Chương 1 PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§ 1 CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A CÔNG THỨC

1 Bảng giá trị lượng giác của một số cung (góc) đặt biệt

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sinα	Tăng và dương					Giảm và dương			
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cosα	Giảm và dương					Giảm và âm			
	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tanα	Tăng và dương					Tăng và âm			
	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Không có nghĩa	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cotα	Giảm và dương					Giảm và âm			
	Không có nghĩa	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	Không có nghĩa

2 GTLG của các góc có liên quan đặc biệt

a/ Hai góc đối nhau

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

b/ Hai góc bù nhau

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$$

c/ Hai góc phụ nhau

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha$$

d/ Góc hơn $\frac{\pi}{2}$

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$$
$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$$
$$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\cot\alpha$$
$$\cot\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\tan\alpha$$

e/ Góc hơn π

$$\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\alpha+\pi) = \tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+\pi) = \cot\alpha$$

f/ Với mọi $k \in \mathbb{Z}$, ta có

$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$; $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$;

$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$; $\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha$.

3 Các công thức lượng giác

Công thức lượng giác cơ bản

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

$\tan\alpha.\cot\alpha=1$; $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha$; $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=1+\cot^2\alpha$.

Công thức cộng

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$;

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$;

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$;

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$;

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$;

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$.

Công thức nhân đôi

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$;

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$;

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$;

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$;

$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

Công thức hạ bậc

$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$;

$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$;

$\tan^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$.

Công thức nhân ba

$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$;

$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$.

Công thức hạ bậc

$4\cos^3\alpha=3\cos\alpha+\cos 3\alpha$;

$4\sin^3\alpha=3\sin\alpha-\sin 3\alpha$

Công thức biến đổi tích thành tổng

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$;

$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$

$=\dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$;

$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$.

Công thức biến đổi tổng thành tích

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

B BÀI TẬP

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1. 1 Tính giá trị của các biểu thức sau :

a/ $A=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$, biết $\tan\alpha=\dfrac{2}{5}$;

b/ $B=\dfrac{3\tan\alpha+2\cot\alpha}{\tan\alpha-\cot\alpha}$, biết $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

1. 2 Chứng minh các đẳng thức :

a/ $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

b/ $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=2\cos^2\alpha-1$;.

1. 3 Chứng minh biểu thức sau đây không phụ thuộc vào α :

a/ $\sqrt{\sin^4\alpha+4\cos^2\alpha}+\sqrt{\cos^4\alpha+4\sin^4\alpha}$;

b/ $(\cot\alpha+\tan\alpha)^2-(\cot\alpha-\tan\alpha)^2$.

CUNG LIÊN KẾT

1. 4 Tính

a/ $A=\tan1^o\tan2^o\tan3^o\ldots\tan89^o$;

b/ $B=\cos10^o+\cos20^o+\cos30^o+\ldots+\cos180^o$.

CÔNG THỨC CỘNG

1. 5 Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Chứng minh rằng :

a/ $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}=1$;

b/ $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

1. 6 a/ Biến đổi biểu thức $\sqrt{3}\sin x+\cos x$ về dạng $A\sin(x+\varphi)$.

b/ Biến đổi biểu thức $\sqrt{3}\sin x+\cos x$ về dạng $A\cos(x+\varphi)$.

c/ Biến đổi biểu thức $\sin x-\sqrt{3}\cos x$ về dạng $A\sin(x+\varphi)$;

d/ Biến đổi biểu thức $\sin x+\cos x$ về dạng $A\sin(x+\varphi)$.

1. 7 Cho $a-b=\dfrac{\pi}{3}$. Tính giá trị biểu thức $A=(\cos a+\cos b)^2+(\sin a+\sin b)^2$

CÔNG THỨC NHÂN

1. 8 Tính

a/ $A=\sin6^o\sin42^o\sin66^o\sin78^o$;

b/ $B=\sin10^o\sin50^o\sin70^o$.

1. 9 Chứng minh rằng

a/ $\cot x+\tan x=\dfrac{2}{\sin2x}$;

b/ $\cot x-\tan x=2\cot2x$;

c/ $\dfrac{\sin2x}{1+\cos2x}=\tan x$;

d/ $\dfrac{1-\cos2x}{1+\cos2x}=\tan^2x$.

e/ $\dfrac{\sin 3x}{\sin x}+\dfrac{\cos 3x}{\cos x}=4\cos 2x$;

f/ $\cos 4x=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$.

CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI

1. 10 a/ Tính $\sin\dfrac{5\pi}{24}\sin\dfrac{\pi}{24}$.

b/ Tính $\cos\dfrac{5\pi}{12}\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

1. 11 Biến đổi tích thành tổng

a/ $A=2\cos 5x\cos x$;

b/ $B=4\sin x\sin 2x\sin 3x$;

c/ $C=2\sin(a+b)\cos(a-b)$;

d/ $D=2\cos(a+b)\cos(a-b)$;

1. 12 Biến đổi tổng thành tích :

a/ $A=\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x$;

b/ $B=\cos 2a+\cos 2b+\cos 2(a+b)+1$

c/ $C=1-\sin x$;

d/ $D=1+2\cos x$.

e/ $E=\sin a+\sin b+\sin(a+b)$;

f/ $F=1+\sin a+\cos a$.

1. 13 Rút gọn biểu thức

a/ $A=\dfrac{\cos 2a-\cos 4a}{\sin 4a+\sin 2a}$;

b/ $B=\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}$.

1. 14 Chứng minh rằng

a/ $\cos 5x\cos 3x+\sin 7x\sin x=\cos 2x\cos 4x$;

b/ $\sin 5x-2\sin x(\cos 2x+\cos 4x)=\sin x$;

c/ $\sin^2 x+\sin^2\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)+\sin x\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)=\dfrac{3}{4}$;

d/ $\sin x\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)=\dfrac{1}{4}\sin 3x$.

1. 15 Chứng minh rằng

a/ $\cos^4 x+\sin^4 x=\dfrac{3+\cos 4x}{4}$;

b/ $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos 2x$;

b/ $\cos^6 x+\sin^6 x=\dfrac{5+3\cos 4x}{8}$;

c/ $\cos^6 x-\sin^6 x=\dfrac{15\cos 2x+\cos 6x}{16}$;

c/ $\cos^8 x-\sin^8 x=\dfrac{7\cos 2x+\cos 6x}{8}$.

1. 16 Tính $S=\cos\dfrac{\pi}{7}-\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{3\pi}{7}$.

§ 2 HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A LÝ THUYẾT

1 Hàm số sin : $f(x)=\sin x$

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Tập giá trị $[-1;1]$.

Nhận xét

$$\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$$

$$\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$$

$$\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$$

2 Hàm số côsin : $f(x)=\cos x$

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Tập giá trị $[-1;1]$.

Nhận xét

$$\cos x=1 \Leftrightarrow x=k2\pi$$

$$\cos x=-1 \Leftrightarrow x=\pi+k2\pi$$

$$\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

3 Hàm số tang : $f(x)=\tan x$

Điều kiện xác định : $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$.

Tập xác định : $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$.

Tập giá trị : $\mathbb{R}$

Nhận xét $\tan x=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$

4 Hàm số côtang : $f(x)=\cot x$

Điều kiện xác định : $\sin x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq k\pi$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi\}$.

Tập giá trị $\mathbb{R}$.

Nhận xét $\cot x=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

B BÀI TẬP

1. 17 Tìm tập xác định của mội hàm số sau đây :

a/ $f(x)=\dfrac{\sin x+1}{\sin x-1}$;

b/ $f(x)=\dfrac{2\tan x+2}{\cos x-1}$;

c/ $f(x)=\dfrac{\cot x}{\sin x+1}$;

d/ $y=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

1. 18 Tìm tập xác định của mội hàm số sau đây :

a/ $y=\sqrt{1-\cos x}$;

b/ $y=\sqrt{3-\sin x}$;

c/ $y=\dfrac{\cos x}{\sin(x-\pi)}$;

d/ $y=\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\sin x}}$.

1. 19 Tìm GTLN và GTNN của hàm số

a/ $y=3\cos x+2$;

b/ $y=5\sin 3x-1$;

c/ $y=4\cos\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)+9$;

d/ $f\left(x\right)=\sin x+\cos x$;

e/ $f\left(x\right)=\cos x-\sqrt{3}\sin x$;

f/ $y=\sqrt{5+\sin x-\cos x}$;.

1. 20 Xét tính chẵn – lẻ của hàm số

a/ $f\left(x\right)=\dfrac{\sin x}{\cos x+2}$;

b/ $f\left(x\right)=\sin x+\cos x$;

c/ $y=3\cos^2 x-5\sin x$

d/ $y=x\cos x$.

1. 21 Cho hàm số $y=3\cos 2x$.

a/ Chứng minh rằng hàm số đã cho là hàm số chẵn.

b/ Chứng minh rằng hàm số đã cho có chu kỳ $T=\pi$.

c/ vẽ đồ thị hàm số đã cho.

1. 22 Tìm Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

a/ $f(x)=\sin^{11} x+\cos^{11} x$;

b/ $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$;

c/ $f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x$;

d/ $f(x)=\sin^{2n} x+\cos^{2n} x$, với $n\in\mathbb{N}^*$.

§ 3 PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A LÝ THUYẾT

1 Phương trình sinx = m

Xét phương trình $\sin x=m$

* Với $m\notin\left[-1;1\right]$, phương trình $\sin x=m$ vô nghiệm.

* Với $m\in\left[-1;1\right]$, tồn tại số α sao cho $\sin\alpha=b$.

$$\sin x=m\Leftrightarrow\sin x=\sin\alpha\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\alpha+k2\pi\\x=\pi-\alpha+k2\pi.\end{array}\right.\qquad(k\in\mathbb{Z})$$

Chú ý Với mỗi m cho trước mà $\left|m\right|\le 1$, phương trình sinx = m có đúng một nghiệm trong đoạn $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Người ta thường kí hiệu nghiệm đó là $\arcsin m$. Khi đó

$$\sin x=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\arcsin m+k2\pi\\x=\pi-\arcsin m+k2\pi.\end{array}\right.$$

2 Phương trình cosx = m

* Với $m\notin\left[-1;1\right]$, phương trình $\cos x=m$ vô nghiệm.

* Với $m\in\left[-1;1\right]$, tồn tại số α sao cho $\cos\alpha=m$.

$$\cos x = m \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi. \end{array}\right. \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Chú ý Với mỗi m cho trước mà $|m| \le 1$, phương trình cosx = m có đúng một nghiệm trong đoạn $[0;\pi]$.

Người ta thường kí hiệu nghiệm đó là $\arccos m$. Khi đó

$$\cos x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arccos m + k2\pi \\ x = -\arccos m + k2\pi. \end{array}\right.$$

3 Phương trình tanx = m, cotx = m

Các phương trình trên luôn có nghiệm.

Với mọi số thực α, ta có

$\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$. $\qquad (k \in \mathbb{Z})$

$\cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$. $\qquad (k \in \mathbb{Z})$

Chú ý

i) Với mọi số m cho trước, phương trình $\tan x = m$ có duy nhất một nghiệm trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Người ta thường kí hiệu nghiệm đó là $\arctan m$. Khi đó

$$\tan x = m \Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi.$$

ii) Với mọi số m cho trước, phương trình $\cot x = m$ có duy nhất một nghiệm trong khoảng $(0;\pi)$. Người ta thường kí hiệu nghiệm đó là $arc\cot m$. Khi đó

$$\cot x = m \Leftrightarrow x = arc\cot m + k\pi.$$

Công thức ngiệm của phương trình lượng giác

$$\sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{array}\right. \qquad \cos u = \cos v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi \qquad \cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi$$

với $k \in \mathbb{Z}$

(trong điều kiện biểu thức có nghĩa)

Một số trường hợp đặc biệt

$\sin u = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

$\sin u = -1 \Leftrightarrow u = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

$\sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi$

$\cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi$

$\cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi$

$\cos u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\tan u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi$

$\cot u = 0 \Leftrightarrow u = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

B BÀI TẬP

1. 23 Giải phương trình :

a/ $\sin x = \sin\dfrac{\pi}{6}$; b/ $2\sin x + \sqrt{2} = 0$; c/ $\sin(x-2) = \dfrac{2}{3}$;

d/ $\sin(x + 20^o) = \sin 60^o$; e/ $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{4}$; f/ $2\cos 2x + 1 = 0$;

g/ $\cos(2x + 15^o) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; h/ $\tan 3x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; i/ $\tan(4x+2) = 3$;

j/ $\tan(2x + 10^o) = \tan 60^o$; k/ $\cot 4x = \sqrt{3}$; l/ $\cot(x+2) = 1$.

1. 24 Giải phương trình :

a/ $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{5} + x\right)$; b/ $\cos(2x+1) = \cos(2x-1)$;

c/ $\tan\dfrac{2x+1}{6} + \tan\dfrac{1}{3} = 0$; d/ $\sin 3x = \cos 2x$.

1. 25 Giải các phương trình sau :

a/ $\cos^2 2x = \dfrac{1}{4}$; b/ $4\cos^2 2x - 3 = 0$;

c/ $\cos^2\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin^2 x$; d/ $\cos^2 3x + \sin^2 2x = 1$.

1. 26 Tìm các nghiệm của phương trình sau trong khoảng đã cho :

a/ $2\sin 2x + 1 = 0$ với $0 < x < \pi$; b/ $\cot(x-5) = \sqrt{3}$ với $-\pi < x < \pi$.

1. 27 Giải các phương trình sau :

a/ $\sin x + \cos x = 1$; b/ $\sin^4 x - \cos^4 x = 1$;

c/ $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$; d/ $\sin^3 x\cos x - \cos^3 x\sin x = \sqrt{2}/8$.

1. 28 Giải các phương trình sau :

a/ $\cos^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x = 0$; b/ $\sqrt{3}\cos x + \sin 2x = 0$;

c/ $8\sin x.\cos x.\cos 2x = \cos 8\left(\dfrac{\pi}{16} - x\right)$; d/ $\sin^4\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) - \sin^4 x = \sin 4x$.

1. 29 Giải phương trình :

a/ $\cos 7x.\cos x = \cos 5x.\cos 3x$; b/ $\cos 4x + \sin 3x.\cos x = \sin x.\cos 3x$;

c/ $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$; d/ $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x=2$.

1. 30 Giải các phương trình sau :

a/ $\sin 2x\sin 5x=\sin 3x\sin 4x$; b/ $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$;

c/ $\sin^2 x+\sin^2 3x=2\sin^2 2x$; d/ $\sin x+\sin 3x+\sin 5x=\cos x+\cos 3x+\cos 5x$.

1. 31 Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau :

a/ $y=\tan x$; b/ $y=\cot 2x$; c/ $y=\dfrac{2\cos x+1}{2\cos x-1}$;

d/ $y=\dfrac{\sin(2-x)}{\cos 2x-\cos x}$; e/ $y=\dfrac{\tan x}{1+\tan x}$; f/ $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}\cot 2x+1}$.

1. 32 Giải phương trình :

a/ $\dfrac{2\cos 2x}{1-\sin 2x}=0$; b/ $\dfrac{\tan x-\sqrt{3}}{2\cos x+1}=0$;

. c/ $\sin 3x\cot x=0$; d/ $\tan 3x=\tan x$.

1. 33 Tìm nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ của phương trình $4\cos 3x\cos 2x+2\cos 3x+1=0$.

§4 PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI THEO MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A **DẠNG** $at^2+bt+c=0$ ($a\neq 0$), với t là một hàm số lượng giác (sinx, cosx, tanx, cotx, $\alpha\sin x+\beta\cos x$, $\sin(\alpha x+\beta)$, $\dfrac{1}{\sin x}$, ...)

B **BÀI TẬP**

1. 34 Giải phương trình :

a/ $2\cos^2 x-3\cos x+1=0$; b/ $\cos^2 x+\sin x+1=0$;

c/ $2\sin^2 x+5\sin x-3=0$; d/ $\cot^2 3x-\cot 3x-2=0$;

1. 35 Giải phương trình :

a/ $2\cos^2 x+\sqrt{2}\cos x-2=0$; b/ $\cos 2x+\cos x+1=0$;

c/ $\cos 2x-5\sin x-3=0$; d/ $5\tan x-2\cot x-3=0$.

1. 36 Giải các phương trình lượng giác sau :

a/ $\sin^2\dfrac{x}{2}-2\cos\dfrac{x}{2}+2=0$; b/ $\cos x+5\sin\dfrac{x}{2}-3=0$;

c/ $\cos 4x-\sin 2x-1=0$; d/ $\cos 6x-3\cos 3x-1=0$.

1. 37 Giải các phương trình :

a/ $\tan^2 x+\left(\sqrt{3}-1\right)\tan x-\sqrt{3}=0$; b/ $\sqrt{3}\tan^2 x-\left(1-\sqrt{3}\right)\tan x-1=0$;

c/ $2\cos 2x-2\left(\sqrt{3}+1\right)\cos x+2+\sqrt{3}=0$; d/ $\dfrac{1}{\cos^2 x}-\left(2+\sqrt{3}\right)\tan x-1+2\sqrt{3}=0$.

1. 38 Giải các phương trình sau :

a/ $\cos 5x\cos x=\cos 4x.\cos 2x+3\cos^2 x+1$; b/ $2\cos^6 x+\sin^4 x+\cos 2x=0$;

c/ $\dfrac{4\sin^2 2x+6\sin^2 x-9-3\cos 2x}{\cos x}=0$; d/ $2\cos 2x+\cos^2\dfrac{x}{2}-10\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}-x\right)+\dfrac{7}{2}=\dfrac{1}{2}\cos x$.

1. 39 Giải các phương trình :

a/ $3\tan^2 x-\dfrac{5}{\cos x}+1=0$; b/ $\cos^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}=\cos x+\dfrac{1}{\cos x}$;

c/ $5\sin 2x+\sin x+\cos x+6=0$; d/ $\tan^2 x+\cot^2 x+2\left(\tan x+\cot x\right)=6$.

1. 40 Giải phương trình $2\left(\tan x-\sin x\right)+3\left(\cot x-\cos x\right)+5=0$.

§5 PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI $\sin x$ VÀ $\cos x$

A LÝ THUYẾT

Dạng $a\sin x+b\cos x=c$ ($a^2+b^2\neq 0$)

Cách giải

- Chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{a^2+b^2}$, phương trình trở thành

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} ;$$

- Vì $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$ nên có góc α sao cho $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha$ và $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$,

  ta có phương trình tương đương : $\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

- Áp dụng công thức cộng, ta được phương trình $\sin\left(x+\alpha\right)=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Dể dàng giải được phương trình này.

Nhận xét

- Phương trình $a\sin x+b\cos x=c$ có nghiệm khi và chỉ khi $a^2+b^2\geq c^2$.
- Các phương trình $a\sin x-b\cos x=c$, $a\cos x\pm b\sin x=c$ cũng được giải tương tự.

B BÀI TẬP

1. 41 Giải phương trình :

a/ $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$; b/ $\sqrt{3}\cos 3x-\sin 3x=2$;

c/ $3\cos x+4\sin x=-5$; d/ $\sin x-7\cos x=7$;

e/ $2\sin 2x-2\cos 2x=\sqrt{2}$; f/ $\sin 2x=\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos 2x$.

