SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỒNG THÁP

KỲ THI CHỌN HSG LỚP 12 THPT DỰ THI CẤP QUỐC GIA
NĂM HỌC 2011 - 2012

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI MÔN: TOÁN
Ngày thi: 30/10/2011
Thời gian làm bài: 180 phút (Không kể thời gian phát đề)
(Đề thi gồm có: 01 trang)

<u>Câu 1:</u> (5 điểm)

1) Cho $a,b,x,y,z>0$ và $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

$$\left(a+\frac{b}{x}\right)^4+\left(a+\frac{b}{y}\right)^4+\left(a+\frac{b}{z}\right)^4 \geq 3(a+3b)^4$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{9+8x^2y-x^4y^2}=y(16y^5-3x^2y^2+1) \\ 1+\sqrt{16+(x-2y)^2}=x^2(5y^3-x^2)+y \end{cases}$$

<u>Câu 2:</u> (4 điểm)

Cho a là số nguyên dương. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thoả mãn:

$$f\left(m+f(n)\right)=n+f\left(m+a\right),\ \forall m,n\in\mathbb{N}^*$$

<u>Câu 3:</u> (5 điểm)

1) Cho đường tròn (C) bán kính $\mathrm{R}=1$, A là một điểm cố định trên đường tròn (C), vẽ tiếp tuyến với (C) tại A, trên tiếp tuyến đó lấy một điểm M sao cho $\mathrm{AM}=1$. Một đường thẳng d quay quanh M cắt (C) tại B, C. Đặt $\widehat{\mathrm{AMB}}=\alpha$.

a) Tính diện tích tam giác ABC theo α;

b) Tìm α để diện tích tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó.

2) Trong mặt phẳng cho đường thẳng Δ, trên đó lấy một điểm A cố định. Hai điểm B, C thay đổi sao cho $\mathrm{AB}=5$, $\mathrm{AC}=3$ và đường thẳng Δ là phân giác của góc $\widehat{\mathrm{BAC}}$. Tìm tập hợp điểm M để ABMC là hình bình hành.

<u>Câu 4:</u> (3 điểm)

Chứng minh rằng tồn tại hai số nguyên *x, y* không chia hết cho 2011 và thoả mãn:

$$x^2+8043y^2=4.2011^n \qquad \left(\forall n\in N^*\right)$$

<u>Câu 5:</u> (3 điểm)

Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số đôi một khác nhau dạng $\overline{abcdefg}$ thỏa mãn điều kiện số đó không có dạng ($a<b<c<d$ và $d>e>f>g$). **HẾT**

Họ và tên thí sinh: ____________________________ Số báo danh: ________________________________

Chữ ký GT1:__________________________________ Chữ ký GT2:________________________________

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐỒNG THÁP	KỲ THI CHỌN HSG LỚP 12 THPT DỰ THI CẤP QUỐC GIA NĂM HỌC 2011-2012

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC MÔN: TOÁN

Ngày thi: 30/10/2011

(Hướng dẫn chấm gồm có: 06 trang)

<u>Câu 1:</u> (5 điểm)

