§1. SỐ PHỨC

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. SỐ PHỨC

Định nghĩa 1

* Số phức z là một biểu thức có dạng z = a + bi, trong đó a và b là những số thực và i là số thoả mãn $i^2 = -1$.

* i được gọi là *đơn vị ảo*, a là *phần thực* và b là *phần ảo* của số phức z.

* Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.

Đặc biệt :

* Số phức z = a + 0i có phần ảo bằng 0 được coi là số thực và viết là z = a + 0i = a

* Số phức z = 0 + bi có phần thực bằng 0 được gọi là số ảo (hay số thuần ảo) và viết là

$$z = 0 + bi = bi$$

* i = 0 + 1i = 1i

* Số 0 = 0 + 0i vừa là số thực vừa là số ảo.

Định nghĩa 2

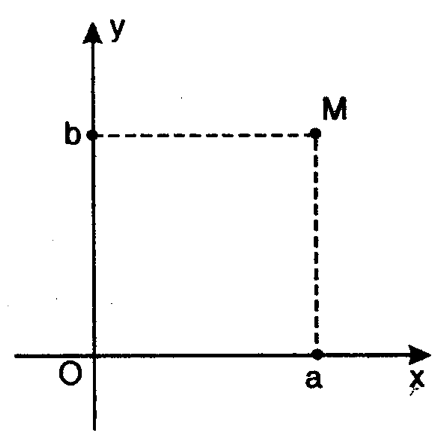
Cho hai số phức z = a + bi và z' = a' + b'i (a, b, a', b' $\in \mathbb{R}$).

$$z = z' \Leftrightarrow a = a' \text{ và } b = b'.$$

II. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC SỐ PHỨC TRONG MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ OXY

Mỗi số phức z = a + bi được biểu diễn bởi điểm M (a ; b) trong mặt phẳng toạ độ.

Mỗi điểm M(a ; b) biểu diễn một số phức z = a + bi, ta kí hiệu là M(z). Mặt phẳng toạ độ với việc biểu diễn số phức còn gọi là mặt phẳng phức.



III. PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ SỐ PHỨC

1) Phép cộng

Định nghĩa 3

Với $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$ ta định nghĩa :

$$z + z' = a + a' + (b + b')i.$$

2) Tính chất

- *Tính chất kết hợp*

$(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$, $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}$

- *Tính chất giao hoán*

$z + z' = z' + z$, $\forall z, z' \in \mathbb{C}$

- *Cộng với 0*

$z + 0 = 0 + z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Với mọi số phức $z = a + bi$, ta gọi số đối của z là $-z$, kí hiệu $-z = -a - bi$, thì ta có $z + (-z) = (-z) + z = 0$.

3) Phép trừ

Định nghĩa 4

Với hai số phức z, z', ta định nghĩa $z - z' = z + (-z')$.

Nếu $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ $(a, b, a', b' \in \mathbb{R})$ thì

$$z - z' = a - a' + (b - b')i.$$

4) Biểu diễn hình học của phép cộng và phép trừ

* Trong mặt phẳng phức, ta cũng coi vectơ $\vec{u} = (a ; b)$ biểu diễn số phức

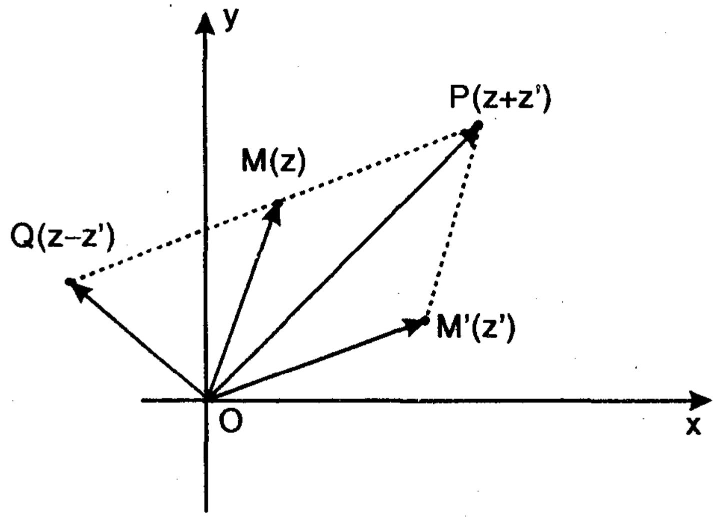
$$z = a + bi.$$

Như vậy số phức z được biểu diễn bởi điểm M cũng có nghĩa là được biểu diễn bởi vectơ $\overrightarrow{OM}$.

* Nếu vectơ $\vec{u}$, $\vec{u'}$ lần lượt biểu diễn các số phức z, z' thì :

$\vec{u} + \vec{u'}$ biểu diễn số phức $z + z'$;

$\vec{u} - \vec{u'}$ biểu diễn số phức $z - z'$.



IV. PHÉP NHÂN SỐ PHỨC

1) Tích của hai số phức

Định nghĩa 5

Với $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ ($a, b, a', b' \in \mathbb{R}$), ta định nghĩa

$$zz' = aa' - bb' + (ab' + ba')i.$$

2) Chú ý

* Với $k \in \mathbb{R}$ và $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thì $kz = ka + kbi$

* $0z = 0, \forall z \in \mathbb{C}$.

3) Tính chất của phép nhân

- *Tính giao hoán* : $zz' = z'z, \ \forall z, z' \in \mathbb{C}$
- *Tính kết hợp* : $(zz')z'' = z(z'z''), \ \forall z, z', z'' \in \mathbb{C}$
- *Nhân với 1* : $1.z = z.1 = z, \ \forall z \in \mathbb{C}$.

Như vậy ta có thể thực hiện các phép tính cộng, nhân các số phức như phép cộng, nhân các số thực. Đặc biệt là các hằng đẳng thức vẫn đúng trong trường hợp số phức.