1. 42 Giải phương trình :

a/ $2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x=3$; b/ $2\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=\sqrt{2}$;

c/ $2\sin 2x\cos 2x+\sqrt{3}\cos 4x+\sqrt{2}=0$; d/ $4\sin^2 x+3\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x=4$.

1. 43 Giải các phương trình sau :

a/ $\sin 3x-\sqrt{3}\cos 3x=2\cos 4x$; b/ $\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$;

c/ $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\cos x-\sqrt{2}\sin x$; d/ $\sin 8x-\cos 6x=\sqrt{3}(\sin 6x+\cos 8x)$.

1. 44 Giải các phương trình sau :

a/ $3\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+5\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)=0$;

b/ $2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+4\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

1. 45 Giải các phương trình sau :

a/ $3\sin x-\sqrt{3}\cos 3x=1+4\sin^3 x$; b/ $\sqrt{3}\cos 5x-2\sin 3x\cos 2x-\sin x=0$;

c/ $\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2$; d/ $8\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$.

1. 46 Tìm $x\in\left(\frac{2\pi}{5},\frac{6\pi}{7}\right)$ thỏa phương trình $\cos 7x-\sqrt{3}\sin 7x=-2$

1. 47 Cho phương trình $2\sin^2 x-\sin x\cos x-\cos^2 x=m$

a/ Tìm m để phương trình có nghiệm.

b/ Giải phương trình với $m=-1$.

1. 48 Cho phương trình $\sin 2x-2m\cos x=\sin x-m$. Tìm m để phương trình có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{3\pi}{4}\right]$.

1. 49 Giải các phương trình

a/ $8\sin x=\frac{\sqrt{3}}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$; b/ $2\sqrt{\sin x}=\frac{\sqrt{3}\tan x}{2\sqrt{\sin x}-1}-1$.

§6 PHƯƠNG TRÌNH THUẦN NHẤT BẬC HAI THEO $\sin x$ VÀ $\cos x$

A LÝ THUYẾT

Dạng $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0 \quad (a^2+b^2+c^2 \neq 0)$

Cách giải

- Xét xem $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ có thỏa phương trình không ;
- Với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($\cos x \neq 0$), chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ để đưa về phương trình theo $\tan x$.

Chú ý

- Đối với các phương trình $a\sin^2 x + b\sin x\cos x = 0$, $b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ ta có thể giải bằng cách đưa về phương trình tích.
- Áp dụng công thức hạ bậc và công thức nhân đôi, phương trình thuần nhất bậc hai được chuyển thành phương trình bậc nhất theo $\sin 2x$ và $\cos 2x$.
- Với hằng đẳng thức $d = d\sin^2 x + d\cos^2 x$, phương trình $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$ cũng được xem là phương trình thuần nhất.

B BÀI TẬP

1. 50 Giải phương trình :

a/ $3\sin^2 x - \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 3$; b/ $\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$;

c/ $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 4$; d/ $\cos^2 2x + \sin 4x - 3\sin^2 2x = 0$.

1. 51 Giải pương trình :

a/ $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 2$; b/ $\sin^2 x + \left(\sqrt{3}-1\right)\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$;

c/ $\sqrt{3}\sin^2 x - \sin x\cos x = 0$; d/ $\cos^2 x = 3\sin 2x + 3$.

1. 52 Giải pương trình :

a/ $\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x + 2\cos^2 x = \frac{3+\sqrt{2}}{2}$; b/ $\left(\sqrt{3}+1\right)\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x + \left(\sqrt{3}-1\right)\cos^2 x = 0$;

c/ $4\sin^2 \frac{x}{2} + 3\sqrt{3}\sin x - 2\cos^2 \frac{x}{2} = 4$; d/ $3\cos^2 4x + 5\sin^2 4x = 2 - \sqrt{3}\sin 8x$.

1. 53 Giải các phương trình sau :

a/ $4\sin x + 6\cos x = \frac{1}{\cos x}$; b/ $\sin x\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\cos^2 x = 0$;

c/ $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x - \cos x$; d/ $\sin x\sin 2x + \sin 3x = 6\cos^3 x$.

BAI TẬP LÀM THÊM

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1. 54 Giải các phương trình lượng giác sau đây :

a/ $\sin x = \dfrac{1}{2}$; b/ $2\cos x + 1 = 0$;

c/ $\tan 3x = 1$; d/ $4\cos x + 1 = 0$.

1. 55 Giải phương trình

a/ $\sin 4x + \cos 5x = 0$; b/ $\sin 3x - \cos 6x = 0$;

c/ $\tan 5x + \cot\dfrac{2\pi}{5} = 0$; d/ $\cot\left(\dfrac{x}{4} + 20^o\right) = \sqrt{3}$.

1. 56 Giải phương trình

a/ $\cos\left(3x + 60^0\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; b/ $\cot\left(2x + 40^0\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

c/ $\cos(2x + 45^o) + \cos x = 0$; d/ $\sin\left(x + 24^0\right) + \cos\left(x + 144^0\right) = \cos 20^0$.

1. 57 Giải phương trình

a/ $2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$; b/ $8\cos^3\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos 3x$.

1. 58 a/ Chứng minh rằng $4\sin^3 x\cos 3x + 4\cos^3 x\sin 3x = 3\sin 4x$.

b/ Giải phương trình $\sin^3 x\cos 3x + \cos^3 x\sin 3x = \sin^3 4x$.

1. 59 Tìm các nghiệm của phương trình sau trong khoảng đã cho :

a/ $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ với $-\dfrac{2\pi}{3} < x < \dfrac{\pi}{2}$; b/ $\cos\left(2x + 1\right) = \dfrac{1}{2}$ với $x \in \left(-\pi; \pi\right)$;

c/ $\tan\left(3x + 2\right) = \sqrt{3}$ với $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$; d/ $\tan 2x = \sqrt{3}$ với $x \in \left(-\pi; \pi\right)$.

1. 60 Giải phương trình

a/ $2\sin x\cos 2x\cos 3x = \sin 2x$; b/ $\sin 5x - 2\sin x\left(\cos 2x + \cos 4x\right) = 1$;

c/ $\sin 3x - \sin x - \sin 2x = 0$; d/ $3\sin 4x + 2\cos 4x + 3\sin 2x + 16\cos 2x + 9 = 0$.

1. 61 Giải phương trình :

a/ $\tan 3x\tan x + 1 = 0$; b/ $\sin 3x\cot x = 0$;

c/ $\tan 3x = \tan x$; d/ $\dfrac{2\cos x + \sqrt{2}}{\tan x - 1} = 0$.

1. 62 Giải phương trình :

a/ $2\sin x\cos 2x - 1 + 2\cos 2x - \sin x = 0$; b/ $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos 2x$;

c/ $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$; d/ $\tan x + \cot 2x = 2$;

e/ $\sin x + \cos x = \dfrac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$; f/ $\dfrac{1 + \cos 2x}{\cos x} = \dfrac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$;

g/ $\cos x - \cos 3x + \cos 5x = \dfrac{1}{2}$; h/ $\tan 2x\sin x + \sqrt{3}\left(\sin x - \sqrt{3}\tan x\right) - 3\sqrt{3} = 0$.

1. 63 Tìm $x \in [0;14]$ nghiệm đúng phương trình $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$.

1. 64 a/ Hãy biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình $\sin x = m$, $x \in [0;3\pi]$.

b/ Hãy xác định tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2m\cos x - \sin 2x = 0$ có đúng 7 nghiệm trong đoạn $[0;3\pi]$.

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI, BẬC BA THEO MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1. 65 Giải phương trình :

a/ $\sin^3 x + 3\sin^2 x + 2\sin x = 0$; b/ $\sin^2 x - 2\cos^2 \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{4} = 0$;

c/ $1 + \sin x\sin 3x = 0$; d/ $2\sin^2 x - \cos^2 x - 4\sin x + 2 = 0$;

e/ $8\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) = 4\sin x\cos x + 7$; f/ $\sin^6 x + \cos^6 x + \dfrac{3}{4} = \sin 2x$;

g/ $\cos^2\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 4\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) = \dfrac{5}{2}$; h/ $2\cos 2x - \sin^2\dfrac{x}{2} - 10\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}\cos x$.

1. 66 Giải phương trình sau :

a/ $\sin 2x - \cos 2x = 5\sin x + \cos x - 3$; b/ $\sin^4 x - \cos^2 x = 1$;

c/ $\dfrac{3}{\cos^2 x} + 2\sqrt{3}\tan x - 6 = 0$; d/ $\sin 2x + 2\tan x = 3$.

1. 67 Tìm nghiệm $x \in [0;2\pi]$ của phương trình $5\left(\sin x + \dfrac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3$.

1. 68 Giải các phương trình sau:

a/ $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \dfrac{2}{\sin 2x}$; b/ $\tan^3\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \tan x - 1$;

c/ $\dfrac{\cos 2x + 3\cot 2x + \sin 4x}{\cot 2x - \cos 2x} = 2$; d/ $\cos 3x + 3\cos 2x = 2(1 + \cos x)$.

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT THEO sinx VÀ cosx

1. 69 Giải các phương trình sau :

a/ $\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$; b/ $2\sin 17x+\sqrt{3}\cos 5x+\sin 5x=0$;

c/ $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$; d/ $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{6}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2$.

1. 70 Giải các phương trình sau :

a/ $1-\cos x=\sqrt{3}\sin x$; b/ $\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$;

c/ $\sin 4x-\cos 2x=\sqrt{3}\left(\sin 2x+\cos 4x\right)$; d/ $\left(\sin x-\cos x\right)^2+\sqrt{3}\sin 2x=2$.

1. 71 Giải các phương trình sau :

a/ $\cos^4 x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$; b/ $\sin^3 x+\cos^3 x=\sin x-\cos x$;

c/ $\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x+2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{2}$; d/ $\tan x-3\cot x=4(\sin x+\sqrt{3}\cos x)$;

e/ $3\cos x-4\sin x+\frac{2}{3\cos x-4\sin x-6}=3$;

f/ $8\sin x\sin 2x+6\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=5+7\cos x$.

1. 72 Với giá trị nào của tham số m thì phương trình sau có nghiệm :

a/ $m\sin x-\left(m+1\right)\cos x=2$; b/ $m\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin x=2-\cos x$.

1. 73 Tìm x sao cho biểu thức $y=\frac{\sin x+1}{\cos x+2}$ nhận giá trị nguyên.

1. 74 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

a/ $a\sin x+b\cos x$ (a, b là các hằng số và $a^2+b^2\neq 0$) ;

b/ $\sin^2 x+\sin x\cos x+3\cos^2 x$.

1. 75 Giải các phương trình sau :

a/ $3\sin^2 x+8\sin x\cos x+4\cos^2 x=0$; b/ $4\sin^2 x+3\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x=4$;

c/ $\sin^3 x+2\sin x.\cos^2 x+3\cos^3 x=0$; d/ $6\sin x-7\cos^3 x=5\sin^2 x\cos x$.

1. 76 Giải các phương trình sau :

a/ $1+3\tan x=2\sin 2x$; b/ $5\left(1+\cos x\right)+\cos^4 x-\sin^4=2$;

c/ $\sin x\cos 4x-\sin^2 2x+2\sin x+\frac{3}{2}=0$; d/ $1+\sin x\sin 2x-\cos x\sin^2 x=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$;

e/ $\frac{\sin 5x}{\sin x}-\frac{\cos 5x}{\cos x}=0$; f/ $\tan x+\cot 4x=\frac{2}{\sin 2x}$;

g/ $\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{17}{16}\cos^2 2x$; h/ $\cos^2\frac{x}{2}=\tan^2 x.\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$;

i/ $(1+\sin x+2\cos x)\cos 2x-\sin 2x=1$; j/ $\cos x+\cos^2 3x-\sin^2 2x=0$ trên $[0;\pi]$;

k/ $\cos^2 3x\cos 2x-\cos^2 x=0$; l/ $\sin 5x=5\sin x$;

m/ $\left(1+\sin^2 x\right)\cos x+\left(1+\cos^2 x\right)\sin x=1+\frac{1}{2}\sin 2x$.

1. 77 Tìm các nghiệm thuộc khoảng $(0;2\pi)$ của phương trình $\sin x+\frac{\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x}=\cos 2x+3$.

GIỚI THIỆU MỘT SỐ PTLG TRONG ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG

Giải các phương trình lượng giác sau đây :

1) $\cos 4x+12\sin^2 x-1=0$; (CĐ – 2011)

2) $\frac{\sin 2x+2\cos x-\sin x-1}{\tan x+\sqrt{3}}=0$; (Khối D – 2011)

3) $\sin 2x\cos x+\sin x\cos x=\cos 2x+\sin x+\cos x$; (Khối B – 2011)

4) $\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\cot^2 x}=\sqrt{2}\sin x\sin 2x$; (Khối A – 2011)

5) $\sin 2x-\cos 2x+3\sin x-\cos x-1=0$; (Khối D - 2010)

6) $(\sin 2x+\cos 2x)\cos x+2\cos 2x-\sin x=0$; (Khối B - 2010)

7) $\frac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$; (Khối A - 2010)

8) $\frac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)}=\sqrt{3}$; (Khối A – 2009)

9) $\sin x+\cos x.\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2\left(\cos 4x+\sin^3 x\right)$; (Khối B – 2009)

10) $\sqrt{3}\cos 5x-2\sin 3x.\cos 2x-\sin x=0$; (Khối D – 2009)

11) $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}=4\sin\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)$; (Khối A – 2008)

12) $2\sin x\left(1+\cos 2x\right)+\sin 2x=1+2\cos x$; (Khối B – 2008)

13) $\sin^3 x-\sqrt{3}\cos^3 x=\sin x\cos^2 x-\sqrt{3}\sin^2 x\cos x$; (Khối D – 2008)

14) $2\sin^2 2x+\sin 7x-1=\sin x$; (Khối B – 2007)

15) $\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2$; (Khối D – 2007)

16) $\cos 3x+\cos 2x-\cos x-1=0$; (Khối D – 2006)

17) $\cot x+\sin x\left(1+\tan x\tan\frac{x}{2}\right)=4$; (Khối B – 2006).

18) $\dfrac{2\left(\cos^6 x+\sin^6 x\right)-\sin x\cos x}{\sqrt{2}-2\sin 2x}=0$; (Khối A – 2006).

19) $\cos^4 x+\sin^4 x+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{3}{4}=0$; (Khối D – 2005).

20) $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$; (Khối B – 2005).

21) $\cos^2 3x\cos 2x-\cos^2 x=0$; (Khối A – 2005).

22) $\left(2\cos x-1\right)\left(2\sin x+\cos x\right)=\sin 2x-\sin x$; (Khối D – 2004).

23) $5\sin x-2=3\left(1-\sin x\right)\tan^2 x$; (Khối B – 2004).

24) $\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\tan^2 x-\cos^2\frac{x}{2}=0$; (Khối D – 2003).

25) $\cot x-1=\dfrac{\cos 2x}{1+\tan x}+\sin^2 x-\dfrac{1}{2}\sin 2x$; (Khối A – 2003).

26) $\cos^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x$; (Khối B – 2002).

Trường THPT NGUYỄN KHUYẾN

<u>ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KỲ 1</u> **NĂM HỌC 2009 - 2010**

MÔN TOÁN LỚP 11 – CHƯƠNG TRÌNH NÂNG CAO

(thời gian làm bài : 60 phút)

*<u>Bài 1</u>***.** (6 điểm) Giải các phương trình sau đây :

a/ $2\sin 2x+3=2\sin^2 x$; b/ $1+\sin x.\sin 3x=0$;

c/ $\sqrt{3}\cos x=\sin x-1$; d/ $1+\tan x.\tan 2x=0$.

Bài 2 (2 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): $2x-5y+4=0$

a/ Tìm phương trình ảnh của (d) trong phép đối xứng tâm I (3; -2)

b/ Hãy xác định vec tơ $\vec{v}$ có giá song song với Ox, biết rằng trong phép tịnh tiến theo $\vec{v}$, đường thẳng (d) có ảnh là một đường thẳng qua gốc O.

Bài 3 (2 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm M(1 ; 4) và đường thẳng $\Delta : x - 3y + 1 = 0$. Tìm tọa độ ảnh của M trong phép đối xứng qua đường thẳng Δ. Suy ra phương trình ảnh của đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-8y+3=0$ trong phép đối xứng qua Δ.

Chương 2 TỔ HỢP VÀ XÁC XUẤT

§1 HAI QUY TẮC ĐẾM

A LÝ THUYẾT

1 **Quy tắc cộng** Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo phương án A hoặc phương án B. Có n cách thực hiện phương án A và m cách thực hiện phương án B. khi đó công việc đó có thể thực hiện bởi n + m cách.

2 **Quy tắc nhân** Giả sử một công việc nào đó bao gồm hai công đoạn A và B. Công đoạn A có thể làm theo n cách. Với mỗi cách thực hiện công đoạn A thì công đoạn B có thể làm theo m cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo nm cách.

B BÀI TẬP

2. 1 a/ Một trường THPT được cử một học sinh đi dự trại hè toàn quốc. Nhà trường quyết định chọn một học sinh tiên tiến lớp 11A hoặc lớp 12B. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn, nếu biết rằng lớp 11A có 31 học sinh tiên tiến và lớp 12B có 22 học sinh tiên tiến ?

b/ Một trường THPT được cử hai học sinh đi dự trại hè toàn quốc. Nhà trường quyết định chọn một học sinh tiên tiến lớp 11A và lớp 12B. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn, nếu biết rằng lớp 11A có 31 học sinh tiên tiến và lớp 12B có 22 học sinh tiên tiến ?

2. 2 a/ Giả sử từ tỉnh A đến tỉnh B có thể đi bằng các phương tiện : ôtô, tàu hỏa, tàu thủy hoặc máy bay. Mỗi ngày có 10 chuyến ôtô, 5 chuyến tàu hỏa, 3 chuyến tàu thủy và 2 chuyến máy bay. Hỏi có bao nhiêu sự lựa chọn phương tiện để đi từ A tới B ?

b/ Từ A đến B có 4 con đường để đi ; từ B đến C có 5 con đường để đi. Hỏi có bao nhiêu cách chọn đường đi từ A đến C (qua B) ?

2. 3 a/ Hùng có hai đôi giày và ba đôi dép. Hỏi Hùng có bao nhiêu sự lựa chọn (một đôi giày hoặc một đôi dép để mang) ?

b/ Hùng có 2 quần tây và 3 áo sơ mi. Hỏi Hùng có bao nhiêu cách để chọn một bộ quần áo ?

2. 4 Một đội văn nghệ có 6 nam và 7 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn

a/ Một đôi song ca nam – nữ ?

b/ Một bạn để biểu diễn đơn ca ?

2. 5 Có ba kiểu mặt đồng hồ đeo tay (vuông, tròn, elip) và bốn kiểu dây (kim loại, da, vải, nhựa). Hỏi có bao nhiêu cách chọn một chiếc đồng hồ gồm một mặt và một dây ?

2. 6 Một lớp học có 26 học sinh nam và 19 học sinh nữ.

a/ Lớp có bao nhiêu cách lựa chọn một bạn phụ trách quỹ lớp ?

b/ Lớp có bao nhiêu cách lựa chọn một bạn nam và một bạn nữ phụ trách phong trào ?

c/ Lớp có bao nhiêu cách lựa chọn một ban cán sự lớp gồm ba người : 1 lớp trưởng, 1 lớp phó phụ trách kỷ luật và một lớp phó phụ trách học tập với điều kiện lớp trưởng phải là một bạn nữ và lớp phó kỷ lật phải là một bạn nam ?