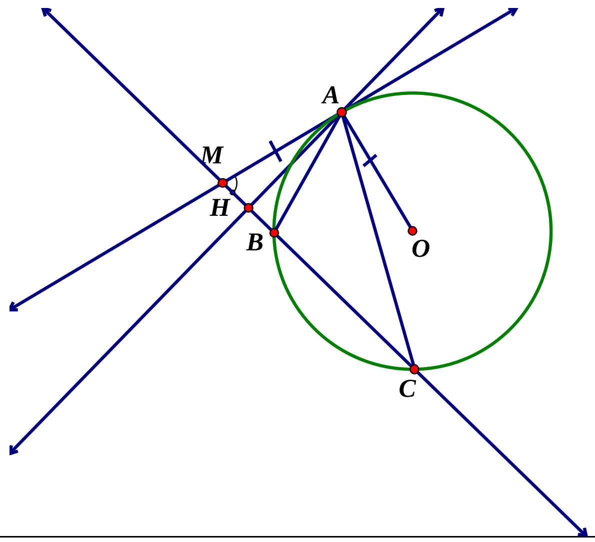
NỘI DUNG	ĐIỂM
1) Ta chứng minh: a, b, c > 0 thì $a^4+b^4+c^4 \ge abc(a+b+c)$ (*) Thật vậy theo bất đẳng thức Côsi $\left.\begin{array}{l} a^4+a^4+b^4+c^4 \ge 4a^2bc \\ b^4+b^4+c^4+a^4 \ge 4b^2ac \\ c^4+c^4+b^4+a^4 \ge 4c^2ba \end{array}\right\} \Rightarrow a^4+b^4+c^4 \ge abc(a+b+c)$ Dấu "=" xảy ra ⇔ a = b = c.	0,50
Áp dụng (*): $\text{VT} = \left(a+\frac{b}{x}\right)^4+\left(a+\frac{b}{y}\right)^4+\left(a+\frac{b}{z}\right)^4 \ge \left(a+\frac{b}{x}\right)\left(a+\frac{b}{y}\right)\left(a+\frac{b}{z}\right)\left[3a+b\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\right]$ (1)	0,25
$\Rightarrow \text{VT} \ge \left[a^3+a^2b\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{b^3}{xyz}+ab^2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}\right)\right]\left[3a+b\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\right]$ (2)	0,25
Theo BĐT Côsi: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge \frac{9}{x+y+z} = \frac{9}{1} = 9$	0,25
Mà: $\circ \frac{x+y+z}{3} \ge \sqrt[3]{xyz} \Rightarrow xyz \le \frac{1}{27} \Rightarrow \frac{1}{xyz} \ge 27$	0,25
$\circ \left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}\right) = \frac{x+y+z}{xyz} = \frac{1}{xyz} \ge 27$	0,25
Nên: (2) ⇔ VT ≥ ($a^3 + 9a^2b + 27ab^2 + 27b^3$)(3a + 9b)	0,25
⇔ VT ≥ $3(a + 3b)^3.(a + 3b) = 3(a + 3b)^4$.	0.25
Dấu "=" xảy ra ⇔ $x=y=z=\frac{1}{3}$	0,25
2) Viết lại hệ phương trình đã cho về dạng $\begin{cases} \sqrt{25-(x^2y-4)^2} = 16y^6-3x^2y^3+y \\ 1+\sqrt{16+(x-2y)^2} = 5x^2y^3-x^4+y \end{cases}$	0,5
Trừ vế hai phương trình ta được $\sqrt{25-(x^2y-4)^2} = 1+\sqrt{16+(x-2y)^2}+(x^2-4y^3)^2$ (*)	0,5

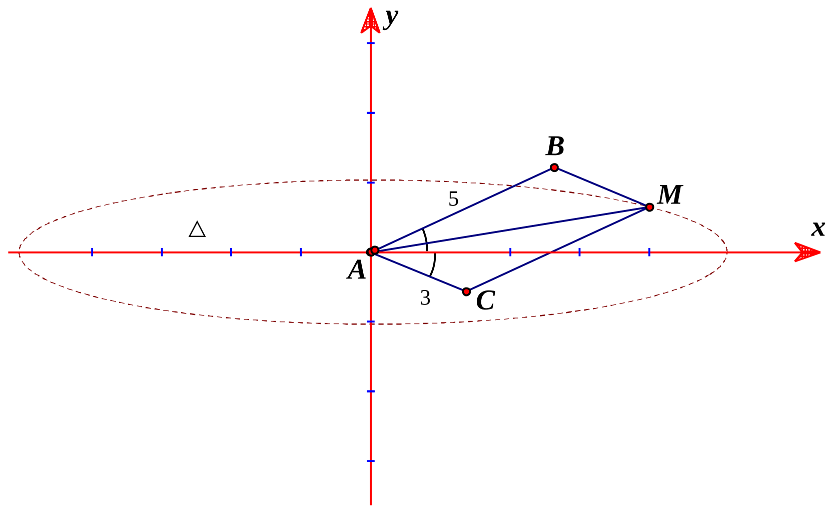
Vì $\sqrt{25-(x^2y-4)^2}\le 5$ và	0,25
$1+\sqrt{16+(x-2y)^2}+(x^2-4y^3)^2\ge 5$	0,25
Nên phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases}(x^2y-4)^2=0\\(x-2y)^2=0\\(x^2-4y^3)^2=0\end{cases}$	0,5
$\Leftrightarrow\begin{cases}\mathbf{x}=2\\\mathbf{y}=1\end{cases}$ Thử lại thấy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x,y)=(2\ ;\ 1)$.	0,5