V. SỐ PHỨC LIÊN HỢP VÀ MÔĐUN CỦA SỐ PHỨC

1) Số phức liên hợp

Định nghĩa 6

Số phức liên hợp của số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là số phức $a - bi$, kí hiệu là $\overline{z}$.

$$\overline{z} = \overline{a+bi} = a - bi$$

Nhận xét : * $z.\overline{z} = (a+bi)(a-bi) \Rightarrow z.\overline{z} = a^2 + b^2$

* z và $\overline{z}$ được biểu diễn bởi hai điểm đối xứng nhau qua trục Ox.

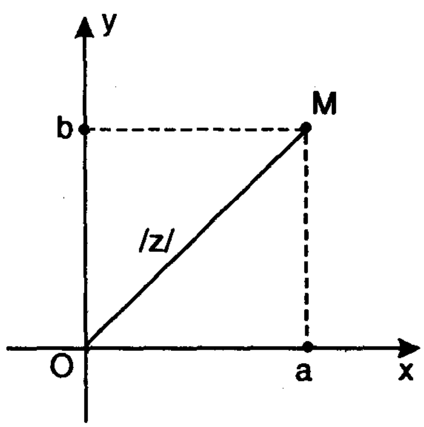
2) Môđun của số phức

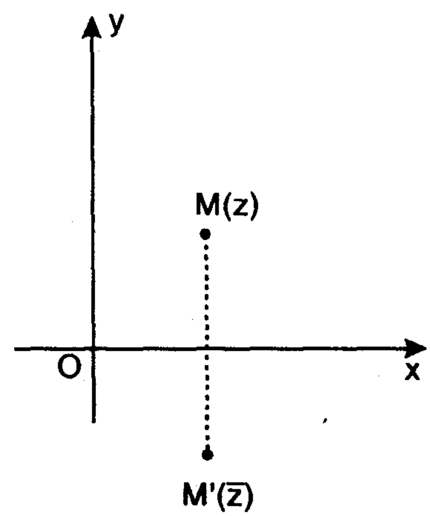
Định nghĩa 7

Môđun của số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ là số thực không âm $\sqrt{a^2+b^2}$, kí hiệu là $|z|$.

Nhận xét :

- Nếu $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thì $|z| = \sqrt{z.\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$
- Nếu z là số thực thì môđun của z là giá trị tuyệt đối của số thực đó.
- Nếu $z = 0$ thì $|z| = 0$





VI. PHÉP CHIA CHO SỐ PHỨC KHÁC 0

Định nghĩa 8

Số nghịch đảo của số phức z khác 0 là số phức kí hiệu là z^{-1}, xác định bởi

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Phép chia số phức z' cho số phức z khác 0 : $\dfrac{z'}{z} = z' z^{-1} = \dfrac{z'\overline{z}}{|z|^2}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1

THỰC HIỆN CÁC PHÉP TOÁN TRÊN $\mathbb{C}$

I. PHƯƠNG PHÁP

Với z = a + bi và z' = a' + b'i (a, b, a', b' $\in \mathbb{R}$), vận dụng các định nghĩa, ta có :

$$z + z' = a + a' + (b + b')i$$

$$z - z' = a - a' + (b - b')i$$

$$zz' = aa' - bb' + (ab' + ba')i$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{z'\overline{z}}{|z|^2} = \frac{(a'+b'i)(a-bi)}{a^2+b^2} = \frac{a'a+b'b+(b'a-a'b)i}{a^2+b^2}.$$

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Viết các số phức sau đây dưới dạng a + bi (a, b $\in \mathbb{R}$) :

a) $z = (2+i)^3 - (1+2i)^3 - (3-i)(2-i)$;

b) $z = \dfrac{1+i}{1-i} + \dfrac{3-i}{2-i} - \dfrac{1+2i}{1+i}$;

c) $z = \dfrac{(2+i)^2(1+i)}{2(1-i)-3(1+i)}$.

Giải

a) $z = (2+i)^3 - (1+2i)^3 - (3-i)(2-i)$

$= 2^3 + 3.2^2i + 3.2i^2 + i^3 - [1 + 3.2i + 3.(2i)^2 + (2i)^3] - (6 - 3i - 2i + i^2)$

$= 8 + 12i - 6 - i - (1 + 6i - 12 - 8i) - (6 - 5i - 1) = 8 + 18i.$

b) $z = \dfrac{1+i}{1-i} + \dfrac{3-i}{2-i} - \dfrac{1+2i}{1+i} = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} + \dfrac{(3-i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} - \dfrac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$= \dfrac{1+2i+i^2}{1+1} + \dfrac{6+i-i^2}{4+1} - \dfrac{1+i-2i^2}{1+1} = \dfrac{2i}{2} + \dfrac{7+i}{5} - \dfrac{3+i}{2} = -\dfrac{1}{10} + \dfrac{7}{10}i.$

$$c)\ z = \frac{(2+i)^2(1+i)}{2(1-i)-3(1+i)} = \frac{(4+i^2+4i)(1+i)}{-1-5i}$$

$$= -\frac{(3+4i)(1+i)}{1+5i} = -\frac{3+4i^2+7i}{1+5i} = \frac{(1-7i)(1-5i)}{(1+5i)(1-5i)}$$

$$= \frac{1+35i^2-12i}{1+25} = \frac{-34-12i}{26} = -\frac{17}{13} - \frac{6}{13}i.$$

Ví dụ 2. Thực hiện các phép tính sau đây và viết kết quả dưới dạng a + bi $(a, b \in \mathbb{R})$

a) $\dfrac{(2+i)^5}{(1-2i)^3}$; b) $\dfrac{(1+i)^6}{(2-2i)^5}$.

Giải

$$a)\ \frac{(2+i)^5}{(1-2i)^3} = \left(\frac{2+i}{1-2i}\right)^3 (2+i)^2 = \left(\frac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}\right)^3 (4+i^2+4i)$$

$$= \left(\frac{5i}{1+4}\right)^3 (3+4i) = i^3(3+4i) = -i(3+4i) = 4-3i.$$

$$b)\ \frac{(1+i)^6}{(2-2i)^5} = \frac{(1+i)^6}{2^5(1-i)^5} = \frac{1}{32}.\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 (1+i)$$

$$= \frac{1}{32}.\left(\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^5 (1+i) = \frac{1}{32}.\left(\frac{2i}{2}\right)^5 (1+i)$$

$$= \frac{1}{32}.i^4.i(1+i) = \frac{1}{32}i(1+i) = -\frac{1}{32} + \frac{1}{32}i.$$

III. BÀI TẬP

1. Viết các số phức sau đây dưới dạng a + bi $(a, b \in \mathbb{R})$:

a) $z = \dfrac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{5}-i\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{3}-i\sqrt{5}}$; b) $z = \dfrac{(7-8i)^{10}}{(8+7i)^{11}}$.