2. 7 Trên giá sách có 9 quyển sách tiếng Việt (khác nhau), 5 quyển sách tiếng Hoa (khác nhau) và 16 quyển sách tiếng Anh (khác nhau). Hỏi có bao nhiêu cách chọn

a/ Một quyển sách ?

b/ Ba quyển sách với ba thứ tiếng khác nhau ?

2. 8 Có 10 cặp vợ chồng dự tiệc. Tính số cách chọn ra một người đàn ông và một người đàn bà trong bữa tiệc để phát biểu ý kiến, sao cho :

a/ Hai người đó là một cặp vợ chồng ?

b/ Hai người đó không là vợ chồng ?

2. 9 Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà hai chữ số của nó đều chẵn ?

2. 10 Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, có thể tạo nên bao nhiêu số tự nhiên

a/ Có hai chữ số ?

b/ Có hai chữ số khác nhau ?

2. 11 Từ các chữ số 2, 3, 4, 6, 7, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên bé hơn 100 ?

2. 12 Cho tập hợp X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. 8}. Từ các phần tử của tập X có thể lập bao nhiêu số tự nhiên trong các trường hợp sau :

a/.Số đó có 3 chữ số.

b/ Số đó có 4 chữ số khác nhau từng đôi một.

c/ Số đó là số chẵn và có 4 chữ số khác nhau từng đôi một.

2. 13 Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau và chia hết cho 5 ?

2. 14 Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm ba chữ số khác nhau được tạo ra từ các chữ số 0, 1, 2, 4, 5, 7 ?

2. 15 Cho A là một tập hợp có 5 phần tử. Hỏi A có bao nhiêu tập hợp con ?

§2 HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

A LÝ THUYẾT

1 Hoán vị

Hoán vị Cho một tập hợp A có n phần tử ($n \geq 1$). Khi sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự, ta được một hoán vị các phần tử của tập hợp A (gọi tắc là một hoán vị vủa A).

Định lý Số hoán vị của một tập hợp có n phần tử là

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)...1$$

2 **Chỉnh hợp** Cho tập hợp A gồm n phần tử và số nguyên k với $1 \le k \le n$. Khi lấy ra k phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự, ta được một chỉnh hợp chập k của n phần tử của A (gọi tắc là một chỉnh hợp chập k của A).

Định lý Số các chỉnh hợp chập k của một tập hợp có n phần tử ($1 \le k \le n$) là

$$A_n^k = n.(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$$

Chú ý Với quy ước $0! = 1$ và $A_n^0 = 1$ thì $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ với $0 \le k \le n$.

3 **Tổ hợp** Cho tập hợp A có n phần tử và số nguyên k với $1 \le k \le n$. Mỗi tập con của A có k phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử của A (gọi tắc là một chỉnh hợp chập k của A).

Định lý Gọi C_n^k là số các tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử ($1 \le k \le n$) thì

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}$$

Chú ý Với quy ước $C_n^0 = 1$, ta có $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ với mọi $k \in \{0, 1, ..., n\}$.

4 **Hai tính chất cơ bản của số C_n^k**

Tính chất 1 $C_n^k = C_n^{n-k}$

Tính chất 2 $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$

B **BÀI TẬP**

2. 16 a/ Hãy liệt kê 5 hoán vị của tập hợp A = {a ; b ; c ; d}.

b/ Hãy liệt kê 5 chỉnh hợp chập 3 của các phần tử {a ; b ; c ; d}.

c/ Hãy viết tất cả các tổ hợp chập 2 của tập hợp A = {a ; b ; c, d}.

2. 17 Cho X = {a, b, c, d, e}. Có bao nhiêu hoán vị các phần tử của X mà phần tử cuối là a.

2. 18 Cho X = {a, b, c, d}

a/ Hãy lập tất cả các tập con của X có chứa phần tử a.

b/ Hãy lập tất cả các tập con của X không chứa phần tử a.

c/ Có bao nhiêu tập con thu được trong mỗi trường hợp.

2. 19 Có tối đa bao nhiêu số máy điện thoại có 7 chữ số bắt đầu bằng số 8 sao cho:

a/ Các chữ số đôi một khác nhau.

b/ Các chữ số tùy ý.

2. 20 a/ Có ba lọ hoa giống nhau và ba loại hoa khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách cắm hoa vào lọ (mỗi lọ cắm một loại hoa) ?

b/ Có ba lọ hoa khác nhau và ba loại hoa khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách cắm hoa vào lọ (mỗi lọ cắm một loại hoa) ?

2. 21 a/ Có ba lọ hoa giống nhau và bảy loại hoa khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ba loại hoa cắm hoa vào lọ (mỗi lọ cắm một loại hoa) ?

b/ Có ba lọ hoa khác nhau và bảy loại hoa khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ba loại hoa cắm hoa vào lọ (mỗi lọ cắm một loại hoa) ?

2. 22 a/ Có bao nhiêu cách chọn 3 người từ 10 người để thực hiện cùng một công việc ?

b/ Có bao nhiêu cách chọn 3 người từ 10 người để thực hiện ba công việc khác nhau ?

2. 23 Trong mặt phẳng cho một tập hợp gồm 6 điểm phân biệt.

a/ Có bao nhiêu véctơ khác véctơ $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập hợp điểm đã cho ?

b/ Có bao nhiêu đoạn thẳng có hai đầu mút thuộc về tập hợp điểm đã cho ?

2. 24 a/ Một huấn luyện viên tổ chức cuộc thi bơi lội cho 15 vận động viên tranh tài để chọn ra 2 người thi đấu giải vô địch quốc gia, một người thi đấu chính thức và người kia dự bị. Hỏi huấn luyện viên đó có bao nhiêu sự lựa chọn ?

b/ Một huấn luyện viên tổ chức cuộc thi bơi lội cho 15 vận động viên tranh tài để chọn ra 2 người thi đấu giải vô địch quốc gia. Hỏi huấn luyện viên đó có bao nhiêu sự lựa chọn (cả hai đều thi đấu chính thức) ?

2. 25 Một lớp học có 41 học sinh.

a/ Có bao nhiêu cách chọn 3 bạn để trực nhật ?

b/ Có bao nhiêu cách chọn một bạn làm lớp trưởng, một bạn làm lớp phó và một bạn làm thư kí ?

2. 26 Ban chấp hành đoàn trường gồm 7 người, cần chọn 3 người vào ban thường vụ.

a/ Nếu không có sự phân biệt về chức vụ trong ban thường vụ thì có mấy lựa chọn ?

b/ Nếu cần chọn 3 người vào ban thường vụ với các chức vụ Bí thư, Phó Bí thư và Ủy viên thường vụ thì có bao nhiêu cách chọn ?

2. 27 Trong một cuộc thi có 16 đội tham dự, giả sử rằng không có hai đội nào cùng điểm.

a/ Nếu kết quả cuộc thi là chọn ra ba đội có điểm cao nhất thì có bao nhiêu cách chọn ?

b/ Nếu kết quả cuộc thi là chọn ra các giải nhất, nhì, ba thì có bao nhiêu sự lựa chọn ?

2. 28 Trong trận chung kết bóng đá phải phân định thắng thua bằng đá luân lưu 11 mét. Huấn luyện viên cần trình trọng tài một danh sách sắp thứ tự 5 cầu thủ để đá luân lưu 11 mét. Hỏi HLV có bao nhiêu sự lựa chọn ?

2. 29 a/ Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau đôi một ?

b/ Từ các số 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có bảy chữ số khác nhau ?

2. 30 a/ Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 người ngồi vào 5 ghế khác nhau (mỗi người một ghế) ?

b/ Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 nam và 5 nữ thành 5 cặp để khiêu vũ ?

2. 31 Cho 10 điểm nằm trên một đường tròn.

a/ Có bao nhiêu đoạn thẳng mà hai đầu là hai trong số 10 điểm đã cho ?

b/ Có bao nhiêu véctơ có gốc và ngọn trùng với hai trong số 10 điểm đã cho ?

c/ Có bao nhiêu tam giác mà các đỉnh là ba trong số 10 điểm đã cho ?

2. 32 Một họ 12 đường thẳng song song cắt một họ khác gồm 9 đường thẳng song song (không song song với 12 đường ban đầu. Có bao nhiêu hình bình hành được tạo nên ?

2. 33 Hình 18 cạnh đều có bao nhiêu đường chéo ?

2. 34 Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 song song nhau. Trên d_1 lấy 5 điểm, trên d_2 lấy 3 điểm. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó được lấy từ các điểm đã chọn ?

2. 35 Trong một lớp có 20 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Thầy giáo chủ nhiệm cần chọn ra 4 học sinh nam và 3 học sinh nữ để tham gia chiến dịch "Mùa hè xanh". Hỏi có bao nhiêu sự lựa chọn ?

2. 36 Trên giá sách có 6 quyển sách toán, 7 quyển sách lí và 9 quyển sách hóa, các quyển sác đều khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 6 quyển sách, mỗi loại 2 quyển ?

2. 37 Có 6 bì thư khác nhau và 5 con tem khác nhau. Lấy ra 3 bì thư và 3 con tem sau đó dán tem lên bì, mỗi bì 1 con tem. Hỏi có bao nhiêu cách làm như vậy ?

2. 38 Một tổ có 7 nam và 3 nữ. Người ta cần chọn ra 5 em để tham gia đồng diễn thể dục, yêu cầu không có quá một em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

2. 39 Có 5 quyển sách toán khác nhau, 6 quyển sách văn khác nhau và 3 quyển sách lịch sử khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xắp xếp chúng lên một giá sách sao cho từng thể loại theo thể loại đó ?

2. 40 Từ các số 1 và 2 có thể lập được bao mấy số tự nhiên có 8 chữ số mà số 1 có mặt đúng 3 lần ?

2. 41 Từ các số 1, 2, 4, 6, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số sao cho số 1 xuất hiện đúng hai lần, các chữ số còn lại suất hiện không quá một lần ?

2. 42 a/ Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau ?

b/ Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau và chia hết cho 5 ?

2. 43 Chuẩn bị cho ngày khai giảng cần chọn 7 bạn trong 50 bạn vào đội vệ sinh. Trong đó có 4 bạn nhổ cỏ và 3 bạn sơn ghế.

a/ Hỏi có bao nhiêu cách phân công.

b/ Sử dụng câu a để chứng minh rằng $C_7^3.C_{50}^7 = C_{50}^4.C_{46}^3$.

2. 44 Chứng minh rằng $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 ... + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$, với mọi số nguyên dương n..

2. 45 a/ Có bao nhiêu các chia 5 nam và 5 nữ thành 5 cặp để khiêu vũ ?

b/ Có bao nhiêu cách chia 10 người thành 5 cặp để chơi một trò chơi ?

c/ Có bao nhiêu cách chia 4 người thành 2 cặp để chơi một trò chơi ?

§3 NHỊ THỨC NEWTON

A LÝ THUYẾT

Công thức nhị thức Newton

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^n b^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k \end{aligned} \qquad (*)$$

Quy ước $a^0 = 1$

Nhận xét

- Số hạng tổng quát trong khai triển là $C_n^k a^{n-k}b^k$;
- Trong cùng một số hạng, số mũ của a và b có tổng bằng n ;
- Trong khai triển (*) có n + 1 số hạng ;
- Trường hợp đặc biệt,

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= C_n^0 + C_n^1x + \ldots + C_n^k x^k + \ldots + C_n^n x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\end{aligned}$$

B BÀI TẬP

2. 46 Viết khai triển

a/ $(2+3x)^3$; b/ $(1-2x)^5$;

c/ $\left(x^2+\dfrac{3}{x}\right)^5$; d/ $\left(4x-\dfrac{1}{x^3}\right)^4$.

2. 47 Tìm hệ số của x^4y^9 trong khai triển $(2x-y)^{13}$.

2. 48 a/ Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $(3x+2)^{10}$.

b/ Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $(2-x)^9$.

c/ Khai triển $(2x+1)^4+(3+x)^5$ thành đa thức.

d/ Trong khai triển của $(1-2x)^8+(1+3x)^{10}$, hãy tính hệ số của x^3.

e/ Hãy xác định số hạng chứa x^4 trong khai triển $(x+1)^9+(x+2)^8+(x+3)^7+(x+4)^6$.

2. 49 Xét khai triển của $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^{15}$.

a/ Tìm số hạng thứ 7 trong khai triển (viết theo chiều số mũ của x giảm dần).

b/ Tìm số hạng không chứa x trong khai triển.

2. 50 Giả sử khai triển $(1-2x)^{15}$ có $(1-2x)^{15}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{15}x^{15}$.

a/ Tính a_9.

b/ Tính $a_0+a_1+a_2+...+a_{15}$.

c/ Tính $a_0-a_1+a_2-a_3+...+a_{14}-a_{15}$.

2. 51 a/ Biết rằng hệ số của x^2 trong khai triển của $(1-3x)^n$ bằng 90. Tìm n.

b/ Trong khai triển của $(x-1)^n$, hệ số của x^{n-2} bằng 45. Tính n.

2. 52 Trong khai triển của $(1+ax)^n$ ta có số hạng đầu là 1, số hạng thứ hai là $24x$, số hạng thứ ba là $252x^2$. Hãy tìm a và n.

2. 53 Cho n là một số nguyên dương, chứng minh các đẳng thức sau :

a/ $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=2^n$;

b/ $C_n^0+C_n^2+C_n^4+...=C_n^1+C_n^3+...=2^{n-1}$ (với $n\geq 4$) ;

c/ $C_{2n}^0+C_{2n}^2+C_{2n}^4+...+C_{2n}^{2n}=C_{2n}^1+C_{2n}^3+...C_{2n}^{2n-1}$;

d/ $C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...C_{2n+1}^n=4^n$

§4 BIẾN CỐ VÀ XÁC XUẤT CỦA BIẾN CỐ

A LÝ THUYẾT

1 Phép thử và không gian mẫu

Định nghĩa Phép thử ngẩu ngẫu nhiên (gọi tắc là phép thử) là một thí nghiệm hay hành động mà :

- Kết quả của nó không đoán trước được ;
- Có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó.

Phép thử thường được kí hiệu bởi chữ T.

Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử gọi là không gian mẫu của phép thử và được kí hiệu là Ω.

2 Biến cố

- Biến cố là một tập con của không gian mẫu.
- Mỗi phần tử của biến cố A được gọi là một kết quả thuận lợi cho A.
- Trong một phép thử, nếu kết quả của phép thử là một kết quả thuận lợi cho A thì ta nói Biến cố A xảy ra.
- Biến cố $\overline{A}=\Omega\setminus A$ được gọi là biến cố đối của biến cố A.
- Biến cố Ω là biến cố chắc chắn, biến cố $\varnothing$ là biến cố không thể xảy ra.

3 Định nghĩa cổ điển về xác xuất của biến cố

Định nghĩa Trong một phép thử T có không gian mẫu Ω là một tập hợp hữu hạn và các kết quả của T là đồng khả năng. Gọi $n(\Omega)$ là số phần tử của không gian mẫu, $n(A)$ là số phần tử của một biến cố A. Xác suất của biến cố A là một con số , kí hiệu là P(A), được cho bởi công thức sau :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

Nhận xét :

$0 \leq P(A) \leq 1$;

$P(\Omega) = 1$ và $P(\varnothing) = 0$;

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

B BÀI TẬP

2. 54 Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử “gieo một con súc sắc”.

2. 55 Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử “gieo hai đồng xu phân biệt”.

2. 56 Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử “gieo ba đồng xu phân biệt”.

2. 57 Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử “gieo hai con súc sắc phân biệt”.

2. 58 Gieo hai con súc sắc khác nhau. Hãy viết liệt kê các biến cố sau :

Biến cố A : “Tổng số chấm trên hai con súc sắc bằng 5” ;

Biến cố B : “Mặt 6 chấm xuất hiện”.

2. 59 Gieo 1 đồng tiền có 2 mặt sấp, ngữa 2 lần

a/ Hãy mô tả không gian mẫu.

b/ Hãy xác định các biến cố sau :

A : “lần thứ 2 xuất hiện mặt ngửa.” ;

B : “Kết quả 2 lần khác nhau”.

2. 60 Tính xác suất để được :

a/ Số 6 khi thảy hạt xí ngầu 1 lần.

b/ Tổng số 4 khi thảy 2 lần hạt xí ngầu 1 lần

c/ Được 1 số chẵn khi thảy 1 hạt xí ngầu 1 lần.

d/ Không được số 1 khi thảy 1 hạt xí ngầu 1 lần.

e/ Được số lớn hơn 1 và nhỏ hơn 6 khi thảy 1 hạt xí ngầu 1 lần.

2. 61 Một hộp có chứa những quả cầu bằng nhau về kích cỡ, trong đó có 4 quả mang số 1 ; 3 quả ghi số 2 và 1 quả ghi số 3. Lấy ngẫu nhiên 1 quả . Tính xác suất để:

a/ Lấy được quả cầu mang số 1.

b/ Lấy được quả cầu mang số 2.

c/ Lấy được quả cầu mang số 3

2. 62 Một hộp chứa 3 viên bi xanh, 2 bi đỏ và bi vàng lấy ngẫu nhiên 2 bi.

a/ Mô ta không gian mẫu.

b/ Xác định các biến cố sau :

A : “2 bi được lấy ra có cùng màu” ;

B : “2 bi được lấy ra khác màu”.

c/ Tính P(A), P(B).

2. 63 Gieo hai con súc sắc khác nhau. Tính xác suất của các biến cố sau :

A : “Số chấm của hai con súc sắc bằng nhau” ;

B : “Tổng số chấm trên hai con súc sắc bằng 8”

C : “Số chấm trên hai con súc sắc khác nhau”.

2. 64 Một hộp kín đựng 12 viên bi (chỉ khác nhau về màu) gồm 5 viên bi đỏ và 7 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ trong hộp. Tính xác xuất để được 1 bi đỏ và 2 bi xanh.

2. 65 Một tổ có 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên hai em. Tính xác suất để hai em đó khác phái.

2. 66 Cho 8 quả cân có trọng lượng lần lượt là 1kg, 2kg, 3kg, 4kg, 5kg, 6kg, 7kg, 8kg. Chọn ngẫu nhiên 3 quả cân trong số đó. Tính xác suất để 3 quả cân được chọn có trọng lượng không vượt quá 9kg.

2. 67 Chiếc kim của bánh xe trong trò chơi “Chiếc nón kỳ diệu” có thể dừng lại ở một trong 7 vị trí với khả năng như nhau. Tính xác suất để trong ba lần quay chiếc kim dừng lại ở 3 vị trí khác nhau.

2. 68 Một lô hàng có 10 sản phẩm, trong dó có 2 phế phẩm. Lấy 6 sản phẩm từ lô hàng đó. Tính xác suất để trong 6 sản phẩm lấy ra đó có không quá một phế phẩm.

§5 CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC XUẤT

A LÝ THUYẾT

1 Quy tắc cộng xác xuất

Biến cố hợp Cho hai biến cố A và B. Biến cố $A \cup B$ được gọi là hợp của hai biến cố A và B. Biến cố $A \cup B$ có nghĩa là “A hoặc B xảy ra”.

