SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỒNG THÁP

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI DỰ THI QG
NĂM HỌC 2010 - 2011

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐỀ THI MÔN TOÁN

Thời gian làm bài: 180 *phút (không kể thời gian phát đề)*

Ngày thi: 31 tháng 10 năm 2010

(Đề thi gồm có: 01 trang)

Câu 1: (5 điểm)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = y - x \\ \sqrt{1-x^2} + y = 2y\sqrt{2-2x^2} \end{cases}$

Câu 2: (4 điểm)

Cho dãy số $\{u_n\}$ được xác định $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2007u_n + 2}{2010} \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Ta thành lập dãy $\{S_n\}$ với $S_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{u_i - 1}{u_{i+1} - 2}$. Tìm $\lim S_n$

Câu 3: (5 điểm)

Cho M là điểm nằm bên trong tam giác ABC . Các đường thẳng AM, BM , CM lần lượt cắt các cạnh BC, CA, AB tại các điểm A’, B’, C’ . Đặt $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ lần lượt là các diện tích của những tam giác MA’B, MA’C, MB’C, MB’A, MC’A, MC’B . Chứng minh rằng nếu $\dfrac{S_1}{S_2} + \dfrac{S_3}{S_4} + \dfrac{S_5}{S_6} = 3$ thì M là trọng tâm của tam giác ABC .

Câu 4: (3 điểm)

Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$(x + 2010)(x + 1986) = 3^y - 81$$

Câu 5: (3 điểm)

Có bao nhiêu số có 5 chữ số, chia hết cho 3 và có ít nhất một chữ số là 6 ?. **HẾT**.

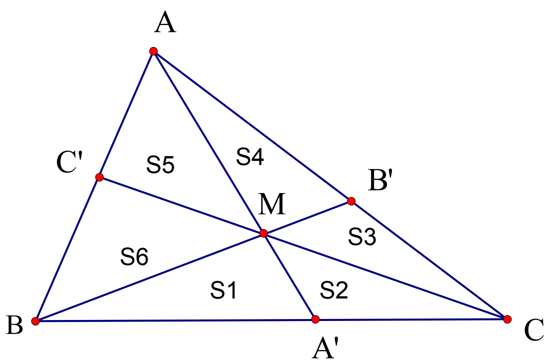
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐỒNG THÁP	KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI DỰ THI QG NĂM HỌC 2010 - 2011
ĐỀ CHÍNH THỨC	**HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI MÔN TOÁN** *(Hướng dẫn chấm và biểu điểm gồm có 03 trang)*

I. Hướng dẫn chung

1) Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng thì cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.
2) Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải bảo đảm không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm.

II. Đáp án và thang điểm

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1	Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=y-x\\ \sqrt{1-x^2}+y=2y\sqrt{2-2x^2}\end{cases}$	**5đ**
	• Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt[3]{t}$ với $t\in\mathbb{R}$ Do $f'(t)=1+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}>0,\ \forall t\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ và f liên tục tại $t=0\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ Suy ra: $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=y-x\Leftrightarrow x+\sqrt[3]{x}=y+\sqrt[3]{y}\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$	1.0
	• Điều kiện xác định của hệ $\begin{cases}-1\le x\le 1\\ y\in\mathbb{R}\end{cases}$, khi đó $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=y-x\\ \sqrt{1-x^2}+y=2y\sqrt{2-2x^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ \sqrt{1-x^2}+y=2y\sqrt{2-2x^2}\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ \sqrt{1-x^2}+x=2x\sqrt{2-2x^2}\quad(1)\end{cases}$	1.0
	• Đặt $x=\cos u, u\in[0;\pi]$. Phương trình (1) trở thành $\sin u+\cos u=\sqrt{2}\sin 2u\qquad(2)$ • Đặt $v=\sin u+\cos u=\sqrt{2}\cos\left(u-\dfrac{\pi}{4}\right)$, do $u\in[0;\pi]$ nên $v\in\left[-1;\sqrt{2}\right]$	1.0
	Phương trình (2) trở thành: $\sqrt{2}v^2-v-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v=\sqrt{2}\\ v=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$	1.0
	• Với $v=\sqrt{2}$ thì $u=\dfrac{\pi}{4}$, do đó $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1.0
	• Với $v=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ thì $u=\dfrac{11\pi}{12}$, do đó $x=-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},\ y=-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right);\ (x;y)=\left(-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4};-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)$	
Câu 2	**Dãy số $\{u_n\}$ được xác định** $\begin{cases}u_1=3\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n^2+2007u_n+2}{2010}\end{cases}$ **($n\in\mathbb{N}^*$).**	**4 đ**