<u>Câu 2:</u> (4 điểm)

NỘI DUNG	ĐIỂM
Điều kiện cần: Giả sử tồn tại hàm số f thoả mãn $f\left(m+f(n)\right)=n+f\left(m+a\right),\ \forall m,n\in\mathbb{N}^*$ (*) **a)** Chứng minh f là đơn ánh $\forall n_1,n_2\in\mathbb{N}^*$ thoả mãn $f\left(n_1\right)=f\left(n_2\right)$ ta chứng minh $n_1=n_2$. Thật vậy: Ta có: $f\left(m+f(n_1)\right)=f\left(m+f(n_2)\right)\Rightarrow n_1+f\left(m+a\right)=n_2+f\left(m+a\right)\Rightarrow n_1=n_2$ Vậy f là đơn ánh.	0,50
b) Tìm mối quan hệ giữa $f(1), f(2), f(3), f(4),..., f(n)$ $\forall m,n\in\mathbb{N}^*$ ta có: $f\left(f(m)+f(n)\right)=n+f(f(m)+a)=n+m+f(2a)$ (1)	0,25
$\forall p,q\in\mathbb{N}^*$ sao cho $m+n=p+q$ ta có: $f\left(f(p)+f(q)\right)=p+f(f(q)+a)=p+q+f(2a)$ (2)	0,25
Từ (1) và (2) ta suy ra: $f\left(f(m)+f(n)\right)=f\left(f(p)+f(q)\right)$	0,25
Vì f là đơn ánh nên ta suy ra: $f(m)+f(n)=f(p)+f(q)$ (3)	0,25
Từ (3) ta suy ra: $f(2)-f(1)=f(3)-f(2)=f(4)-f(3)=...=f(n)-f(n-1)$	0,25
Vậy $f(1), f(2), f(3), f(4),..., f(n)$ lập thành một cấp số cộng với công sai d trong đó $d\in\mathbb{Z}$ và $d\ne 0$. Vậy $f(n)=f(1)+(n-1)d$. (4)	0,25
c) Tính d và $f(1)$ i) Từ (*) cho $n=1$ ta được: $f\left(m+f(1)\right)=1+f(m+a)$ (5)	0,25
Từ (4) và (5) ta suy ra: $f(1)+\left(m+f(1)-1\right)d=1+f(1)+\left(m+a-1\right)d\Rightarrow f(1)d-d=1+ad-d\Rightarrow f(1)=a+\dfrac{1}{d}$	0,50
Vì $f(1)$ nguyên và a nguyên nên $d=\pm 1$	0,25
ii) Với $d=-1$ thì $f(1)=a-1\Rightarrow f(n)=-n+a$. Hàm số không thoả vì với $n>a$ thì $f\left(n\right)<0$.	0,25
Với $d=1$ thì $f(1)=a+1\Rightarrow f(n)=n+a$.	0,25
Điều kiện đủ: Rõ ràng hàm số này thoả mãn yêu cầu của bài toán. Vậy có duy nhất hàm số f thỏa yêu cầu là $f(n)=n+a$	0,50

<u>Câu 3:</u> (5 điểm)