Biến cố xung khắc Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc nếu $A \cap B = \varnothing$.

Đối với hai biến cố xung khắc, nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra.

Định lý Nếu A và B là hai biến cố xung khắc thì $P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right)$.

2 Quy tắc nhân xác xuất

Biến cố giao Cho hai biến cố A và B. Biến cố "cả A và B cùng xảy ra", kí hiệu là AB, được gọi là giao của hai biến cố A và B.

Biến cố độc lập Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng tới xác xuất xảy ra của biến cố kia.

Định lý Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì $P(AB) = P(A)P(B)$.

B BÀI TẬP

2. 69 Một cái bình đựng 4 quả cầu xanh và 6 quả cầu vàng. Lấy ra 3 quả cầu từ bình. Tính xác suất để

a/ được đúng 2 quả cầu xanh ;

b/ được đủ hai màu ;

c/ được ít nhất 2 quả cầu xanh..

2. 70 Có hai hộp đựng các viên bi. Hộp thứ nhất đựng 2 bi đen, 3 bi trắng. Hộp thứ hai đựng 4 bi đen, 5 bi trắng.

a/ Lấy mỗi hộp 1 viên bi. Tính xác suất để được 2 bi trắng.

b/ Dồn bi trong hai hộp vào một hộp rồi lấy ra 2 bi. Tính xác suất để được 2 bi trắng.

2. 71 Một hộp bóng đèn có 12 bóng, trong đó có đúng 7 bóng tốt. Lấy ngẫu nhiên 3 bóng. Tính xác suất để được

a/ 3 bóng tốt ;

b/ 2 bóng tốt ;

c/ ít nhất 1 bóng tốt.

2. 72 Gieo hai con súc sắc phân biệt. Tính xác suất để

a/ Tích số chấm trên hai mặt là một số lẻ ;

b/ Tích số chấm trên hai mặt là một số chẵn.

2. 73 Một hộp có 9 thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên ra hai thẻ rồi nhân hai số ghi trên hai thẻ với nhau.

a/ Tính xác suất để số nhận được là một số lẻ.

b/ Tính xác suất để số nhận được là một số chẵn.

2. 74 Một lớp có 30 học sinh, gồm 8 học sinh giỏi, 15 học sinh khá và 7 học sinh trung bình. Chọn ngẫu nhiên 3 em để dự đại hội. Tính xác suất để

a/ 3 học sinh được chọn đều là học sinh giỏi ;

b/ có ít nhất một học sinh giỏi ;

c/ không có học sinh trung bình.

2. 75 Hai xạ thủ cùng bắn mỗi người một phát đạn vào bia. Xác suất để người thứ nhất bắn trúng bia là 0.9, và của người thứ hai là 0.7. Tính xác suất để a/ cả hai cùng bắn trúng ;

b/ ít nhất một người bắn trúng ;

c/ chỉ một người bắn trúng.

2. 76 Hai máy bay cùng ném bom một mục tiêu, mỗi máy bay ném một quả. Xác suất trúng mục tiêu của 2 máy bay lần lượt là 0.7 và 0.8. Tính xác suất để mục tiêu bị trúng bom.

2. 77 Một chiếc máy có hai động cơ I và II chạy độc lập với nhau. Xác xuất để động cơ I và II chạy tốt lần lượt là 0,7 và 0,8. Hãy tính xác xuất để :

a/ Cả hai động cơ đều chạy tốt ;

b/ Cả hai động cơ đều không chạy tốt ;

c/ Có ít nhất một động cơ chạy tốt.

BÀI TẬP LÀM THÊM

HAI QUY TẮC ĐẾM

2. 78 Trên giá sách có 9 quyển sách tiếng Việt, 5 quyển sách tiếng Hoa và 16 quyển sách tiếng Anh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn hai quyển sách với hai thứ tiếng khác nhau ?

2. 79 Có 2 bạn nữ và 4 bạn nam. Hỏi có bao nhiêu cách xắp xếp 2 bạn nữ và 1 bạn nam lên một dãy ghế có 3 ghế ?

2. 80 Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau sao cho các chữ số 1, 2 phải có mặt trong đó ?

2. 81 a/ Có bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ?

b/ Có bao nhiêu số chẵn trong các số ở câu a/ ?

c/ Có bao nhiêu số có mặt chữ số 0 trong các số ở câu a/ ?

HOÁN VỊ – CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

2. 82 Một tổ có 7 nam và 3 nữ. Người ta cần chọn ra 5 em xếp thành một hàng ngang để nhận giải thưởng, yêu cầu phải có cả 3 em nữ trong hàng. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp ?

2. 83 Thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình và 15 câu hỏi dể. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập nên bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong đề phải có đủ ba loại câu hỏi (khó, dể, trung bình) và số câu dễ không ít hơn 2 ?

2. 84 Có 4 nhà Toán học nam, 2 nhà Toán học nữ, 3 nhà Vật lý học nam và 3 nhà Vật lý học nữ. Có bao nhiêu cách lật một đoàn dự hội nghị gồm 2 nam và 2 nữ, có cả Toán lẫn Lý ?

2. 85 Có bao nhiêu cách sắp xếp 4 bạn nam và 4 bạn nữ ngồi vào một dãy ghế có 8 ghế sao cho :

a/ Nam ngồi một bên, nữ ngồi một bên ?

b/ Nam và nữ ngồi xen kẻ nhau ?

c/ Các bạn nữ phải ngồi gần nhau ?

2. 86 Có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có 5 ghế. Có bao nhiêu cách xếp 5 học sinh nam và 5 học sinh nữ ngồi lên hai dãy ghế đó sao cho

a/ Nam ngồi một dãy và nữ ngồi một dãy ?

b/ Nam, nữ ngồi xen kẻ nhau và hai người đối diện nhau phải khác phái ?

c/ Hai người đối diện nhau phải khác phái ?

2. 87 Có bao nhiêu cách chia 10 cái bánh cho 3 em nhỏ sao cho em nào cũng có phần ?

2. 88 Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ ba tỉnh miền núi sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ ?

2. 89 Từ các chữ số 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau ? Hãy tính tổng tất cả các số tự nhiên đó.

2. 90 Có bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số $\overline{abc}$ thỏa a > b > c ?

2. 91 a/ Tìm số nguyên dương n thỏa mãn đẳng thức $2P_n + 6A_n^2 - P_nA_n^2 = 12$.

b/ Xác định các số nguyên dương $x \geq y$ sao cho $\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80. \end{cases}$

2. 92 Chứng minh rằng:

a/ $C_m^n = \dfrac{m}{n}C_{m-1}^{n-1}$; b/ $C_{n+k}^k.C_n^m = C_{n+k}^{m+k}.C_{m+k}^k$;

c/ $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + ... + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1}$.

2. 93 Giải phương trình

a/ $3A_n^2 + 42 = A_{2n}^2$; b/ $120.A_{n-1}^{n-3} = \dfrac{(n+2)!}{2!}$; c/ $A_n^3 + C_n^{2n-2} = 14n$.

2. 94 Giải bất phương trình $\dfrac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} < \dfrac{15}{(n-1)!}$.

2. 95 Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 4$). Biết rằng số tập con gồm 4 phần tử của A gấp 20 lần số tập con gồm 2 phần tử của A.

a/ Hãy xác định n.

b/ Hãy tìm $k \in \{1, 2, ..., n\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất.

NHỊ THỨC NEWTON

2. 96 Trong khai triển biểu thức $P(x) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} + x^2\right)^{20}$.

a/ Tìm số hạng không chứa x.

b/ Tìm số hạng chứa x^{10}.

2. 97 Biết rằng hệ số của x^{n-2} trong khai triển $\left(x-\frac{1}{4}\right)^n$ bằng 31 hãy tìm n.

2. 98 Tìm hệ số của x^3 trong khai triển $(x+1)^2 + (x+1)^3 + (x+1)^4 + (1+x)^5$.

2. 99 Cho đa thức $P(x) = (x+1)^2 + (x+1)^3 + \ldots + (x+1)^{14}$ có dạng khai triển là :

$$P(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{14}x^{14}.$$

Hãy tính a_9.

2. 100 Tìm số hạng chứa x^4 trong khai triển $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)^{12}$.

2. 101 Chứng minh rằng :

a/ $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$; b/ $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots(-1)^k C_n^k + \ldots(-1)^n C_n^n = 0$.

2. 102 Tính tổng tất cả các hệ số trong khai triển $(3x-2)^{14}$ thành đa thức.

2. 103 Trong khai triển $(x-2)^n$, hệ số của x^{n-3} bằng -1760. Hãy tìm n.

2. 104 Biết rằng $C_{n+4}^3 - C_{n+3}^3 = 7(n+3)$, tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển của $\left(\frac{1}{x^3}+2x^2\right)^n$.

2. 105 a/ Cho khai triển $(x^2+1)^6(x+1)^7$. Hãy tìm hệ số của x^{16}.

b/ Tìm hệ số của x^3 trong khai triển của $(1-x+x^2)^7$.

XÁC SUẤT

2. 106 Gieo đồng thời bốn đồng xu cân đối. Tính xác suất để

a/ cả bốn đồng xu đều ngữa ;

b/ có đúng ba đồng xu lật ngữa ;

c/ có ít nhất hai đồng xu lật ngữa.

2. 107 Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau. Tính xác suất để được một số chẵn.

2. 108 Xếp ngẫu nhiên 5 chữ cái B,G,N,O,O. Tính xác suất để được chữ BOONG.

2. 109 Một hộp đựng 5 bi đỏ, 2 bi đen và 4 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên 2 bi từ trong hộp.

a/ Tính xác suất để được 2 bi cùng màu.

b/ Tính xác xuất để được 2 bi khác màu.

c/ Tính xác suất để được ít nhất một bi đỏ

2. 110 Một bình đựng 3 bi xanh và 5 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên một viên bi rồi lấy tiếp một viên bi nữa. Tính xác xuất để lần thứ hai lấy được viên bi đỏ.

2. 111 Trong một buổi rút thăm trúng thưởng, có 10 lá thăm (chỉ có một thăm trúng thưởng) và 10 người lần lượt lên bốc mỗi người một thăm. Tính xác suất để người rút thứ hai trúng thưởng.

2. 112 Một tổ có 9 học sinh nam và 3 học sinh nữ.

a/ Cần chọn một nhóm 4 người để trực nhật. Hỏi có bao nhiêu cách chọn khác nhau ?

b/ Tính xác suất để khi chọn ngẫu nhiên một nhóm 4 người ta được nhóm có đúng một nữ.

c/ Cần chia tổ đó ra thành 3 nhóm để thực hiện ba công việc khác nhau, mỗi nhóm 4 người. Hỏi có bao nhiêu cách chia khác nhau ? Tính xác suất để mỗi nhóm có đúng 1 nữ

2. 113 Tỉ lệ sinh con gái trong mỗi ca sinh con là 0.486. Khảo sát ngẫu nhiên một gia đình có 2 con. Tính xác suất để gia dình này có con gái.

2. 114 Có 2 xạ thủ loại I và 8 xạ thủ loại II, xác suất để các xạ thủ bắn trúng đích thứ tự là 0.9 và 0.8. Lấy ngẫu nhiên một xạ thủ ra bắn một viên đạn. Tính xác suất để viên đạn đó trúng đích.

Phần Hình Học

§0 ÔN TẬP

A LÝ THUYẾT

I Hệ thức lượng trong tam giác

1 Định lý côsin

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

2 Định lý sin

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

3 Công thức độ dài đường trung tuyến

${m_a}^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$

4 Diện tích tam giác

$S = \dfrac{1}{2}\text{đáy}\times\text{cao}$

$S = \dfrac{1}{2}bc\sin A$

$S = \dfrac{abc}{4R}$

$S = pr$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

II Tọa độ điểm và véctơ

1 Điểm M là trung điểm của đoạn AB

$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$

2 Điểm trên các trục tọa độ

$M \in Ox \Leftrightarrow y_M = 0 \Leftrightarrow M(x_M; 0)$

$M \in Oy \Leftrightarrow x_M = 0 \Leftrightarrow M(0; y_M)$

3 Véctơ xác định bởi hai điểm

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

4 Hai véctơ bằng nhau

$\vec{u}(x;y) = \vec{v}(x';y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

5 Độ dài véctơ $\vec{u}(x;y)$

$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

6 Độ dài đoạn thẳng

$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

7 Tích vô hướng của hai véctơ $\vec{u}(x;y)$ và

$\vec{v}(x';y')$

$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

8 Góc giữa hai véctơ

$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \dfrac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x'^2 + y'^2}}$

9 Hai véctơ vuông góc khi và chỉ khi

$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' = 0$

10 Diện tích tam giác ABC, biết $\overrightarrow{AB}(x;y)$

và $\overrightarrow{AC}(x';y')$

$S = \dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x & y \\ x' & y' \end{matrix}\right\| = \dfrac{1}{2}|xy' - yx'|$

III Phương trình đường thẳng

1 Véctơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ có giá vuông góc với đường thẳng được gọi là véctơ pháp tuyến của đường thẳng.

Véctơ khác $\vec{0}$ vuông góc với véctơ pháp tuyến của đường thẳng được gọi là véctơ chỉ phương của đường thẳng.

Véctơ chỉ phương của một đường thẳng có giá song song hoặc trùng với đường thẳng đó.

2 Phương trình tổng quát của đường thẳng

Phương trình $ax+by+c=0$ với $a^2+b^2 \neq 0$ là phương trình tổng quát của một đường thẳng có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}(a;b)$

Đường thẳng đi qua điểm $M(x_o;y_o)$ và có véctơ pháp tuyến $\vec{n}(a;b)$ có phương trình tổng quát là

$$a(x-x_o)+b(y-y_o)=0.$$

Khoảng cách từ điểm $M(x_o;y_o)$ đến đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$ cho bởi công thức

$$d(M;\Delta)=\frac{|ax_o+by_o+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

3 Phương trình tham số của đường thẳng

Phương trình $\begin{cases} x=x_o+at \\ y=y_o+bt \end{cases}$ với $(a;b)\neq(0;0)$ là phương trình tham số của một đường thẳng có véctơ chỉ phương là $\vec{u}(a;b)$.

Một đường thẳng đi qua điểm $M(x_o;y_o)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{u}(a;b)$ có phương trình tham số là $\begin{cases} x=x_o+at \\ y=y_o+bt \end{cases}$.

4 Phương trình chính tắc của đường thẳng

Một đường thẳng đi qua điểm $M(x_o;y_o)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{u}(a;b)$, nếu $a\neq 0$ và $b\neq 0$ thì đường thẳng đó có phương trình chính tắc là $\dfrac{x-x_o}{a}=\dfrac{y-y_o}{b}$.

5 Đường thẳng đi qua hai điểm A và B

$$AB: \frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$$ (trong điều kiện biểu thức có nghĩa)

IV Phương trình đường tròn

1 Phương trình $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=R^2$ (R>0) là phương trình của đường tròn tâm I(a;b), bk R.

2 Phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a^2 + b^2 - c > 0$ là phương trình của đường tròn tâm $I\left(a;b\right)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

B BÀI TẬP

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy

0. 1 Cho ba điểm A(3 ; 1), B(2 ; -2) và C(4 ; -1).

a/ Chứng minh rằng ba điểm A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b/ Viết phương trình đường thẳng BC.

c/ Viết phương trình đường cao kẻ từ đỉnh B của tam giác ABC.

d/ Viết phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AC.

e/ Viết phương trình của đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC.

0. 2 Cho hai đường thẳng $d_1: 3x+2y=0$, $d_2: 3x-y+1=0$ và điểm M(2 ; 4).

a/ Viết phương trình đường thẳng qua M và vuông góc với d_1.

b/ Viết phương trình đường thẳng qua M và song song với d_2.

0. 3 Cho đường thẳng $d: 2x-y+4=0$ và điểm $M(2;3)$. Hãy xác định tọa độ hình chiếu của M lên d.

0. 4 Xác định tọa độ hình chiếu của điểm P(1 ; 2) lên đường thẳng $d: \begin{cases} x=2+5t \\ y=-2t \end{cases}$.

0. 5 Cho ba điểm A(2 ; 1), B(2 ; 3), C(-1 ; -2). Xác định tọa độ hình chiếu của điểm C lên đường thẳng AB.

0. 6 Hãy tính khoãng cách từ điểm M(2 ; 4) đến đường thẳng $\Delta: 16x-30y-1=0$.

0. 7 Cho hai đường thẳng $d_1: 3x+4y-2=0$ và $d_2: 6x+8y-1=0$.

a/ Hãy xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng đã cho.

b/ Hãy tính khoảng các giữa hai đường thẳng d_1 và d_2.

0. 8 Cho đường thẳng $d: 3x-y+2=0$. Hãy viết phương trình đường thẳng song song với d và cách d một khoãng bằng $\sqrt{10}$.

0. 9 a/ Tìm tập hợp điểm cách đều hai đường thẳng $\Delta_1: 3x-2y=0$ và $\Delta_2: -3x+2y-9=0$.

b/ Tìm tập hợp điểm cách đều hai đường thẳng $l_1: x+7y-2=0$ và $l_2: x-y-5=0$.

0. 10 Xác định tâm và bán kính các đườmg tròn sau đây :

a/ $(C): (x+3)^2+y^2=7$; b/ $(C): x^2+y^2-4x+2y+3=0$;

c/ $(C): x^2+y^2+5y-2=0$; d/ $(C): 3x^2+3y^2+x-6y=0$.

0. 11 Hãy viết phương trình đường tròn (C), biết rằng :

a/ (C) có tâm I(1 ; 2) và bán kính R = 3 ;

b/ (C) đi qua điểm M(-2 ; -3) và có tâm I(1 ; -2) ;

c/ (C) có đường kính AB, với A(2 ; 2) và B(1 ; 4) ;

d/ (C) có tâm I(3 ; 2) và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x - 4y + 1 = 0$;

0. 12 Cho đường tròn $(C): (x+3)^2 + (y-3)^2 = 5$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = 7 + 3t. \end{cases}$

Tìm tọa độ giao điểm của (C) và d.

0. 13 Hãy viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 10$, biết rằng tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $d: 3x - y - 10 = 0$.

0. 14 Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$ và đường thẳng $d: x + y = 0$. Hãy viết phương trình đường thẳng vuông góc với d và tiếp xúc với (C).

0. 15 Hãy viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm M(-1 ; 1), N(2 ; 0) và có tâm nằm trên trục hoành.

0. 16 Tam giác ABC có A(4;3), đường cao BH: 3x – y + 11 = 0, đường trung tuyến CM : x + y – 1 = 0.

a/ Hãy xác định tọa độ các điểm B và M.

b/ Hãy viết phương trình các cạnh của tam giác ABC

Chương 1 PHÉP BIẾN HÌNH TRONG MẶT PHẲNG

§1 MỞ ĐẦU VỀ PHÉP BIẾN HÌNH

1 Phép biến hình

Định nghĩa Phép biến hình (trong mặt phẳng) là một quy tắc để với mọi điểm M thuộc mặt phẳng, xác định một điểm duy nhất M’ thuộc mặt phẳng ấy. Điểm M’ được gọi là ảnh của điểm M qua phép biến hình đó.

Với mỗi điểm M, ta xác định điểm M’ trùng với M thì ta cũng được một phép biến hình. Phép biến hình đó gọi là phép đồng nhất.