2. Thực hiện các phép tính :

a) $(2+i)^3 - (2-i)^3$; b) $(1+\sqrt{2}\,i)^4 + (1-\sqrt{2}\,i)^4$;

c) $\dfrac{(3+i)^4-(3-i)^4}{(2+i)^3+(2-i)^3}$; d) $\dfrac{(1-2i)^{13}}{(2+i)^{12}}$;

e) $\dfrac{(2-3i)^5(3-2i)^2}{(3+2i)^7}$; f) $\dfrac{(2-3i)^8}{(3+2i)^7}+\dfrac{(5-4i)^9}{(4+5i)^8}$.

3. Cho $z_1 = 1 - 3i$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = 3 - 4i$. Tính :

a) $z_1 + 2z_2 - \overline{z_3}$; b) $z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_3}$; c) $\overline{z_1z_2z_3} + z_2^2z_3$.

4. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để :

a) Số phức $z = 1 + (1+ mi) + (1 + mi)^2$ là số thuần ảo.

b) Số phức $z = \dfrac{m-1+2(m-1)i}{1-mi}$ là số thực.

5. Cho số phức z thoả mãn $\dfrac{2z-1}{z+1}$ là số thực. Chứng minh rằng z là số thực.

6. Cho $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Tìm điều kiện của x và y để :

a) z^2 là số thực ; b) z^2 là số thuần ảo.

Vấn đề 2

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐƠN GIẢN

I. PHƯƠNG PHÁP

* Đưa về phương trình bậc nhất theo z, thực hiện các phép tính số phức và tính z.

* Nếu phương trình chứa z, $|z|$, $\overline{z}$, ta đặt $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ rồi suy ra $\overline{z} = x - yi$ và $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Sau đó ta biến đổi hai vế theo x, y và cân bằng phần thực, phần ảo ở hai vế để tính x, y.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau đây với ẩn z :

a) $(2 + i)z = z + 2i - 1$; b) $(1 - i)(z - 2i) = 2 + i$.

Giải

a) $(2+i)z = z + 2i - 1 \Leftrightarrow z(2+i-1) = -1+2i \Leftrightarrow z(1+i) = -1+2i$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-1+2i}{1+i} \Leftrightarrow z = \frac{(-1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1-2i^2+i+2i}{1-i^2} = \frac{1+3i}{1+1}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

b) $(1-i)(z-2i) = 2+i \Leftrightarrow z - 2i = \dfrac{2+i}{1-i}$

$$\Leftrightarrow z - 2i = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \Leftrightarrow z - 2i = \frac{2+i^2+3i}{1-i^2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1+3i}{2} + 2i \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}i.$$

Ví dụ 2. Tìm các số thực x, y trong các trường hợp sau :

a) $\dfrac{x+1}{1-i} = \dfrac{y-1}{1+i}$; b) $\dfrac{1}{x-i} + \dfrac{y}{3-3i} = 2+3i$;

c) $(x+i)(1+yi) = (3+2i)x + 1 - 4i$.

Giải

a) $\dfrac{x+1}{1-i} = \dfrac{y-1}{1+i} \Leftrightarrow (x+1)(1+i) = (y-1)(1-i)$

$$\Leftrightarrow x + 1 + (x+1)i = y - 1 - (y-1)i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = y-1 \\ x+1 = -y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-2 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1. \end{cases}$$

b) Điều kiện : $x \neq i$.

$$\frac{1}{x-i} + \frac{y}{3-3i} = 2+3i \Leftrightarrow \frac{x+i}{(x-i)(x+i)} + \frac{y(1+i)}{3(1-i)(1+i)} = 2+3i$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+i}{x^2+1} + \frac{y+yi}{3(1+1)} = 2+3i$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{6} + i\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{y}{6}\right) = 2+3i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{y}{6}=2 \\ \dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{y}{6}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-x}{x^2+1}=1 \\ \dfrac{y}{6}=3-\dfrac{1}{x^2+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x=0 \\ \dfrac{y}{6}=3-\dfrac{1}{x^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=12 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=15. \end{cases}$$

c) $(x + i)(1 + yi) = (3 + 2i)x + 1 - 4i \Leftrightarrow x - y + (1 + xy)i = 3x + 1 + (2x - 4)i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=3x+1 \\ 1+xy=2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-1 \\ 1+x(-2x-1)=2x-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-1 \\ 2x^2+3x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\dfrac{5}{2} \\ y=4. \end{cases}$$

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau với ẩn z :

a) $(z+\overline{z})(1+i)+(\overline{z}-z)(2+3i)=4-i$;

b) $\dfrac{z+\overline{z}}{1+i}-\dfrac{i(z-\overline{z})}{2-2i}=4+6i$.

Giải

Đặt $z = x + yi \Rightarrow \overline{z} = x - yi$.

a) Ta có $\begin{cases} z+\overline{z}=2x \\ \overline{z}-z=-2yi \end{cases}$

Phương trình $(z+\overline{z})(1+i)+(\overline{z}-z)(2+3i)=4-i$ trở thành :

$$2x(1 + i) - 2yi(2 + 3i) = 4 - i \quad \Leftrightarrow 2x + 2xi - 4yi + 6y = 4 - i$$

$$\Leftrightarrow 2x + 6y + (2x - 4y)i = 4 - i \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+6y=4 \\ 2x-4y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Vậy $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

b) Phương trình $\dfrac{z+\overline{z}}{1+i}-\dfrac{i(z-\overline{z})}{2-2i}=4+6i$ trở thành :

$$\frac{2x}{1+i}-\frac{2yi^2}{2(1-i)}=4+6i \Leftrightarrow \frac{2x}{1+i}+\frac{2y}{2(1-i)}=4+6i$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x(1-i)+y(1+i)}{(1+i)(1-i)}=4+6i \Leftrightarrow \frac{2x+y+(-2x+y)i}{2}=4+6i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x+y=8\\-2x+y=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\y=10.\end{cases}$$

Vậy $z=-1+10i$.