NỘI DUNG	ĐIỂM
1) Hình vẽ:  	
a) Tính $S_{\Delta ABC}$ theo α : Từ giả thiết ta suy ra được $\alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC. Ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AH.BC = \dfrac{1}{2}BC.AM\sin\alpha = \dfrac{1}{2}BC.\sin\alpha$	0,25
Ta có: $\widehat{ABC} = \alpha + \widehat{MAB} = \alpha + \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{BAC} = \pi - \left(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}\right) = \pi - \left(\alpha + 2.\widehat{ACB}\right)$ Mặt khác theo định lý Sin ta có: $\dfrac{BC}{\sin\widehat{BAC}} = 2R \Rightarrow BC = 2\sin\left(\alpha + 2.\widehat{ACB}\right)$	0,25
Suy ra: $S_{\Delta ABC} = \sin\alpha.\sin\left(\alpha + 2.\widehat{ACB}\right) = \sin\alpha.\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha + 2.\widehat{ACB}\right)}$	0,25
Trong tam giác ABM và ABC ta có: $\dfrac{AB}{\sin\alpha} = \dfrac{AM}{\sin\widehat{MBA}} \Rightarrow \sin\alpha = AB.\sin\widehat{ABC}$ $\qquad\left(AB = 2R\sin\widehat{ACB}\right)$	0,25
$\Rightarrow \sin\alpha = 2\sin\widehat{ACB}.\sin\widehat{ABC}$ $\Rightarrow \sin\alpha = 2\sin\widehat{ACB}.\sin\left(\alpha + \widehat{ACB}\right) = \cos\alpha - \cos\left(\alpha + 2\widehat{ACB}\right)$ $\Rightarrow \cos\left(\alpha + 2\widehat{ACB}\right) = \cos\alpha - \sin\alpha$	0,25
Vậy $S_{\Delta ABC} = \sin\alpha.\sqrt{1-(\cos\alpha - \sin\alpha)^2} = \sin\alpha.\sqrt{\sin 2\alpha}$ với $\alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$	0,25
b) Tìm α để $S_{\Delta ABC}$ đạt GTLN và tìm GTLN nầy. Xét $S^4_{\Delta ABC}$ và sử dụng bất đẳng thức Côsi ta được:	

$S^4_{\Delta ABC} = \frac{4}{3}.\sin^2\alpha.\sin^2\alpha.\sin^2\alpha.\left(3.\cos^2\alpha\right) \le \frac{4}{3}\left(\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+3.\cos^2\alpha}{4}\right)^4 = \frac{27}{64}$	0,25
Suy ra: $S_{\Delta ABC} \le \sqrt[4]{\frac{27}{64}}$ (1)	0,25
BĐT (1) xảy ra dấu "=" khi và chỉ khi $\sin^2\alpha = 3\cos^2\alpha \Leftrightarrow \tan^2\alpha = 3 \Leftrightarrow \tan\alpha = \sqrt{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$	0,25
Vậy $MaxS_{\Delta ABC} = \sqrt[4]{\frac{27}{64}}$ khi $\alpha = \frac{\pi}{3}$.	0,25
2) 	
Chọn hệ Oxy sao cho $A \equiv O$ và trục $Ox \equiv \Delta$. (theo hình vẽ) Giả sử tọa độ của $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ và $M(x, y)$	0,25
Ta có $AB = 5 \Leftrightarrow x_B^2 + y_B^2 = 25$ $AC = 3 \Leftrightarrow x_C^2 + y_C^2 = 9$	0,25
Vì Ax là phân giác của góc $\widehat{BAC}$ nên nếu (AB) có phương trình $y = kx$ thì (AC) có phương trình $y = -kx$ từ đó ta có $x_B^2 + k^2x_B^2 = 25$ và $x_C^2 + k^2x_C^2 = 9$	0,5
Suy ra $\begin{cases} x_B^2 = \frac{25}{1+k^2} \\ y_B^2 = \frac{25k^2}{1+k^2} \end{cases}$ và $\begin{cases} x_C^2 = \frac{9}{1+k^2} \\ y_C^2 = \frac{9k^2}{1+k^2} \end{cases}$	0,25
Do Ax là phân giác $\widehat{BAC}$ nên $y_By_C < 0 \Rightarrow x_Bx_C > 0$, vì vậy $x_Bx_C = \frac{15}{1+k^2}$, $y_By_C = -\frac{15k^2}{1+k^2}$	0,5
Vì ABMC là hình bình hành nên $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$	0,5

$\begin{cases} x = x_B + x_C \\ y = y_B + y_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x_B^2 + x_C^2 + 2x_Bx_C = \dfrac{64}{1+k^2} \\ y^2 = y_B^2 + y_C^2 + 2y_By_C = \dfrac{4k^2}{1+k^2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{4} = 1$	
Vậy tập hợp điểm M là elip có phương trình : $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ Giới hạn : Vì $x^2 = \dfrac{64}{1+k^2} \neq 0$ nên elip bỏ đi 2 điểm $(0,\ 2)$ và $(0,\ -2)$	0,25