2 Kí hiệu và thuật ngữ

Nếu ta kí hiệu một phép biến hình nào đó là F và M’ là ảnh của điểm M qua phép biến hình F thì ta viết M’ = F(M), hoặc F(M) = M’. Khi đó ta còn nói phép biến hình F biến điểm M thành điểm M’.

Với mỗi hình H, ta gọi hình H’ gồm các điểm M’ = F(M), trong đó $M \in$ H, là ảnh của H qua phép biến hình F, và viết là H’ = F(H).

§2 PHÉP TỊNH TIẾN VÀ PHÉP DỜI HÌNH

A LÝ THUYẾT

1 Định nghĩa phép tịnh tiến

Phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{u}$ là một phép biến hình biến điểm M thành điểm M’ sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{u}$ thường được kí hiệu là T hoặc $T_{\vec{u}}$. Véctơ $\vec{u}$ được gọi là véctơ tịnh tiến.

$$M' = T_{\vec{u}}\left(M\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

2 Các tính chất của phép tịnh tiến

Định lý 1 Nếu phép tịnh tiến biến hai điểm M và N lần lượt thành hai điểm M’ và N’ thì M’N’ = MN.

Định lý 2 Phép tịnh tiến biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.

Hệ quả Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng ; biến tia thành tia ; biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó ; biến tam giác thành tam giác bằng nó; biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính ; biến góc thành góc bằng nó.

3 Biểu thức tọa đổ của phép tịnh tiến

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{u}$. Biết tọa độ của $\vec{u}$ là (a ; b). Giả sử qua phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$, M(x ; y) biến thành M’(x’ ; y’). Ta có

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases}$$

4 Phép dời hình

Định nghĩa Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Định lý Phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó ; biến đường thẳng thành đường thẳng ; biến tia thành tia ; biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó ; biến tam giác thành tam giác bằng nó ; biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính ; biến góc thành góc bằng nó.

B BÀI TẬP

1. 1 Cho hai điểm M(3 ; 1), N(-3 ; 2) và véctơ $\vec{v}\left(2;-3\right)$.

a/ Hãy xác định tọa độ ảnh của các điểm M và N qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

b/ Tịnh tiến đường thẳng MN theo véctơ $\vec{v}$, ta được đường thẳng d. Hãy viết phương trình của đường thẳng d.

1. 2 Hãy viết phương trình đường thẳng d’ là ảnh của đường thẳng d : 2x – 3y + 1 = 0 qua phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}(2;1)$.

1. 3 Cho B(5 ; 3), C(-3 ; 4) và d : 2x + y – 8 = 0.

a/ Viết phương trình của d’ = $T_{\overrightarrow{BC}}$ (d).

b/ Tìm m để $T_{\vec{v}}$,với $\vec{v}$(2, m), biến d thành chính nó.

1. 4 Phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}(3;1)$ biến đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+2)^2=3$ thành đường tròn (C’). Hãy viết phương trình của đường tròn (C’).

1. 5 Phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{u}(2;-1)$ biến đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-1=0$ thành đường tròn (C'). Hãy viết phương trình của (C').

1. 6 Hãy xác định tọa độ của điểm M trên trục hoành sao cho phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}(-2;3)$ biến điểm M thành một điểm trên trục tung.

1. 7 Phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}$ biến điểm $M(3;-1)$ thành một điểm trên đường thẳng $\Delta: x+y-9=0$. Hãy xác định tọa độ véctơ $\vec{v}$, biết $|\vec{v}|=5$.

1. 8 Cho hai đường thẳng song song $d: 2x+3y+2=0$ và $d': 2x+3y-4=0$. Hãy xác định phép tịnh tiến biến đường thẳng d thành đường thẳng d’ biết

a/ Véctơ tịnh tiến có giá là trục Ox ;

b/ Véctơ tịnh tiến là một véctơ pháp tuyến của d.

1. 9 Cho hai điểm A(-1 ; 1), B(1 ; 3) và đường tròn $(C):(x-4)^2+y^2=10$. Phép tịnh tiến theo một véctơ $\vec{v}$ biến A, B lần lượt thành A’, B’. Biết A’ và B’ nằm trên (C). Viết phương trình đường thẳng A’B’.

§3 PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

A LÝ THUYẾT

1 Định nghĩa phép đối xứng trục

Định nghĩa Phép đối xứng qua đường thẳng a là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M’ đối xứng với M qua a.

Phép đối xứng qua đường thẳng a thường được kí hiệu là $Đ_a$. Phép đối xứng qua đường thẳng còn được gọi đơn giản là phép đối xứng trục. Đường thẳng a được gọi là trục đối xứng.

Định lý Phép đối xứng trục là một phép dời hình.

Nhận xét Trong mặt phẳng Oxy

- Hai điểm $M(x;y)$ và $M'(x';y')$ đối xứng nhau qua trục Ox khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases};$$

- Hai điểm $M(x;y)$ và $M'(x';y')$ đối xứng nhau qua trục Oy khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}.$$

2 Trục đối xứng của một hình

Định nghĩa Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình (H) nếu phép đối xứng trục $Đ_d$ biến hình (H) thành chính nó.

B BÀI TẬP

1. 10 Viết phương trình đường thẳng đối xứng với đường thẳng $l: 2x+3y-2=0$ qua trục hoành.

1. 11 Viết phương trình ảnh đối xứng của đường tròn $(C): x^2+y^2+3x+1=0$ qua trục tung.

1. 12 a/ Cho đường thẳng $\Delta: x=4$. Hãy thiết lập biểu thức tọa độ cho phép đối xứng trục Δ.

b/ Cho đường tròn $(C): (x+2)^2+(y+1)^2=4$ và đường thẳng $\Delta: x=4$. Hãy viết phương trình ảnh đối xứng của (C) qua Δ.

1. 13 Hãy viết phương trình ảnh đối xứng của đường thẳng $d: y=2x+1$ qua đường thẳng $x=2$.

1. 14 Cho hai đường thẳng $d: y+2=0$ và đường thẳng $\Delta: x-y-1=0$.

a/ Xác định tọa độ giao điểm của d và Δ.

b/ Xác định tọa độ ảnh của điểm M(0 ; -2) qua phép đối xứng trục Δ.

c/ Hãy viết phương trình ảnh đối xứng của đường thẳng d qua trục Δ.

1. 15 Hãy viết phương trình ảnh của $(C): x^2+y^2=9$ qua phép đối xứng trục d : 4x – y – 2 = 0.

1. 16 Cho hai điểm A(-2 ; 3) và B(5 ; 2). Hãy xác định tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất.

1. 17 a/ Phép đối xứng trục $Đ_a$ biến đường thẳng $d: x+7y+5=0$ thành đường thẳng $d': x-y-6=0$. Hãy viết phương trình của đường thẳng a.

b/ Phép đối xứng trục $Đ_a$ biến đường thẳng $d: 2x-3y+1=0$ thành đường thẳng $d': 2x-3y-3=0$. Hãy viết phương trình của đường thẳng a.

§4 PHÉP QUAY VÀ PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

A LÝ THUYẾT

1 Phép quay

Định nghĩa Trong mặt phẳng cho một điểm O cố định và một góc lượng giác φ không đổi. Phép biến hình biến điểm O thành điểm O, biến mỗi điểm M khác O thành M' sao cho OM = OM' và góc lượng giác $\left(OM,OM'\right)=\varphi$ được gọi là phép quay tâm O góc quay φ.

Kí hiệu $Q_{(O;\varphi)}$

Định lý Phép quay là một phép dời hình.

2 Phép đối xứng tâm

Định nghĩa Phép đối xứng tâm O là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua O, có nghĩa là $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}=\vec{0}$.

Phép đối xứng qua điểm O được kí hiệu là $Đ_O$, điểm O gọi là tâm đối xứng.

Phép đối xứng qua một điểm còn được gọi là phép đối xứng tâm.

Nhận xét Phép đối xứng tâm là một phép quay.

Biểu thức tọa độ

Trong mặt phẳng Oxy, hai điểm $M\left(x;y\right)$ và $M'\left(x';y'\right)$ đối xứng nhau qua tâm $I\left(a;b\right)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x+x'=2a \\ y+y'=2b \end{cases}.$$

Tâm đối xứng của một hình Điểm I được gọi là tâm đối xứng của hình H nếu phép đối xứng tâm I biến hình H thành chính nó.

B BÀI TẬP

1. 18 Cho M(3; 3), N(2 ; -5) và O là gốc tọa độ.

a/ Hãy xác định tọa độ ảnh của các điểm M và N qua phép đối xứng tâm $Đ_O$.

b/ Hãy xác định tọa độ ảnh của điểm N qua phép đối xứng tâm $Đ_N$.

1. 19 Hãy viết phương trình ảnh của đường thẳng $d:3x+5y-2=0$ qua phép đối xứng tâm $I\left(4;-1\right)$.

1. 20 Qua phép đối xứng tâm I(-3 ; 1), đường tròn $\left(C\right):x^2+y^2-2x-4y=0$ biến thành đường tròn (C'). Hãy viết phương trình của đường tròn (C').

1. 21 Cho $\vec{v}$(-6 ; 1), A(3 ; -4), B(5 ; 0) và d : x + 2y = 0.

a/ Xác định tọa độ của A' = $T_{\vec{v}}$(A).

b/ Chứng minh B = $Đ_d$(A).

c/ Gọi (C) là đường tròn có tâm B bán kính = 7. Tìm phương trình (C') = $Đ'_A$(C).

1. 22 Phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{u}(2;-3)$ biến đường thẳng d : 3x – y – 1 = 0 thành đường thẳng d' ; phép đối xứng tâm I(3 ; 0) biến đường thẳng d' thành đường thẳng d". Hãy viết phương trình của đường thẳng d".

1. 23 Cho điểm $I(3;-4)$ và các đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=2+t\\y=1-4t\end{cases}$, $d_2:\begin{cases}x=3t\\y=4+2t\end{cases}$. Hãy xác định tọa độ của các điểm A và B lần lượt nằm trên các đường thẳng d_1 và d_2 sao cho phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm A thành điểm B.

1. 24 Phép đối xứng tâm I biến đường thẳng $d: 3x-y+2=0$ thành đường thẳng $d': 3x-y+1=0$. Biết tâm I nằm trên đường phân giác của góc phần tư thứ nhất và thứ ba, hãy xác định tọa độ tâm I.

1. 25 Cho điểm A(7 ; 7), đường thẳng d : x + y – 18 = 0 và đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$. Tìm tọa độ M $\in$ (C) và N$\in$ (d) sao cho A là trung điểm MN.

§5 PHÉP VỊ TỰ

A LÝ THUYẾT

1 **Định nghĩa** Cho một điểm O cố định và một số k không đổi, $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O tỉ số k. Kí hiệu là V hoặc $V_{(O,k)}$.

2 **Tính chất**

Định lý 1 Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M và N lần lượt thành hai điểm M' và N' thì $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{M'N'}$ và $M'N' = |k|.MN$.

Định lý 2 Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm thẳng hàng đó.

Hệ quả Phép vị tự tỉ số k biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đó ; biến tia thành tia ; biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với $|k|$; biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là $|k|$; biến góc thành góc bằng nó ; biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $|k|.R$.

B BÀI TẬP

1. 26 Phép vị tự tỉ số k biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'. Hãy tính tỉ số diện tích của hai tam giác đó.

1. 27 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy thiết lập biểu thức tọa độ của phép vị tự tâm O tỉ số k.

1. 28 Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x + y = 0$. Phép vị tự tâm O tỉ số -2 biến đường tròn (C) thành đường tròn (C'). Hãy viết phương trình của (C').

1. 29 Cho (d) : 2x + 3y – 5 = 0 , $\vec{u}$(-3 ; 7).

a/ Viết phương trình của d’ = $T_{\vec{u}}$(d).

b/ Cho A(2; 9). Tìm tọa độ A’ = $Đ_d$(A).

c/ Cho (C) : $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$. Viết phương trình (C’) = $V_{(A;\,-2)}$ (C).

1. 30 Cho A(-2; 1), B(5 ; 4). Tìm phép vị tự biến đường tròn (A ; R= 3) thành đường tròn (B ; R = 9).

BÀI TẬP LÀM THÊM

PHÉP TỊNH TIẾN

1. 31 Phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}(0;2)$ biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ'. Biết rằng $\Delta': x-2y+3=0$. Hãy viết phương trình của đường thẳng Δ.

1. 32 Cho hai véctơ $\vec{u}(1;-1)$, $\vec{v}(-2;3)$ và đường thẳng $\Delta: 2x+y+1=0$. Gọi Δ' là ảnh của Δ qua phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ và Δ'' là ảnh của Δ' qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$. Hãy viết phương trình của Δ''.

1. 33 Hãy xác định tọa độ của điểm M trên trục tung sao cho phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{u}(4;2)$ biến điểm M thành một điểm trên trục hoành.

1. 34 Phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}$ biến điểm $M(2;1)$ thành một điểm trên đường thẳng $d: 3x+y-1=0$. Hãy xác định tọa độ véctơ $\vec{v}$, biết $|\vec{v}|=2$.

1. 35 Cho d : 2x – 5y +4 = 0. Hãy xác định véctơ $\vec{v}$ có giá song song với Ox biết rằng trong phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$, đường thẳng d có ảnh là một đường thẳng qua gốc tọa độ O.

1. 36 Cho đường tròn $(C_1): x^2+y^2-4x-8y=0$ và (C) là đường tròn qua điểm A(-3 ; -1), có tâm $I(-4;-4)$. Hãy xác định tọa độ điểm M trên (C) và điểm N trên (C_1) sao cho $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{IA}$.

PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

1. 37 Thực hiện liên tiếp các phép biến hình sau đây đối với đường thẳng d ta được đường thẳng d’ : lấy đối xứng qua trục Ox, tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}(5;-2)$.

a/ Hãy viết phương trình đường thẳng d’ nếu biết d : 2x – y – 1 = 0.

b/ Hãy cho biết phương trình đường thẳng d nếu biết d’ : y = 3.

1. 38 Cho (d) : 5x – 12y + 6 = 0 và A(3; 0) B(2 ; 6)

a/ Viết phương trình của d_1 = $Đ_A$(d).

b/ Viết phương trình của d_2 = $T_{\overrightarrow{AB}}$(d).

1. 39 Viết phương trình của (C’) là ảnh của (C) : $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ qua $Đ_d$ với d : 3x – 4y – 1 = 0.

1. 40 Cho A(-3 ; 2), B(0 ; -2), d : 5x + 12y – 7 = 0 và (C) : $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 11 = 0$.

a/ Tìm tọa độ A’ = $Đ_{Ox}$(A).

b/ Tìm (C’) = $T_{\overrightarrow{AB}}\left[(C)\right]$.

c/ Biết (C_2) là ảnh của (C’) qua $T_{\overrightarrow{BO}}$. Tìm vectơ tịnh tiến $\vec{u}$ biến (C_2) thành (C).

1. 41 Cho đường tròn $(C):(x-3)^2+(y-2)^2=5$ và đường thẳng $d:3x-y+16=0$. Hãy xác định tọa độ các điểm A trên (C) và B trên d sao cho các điểm A và B đối xứng nhau qua trục Oy.

PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM – PHÉP QUAY – PHÉP VỊ TỰ

1. 42 Phép đối xứng tâm I(1 ; 2) biến đường tròn (C) thành đường tròn (C’) ; phép đối xứng tâm O biến đường tròn (C’) thành đường tròn (C”). Biết phương trình của (C”) : $x^2 + y^2 + 4x + 5y - 1 = 0$, hãy viết phương trình của (C).

1. 43 Chứng tỏ rằng tồn tại một phép đối xứng tâm biến đường tròn đơn vị thành đường tròn $x^2+y^2-2x+4y+4=0$; hãy chỉ ra tọa độ tâm của phép đối xứng đó.

1. 44 Hãy xác định tọa độ của điểm A trên đường thẳng $d:x-2y-10=0$ và điểm B trên đường tròn $(C):x^2+y^2+4x-8y+15=0$ sao cho A và B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O.

1. 45 Cho điểm A(2 ; 2) và các đường thẳng $d_1:x+y-2=0$, $d_2:x+y-8=0$. Tìm tọa độ các điểm B, C lần lượt thuộc d_1, d_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

1. 46 Một đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O và cắt đường tròn $(C):x^2+y^2-2x-7y+10=0$ tại hai điểm A và B thỏa điều kiện B là trung điểm của OA. Hãy viết phương trình đường thẳng d.

1. 47 Cho A(2 ; -3), B(-2 , 1), d : 3x – 2y – 1 = 0 và (C) : $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$. Tìm ảnh của

a/ B qua $Đ_A$.

b Đường thẳng d qua $Đ_{Ox}$.

c/ Đường tròn (C) qua $T_{\overrightarrow{AB}}$.

d/ Đường tròn (T) dường kính AB qua $V_{(0;-2)}$.

1. 48 Cho (C) : $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$.

a/ Viết phương trình (C’) = $V_{(O;3)}\left[(C)\right]$.

b/ Tìm tọa độ tâm vị tự trong của (C) và (C’)

ỨNG DỤNG PHÉP BIẾN HÌNH CHỨNG MINH MỘT SỐ TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

1) Cho hai điểm B, C cố định trên đường tròn (O; R) và một điểm A di động trên đường tròn đó. Hãy chứng minh trực tâm H của ΔABC thuộc một đường tròn cố định bằng ba phương pháp (áp dụng phép tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm).

2) Cho (0; R) và (O'; R) cắt nhau tại A và B. Gọi $B' = T_{\overrightarrow{O'O}}(B)$. Chứng minh A, O, B' thẳng hàng.

3) Cho hai điểm B, C cố định và hình bình hành ABCD có D di động trên mội đường tròn (O ; R). Gọi M là điểm trên AB sao cho A là trung điểm BH. Gọi I là giao điểm của AD và MC. Chứng minh I di động trên một đường cố định.

4) Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Điểm M di động trên nửa đường tròn đó (M ≠ A). Dựng về phía ngoài tam giác MAB hình vuông MACD. Tìm tập hợp điểm C.

Chương 2 ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

§1 ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

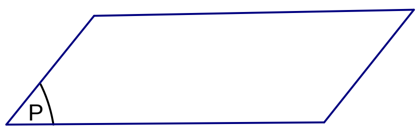
A LÝ THUYẾT

1 Mở đầu về hình học không gian

Mặt phẳng

Mặt phẳng thường được biểu diễn bởi một hình bình hành.

Để kí hiệu mặt phẳng, ta thường dùng các chữ cái đặt trong ngoặc đơn : (P), (Q), …, (α), (β), …



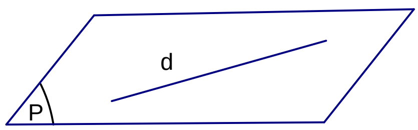
Điểm thuộc mặt phẳng

Nếu điểm A nằm trên mặt phẳng (P) thì ta viết $A \in (P)$, đọc là A thuộc (P)

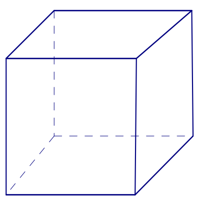
Nếu điểm A không nằm trên mặt phẳng (P) thì ta viết $A \notin (P)$.