Ví dụ 4. Tìm số phức z, w thoả mãn $\begin{cases}z+w=4+3i\\z-iw=3-2i.\end{cases}$

Giải

Hệ phương trình $\begin{cases}z+w=4+3i\\z-iw=3-2i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z+w=4+3i & (1)\\(1+i)w=1+5i & (2)\end{cases}$

$(2) \Rightarrow w=\dfrac{1+5i}{1+i}=\dfrac{(1+5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1+5-i+5i}{1+1}=3+2i$

$(1) \Rightarrow z=4+3i-w=4+3i-3-2i=1+i$.

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm : $\begin{cases}z=1+i\\w=3+2i.\end{cases}$

III. BÀI TẬP

7. Tìm x, y $\in \mathbb{R}$ thoả mãn các hệ thức sau :

a) $(x+yi)(3-2i)=13i$;

b) $x(1+i)-y(2+3i)=10$;

c) $(x-2)(1-i)+(y+1)(2+i)=2+4i$.

8. Giải các phương trình sau với ẩn z :

a) $(1+i)z=4-2i$;

b) $(2i+1)(z+i)=1+i$;

c) $\dfrac{z+i}{z}=2+i$.

9. Giải các phương trình sau đây với ẩn z :

a) $\dfrac{2z-1}{z+i}=1+i$;

b) $\dfrac{i}{z}=\dfrac{1}{2-i}+\dfrac{1}{3+6i}$;

c) $\left[(1+2i)\overline{z}+2-i\right]\left(iz+\dfrac{1}{i}\right)=0$;

d) $2z-\overline{z}=(z+\overline{z}+1)(1+i)-2$.

10. Giải các phương trình sau trong $\mathbb{C}$:

a) $z^2 = 2\overline{z}$; b) $z^2 - |z|^2 + 1 = 0$;

c) $z^2 + |z| = 0$; d) $\dfrac{\overline{z}^2 + i}{z+1} = i$.

11. Giải các hệ phương trình sau với hai ẩn x và w :

a) $\begin{cases} 2z + w = 4 \\ 2i\,\overline{z} + \overline{w} = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} z + w = \overline{w} + i \\ z - w = \overline{z} + i \end{cases}$; c) $\begin{cases} z + w = 1 - \overline{w} \\ 2z + \overline{w} = 2 + i + w. \end{cases}$

Vấn đề 3

BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CÁC SỐ PHỨC

I .PHƯƠNG PHÁP

1) Trong mặt phẳng phức, số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bằng :

– điểm $M(x ; y)$, kí hiệu $M(z)$

– vectơ $\overrightarrow{OM} = (x ; y)$

– vectơ $\vec{u} = (x ; y)$

2) Biểu diễn hình học của z, $-z$, $\overline{z}$

$M(z)$ và $M(-z)$ đối xứng với nhau qua gốc toạ độ.

$M(z)$ và $M(\overline{z})$ đối xứng với nhau qua trục Ox.

3) Biểu diễn hình học của $z + z'$, $z - z'$, kz ($k \in \mathbb{R}$)

Gọi M, $\vec{u}$ lần lượt biểu diễn số phức z ; M', $\vec{v}$ biểu diễn số phức z'. Ta có :

$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$ và $\vec{u} + \vec{v}$ biểu diễn số phức $z + z'$;

$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{M'M}$ và $\vec{u} - \vec{v}$ biểu diễn số phức $z - z'$;

$k\overrightarrow{OM}$ và $k\vec{u}$ biểu diễn số phức kz.

4) Với M, A, B lần lượt biểu diễn số phức z, a, b thì :

$OM = |z|$; $AB = |b - a|$.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng phức, cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng biểu diễn các số phức a, b, c. Gọi M là trung điểm AB, G là trọng tâm tam giác ABC và D là điểm đối xứng của A qua G. Các điểm M, G, D lần lượt biểu diễn các số phức m, g, d.

a) Tính các số phức m, g, d theo a, b, c.

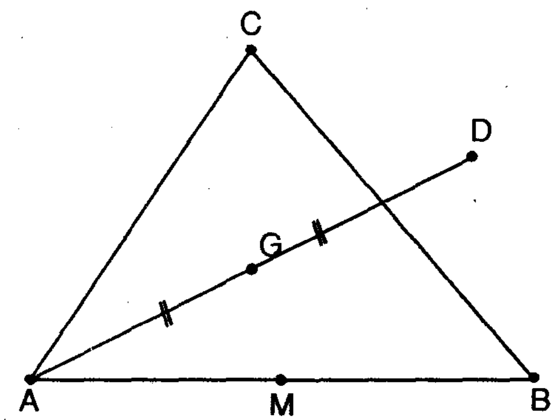
b) Nếu thêm giả thiết $|a| = |b| = |c|$, chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều nếu và chỉ nếu $a + b + c = 0$.

Giải

a) M là trung điểm của AB

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

$\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}(a + b)$.



G là trọng tâm tam giác ABC

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

$\Leftrightarrow g = \frac{1}{3}(a + b + c)$.

D là điểm đối xứng của A qua G $\Leftrightarrow$ G là trung điểm của AD

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$

$\Leftrightarrow 2g = a + d \Leftrightarrow d = 2g - a \Leftrightarrow d = 2.\frac{1}{3}(a + b + c) - a$

$\Leftrightarrow d = \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c - \frac{1}{3}a$.

b) Giả thiết $|a| = |b| = |c| \Leftrightarrow OA = OB = OC \Leftrightarrow$ O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Như vậy tam giác ABC là tam giác đều

$\Leftrightarrow O \equiv G \Leftrightarrow g = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0$.

