4) | 0,25 |

**Câu 7:** (3 điểm)

| NỘI DUNG | ĐIỂM |
|---|---|
| $C_n^3 = \dfrac{n!}{3!(n-3)!}$ | 0,25 |
| Suy ra $\dfrac{1}{C_n^3} = 3!\dfrac{1}{(n-2)(n-1)n}$ | 0,25 |
| Mà ta có: $\dfrac{1}{C_n^3} = 3!\dfrac{1}{(n-2)(n-1)n} = 3\left[\dfrac{1}{(n-2)(n-1)} - \dfrac{1}{(n-1)n}\right]$ | 1,0 |
| Cho n = 3,4,5,... <br> $\dfrac{1}{C_3^3} = 3\left[\dfrac{1}{1.2} - \dfrac{1}{2.3}\right]$ <br> $\dfrac{1}{C_4^3} = 3\left[\dfrac{1}{2.3} - \dfrac{1}{3.4}\right]$ <br> $\dfrac{1}{C_5^3} = 3\left[\dfrac{1}{3.4} - \dfrac{1}{4.5}\right]$ <br> ...................................... <br> $\dfrac{1}{C_n^3} = 3\left[\dfrac{1}{(n-2)(n-1)} - \dfrac{1}{(n-1)n}\right]$ | 1,0 |
| Cộng vế theo vế và đơn giản theo đường chéo ta được <br> $P = \dfrac{1}{C_3^3} + \dfrac{1}{C_4^3} + \dfrac{1}{C_5^3} + ... + \dfrac{1}{C_n^3} = 3\left[\dfrac{1}{1.2} - \dfrac{1}{(n-1)n}\right] = \dfrac{3(n+1)(n-2)}{2n(n-1)}$ | 0,5 |

**HẾT**