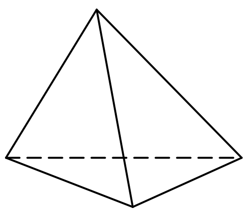
Đường thẳng nằm trên mặt phẳng

Nếu mọi điểm của đường thẳng d đều thuộc mặt phẳng (P) thì ta viết $d \subset (P)$, đọc là d chứa trong (P) hoặc $(P) \supset d$, đọc là (P) chứa d.



Hình biểu diễn của một hình trong không gian





Để vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian, ta thường áp dụng các quy tắc sau :

- Đường thẳng được biểu diễn bởi đường thẳng, đoạn thẳng biểu diễn bởi đoạn thẳng ;
- Hai đường thẳng song song được biểu diễn bởi hai đường thẳng song song, hai đường thẳng cắt nhau được biểu diễn bởi hai đường thẳng cắt nhau ;
- Hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng

- Dùng nét vẽ liền (_____) để biểu diễn những đường trông thấy ; dùng nét đức đoạn (----) để vẽ những đường bị khuất …

2 Các tính chất thừa nhận

Tính chất 1 Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.

Tính chất 2 Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

Tính chất 3 Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

Nếu có nhiều điểm cùng thuộc một mặt phẳng thì ta nói các điểm đó đồng phẳng, còn nếu không có mặt phẳng nào chứa tất cả các điểm đó thì ta nói chúng không đồng phẳng.

Tính chất 4 Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.

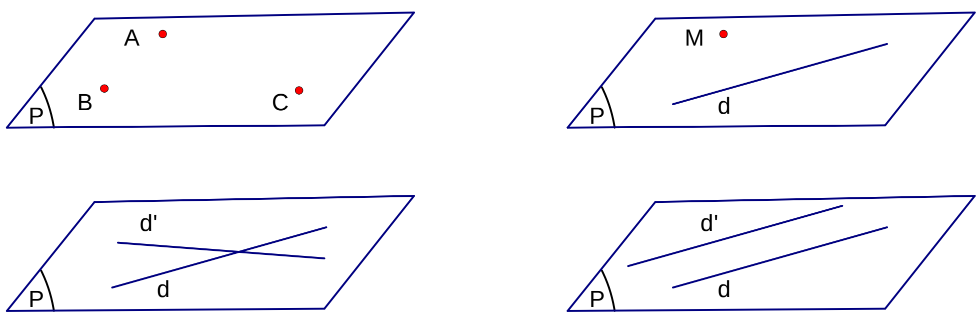
Đường thẳng chung đó được gọi là **giao tuyến của hai mặt phẳng** đã cho.

Nếu đường thẳng d là qiao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) thì ta kí hiệu là $d=(P)\cap(Q)$

Tính chất 5 Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt cùng thuộc một mặt phẳng thì đường thẳng chứa trong mặt phẳng đó.

Tính chất 6 Trong mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.

3 Điều kiện xác định mặt phẳng



- Ba điểm không thẳng hàng A, B, C xác định một mặt phẳng, mặt phẳng đó được kí hiệu là (ABC).
- Đường thẳng d và một điểm M không nằm trên d xác định một mặt phẳng, kí hiệu là (M, d).
- Hai đường thẳng cắt nhau d_1 và d_2 xác định một mặt phẳng, mặt phẳng đó được kí hiệu là (d, d’).
- Hai đường thẳng song song d và d’ xác định một mặt phẳng, mặt phẳng đó được kí hiệu là (d, d’).

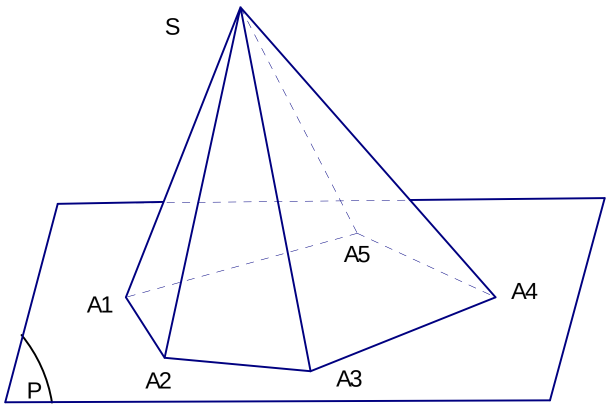
4 Hình chóp

Định nghĩa Cho đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ và một điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó. HÌnh gồm n tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, …, SA_nA_1 và đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ gọi là hình chóp, kí hiệu là S. $A_1A_2\ldots A_n$.

- Điểm S gọi là đỉnh của hình chóp ;
- Đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ gọi là mặt đáy của hình chóp ; các tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, …, SA_nA_1 gọi là các mặt bên của hình chóp ;

- Các cạnh của mặt đáy gọi là cạnh đáy của hình chóp ; các cạnh SA_1, SA_2, …, SA_n gọi là các cạnh bên của hình chóp.

Nếu đáy của hình chóp là một tam giác, tứ giác, ngũ giác … thì hình chóp tương ứng gọi là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác , hình chóp ngũ giác ,…

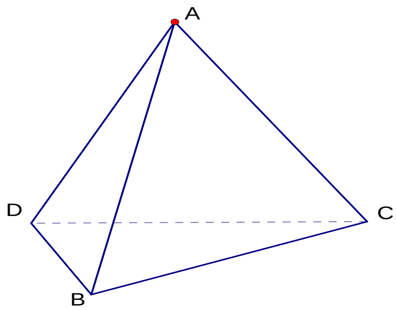


Hình tứ diện

Hình chóp tam giác còn gọi là hình tứ diện.

Bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D xác định một tứ diện. Tứ diện ABCD có

- bốn đỉnh : A, B, C, D ;
- bốn mặt : (ABC), (ACD), (ADB), (BCD) ;
- sáu cạnh : AB, AC, AD, BC, CD, DB.

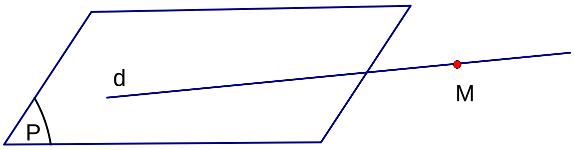


5 Một số dạng toán

a/ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Nhận xét

i) $\left.\begin{matrix} M \in d \\ d \subset (P) \end{matrix}\right\} \Rightarrow M \in (P)$



ii) $\left.\begin{matrix} M \in (P) \\ M \in (Q) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ M là điểm chung của hai mặt phẳng (P) và (Q).

iii) Hai đường thẳng cùng thuộc một mặt phẳng thì mới có thể cắt nhau.

Phương pháp tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q)

PP 1 Tìm hai điểm chung của (P) và (Q). Đường thẳng xác định bởi hai điểm chung đó chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

b/ Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

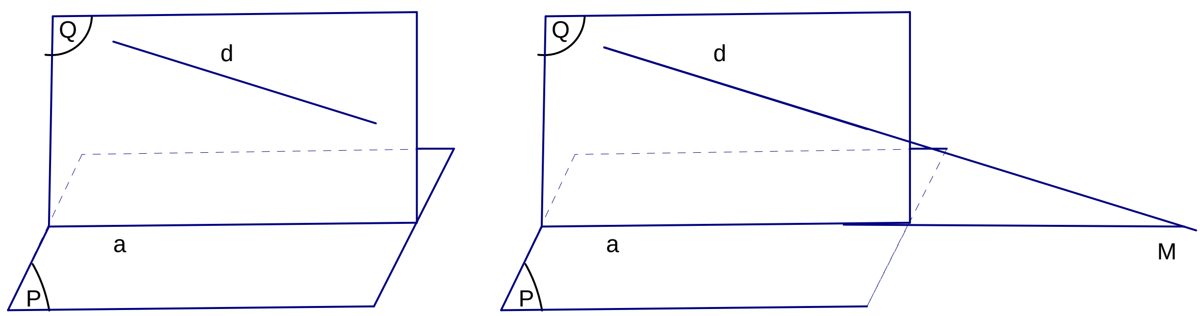
Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (P). Điểm M vừa thuộc d, vừa thuộc (P) gọi là giao điểm của d và (P), kí hiệu là $M = d \cap (P)$.

$$\left.\begin{array}{l} M \in d \\ M \in (P) \end{array}\right\} \Rightarrow M = d \cap (P)$$

Phương pháp xác định giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P)

Bước 1 : Chọn một mặt phẳng (Q) chứa d. Tìm giao tuyến $a = (P) \cap (Q)$

Bước 2 : Trong mặt phẳng (Q), xác định giao điểm M của a và d. Khi đó, $M = d \cap (P)$.



c/ Tìm thiết diện

Thiết diện của hình chóp với một mặt phẳng là phần chung của hình chóp với mặt phẳng đó.

Để tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng, ta lần lượt tìm các đoạn giao tuyến của mặt phẳng đó với các mặt của hình chóp.

d/ Chứng minh ba điểm thẳng hàng

Để chứng minh ba điểm thẳng hàng, ta có thể chứng minh chúng cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt (do đó chúng cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng đó) ; hoặc dùng tính chất của hình học phẳng.

B BÀI TẬP

Vấn đề 1 : XÁC ĐỊNH GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẲNG

2. 1 Cho tứ giác ABCD nằm trong mặt phẳng (α) có hai cạnh AB và CD không song song. Gọi S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng (α). Hãy tìm giao tuyến của $(SAC)\&(SBD)$; $(SAB)\&(SCD)$.

2. 2 Cho bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AD và BC. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (NAD).

2. 3 Cho bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AD. Lần lượt lấy I, J trên các cạnh AB, AC. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (DIJ).

2. 4 Cho tứ diện ABCD. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Lấy điểm N trên cạnh AC sao cho AN = 2CN. Hãy xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (DMN) và (BCD).

Vấn đề 2 : GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

2. 5 Cho hình chop SABCD, đáy là hình thang có cạnh đáy lớn AB. Gọi I, J, K lần lượt là 3 điểm thuộc SA, AB, BC.

a/ Tìm IK $\cap$ (SBD). b/ Tìm SD $\cap$ (IJK). c/ Tìm SC $\cap$ (IJK).

2. 6 Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và K là trung điểm của cạnh AD. Tìm giao điểm của đường thẳng GK và mặt phẳng (BCD).

2. 7 Cho tứ diện ABCD. Trên các đoạn AB và AC lấy hai điểm M và N sao cho $AM = BM$ và $AN = 2CN$. Hãy xác định giao điểm của mỗi cặp đường thẳng và mặt phẳng sau : AC & (DMN) ; MN & (BCD) ; BC & (DMN

2. 8 Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AC và CB. Trên cạnh BD, lấy điểm P sao cho BP = 2 PD.

a/ Hãy xác định giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP) ; AD và (MNP).

b/ Hãy xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ABD).

2. 9 Cho hình chop SABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SC.

a/ Tìm I = AM $\cap$ (SBD). Chứng minh IA = 2IM.

b/ Tìm F = SD $\cap$ (ABM).

2. 10 Cho hình chóp tứ giác SABCD. Lấy điểm M nằm giữa S và C.

a/ Hãy xác định giao điểm của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD).

b/ Hãy xác định giao điểm của đường thẳng SD và mặt phẳng (ABM).

2. 11 Cho tứ diện ABCD. Trên các đoạn thẳng AB, AC, AD lần lượt lấy các điểm B’, C’, D’ không trùng với đầu mút các đoạn thẳng đó. Lấy một điểm M thuộc miền trong của tam giác BCD.

a/ Hãy xác định giao điểm của C’D’ và mp(ABM) ;

b/ Hãy xác định giao điểm của AM với (B’C’D’).

2. 12 Cho hình chóp tam giác SABC. Gọi I, H lần lượt là trung điểm của SA và AB. Lấy K trên cạnh SC sao cho CK = 3KS.

a/ Xác định giao điểm của đường thẳng BC và mặt phẳng (IHK).

b/ Gọi M là trung điểm của IH. Xác định giao điểm của đường thẳng KM và mặt phẳng (ABC).

2. 13 Cho hình chóp tứ giác SABCD. Lấy điểm M trên cạnh SC. Hãy xác định giao điểm của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD).

2. 14 Cho hình chóp tứ giác SABCD. Lấy điểm M trên cạnh SB, điểm N trên cạnh SD. Hãy xác định giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC).

2. 15 Cho hình chóp tứ giác SABCD có đáy ABCD là một hình bình hành. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SC.

a/ Hãy xác định giao điểm I của đường thẳng AM với mặt phẳng (SBD). Chứng minh IA = 2IM.

b/ Hãy xác định giao điểm F của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM). Chứng minh tứ giác ABMF là hình thang.

TỔNG HỢP GIAO TUYẾN VÀ GIAO ĐIỂM

2. 16 Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của tam giác (ABD) và (ACD). Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau : (AMN) & (BCD) ; (DMN) & (ACB).

2. 17 Cho Tứ diện ABCD. Lấy lần lượt M, N trên các cạnh AB, AC sao cho MN và BC không song song nhau. Gọi I là một điểm thuộc miền trong của tam giác BCD. Hãy xác định giao tuyến của mỗi cặp mặt phẳng sau : (MNI) & (BCD) ; (MNI) & (ABD) ; (MNI) & (ACD).

2. 18 Cho hình chóp tứ giác SABCD. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho AE và CD cắt nhau ; trên cạnh SC lấy điểm F. Hãy xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (AEF) và (SAD).

2. 19 Cho tứ diện ABCD và điểm M nằm trên cạnh AD. Gọi I, J tương ứng là hai điểm trên cạnh BC, BD sao cho $\frac{BI}{BC} \neq \frac{BJ}{BD}$. Hãy xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (IJM) và (ACD), suy ra giao điểm của đường thẳng AC và mặt phẳng (IJM).

2. 20 Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD ; trên cạnh AD, lấy điểm P không trùng với trung điểm của AD. Tìm giao điểm của mặt phẳng (PMN) và BC.

2. 21 Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD và I là trung điểm của đoạn thẳng AD. Xác định giao điểm của đường thẳng IG và mặt phẳng (ABC).

2. 22 Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Lấy điểm M trên cạnh SC. Hãy xác định giao điểm của đường thẳng SD và mặt phẳng (ABM).

2. 23 Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành Gọi M là điểm nằm giữa S và A ; N là điểm nằm giữa S và B. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (CMN).

2. 24 Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SB và G là trọng tâm tam giác SAD. Hãy xác định giao điểm N của MG với mặt phẳng (ABCD). Chứng minh rằng D là trung điểm của NC.

Vấn đề 3 : THIẾT DIỆN CỦA HÌNH CHÓP KHI CẮT BỞI MỘT MẶT PHẲNG

2. 25 Cho tứ diện ABCD, gọi H, K là trung điểm AB, BC. Trên CD lấy điểm M sao cho KM // BD. Tìm thiết diện tạo bởi mp (HKM) với tứ diện ABCD trong trường hợp a/ M ở trong đoạn CD ; b/ M ở ngoài đoạn CD.

2. 26 Cho hình chop SABCD. Gọi M là 1 điểm thuộc miền trong của ΔSCD

a/ Tìm (SBM) $\cap$(SAC).

b/ Tìm BM $\cap$(SAC).

c/ Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mp (ABM)

2. 27 Cho hình chop SABCD, đáy là hình bình hành tâm O, M là điểm trên cạnh SD sao cho SD= 3SM

a/ Tìm (SAC) $\cap$(SBD).

b/ Tìm I = BM $\cap$(SAC). Chứng minh I là trung điểm SO.

c/ Tìm thiết diện của hình chóp với mp (MAB)

2. 28 Cho hình chóp SABCD, M là điểm thuộc miền trong ΔSCD.

a/ Tìm (SBM) $\cap$(SAC).

b Tìm BM $\cap$(SAC).

c/ Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi (ABM)

2. 29 Cho hình chóp tam giác SABCD. Gọi M là một điểm nằm giữa S và A. Hãy xác định giao tuyến của mp(ACD) với các mặt phẳng (ABCD), (SAB), (SBC), (SCD), (SDA). Từ đó suy ra thiết diện của hình chóp SABCD với mặt phẳng (BCA).

2. 30 Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Các điểm I, J lần lượt là trung điểm SB và SD ; lấy K trên cạnh SA sao cho SK = 2KA. Hãy xác định thiết diện của hình chóp SABCD khi cắt bởi mặt phẳng (IJK).

2. 31 Cho hình chóp tam giác SABC. Gọi K, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Lấy M trên cạnh SC sao cho 3SM = 2MC. Xác định thiết diện của hình chóp SABC và mặt phẳng (KMN).

2. 32 Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Lấy điểm I trên đoạn thẳng AG. Xác định thiết diện của tứ diện ABCD với mặt phẳng (BCI).

Vấn đề 4 : CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

2. 33 Cho tứ diện ABCD. Lần lượt lấy các điểm M, N, P trên các cạnh AB, AC, AD sao cho PN cắt CD tại I, PM cắt BD tại I, MN cắt BC tại K. Chứng minh rằng ba điểm I, J, K thẳng hàng.

2. 34 Cho 3 nửa đường thẳng Ox, Oy, Oz không đồng phẳng. Trên Ox lấy 2 điểm A và A’, trên Oy lấy B và B’, trên Oz lấy C và C’ sao cho AB$\cap$A’B’= M, AC $\cap$A’C’ = N, BC$\cap$B’C’= I. Chứng minh M, N, I thẳng hàng.

2. 35 Cho hình chóp tứ giác SABCD. Lấy một điểm M trên cạnh SD.

a/ Xác định giao điểm L của đường thẳng SC với mặt phẳng (ABM).

b/ Giả sử AB và CD cắt nhau tại K Chứng minh rằng ba điểm M, L, K thẳng hàng.

2. 36 Cho tứ diện ABCD. Lấy điểm I trên đường thẳng BD sao cho I không thuộc đoạn thẳng BD. Trong mặt phẳng (ABD), ta kẻ một đường thẳng đi qua I và cắt đoạn thẳng AB tại K, cắt đoạn thẳng AD tại L. Trong mặt phẳng (BCD), đường thẳng qua I cắt CB và CD lần lượt tại M và N.

a/ Gọi E là giao điểm của BN và DM ; F là giao điểm của KN và LM. Chứng minh rằng ba điểm A, E, F thẳng hàng.

b/ Giả sử hai đường thẳng LN và KM cắt nhau tại H. Chứng minh ba điểm A, C, H thẳng hàng.

2. 37 Cho hình chóp tứ giác SABCD có đáy là hình bình hành ABCD. Gọi M là trung điểm của SB, G là trọng tâm của tam giác SAD, và N là giao điểm của GM với mặt phẳng (ABCD). Chứng minh rằng ba điểm C, D, N thẳng hàng.

§2 HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A LÝ THUYẾT

1 Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

Định nghĩa

- Hai đường thẳng được gọi là đồng phẳng nếu có một mặt phẳng chứa cả hai đường thẳng đó.
- Hai đường thẳng gọi là chéo nhau nếu chúng không đồng phẳng.
- Hai đường thẳng gọi là song song nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

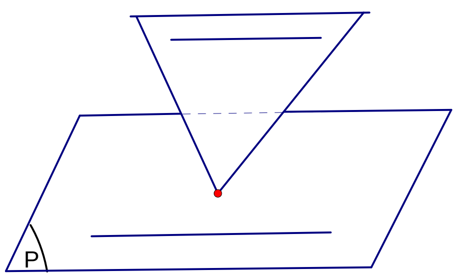
2 Hai đường thẳng song song

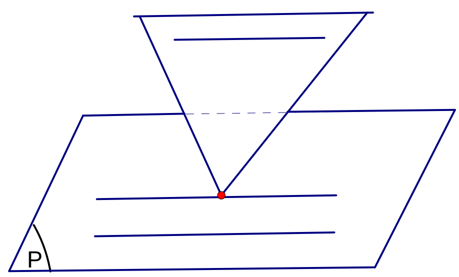
Tính chất 1 Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

Tính chất 2 Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song nhau.