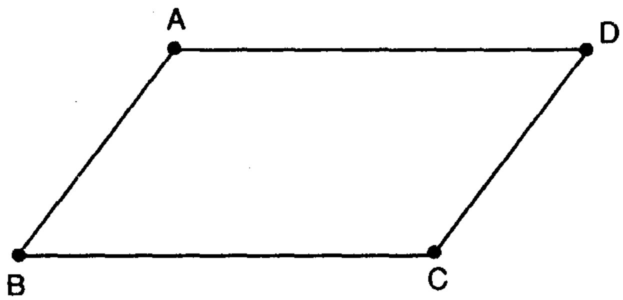
Ví dụ 2. Cho hình bình hành ABCD. Ba đỉnh A, B, C lần lượt biểu diễn các số phức

$a = 2 - 2i, b = -1 + i, c = 5 + mi \quad (m \in \mathbb{R})$.

a) Tính số phức d (biểu diễn điểm D) ;

b) Định m sao cho ABCD là hình chữ nhật.

Giải



a) ABCD là hình bình hành

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow d - c = a - b$

$\Leftrightarrow d = a + c - b$

$\Leftrightarrow d = 2 - 2i + 5 + mi - (-1 + i)$

$\Leftrightarrow d = 8 + (m - 3)i.$

b) ABCD là hình chữ nhật $\Leftrightarrow AC = BD \Leftrightarrow |c - a| = |d - b|$

$\Leftrightarrow |5 + mi - 2 + 2i| = |8 + (m - 3)i + 1 - i| \Leftrightarrow |3 + (m + 2)i| = |9 + (m - 4)i|$

$\Leftrightarrow |3 + (m + 2)i|^2 = |9 + (m - 4)i|^2 \Leftrightarrow 3^2 + (m + 2)^2 = 9^2 + (m - 4)^2$

$\Leftrightarrow 9 + m^2 + 4m + 4 = 81 + m^2 - 8m + 16 \Leftrightarrow 12m = 84$

$\Leftrightarrow m = 7.$

III. BÀI TẬP

12. Trong mặt phẳng phức, cho ba điểm M, A, B lần lượt biểu diễn các số phức z, $\left(\dfrac{3+i\sqrt{3}}{3}\right)z$ và $\dfrac{i}{\sqrt{3}}z$.

Chứng minh rằng :

a) $\forall z \in \mathbb{C}$, tam giác OMA vuông tại M ;

b) $\forall z \in \mathbb{C}$, tam giác MAB là tam giác vuông ;

c) $\forall z \in \mathbb{C}$, tứ giác OMAB là hình chữ nhật.

13. Gọi A, B, C là ba điểm lần lượt biểu diễn các số phức

$a = -1 - i,\ b = i,\ c = 1 + ki\ (k \in \mathbb{R}).$

a) Định k để ba điểm A, B, C thẳng hàng ;

b) Xét hàm số $w = f(z) = z^2$. Đặt a' = f(a), b' = f(b), c' = f(c). Tính a', b', c' ;

c) Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức a', b', c'. Định k để A', B', C' là ba điểm thẳng hàng ;

d) Nếu $\vec{u}$, $\vec{v}$ lần lượt biểu diễn các số phức z, z'. Chứng minh rằng $\vec{u} \perp \vec{v}$

$\Leftrightarrow \dfrac{z}{z'}$ là số ảo.

Áp dụng : tính k để tam giác A'B'C' vuông tại A'.

14. Cho ba điểm A, B, C lần lượt biểu diễn các số phức $a = 1$, $b = -1 + \alpha i$ và $c = b^2$.

a) Xác định các số phức được biểu diễn bởi các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$;

b) Xác định α sao cho A, B, C là ba đỉnh của một tam giác ;

c) Với điều kiện ở câu b), chứng minh rằng ABC là tam giác vuông ;

d) Tìm số phức d biểu diễn bởi điểm D sao cho ABDC là hình chữ nhật.

15. Cho ba điểm A, B, C biểu diễn các số phức $a = 1 + i$, $b = a^2$ và $c = x - i$ $(x \in \mathbb{R})$.

Tìm x sao cho :

a) Tam giác ABC vuông tại B ;

b) Tam giác ABC cân tại C.

Vấn đề 4

TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

I. PHƯƠNG PHÁP

1) Giả sử các điểm M, A, B lần lượt biểu diễn các số phức z, a, b.

* $|z - a| = |z - b| \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow$ M thuộc đường trung trực của đoạn AB.

* $|z - a| + |z - b| = k$ $(k \in \mathbb{R}, k > 0, k > |a - b|) \Leftrightarrow MA + MB = k$

$\Leftrightarrow$ M thuộc elip (E) nhận A, B làm hai tiêu điểm và có độ dài trục lớn bằng k.

2) Giả sử M và M' lần lượt biểu diễn các số phức z và $w = f(z)$.

Đặt $z = x + yi$ và $w = u + vi$ $\quad (x, y, u, v \in \mathbb{R})$.

Hệ thức $w = f(z)$ tương đương với hai hệ thức liên hệ giữa x, y, u, v.

* Nếu biết một hệ thức giữa x, y, ta tìm được một hệ thức giữa u, v và suy ra được tập hợp các điểm M'.

* Nếu biết một hệ thức giữa u, v, ta tìm được một hệ thức giữa x, y và suy ra được tập hợp các điểm M.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z trong các trường hợp sau :

a) $|z + i| = |z - i|$;

b) $\left|\dfrac{z+1-3i}{z-1+i}\right| = 1$;

c) $|z - 2 + i| = \sqrt{5}$;

d) $|z - 1| + |z + 1| = 4$;

e) $\dfrac{2z+1}{z-1}$ là số ảo, $z \neq 1$;

f) $\dfrac{z+1}{z-2i}$ là số thực, $z \neq 2i$;

g) $z_0 z + \overline{z_0 z} + 1 = 0$ với $z_0 = 1 - i$.