Câu 4: (3 điểm)

NỘI DUNG	ĐIỂM
Ta có $x^2 + 8043y^2 = 4.2011^n \Leftrightarrow x^2 + \left(4.2011 - 1\right)y^2 = 4.2011^n$	0,25
Đặt $a = 2011$, ta chứng minh luôn tồn tại hai số nguyên x, y không chia hết cho a và thoả mãn $x^2 + \left(4a - 1\right)y^2 = 4.a^n$	0,25
a) Nếu $n = 1$: thì dễ thấy $x = y = 1$ thoả mãn yêu cầu của bài toán.	0,25
b) Giả sử bài toán đúng với $n = k\ \ (k > 1): \exists\ x, y \not\vdots\ a$ và $x^2 + \left(4a - 1\right)y^2 = 4.a^k$ (1)	0,25
c) Xét $n = k + 1$: $(1) \Leftrightarrow 4a^{k+1} = ax^2 + a(4a-1)y^2 = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \left[\dfrac{(4a-1)y}{2}\right]^2 + (4a-1)\left[\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2\right]$	0,25
$= \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{x+(4a-1)y}{2}\right)^2 + (4a-1)\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2 = X_1^2 + (4a-1)Y_1^2 \quad (2) \\ \left(\dfrac{x-(4a-1)y}{2}\right)^2 + (4a-1)\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 = X_2^2 + (4a-1)Y_2^2 \quad (3) \end{array}\right.$ Với $X_1 = \dfrac{x+(4a-1)y}{2}$, $Y_1 = \dfrac{x-y}{2}$, $X_2 = \dfrac{x-(4a-1)y}{2}$, $Y_2 = \dfrac{x+y}{2}$	0,5
Từ (1) $\Rightarrow x, y$ cùng tính chẵn, lẻ suy ra X_1, Y_1, X_2, Y_2 là các số nguyên. Ngoài ra $Y_1 + Y_2 = x \not\vdots\ a \Rightarrow Y_1, Y_2$ phải có ít nhất một số không chia hết cho a.	0,5
+ Nếu $Y_1 \not\vdots\ a$ thì $X_1 - Y_1 = 2ay \vdots a \Rightarrow X_1 \not\vdots\ a$ kết hợp với (2) suy ra X_1 và Y_1 thoả yêu cầu bài toán trong trường hợp $n = k + 1$	0,25
+ Nếu $Y_2 \not\vdots\ a$ thì $X_2 - Y_2 = 2ay \vdots a \Rightarrow X_2 \not\vdots\ a$ kết hợp với (3) suy ra X_1 và Y_1 thoả yêu cầu bài toán trong trường hợp $n = k + 1$	0,25
Vậy bài toán đúng $\forall n \in N*$.	0,25

Câu 5: (3 điểm)

NỘI DUNG	ĐIỂM
Số có 7 chữ số khác nhau (không có chữ số 0 đứng đầu) là: $A_{10}^7 - A_9^6 = 544.320$	0,5

Ta tìm số có 7 chữ số khác nhau thỏa điều kiện ($a < b < c < d$ và $d > e > f > g$). ***Trường hợp 1:*** Chọn 7 chữ số bất kỳ không có chữ số 0: có C_9^7 cách	0,25
Sau đó xếp 7 chữ số đó vào 7 vị trí $\overline{abcdefg}$, khi đó + Vì d là số lớn nhất nên có: 1 cách xếp	0,25
+ Có C_6^3 cách xếp 3 vị trí cho $\overline{abc}$	0,25
+ Có C_3^3 cách xếp 3 vị trí còn lại cho $\overline{efg}$	0,25
Vậy có $C_9^7.C_6^3.C_3^3 = 720$ thỏa trường hợp 1	0,25
Trường hợp 2: Chọn 7 chữ số bất kỳ phải có chữ số 0: có C_9^6 cách	0,25
Tương tự trường hợp 1 có $C_9^6.C_5^3.C_3^3 = 840$ thỏa trường hợp 2	0,5
Vậy có: $544320 - (720 + 840) = 542.760$ số	0,5

HẾT