Định lí (về giao tuyến của ba mặt phẳng) Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy đồng quy hoặc đôi một song song.

Hệ quả Nếu hai mặt phẳng cắt nhau lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng song song với hai đường thẳng đó (hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó).





Phương pháp xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (PP2)

B1 Chỉ ra một điểm chung của hai mặt phẳng.

B2 Chứng minh giao tuyến song song với một đường thẳng cho trước

Từ đó giao tuyến được xác định (theo tính chất 1).

B BÀI TẬP

Vấn đề 1 : CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

2. 38 Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng bấn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một mặt phẳng và tứ giác MNPQ là hình bình hành.

2. 39 Cho hình chóp tứ giác SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của SA và SB. Chứng minh rằng bốn điểm C, D, P, Q cùng nằm trên một mặt phẳng.

2. 40 Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF có tâm lần lượt là I và J. Chứng tỏ IJ // CE ; CE // DF.

2. 41 Cho hình chóp tứ giác SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Một mặt phẳng (P) đi qua AB và cắt SC, SD lần lượt tại hai điểm phân biệt M và N. Chứng minh rằng tứ giác ABMN là hình thang.

2. 42 Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và BC ; K là một điểm nằm giữa A và D. Gọi L là giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (IJK). Chứng minh rằng IJ // KL.

2. 43 Cho tứ diện ABCD. Gọi P, Q, R, S lần lượt là các điểm trên AB, BC, CD, DA. Chứng minh nếu bốn điểm P, Q, R, S đồng phẳng thì ba đường thẳng PQ, RS, AC hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.

2. 44 Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD, BC, DA, AC, BD. Chứng minh các đoạn thẳng MN, PQ, RS đồng quy tại trung điểm G của mỗi đoạn. Điểm G đó gọi là **trọng tâm của tứ diện ABCD.**

Vấn đề 2 : XÁC ĐỊNH GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẲNG

2. 45 Cho hình chóp tứ giác SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M là một điểm trên cạnh SC, không trùng với S, C. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABM) và (SCD), suy ra giao điểm của mặt phẳng (ABM) và đường thẳng SD.

2. 46 Cho hình chóp tứ giác SABCD có AB // CD. Xác định giao tuyến của mp(SAB) và mp(SCD).

2. 47 Cho hình chóp tứ giác SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của SA và SB, M là một điểm trên cạnh SC, không trùng với S, C.

a/ Chứng minh HK // (SCD)

b/ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (KHM) và (SCD), suy ra giao điểm của SD với (HKM).

c/ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

2. 48 Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC.

a/ Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (IJD) và (ACD).

b/Lấy một điểm E trên cạnh AD. Hãy tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IJE) và (ACD), suy ra giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (IJE), thiết diện tạo bởi (IJE) và tứ diện ABCD.

2. 49 Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành Lấy các điểm M và N trên các cạnh SA và SB sao cho $\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SB}$. Gọi P là một điểm tùy ý trên cạnh SC.

a/ Chứng minh rằng hai đường thẳng MN và CD song song nhau.

b/ Hãy xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SCD), suy ra giao điểm của mặt phẳng (MNP) với đường thẳng SD, thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) với hình chóp SABCD.

2. 50 Cho hình chóp tứ giác SABCD, có AB và CD song song nhau. Lấy một điểm M trên cạnh SC, không trùng với S. Mặt phẳng (ABM) cắt SD tại N. Chứng minh tứ giác ABMN là hình thang.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

2. 51 Cho hình chóp tứ giác SABCD có đáy ABCD là hình thang và AD là đáy lớn. Một mặt phẳng (P) qua AD và cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại M và N.

a/ Tứ giác AMND là hình gì ?

b/ Chứng minh giao điểm của AN và DM luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi (P) thay đổi.

c/ Chứng minh giao điểm của AM và DN luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi (P) thay đổi.

2. 52 Cho hình chóp tứ giác SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Một mặt phẳng (α) qua CD và cắt các đoạn thẳng SA, SB lần lượt tại P, Q.

a/ Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) là hình gì ?

b/ Gọi K là giao điểm của CQ và DP. Chứng minh hai đường thẳng SK và AD song song.

c/ Gọi O là giao điểm của AC và BD ; I là giao điểm của CP và DQ. Chứng minh rằng ba điểm S, I, O thẳng hàng.

2. 53 Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành.

a/ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC)

b/ Lấy một điểm M trên cạnh SD (không trùng với S hoặc D). Tìm giao điểm I của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBC).

c/ Gọi N là giao điểm của IB và SC. Chứng minh rằng MN song song với CD

2. 54 Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, BD. Một mặt phẳng (P) qua CD và cắt AM, AN lần lượt tại E, F.

a/ Chứng minh rằng tứ giác MNFE là hình thang.

b/ Gọi K là giao điểm của CE và DF. Chứng minh rằng ba điểm A, B, K thẳng hàng.

2. 55 Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, CD ; và G là điểm trên đoạn AB sao cho GA = 2GB.

a/ Tìm giao điểm M của GE với mặt phẳng (BCD).

b/ Tìm giao điểm H của BC với mặt phẳng (EFG). Suy ra thiết diện của mặt phẳng (EFG) với tứ diện ABCD. Thiết diện này là hình gì ?

c/ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (EFG) và (ACD).

2. 56 Cho hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M, N là trung điểm của AB và SC.

a/ Tìm giao điểm I, K của các đường thẳng AN, MN với mặt phẳng (SBD). Tính tỉ số $\frac{IA}{IN} = \frac{KM}{KN}$.

b/ Gọi E là trung điểm của SA. Tìm giao điểm F của SD và (EMN). Tứ giác MENF là hình gì ?

c/ Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (EMN).

2. 57 Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và BD.

a/ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (ACD).

b/ Một mặt phẳng (P) qua CD và cắt AM, AN lần lượt tại F, E.. Tứ giác CDEF là hình gì ?

c/ CF và DE cắt nhau tại K. Chứng tỏ A, B, K là ba điểm thẳng hàng.

d/ Chứng tỏ giao điểm của CE và DF luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi (P) thay đổi.

2. 58 Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành.

a/ Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng : (SAC) &(SBD) ; (SAB) & (SCD) ; (SBC) & (SAD).

b/ Một mặt phẳng (P) qua CD, cắt SA và SB lần lượt tại E và F. Tứ giác CDEF là hình gì ? Chứng tỏ giao điểm của DE và CF luôn ở trên một đường thẳng cố định.

c/ Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SD và BC, K là điểm trên đoạn SA sao cho KS = 2KA.Tìm thiết diện của hình chóp SABCD với mặt phẳng (KMN).

2. 59 Cho hình chóp SABCD có đáy là hình thang ABCD với AB // CD và AB = 2CD.

a/ Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây : (SAD) & (SBC) ; (SAD) & (SBC).

b/ Gọi M là trung điểm của SA. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MBC) với các mặt phẳng (SAD) & (SCD).

c/ Một mặt phẳng (P) di động qua AB, cắt SC và SD lần lượt tại H và K. Tứ giác AHBK là hình gì ? Chứng tỏ giao điểm của BK và AH luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

§3 ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

A LÝ THUYẾT

1 Vị trí tương đối của đường thẳng với mặt phẳng

Ta dựa vào số điểm chung của đường thẳng với mặt phẳng để xác định vị trì tương đối của chúng.

- Nếu đường thẳng a và mặt phẳng (P) không có điểm chung thì ta nói chúng song song với nhau. Kí hiệu là $a // (P)$.

- Nếu chúng có một điểm chung thì ta nói chúng cắt nhau.
- Nếu chúng có hai điểm chung, suy ra một điểm của đường thẳng đều nằm trên mặt phẳng, ta nói đường thẳng chứa trong mặt phẳng.

2 Điều kiện để một đường thẳng song song với một mặt phẳng

Định lý 1 Nếu đường thẳng a không nằm trên mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng nào đó chứa trong (P) thì a song song với (P).

3 Tính chất

Định lý 2 Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) thì mọi mặt phẳng (Q) chứa a mà cắt (P) thì cắt theo giao tuyến song song với a.

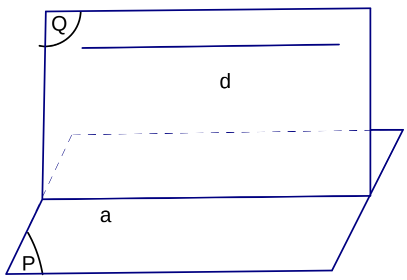
$$\left.\begin{array}{l} d=(P)\cap(Q) \\ a//(P) \\ a\subset(Q) \end{array}\right\}\Rightarrow d//a$$

Hệ quả Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một mặt phẳng thì giao tuyến của chúng cũng song song với đường thẳng đó.

Định lý 3 Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

Phương pháp chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng (P)

- **B1** Chọn một mặt phẳng (Q) chứa d, tìm giao tuyến $a=(P)\cap(Q)$;
- **B2** Chứng minh d // a, từ đó suy ra d // (P).



B BÀI TẬP

Vấn đề 1 : CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

2. 60 Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA, N là trung điểm của BC. Chứng minh rằng MN // (SCD).

2. 61 Cho tứ diện ABCD. Lần lượt lấy I và J trên các cạnh BC và CD sao cho $\frac{CI}{CB}=\frac{CJ}{CD}$. Chứng minh rằng IJ // (ABD).

2. 62 Cho hình chóp tứ giác SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA. Chứng minh rằng $SC // (MBD)$.

2. 63 Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, CD và SA. Chứng minh rằng : MN // (SBC) ; SB // (MNP) ; SC // (MNP).

2. 64 Cho tứ diện ABCD. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AC và AD.

a/ Lấy một điểm M nằm giữa hai điểm B và C. Mặt phẳng (MEF) và đường thẳng BD cắt nhau tại N. Chứng minh rằng MN // (ACD).

b/ Gọi I là một điểm nằm giữa A và B, IC cắt ME tại H, ID cắt NF tại K. Chứng minh HK // EF.

2. 65 Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF nằm trong hai mặt phẳng khác nhau và I, J lần lượt là tâm của chúng.

a/ Chứng minh rằng IJ // (ADF) ; IJ // (CDFE).

b/ Gọi G và H lần lượt là trọng tâm của các tam giác DAB và EAB. Chứng minh GH // (CDEF).

2. 66 Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang, đáy lớn AD và AD = 2BC. Gọi O là giao điểm của AC và BD, G là trọng tâm của tam giác SCD. Chứng minh OG // (SBC).

Vấn đề 2 : TÌM GIAO TUYẾN, THIẾT DIỆN

2. 67 Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang, đáy lớn AD. Gọi M là trung điểm của CD, (α) là mặt phẳng qua M song song với SA và BC.

a/ Hãy xác định thiết diện của hình chóp SABCD với mặt phẳng (α).

b/ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (SAC).

c/ Chứng minh rằng giao tuyến tìm được trong câu b) song song với mặt phẳng (SAD).

2. 68 Cho tứ diện ABCD. Lấy M là một điểm thuộc miền trong của tam giác BCD. Gọi (P) là mặt phẳng qua M, song song với AC và BD.

a/ Hãy xác định thiết diện của mặt phẳng (P) với tứ diện ABCD.

b/ Thiết diện trong câu a/ là hình gì ?

2. 69 Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Xác định thiết diện của hình chóp SABCD khi cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua trung điểm M của AB, song song với BD và SA.

2. 70 Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang đáy lớn AD. Lấy M điểm giữa A và B. Goi (α) là mặt phẳng qua M, song song với AD và SB.

a/ Mặt phẳng (α) cắt hình chóp SABCD theo thiết diện là hình gì ?

b/ Chứng minh rằng SD song song với mặt phẳng (α).

BÀI TẬP TỔNG HỢP

2. 71 Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang, đáy lớn AD và AD = 2BC. Gọi O là giao điểm của AC và BD, G là trọng tâm của tam giác SCD.

a/ Chứng minh OG // (SBC).

b/ Gọi M là trung điểm của SD. Chứng minh CM // (SAB).

2. 72 Cho hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành ABCD. Gọi M là trung điểm SC và (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng AM, song song với BD. Mặt phẳng (α) cắt SB tại E. Hãy tính tỉ số diện tích của hai tam giác SME và SBC.

2. 73 Cho hình chóp S.ABCD với đáy là ABCD là một hình bình hành. Một mặt phẳng (α) chuyển động luôn luôn song song với cạnh BC và đồng thời đi qua trung điểm C' của đoạn SC.

a/ Mặt phẳng (α) cắt cạnh SA, SB, SD lần lượt tại A', B', D'. Tứ giác A'B'C'B' là hình gì ?

b/ Chứng minh rằng mặt phẳng (α) khi chuyển động như trên vẫn luôn luôn chứa một đường thẳng cố định.

c/ Gọi M là giao điểm của A'C' và B'D'. Chứng minh rằng khi mặt phẳng (α) thay đổi như trên thì M chạy trên một đường thẳng cố định.

2. 74 Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Lấy một điểm M di động trên cạnh SC. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AM và song song với BD.

a/ Chứng minh rằng mặt phẳng (α) luôn đi qua một đường thẳng cố định khi M thay đổi.

b/ Mặt phẳng (α) cắt SB và SD tại E và F. Hãy nêu cách dựng E và F.

c/ Gọi I là giao điểm của ME và CB ; J là giao điểm của MF và CD. Chứng minh ba điểm I, J, A thẳng hàng.

§4 HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

A LÝ THUYẾT

1 Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q).

- Nếu (P) và (Q) có điểm chung thì chúng cắt nhau theo một đường thẳng.
- Nếu chúng không có điểm chung thì ta nói chúng song song. Kí hiệu (P) //(Q) hoặc (Q) // (P).

Nhận xét Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song nhau thì mọi đường thẳng chứa trong mặt phẳng (P) đều song song với mặt phẳng (Q).

$$\left.\begin{array}{l}(P)//(Q) \\ a \subset (P)\end{array}\right\} \Rightarrow a//(Q)$$

2 Điều kiện để hai mặt phẳng song song

Điều kiện 1 Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q).

Điều kiện 2 Cho hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q). Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng chứa trong mặt phẳng (Q) thì hai măt phẳng (P) và (Q) song song nhau.

3 Tính chất

Tính chất 1 Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng có duy nhất một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

Hệ quả 1 Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q) thì có duy nhất một mặt phẳng chứa a và song song với (Q).

Hệ quả 2 Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song nhau.

Tính chất 2 Nếu hai mặt phẳng song song (P) và (Q) lần lượt cắt mặt phẳng (R) theo hai giao tuyến a và b thì a và b song song nhau.

Ví dụ 1 Cho hình chóp tứ giác SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Chứng minh rằng MN song song với (SCD).

Ví dụ 2 Cho hình chóp SABCD. Lấy một điểm M nằm giữa A và B. Hãy xác định thiết diện của hình chóp SABCD với mặt phẳng (α) qua M và song song với mặt phẳng (SAD).

4 Định lý Ta-lét trong không gian

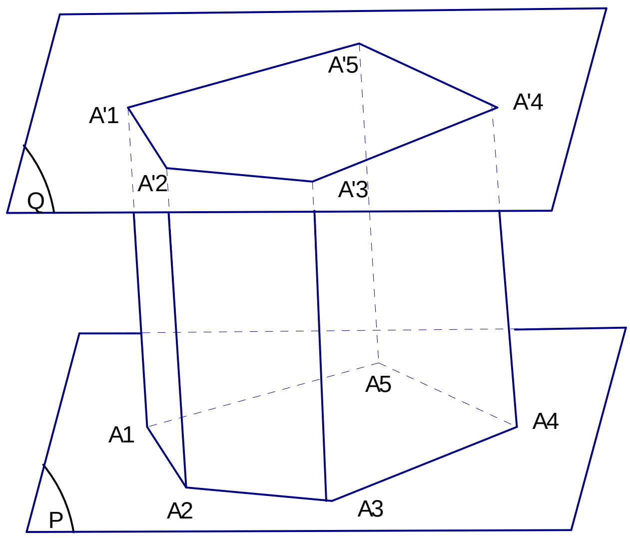
Định lý 1 (Định lý Talét) Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Định lý 2 (Định lý talét đảo) Giả sử trên hai đường thẳng chéo nhau a và a’ lần lượt lấy các điểm A, B, C và A’, B’, C’ sao cho

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Khi đó ba đường thẳng AA’, BB’, CC’ lần lượt nằm trên ba mặt phẳng đôi một song song, tức là chúng cùng song song với một mặt phẳng.

5 Hình lăng trụ và hình hộp



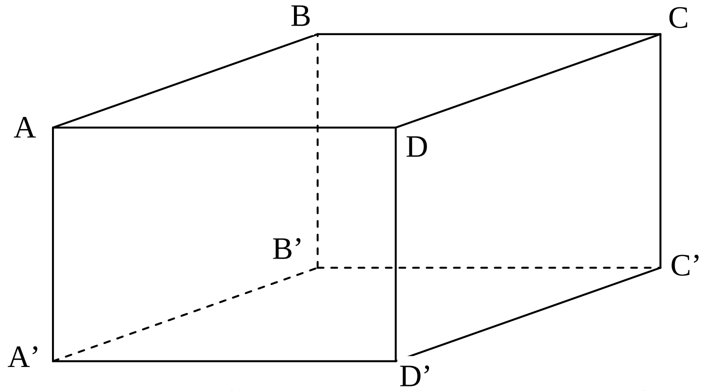
Cho hai mặt phẳng (P) và (P') song song nhau. Trên (P) cho đa giác $A_1A_2\ldots A_n$. Qua các đỉnh A_1, A_2, …,A_n, ta vẽ các đường thẳng song song với nhau lần lượt cắt mặt phẳng (P') tai các điểm A'_1, A'_2, …,A'_n. Dể thấy các tứ giác $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, …, $A_nA_1A'_1A'_n$ là những hình bình hành và hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$, $A'_1A'_2\ldots A'_n$ có các cạnh tương ứng song song và bằng nhau.

Định nghĩa Hình hợp bởi các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, …, $A_nA_1A'_1A'_n$ và hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$, $A'_1A'_2\ldots A'_n$ gọi là **hình lăng trụ** hoặc **lăng trụ**, kí hiệu là $A_1A_2\ldots A_n.A'_1A'_2\ldots A'_n$.

Mỗi hình bình hành nói trên là một **mặt bên** của hình lăng trụ. Hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$, $A'_1A'_2\ldots A'_n$ gọi là hai **mặt đáy** của lăng trụ ; các cạnh của hai đa giác đó gọi là các **cạnh đáy** ; các đoạn thẳng $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, …, $A_nA'_n$ gọi là các **cạnh bên** của hình lăng trụ. Các đỉnh của hai mặt đáy gọi là các **đỉnh** của hình lăng trụ.