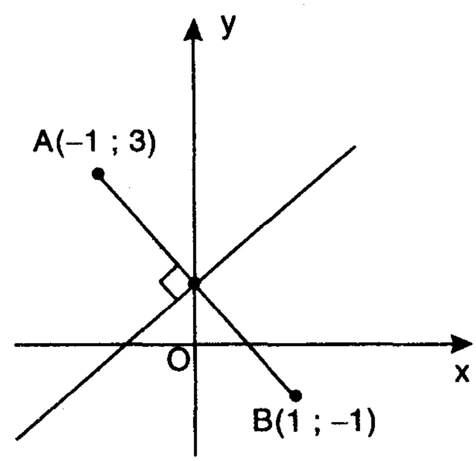
Giải

a) Đặt $a = -i$ và $b = i$.

Gọi A(0 ; –1) và B(0 ; 1) lần lượt biểu diễn các số phức a và b, suy ra $|z + i| = |z - a| = MA$ và $|z - i| = |z - b| = MB$.

Ta có $|z + i| = |z - i| \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow$ M thuộc đường trung trực của AB, đó chính là trục Ox.

Vậy tập hợp các điểm M là trục Ox.



b) $\left|\dfrac{z+1-3i}{z-1+i}\right| = 1$

$\Leftrightarrow |z + 1 - 3i| = |z - 1 + i| \qquad (1)$

Đặt $a = -1 + 3i$ biểu diễn bởi điểm A(–1 ; 3) và $b = 1 - i$ được biểu diễn bởi điểm B(1 ; –1).

Ta có (1) $\Leftrightarrow |z - a| = |z - b| \Leftrightarrow MA = MB$.

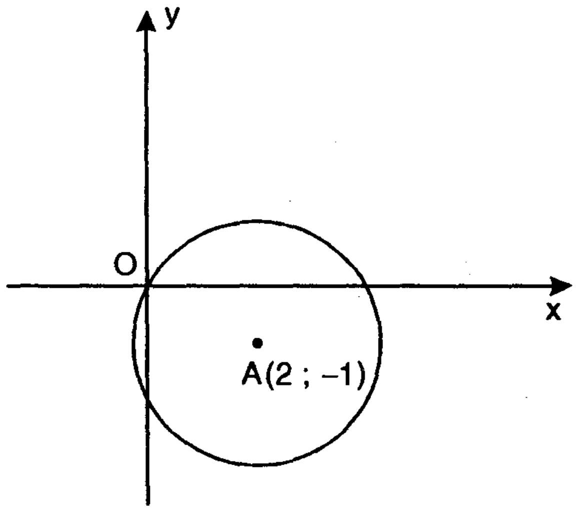
Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực của đoạn AB.

c) Đặt $a = 2 - i$ biểu diễn bởi điểm A(2 ; –1).

Ta có $|z - 2 + i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |z - a| = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow MA = \sqrt{5}$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A(2 ; –1), bán kính $R = \sqrt{5}$.



d) Đặt a = 1 và b = –1, lần lượt được biểu diễn bởi các điểm A(1 ; 0) và B(–1 ; 0).

Ta có $|z-1| + |z+1| = 4 \Leftrightarrow |z-a| + |z-b| = 4 \Leftrightarrow MA + MB = 4$.

Vậy tập hợp các điểm M là elip (E) nhận A, B là hai tiêu điểm, có độ dài trục lớn là 4.

e) Đặt $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Với $z \neq 1$, ta có :

$$\frac{2z+1}{z-1} = \frac{2x+2yi+1}{x+yi-1} = \frac{(2x+1+2yi)(x-1-yi)}{(x-1+yi)(x-1-yi)}$$

$$= \frac{(2x+1)(x-1)+2y^2+i[2y(x-1)-y(2x+1)]}{(x-1)^2+y^2}$$

$\frac{2z+1}{z-1}$ là số ảo $\Leftrightarrow$ phần thực của $\frac{2z+1}{z-1}$ triệt tiêu

$$\Leftrightarrow (2x+1)(x-1)+2y^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{x}{2} + y^2 - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16}\right) + y^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{16}.$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn (C), tâm $I(\frac{1}{4}; 0)$, bán kính $R = \frac{3}{4}$, bỏ đi điểm A(1 ; 0).

f) Đặt $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Với $z \neq 2i$, ta có :

$$\frac{z+1}{z-2i} = \frac{x+1+yi}{x+(y-2)i} = \frac{(x+1+yi)(x-(y-2)i)}{(x+(y-2)i)(x-(y-2)i)}$$

$$= \frac{x(x+1)+y(y-2)+i[xy-(x+1)(y-2)]}{x^2+(y-2)^2}$$

$\frac{z+1}{z-2i}$ là số thực $\Leftrightarrow$ phần ảo triệt tiêu $\Leftrightarrow xy - (x + 1)(y - 2) = 0$

$\Leftrightarrow xy - (xy - 2x + y - 2) = 0 \;\; \Leftrightarrow 2x - y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \; y = 2x + 2.$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng có phương trình $y = 2x + 2$, bỏ đi điểm $A(0 ; 2)$ vì $z \neq 2i$.

g) Với $z_0 = 1 - i$, đặt $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$, ta có :

$z_0.z = (1 - i)(x + yi) = x + y + (y - x)i$;

$\overline{z_0.z} = x + y - (y - x)i.$

Như vậy $z_0z + \overline{z_0z} + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow 2(x + y) + 1 = 0 \Leftrightarrow \; 2x + 2y + 1 = 0.$

Tập hợp các điểm M là đường thẳng có phương trình $2x + 2y + 1 = 0$.

Ví dụ 2. Gọi M và M' là các điểm lần lượt biểu diễn các số phức z và $z' = \frac{1}{\overline{z}}$ $(z \neq 0)$.

Đặt $z = x + yi$ và $z' = x' + y'i$ $(x, y, x', y' \in \mathbb{R})$

a) Tính x', y' theo x, y và tính x, y theo x', y' ;

b) Cho M di động trên đường tròn (C) tâm $A(-1 ; 1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$. Tìm tập hợp các điểm M' ;

c) Cho M di động trên đường thẳng $d : y = x + 1$, tìm tập hợp các điểm M'.