	Thành lập dãy $\{S_n\}$ với $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i - 1}{u_{i+1} - 2}$. Tìm lim S_n	
	• Biến đổi $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2007u_n + 2}{2010} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(u_n - 2)}{2010}$ (1) Vì $u_1 = 3$ nên $3 = u_1 < u_2 < u_3 < \ldots < u_n$, suy ra dãy $\{u_n\}$ tăng.	0,5 0,5
	• Giả sử dãy $\{u_n\}$ bị chặn trên $\Leftrightarrow \exists L \in \mathbb{R}$: $\lim u_n = L$ ($L>3$) Suy ra $\lim u_{n+1} = \lim \frac{u_n^2 + 2007u_n + 2}{2010}$ hay $L = \frac{L^2 + 2007L + 2}{2010}$ $\Leftrightarrow L^2 - 3L + 2 = 0 \Leftrightarrow L=1$ hoặc $L=2$(vô lý vì $L>3$) Do đó $\{u_n\}$ không bị chặn trên hay $\lim u_n = +\infty$ hay $\lim \frac{1}{u_n} = 0$	0,5 0,5
	• Biến đổi (1) $\Leftrightarrow (u_n - 1)(u_n - 2) = 2010(u_{n+1} - u_n)$ $\Leftrightarrow \frac{u_n - 1}{u_{n+1} - 2} = 2010 \left(\frac{1}{u_n - 2} - \frac{1}{u_{n+1} - 2}\right)$ (*)	0,5 0,5
	• Cho n lần lượt nhận các giá trị 1, 2, 3, ….n, sau đó cộng vế theo vế ta được: $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i - 1}{u_{i+1} - 2} = 2010 \left(1 - \frac{1}{u_{n+1} - 2}\right)$	0,5
	• Vậy **lim** $S_n = 2010$.	0,5
Câu 3	**Cho M là điểm nằm bên trong tam giác ABC . Các đường thẳng AM, BM , CM lần lượt cắt các cạnh BC, CA, AB tại các điểm A’, B’, C’ . Đặt $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ lần lượt là các diện tích của những tam giác MA’B, MA’C, MB’C, MB’A, MC’A, MC’B . Chứng minh rằng nếu $\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_3}{S_4} + \frac{S_5}{S_6} = 3$ thì M là trọng tâm của tam giác ABC .**	**5đ**
	 • Sử dụng định lí Ceva , ta có $\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} = 1$ • Do đó $\frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{S_3}{S_4} \cdot \frac{S_5}{S_6} = 1$ • Theo bất đẳng thức Cauchy : $\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_3}{S_4} + \frac{S_5}{S_6} \geq 3\sqrt[3]{\frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{S_3}{S_4} \cdot \frac{S_5}{S_6}}$ • Theo giả thiết bất đẳng thức xảy ra dấu bằng , suy ra $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_3}{S_4} = \frac{S_5}{S_6} = 1$	**1.0** **1.0** **1.0**

	• $\frac{C'A}{C'B}=\frac{A'B}{A'C}=\frac{B'C}{B'A}=1$ • A' , B' , C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC, AB . • Vậy M là trọng tâm tam giác ABC.	**1.0** **1.0**
Câu 4	**Tìm nghiệm nguyên của phương trình** $(x+2010)(x+1986)=3^y-81$ **(1)**	**3đ**
	• Đặt $t=x+1998$ với $t\in Z$ .Khi đó (1) $\Leftrightarrow (t+12)(t-12)=3^y-81$ $\Leftrightarrow t^2=3^y+63$ • Ta có các trường hợp : * $y<0$: phương trình không có nghiệm nguyên. * $y=0$: $t^2=64$ phương trình có nghiệm nguyên $(-2006\ ;0)$ và $(-1990\ ;0)$ * $y>0$: Nếu y lẻ : $3^y\equiv -1\ (\text{mod}\,4)\Rightarrow t^2\equiv 2\ (\text{mod}\,4)$ vô lý Nếu y chẵn : đặt $y=2k$ $\forall k\in Z$ $t^2=3^{2k}+63=3^2(3^{2k-2}+7)$ suy ra $3^{2k-2}+7=a^2$ $\Leftrightarrow (\lvert a\rvert-3^{k-1}).(\lvert a\rvert+3^{k-1})=7$ $\Leftrightarrow \begin{cases}\lvert a\rvert+3^{k-1}=7\\ \lvert a\rvert-3^{k-1}=1\end{cases}\Rightarrow 3^{k-1}=3\Rightarrow k=2$ $\Leftrightarrow t^2=3^4+63=144\Rightarrow t=\pm 12$ Phương trình có nghiệm nguyên $(-1986\ ;4)$ và $(-2010\ ;4)$ • Vậy phương trình có 4 nghiệm : $(-2006\ ;0)$, $(-1990\ ;0)$, $(-1986\ ;4)$ và $(-2010\ ;4)$	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5
Câu 5	**Có bao nhiêu số có 5 chữ số, chia hết cho 3 và có ít nhất một chữ số là 6 ?**	**3đ**
	• Số có 5 chữ số là : 9.10^4 =90.000 số. • Trong 90.000 số đó thì cứ 3 số liên tiếp có một số chia hết cho 3. Vậy có 30.000 số có 5 chữ số chia hết cho 3. • Trong 30.000 số này ta tìm các số không chứa chữ số 6 Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$ * a có 8 cách chọn (chữ số này khác số 0 và 6) * Chữ số *b, c, d* có 9 cách chọn (khác chữ số 6) * Chữ số e phải chọn sao cho $e\neq 6$ và $a+b+c+d+e\ \vdots\ 3$ Suy ra số cách chọn của *e* là 3. Thật vậy + Nếu $a+b+c+d\equiv 0\ (\text{mod}\ 3)$ thì phải chọn $e\in\{0\ ;3\ ;9\}$ + Nếu $a+b+c+d\equiv 1\ (\text{mod}\ 3)$ thì phải chọn $e\in\{2\ ;5\ ;8\}$ + Nếu $a+b+c+d\equiv 2\ (\text{mod}\ 3)$ thì phải chọn $e\in\{1\ ;4\ ;7\}$ • Vậy số có 5 chữ số, chia hết cho 3 và có ít nhất một chữ số là 6 sẽ bằng 30.000 - 8 . 9^3. 3 = 12.504.	0,5 0,5 0,5 0,5 0.5 0,5

-----------------------------Hết------------------------------