Nếu đáy của lăng trụ là tam giác, tứ giác, ngũ giác thì lăng trụ tương úng được gọi là lăng trụ tam giác, lăng trụ tứ giác, lăng trụ ngũ giác.

6 **Hình hộp** Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.



Hình hộp có sáu mặt, mỗi mặt là một hình bình hành. Mỗi mặt có một mặt song song với nó. Hai mặt như thề gọi là hai mặt đối diện.

Hình hộp có tám đỉnh. Hai đỉnh được gọi là **hai đỉnh đối diện** nếu chúng không cùng nằm trên một mặt nào.

Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là **đường chéo** của hình hộp. Hình hộp có bốn đường chéo, các đường chéo này đồng quy tại trung điểm của mỗi đường. Điểm đồng quy đó gọi là **tâm của hình hộp**.

Hình hộp có 12 cạnh, chia là ba nhóm, mỗi nhóm có bốn đường thẳng song song và bằng nhau. Hai cạnh được gọi là **hai cạnh đối diện** nếu chúng song song nhau nhưng không cùng nằm trên một mặt nào của hình hộp

7 **Hình chóp cụt**

Cho hình chóp $S.A_1A_2\ldots A_n$ và một mặt phẳng (P) không qua đỉnh, song song với mặt phẳng đáy, cắt các cạnh SA_1, SA_2, …, SA_n lần lượt tại A'_1, A'_2, …, A'_n. Hình hợp bởi thiết diện $A'_1A'_2\ldots A'_n$ và đáy $A_1A_2\ldots A_n$ của hình chóp cùng với các tứ giác $A'_1A'_2A_2A_1$, $A'_2A'_3A_3A_2$, …, $A'_nA'_1A_1A_n$ gọi là một **hình chóp cụt**, kí hiệu là $A'_1A'_2\ldots A'_n.A_1A_2\ldots A_n$.

Đáy của hình chóp gọi là **đáy lớn** của hình chóp cụt, còn thiết diện $A'_1A'_2\ldots A'_n$ gọi là **đáy nhỏ** của hình chóp cụt. Các tứ giác $A'_1A'_2A_2A_1$, $A'_2A'_3A_3A_2$, …, $A'_nA'_1A_1A_n$ gọi là các **mặt bên** của hình chóp cụt. Các đoạn thẳng $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, …, $A_nA'_n$ gọi là các **cạnh bên** của hình chóp cụt.

Tùy theo đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, …, ta có **hình chóp cụt tam giác**, **hình chóp cụt tứ giác**, **hình chóp cụt ngũ giác**, …

Tính chất Hình chóp cụt có

- Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và tỉ số các cạnh tương ứng bằng nhau ;
- Các mặt bên là những hình thang ;
- Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.

B **BÀI TẬP**

2. 75 .Cho hình chóp tứ giác SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Chứng minh rằng MN song song với (SCD).

2. 76 Cho hình chóp SABCD. Lấy một điểm M nằm giữa A và B. Hãy xác định thiết diện của hình chóp SABCD với mặt phẳng (α) qua M và song song với mặt phẳng (SAD).

2. 77 Cho hình chóp S.ABC, các điểm I, J, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCA.

a/ Chứng minh hai mặt phẳng (IJK) và (ABC) song song nhau.

b/ Tìm tập hợp tất cả những điểm M trong hình chóp S.ABC sao cho KM // (ABC).

2. 78 Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một tứ giác lồi. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SC.

a/ Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi các mặt phẳng lần lượt qua M, N và song song với mặt phẳng (SBD).

b/ Gọi I và J lần lượt là giao điểm của AC với hai mặt phẳng nói trên. Chứng minh $AC = 2IJ$.

2. 79 Cho hai hình vuông ABCD và ABEF ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M và N sao cho AM = BN. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M và N lần lượt cắt AD và AF tại M’ và N’. Chứng minh rằng (ADF) // (BCE) ; M’N’ // DF và MN // (DEF).

2. 80 Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và I là trung điểm của đoạn AB. Lấy điểm M trên đoạn AD sao cho AD = 3AM.

a/ Đường thẳng qua M và song song với AB cắt CI tại N. Chứng minh rằng NG // (SCD).

b/ Chứng minh MG // (SCD).

2. 81 Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’. Hai điểm M và N lần lượt nằm trên hai cạnh AD và CC’ sao cho $\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{NC'}$.

a/ Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với mặt phẳng (ACB’).

b/ Xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng đi qua MN và song song với mặt phẳng (ACB’).

2. 82 Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A’B’C’. Gọi M và M’ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và B’C’.

a/ Chứng minh rằng AM song song với A’M’.

b/ Tìm giao điểm của hai mặt phẳng (AB’C’) với đường thẳng A’M.

c/ Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (AB’C’) và (BA’C’).

d/ Tìm giao điểm G của đường thẳng d với mặt phẳng (AMM’). Chứng minh G là trọng tâm của tam giác AB’C’.

BÀI TẬP LÀM THÊM

ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

2. 83 Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC, CB và K là điểm trên cạnh BD sao cho BK = 2DK. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng (IJK) & (ACD) ; (IJK) & (ABD).

2. 84 Cho tứ diện ABCD, I và J lần lượt là trung điểm AC và BC. Lấy K là điểm trên cạnh BD sao cho KB = 2KD. Tìm

a/ (IJK) $\cap$ (ACD) ; b/ (IJK) $\cap$ (ABD).

2. 85 Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J lần lượt là trung điểm AD và BC.

a/ Tìm (IBC) $\cap$ (JAD).

b/ gọi M là một điểm thuộc AB và N thuộc AC. Tìm (IBC) $\cap$ (DMN).

2. 86 Cho hình chóp tam giác SABC. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC ta lần lượt lấy các điểm A', B', C' không trùng với dầu mút các đoạn thẳng đó. Gọi M là một điểm thuộc miền trong của tam giác ABC.

a/ Tìm giao điểm của đường thẳng B'C' với mặt phẳng (SAM).

b/ Tìm giao điểm của đường thẳng SM với mặt phẳng (A'B'C').

2. 87 Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Lần lượt lấy các điểm M, N, P trên các cạnh SA, SB, SC sao cho không điểm nào trùng với điểm S. Hãy xác định giao điểm của đường thẳng SD và mặt phẳng (MNP).

2. 88 Cho hình chóp tứ giác SABCD. Lần lượt lấy các điểm M và N trên các cạnh SC và AB. Hãy xác định giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SBD).

2. 89 Cho hình chóp SABCD. Điểm M và N lần lượt thuộc các cạnh BC và SD.

a/ Tìm I= BN $\cap$(SAC).

b/ Tìm J= MN $\cap$(SAC).

c/ Chứng minh I, J, C thẳng hàng

d/ Xác định thiết diện của hình chóp với (BCN)

2. 90 Cho tứ diện ABCD. Gọi E và F lần kượt là trung điểm của AD và CD và G trên đoạn AB sao cho GA= 2GB.

a/ Tìm M = GE $\cap$mp(BCD),

b/ Tìm H = BC $\cap$(EFG). Suy ra thiết diện của (EFG) với tứ diện ABCD. Thiết diện là hình gì ?

c/ Tìm (DGH) $\cap$(ABC).

2. 91 Cho hình chop SABCD. Gọi O = AC$\cap$BD. Một mp(α) cắt SA, SB, SC, SD tại A', B', C', D'. Giả sử AB$\cap$C'D = E, A'B'$\cap$C'D' = E'.

a/ Chứng minh: S, E, E' thẳng hàng

b/ Chứng minh A'C', B'D', SO đông qui

HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

2. 92 Cho hình bình hành ABCD và điểm S ở ngoài mp(ABCD).

a/ Tìm (SAD) $\cap$(SBC).

b/ M trên SC. Tìm (MAB) $\cap$(SCD).

c/ (SAC) $\cap$(SBD) = ?

d/ Điểm N thuộc SC sao cho SC = 3SN. Xác định hình tính của thiết diện tạo bởi mp(NAD) với hình chóp

e/ Tìm I = AN $\cap$(SBD). Chứng minh I là trung điểm SO.

2. 93 Cho tứ diện đều ABCD cạnh a, gọi I, J là trung điểm của AC, BC. Gọi k là điểm $\in$BD sao cho KB = 2KD

a/ Xác định thiết diện của (IJK) với tứ diện ABCD

b/ C.Minh thiết diện là hình thang cân.

c/ Tính diện tích thiết diện.

2. 94 Cho 2 hình bình hành ABCD và ABEF không đồng phẳng lấy M $\in$AC và N $\in$BF sao cho $\frac{AM}{AC}=\frac{BN}{BF}=\frac{1}{3}$. Chứng minh rằng MN//DE.

ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG MẶT PHẲNG

2. 95 Cho tứ diện ABCD, gọi M và N là trung điểm của BC và BD.

a/ (AMD) $\cap$(ACD)

b/ Một mặt phẳng (α) qua CD cắt AM và AN tại F và E. Tứ giác CDEF là hình gì?

c/ CF $\cap$ DE = k. Chứng minh A, B, k thẳng hàng.

d/ Chứng minh giao điểm của CE và DF luôn ở trên 1 đường thẳng cố định khi (α) thay đổi.

2. 96 Cho hình chop SA BCD có đáy ABCD là hình bình hành.

a/ Tìm (SAC) $\cap$(SBD); (SA B) $\cap$(SCD), (S BC) $\cap$(SAD).

b/ Một mp(α) qua CD, cắt SA và SB tại E và F. Tứ giác CDEF là hình gì? Chứng tỏ giao điểm của DE và CF luôn luôn ở trên 1 đường thẳng cố đinh.

c/ Gọi M, N là trung điểm SD và BC. K là điểm trên đoạn SA sao cho KS = 2KA. Hãy tìm thiết diện của hình chop SABCD về mp (MNK)

2. 97 Cho 2 hình bình hành ABCD và ABEF không đồng phẳng.

a/ Gọi O và O' là tâm của ABCD và ABEF. Chứng minh OO'//(ADF) và (BCE)

b/ Gọi M, N là trọng tâm của ΔABD và ΔABE. Chứng minh MN // (CEF)\

2. 98 Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD.

a/ Chứng minh rằng MN // (ABD)

b/ . Gọi G và G’ lần lượt là trọng tâm ΔABC và ΔACD . Chứng minh rằng GG’ // (BCD)

2. 99 Cho hình chóm sABCD, đáy là hình thang ABCD với AB // CD,và AB = 2CD

a/ Tìm (SAD) $\cap$(SCD).

b M là trung điểm SA, tìm (MBC) $\cap$(SAD) và (SCD)

c/ Một mặt phẳng (α)di động qua AB, cắt SC và SD tại H và K. Tứ giác A BHK là hình gì?

d/ Chứng minh giao điểm của BK và AH luôn nằm trên 1 đường thẳng cố định.

2. 100 Cho hình chop SABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SD, BD

a/ Chứng minh AD //(MNP)

b/ NP // (SBC)

c. Tìm thiết diện của (MNP) với hình chóp. Thiết diện là hình gì?

2. 101 Cho hình chop SA BCD đáy ABCD là hình bình hành. M là điểm di động trên SC. MP (α)chứ AM v à song song với BD.

a/ Tìm giao điểm E & F của mp (α) với SB và SD,

b. Gọi I = ME $\cap$ CB, J = MF $\cap$ CD. Chứng minh rằng A, I,J thẳng hàng.

HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

2. 102 Cho hình chop SABCD, H, I, K là trung điểm SA, SB, SC.

a/ Chứng minh (HIK) // (ABCD).

b/ Gọi J = OD $\cap$ (HIK). Chứng minh JK // CD và JH // AD.

2. 103 Cho hình chop SABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt trung điểm của SA, SD.

a/ Chứng minh (OMN) // (SBC).

b/ Gọi P và Q trung điểm của AB và ON . Chứng minh PQ //(SBC).

2. 104 Cho 2 hình vuông ABCD và ABEF không đồng phẳng. Trên AC và BF lấy các điểm M, N sao cho AM = BN. Một mp (α) qua M, N và song song với AB cắt AD, AF tại M’, N’.

a/ Chứng minh : (CBE) // (ADF). b/ (DEF) // (α).

2. 105 Cho hình bình hành ABCD. Dựng các nửa đường thẳng song somg và nằm cùng phía của hình bình hành lần lượt đi qua các điểm A, B, C,D. Một mp (α)cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại A’, B’, C’ , D’

a/ Chứng minh (AA’, B B’) // (CC’, DD’)

b/ Chứng minh A’B’C’D’ là hình bình hành.

c/ Chứng minh AA’+ CC’= BB’ + DD’.

Sở Giáo Dục và Đào Tạo

Trường THPT NGUYỄN KHUYẾN

Tổ TOÁN ***ĐỀ THI HỌC KỲ 1 – MÔN TOÁN LỚP 11***

CHƯƠNG TRÌNH NÂNG CAO

Thời gian làm bài : 90 phút

A. PHẦN TRẮC NGHIỆM (15 phút – 2 điểm)

Câu 1. Chia 5 món quà khác nhau cho 5 người, số cách chia quà là :

A. 120 B. 25 C. 32 D. 20

Câu 2. Cho tập hợp E gồm 10 phần tử. Số tập hợp con chứa 2 phần tử của E là :

A. 5 B. 20 C. 90 D. 45

Câu 3. Cho 10 điểm phân biệt. Số vectơ có gốc và ngọn trùng với 2 trong số 10 điểm này là :

A. 20 B. 45 C. 90 D. 100

Câu 4. Số các số tự nhiên chẳn có 4 chữ số khác nhau lấy từ các chữ số của $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ là :

A. 840 B. 630 C. 360 D. Một kết quả khác

Câu 5. Trong mp(Oxy), phép tịnh tiến biến điểm A(-3,4) thành điểm B(1,-2) là phép tịnh tiến theo :

A. $\vec{v} = (4, 6)$ B. $\vec{v} = (4, -6)$ C. $\vec{v} = (-4, -6)$ D. $\vec{v} = (2, -5)$

Câu 6. Trong mp(Oxy), cho I(1, 2) và M(3, -1). Anh của M trong phép đối xứng tâm I có tọa độ là :

A. $(5, -4)$ B. $(2, 1)$ C. $(-1, 3)$ D. $(-1, 5)$

Câu 7. Trong mp(Oxy), ảnh của điểm M(2,-1) qua phép vị tự tâm I(1, 2), tỉ số k = -3 là :

A. $(-2, 11)$ B. $(-2, 0)$ C. $(1, 11)$ D. $(3, 11)$

Câu 8. Trong mp(Oxy), ảnh của đường tròn tâm I(3, 1), bán kính bằng 2, trong phép đối xứng qua trục Ox có phương trình là :

A. $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ B. $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$

C. $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$ C. $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$

B. PHẦN TỰ LUẬN. (75 phút – 8 điểm)

Bài 1. (2 điểm) Giải phương trình

a/ $\cos 2x = \cos x - \sin x$; b/ $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x.\cos x + \cos^2 x = 2$

Bài 2. (2 điểm).

a/ Một hộp đựng 5 quả cầu trắng, 4 quả cầu xanh và 3 quả cầu vàng. Người ta chọn ngẫu nhiên 3 quả cầu trong hộp. Tính xác suất để có đúng 2 quả cầu cùng màu trong 3 quả cầu được chọn.

b/ Có bao nhiêu cách chọn 7 người từ một nhóm người gồm 8 nam và 8 nữ, biết rằng 7 người được chọn phải có cả nam lẫn nữ.

Bài 3. (1 điểm) Tính hệ số của x^5 trong biểu thức thu gọn của đa thức $P(x)=(1+2x)^{12}+(2x-3)^{15}$

Bài 4. (3 điểm)

Cho tứ diện ABCD. Gọi P và Q lần lượt là những điểm trên hai đoạn thẳng BC và BD ; M là điểm trên đoạn AC. Giả sử không tồn tại các đường thẳng song song trong hình vẽ của bài toán.

a/ Tìm giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (MPQ). Suy ra giao điểm N của đường thẳng AD và mặt phẳng (MPQ).

b/ PQ cắt CD tại I. Tìm giao tuyến của mp(MPQ) với mp(ACD). Nhận xét gì về vị trí của M, N, I ?

c/ DP và CQ cắt nhau tại E; MQ và NP cắt nhau tại F. Chứng tỏ A, E, F thẳng hàng.

ĐỀ 1 (NK, HKI 2008 – 2009)

Câu 1 Giải phương trình

a/ $\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x+3\cos^2 x=1$; b/ $\cos 2x+3\cos x+5=4\sin^2\dfrac{x}{2}$;

c/ $3\cos x+2\sqrt{3}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}\sin x$; d/ $\sin^3 x\cos 3x+\cos^3 x\sin 3x=\sin^3 4x$.

Câu 2 a/ Từ các chữ số 1 và 2 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số ?

b/ Trong các số tự nhiên ở câu a/, có bao nhiêu số có đúng hai chữ số 1 ?

c/ Tính xác xuất để một gia đình năm con có đúng hai con trai.

Câu 3 Từ một nhóm người gồm 5 nam và 6 nữ, người ta chọn ngẫu nhiên 4 người.

a/ Tính xác suất để 4 người được chọn gồm 2 nam và 2 nữ.

b/ Tính xác suất để có ít nhất một nam trong 4 người được chọn .

Câu 4 Trong khai triển của $(x-3)^n$ (với $n\in\mathbb{N}^*$), hệ số của x^{n-2} bằng 405. Tính n.

Câu 5 Cho hình bình hành ABCD và điểm S không nằm trong mặt phẳng chứa ABCD.

a/ Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau : (SAC) và (SBD) ; (SAB) và (SCD).

b/ Một mặt phẳng (α) qua BC, cắt SA tại N và cắt SD tại M. Chứng minh MN // BC.

c/ Chứng tỏ giao điểm của BN và CM luôn luôn ở trên một đường thẳng cố định khi M di động trên SA.

d/ Gọi G là trọng tâm tam giác SAB ; K là điểm trên cạnh AC sao cho $\dfrac{AK}{AC}=\dfrac{1}{3}$. Chứng minh GK // (SCD).

ĐỀ 2 (NK, HKI 2009 – 2010)

Câu 1 Giải các phương trình lượng giác sau :

a/ $\sin 2x + \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 3x\right) = 0$; b/ $\cos 2x = 2 + \sqrt{3}\cos x$;

c/ $\sin^2 x - 3\sqrt{3}\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 1$; d/ $8\cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$.

Câu 2 Trong khai triển của $(2+x)^n$ (với $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$), hệ số của x^{n-2} là 264. Tính n.

Câu 3 a/ Có bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau và khác 0 ?

b/ Có bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau và khác 0, trong đó phải có chữ số 1 ?

Câu 4 Từ một hộp đựng 4 bi xanh, 5 bi đỏ và 6 bi vàng, người ta lấy ra ngẫu nhiên 4 bi. Tính xác suất để được

a/ 4 bi được lấy ra đều cùng màu ;

b/ 4 bi được lấy ra gồm dủ cả ba màu.

Câu 5 Cho hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành ABCD tâm O.

a/ Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng (SAC) và (SBD) ; (SAD) và (SBC).

b/ Một mặt phẳng (P) di động chứa CD cắt SA và SB lần lượt tại E và F. Tứ giác CDEF là hình gì? Chứng tỏ giao điểm I của CE và DF luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi (P) di động.

c/ Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SC. Tìm giao điểm H của MN và mp(SBD). Chứng tỏ H là trung điểm của MN.