Giải

a) Ta có

$$z' = \frac{1}{\overline{z}} \Leftrightarrow z' = \frac{z}{z.\overline{z}} \Leftrightarrow z' = \frac{z}{|z|^2}$$

$$\Leftrightarrow x' + y'i = \frac{x + yi}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \\ y' = \dfrac{y}{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

Tương tự, ta có :

$$z' = \frac{1}{\overline{z}} \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z'} \Leftrightarrow z = \frac{1}{\overline{z'}} \Leftrightarrow z = \frac{z'}{\overline{z'}.z'} = \frac{z'}{|z'|^2}$$

$$\Leftrightarrow x + yi = \frac{x' + y'i}{x'^2 + y'^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x'}{x'^2 + y'^2} \\ y = \dfrac{y'}{x'^2 + y'^2}. \end{cases}.$$

b) Đường tròn (C) tâm A(–1 ; 1), bán kính $R = \sqrt{2}$ có phương trình :

$$(C) : (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0.$$

Điểm $M \in (C) \Leftrightarrow$ toạ độ M (x ; y) thoả mãn phương trình :

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 + 2x - 2y}{x^2 + y^2} = 0 \text{ (vì } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ do } z \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x' - 2y' + 1 = 0 \text{ (vì } \frac{x}{x^2 + y^2} = x' \text{ và } \frac{y}{x^2 + y^2} = y' \text{ theo kết quả của câu a))}$$

Suy ra toạ độ của điểm M'(x' ; y') thoả mãn phương trình $2x' - 2y' + 1 = 0$.

Vậy tập hợp các điểm M' là đường thẳng có phương trình $2x - 2y + 1 = 0$.

c) Điểm M di động trên đường thẳng d : $y = x + 1$ nên toạ độ của M(x ; y) thoả mãn $y = x + 1$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{x'^2 + y'^2} = \frac{x'}{x'^2 + y'^2} + 1 \text{ (vì theo câu a ta có } y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2} \text{ và}$$

$$x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2})$$

$$\Leftrightarrow y' = x' + x'^2 + y'^2 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 + x' - y' = 0.$$

Suy ra toạ độ của M'(x'; y') thoả mãn phương trình : $x'^2 + y'^2 + x' - y' = 0$.

Vậy tập hợp các điểm M' là đường tròn (C') có phương trình :

$$x^2 + y^2 + x - y = 0.$$

III. BÀI TẬP

16. Gọi M và P lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) và $w = z^2$. Tìm tập hợp các điểm P trong các trường hợp sau đây :

a) M thuộc đường thẳng $d : y = 2x$;

b) M thuộc đường thẳng $d : y = x + 1$;

c) Chứng minh rằng $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, ta có $|z \,.\, z'| = |z|.|z'|$. Từ đó suy ra $|z^2| = |z|^2$.
Tìm tập các điểm P khi M thuộc đường tròn $(C) : x^2 + y^2 = 1$;

d) M thuộc hypebol $(C) : y = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.

17. Tìm tập hợp các điểm M(z) biết z thoả mãn hệ thức sau :

a) $|z - (2 + i)| = 1$;

b) $|z + 1 - i| = |z - (3 - i)|$;

c) $\left|\dfrac{3-i}{z} - 4\right| = 4$;

d) $|(1 - i)z - 4| = 2$;

e) $|z - 4| - |z + 4| = 4\sqrt{3}$.

18. Tìm tập hợp các điểm M(z) biết :

a) $w = \dfrac{z^2}{z-1}$ là số thực ;

b) $w = \dfrac{z^2}{z-i}$ là số thuần ảo ;

c) $w = \dfrac{z+2+i}{z-i}$ là số thực ;

d) $w = \dfrac{z+2+i}{z-i}$ là số thuần ảo.

19. Cho điểm M biểu diễn số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ và điểm P biểu diễn số phức $w = z^2$. Tìm tập hợp các điểm P trong các trường hợp sau :

a) M di động trên đường thẳng $d : y = x - 1$;

b) M di động trên đường tròn tâm O, bán kính $R = 2$;

c) $|z + 2 - i| = |z - 2 + i|$.

§2. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC

Định nghĩa

Cho số phức w. Mỗi số phức z thoả mãn $z^2 = w$ được gọi là một căn bậc hai của w.

Mỗi căn bậc hai của w là một nghiệm của phương trình $z^2 - w = 0$.

1) Trường hợp w là số thực

– Căn bậc hai của 0 là 0.

– Xét số thực $w = a \neq 0$

Khi $a > 0$, ta có $z^2 - a = (z - \sqrt{a})(z + \sqrt{a})$.

Phương trình $z^2 - a = 0 \Leftrightarrow z = \sqrt{a}$ hoặc $z = -\sqrt{a}$.

Vậy số thực a dương có hai căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$.

Khi $a < 0$, ta có $z^2 - a = z^2 - (-ai^2) = (z - \sqrt{-a}\,i)(z + \sqrt{-a}\,i)$.

Phương trình $z^2 - a = 0 \Leftrightarrow z = \sqrt{-a}\,i$ hoặc $z = -\sqrt{-a}\,i$.

Vậy số thực a âm có hai căn bậc hai là $\sqrt{-a}\,i$ và $-\sqrt{-a}\,i$.

Ví dụ : $-1 = i^2 \Rightarrow -1$ có hai căn bậc hai là i và – i.

$-a^2 = a^2 i^2 \Rightarrow -a^2$ có hai căn bậc hai là ai và –ai.

2) Trường hợp w = a + bi ($a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$)

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

z là căn bậc hai của w $\Leftrightarrow z^2 = w \Leftrightarrow (x + yi)^2 = a + bi$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xy\,i = a + bi$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$. Giải hệ phương trình này, ta luôn tính được 2 nghiệm (x ; y).

Mỗi nghiệm (x ; y) của hệ phương trình trên cho ta một căn bậc hai $z = x + yi$ của số phức $w = a + bi$.

TÓM TẮT

- Số 0 có đúng 1 căn bậc hai là 0.
- Mỗi số phức khác 0 có đúng 2 căn bậc hai đối nhau.

Đặc biệt, số thực a dương có 2 căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$;

số thực a âm có 2 căn bậc hai là là $\sqrt{-a}\,i$ và $-\sqrt{-a}\,i$.

II. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Xét phương trình : $Az^2 + Bz + C = 0$ (A, B, C là số phức và $A \neq 0$) (1)

Ta có : $\Delta = B^2 - 4AC$.

Nếu $\Delta \neq 0$, Δ có 2 căn bậc hai là δ và $-\delta$, phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt là

$$z_1 = \frac{-B+\delta}{2A} \text{ và } z_2 = \frac{-B-\delta}{2A}.$$

Nếu $\Delta = 0$, phương trình (1) có nghiệm kép

$$z_1 = z_2 = -\frac{B}{2A}.$$

III. ĐỊNH LÍ CƠ BẢN CỦA ĐẠI SỐ

Định lí

Mọi phương trình bậc n ($n \geq 1$) luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1

TÍNH CĂN BẬC HAI, CĂN BẬC BỐN CỦA MỘT SỐ PHỨC w

I. PHƯƠNG PHÁP

* Để tính căn bậc hai $z = x + yi$ của số phức $w = a + bi$, ta giải phương trình :

$$z^2 = w \Leftrightarrow (x + yi)^2 = a + bi \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$. Tính x và y, suy ra z.

* Để tính căn bậc bốn của số phức w, trước hết ta tính căn bậc hai z của w. Sau đó ta lại tính căn bậc hai của z.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính căn bậc hai của các số phức sau :

a) -9 ; b) $3 + 4i$; c) $1 - \sqrt{3}\ i$; d) $-\dfrac{1}{4i}$.

Giải

a) Gọi z là căn bậc hai của -9, ta có :

$z^2 = -9 \quad \Leftrightarrow z^2 = 9i^2 \quad \Leftrightarrow \quad z = 3i$ hoặc $z = -3i$.

Vậy -9 có hai căn bậc hai là $3i$ và $-3i$.

b) Gọi $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là căn bậc hai của $3 + 4i$, ta có :

$z^2 = 3 + 4i \Leftrightarrow (x + yi)^2 = 3 + 4i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 3 + 4i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ xy = 2 & (2) \end{cases}$

(2) $\Rightarrow x \neq 0$ và $y = \dfrac{2}{x}$.

(1) $\Rightarrow x^2 - \dfrac{4}{x^2} = 3 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ (loại) hoặc

$x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow x = \pm 2.$

$x = 2 \quad \Rightarrow y = 1$

$x = -2 \quad \Rightarrow y = -1.$

Vậy $3 + 4i$ có hai căn bậc hai là $2 + i$ và $-2 - i$.

c) Gọi $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là căn bậc hai của

$1 - \sqrt{3}\ i \Leftrightarrow (x + yi)^2 = 1 - \sqrt{3}\,i.$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 1 - \sqrt{3}\,i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 & (1) \\ 2xy = -\sqrt{3} & (2) \end{cases}$

$(2) \Rightarrow x \neq 0$ và $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2x}$.

$(1) \Rightarrow x^2 - \dfrac{3}{4x^2} = 1 \quad \Leftrightarrow 4x^4 - 4x^2 - 3 = 0\ x^2 = -\dfrac{1}{2}$ (loại) hoặc $x^2 = \dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Với $x = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2x} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Với $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy có hai căn bậc hai của $1 - \sqrt{3}i$ là $z = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ và $-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$.

d) Gọi $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là căn bậc hai của $-\dfrac{1}{4i}$

$$\Leftrightarrow z^2 = -\frac{1}{4i} \Leftrightarrow (x + yi)^2 = \frac{i^2}{4i}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = \frac{i}{4} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{8x} \\ x^2 - \dfrac{1}{64x^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{8x} \\ 64x^4 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{8x} \\ x^4 = \dfrac{1}{64} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{8x} \\ x^2 = \dfrac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{1}{8x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Vậy $-\dfrac{1}{4i}$ có hai căn bậc hai là $z = \dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}i$ và $z = -\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}i\right)$.

Nhận xét : mọi số phức đều có 2 căn bậc hai đối nhau.

Ví dụ 2

a) Tìm số phức z thoả mãn $z^2 = -164 + 48\sqrt{5}\,i$;

b) Tìm số phức w thoả mãn $w^4 = -164 + 48\sqrt{5}\,i$.

Giải

a) Đặt $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$, ta có :

$$z^2 = -164 + 48\sqrt{5}\,i \Leftrightarrow (x + yi)^2 = -164 + 48\sqrt{5}\,i$$
$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -164 + 48\sqrt{5}\,i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -164 & (1) \\ xy = 24\sqrt{5} & (2) \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow x \neq 0$ và $y = \dfrac{24\sqrt{5}}{x}$

(1) $\Rightarrow x^2 - \left(\dfrac{24\sqrt{5}}{x}\right)^2 = -164 \Leftrightarrow x^4 + 164x^2 - 2880 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = -180$ (loại) $\Leftrightarrow x^2 = 16$

$\Leftrightarrow x = \pm 4.$

Với $x = 4 \Rightarrow y = 6\sqrt{5}$.

Với $x = -4 \Rightarrow y = -6\sqrt{5}$.

Vậy có hai số phức z thoả mãn $z^2 = -164 + 48\sqrt{5}\,i$ là $z = 4 + 6\sqrt{5}\,i$ và $z = -4 - 6\sqrt{5}\,i$.

b) Ta có $z^2 = -164 + 48\sqrt{5}\,i$ và $w^4 = -164 + 48\sqrt{5}\,i$ suy ra

$$w^4 = z^2 \Leftrightarrow (w^2 - z)(w^2 + z) = 0 \Leftrightarrow w^2 = \pm z.$$

Theo kết quả trên ta có $z = \pm(4 + 6\sqrt{5}\,i) \Rightarrow w^2 = 4 + 6\sqrt{5}\,i$ hoặc

$$w^2 = -4 - 6\sqrt{5}\,i.$$

Đặt $w = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Trường hợp 1 : Với $w^2 = 4 + 6\sqrt{5}\,i$, ta có $(x + yi)^2 = 4 + 6\sqrt{5}\,i$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xy\,i = 4 + 6\sqrt{5}\,i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 4 & (1) \\ 2xy = 6\sqrt{5} & (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow x \neq 0$ và $y = \dfrac{3\sqrt{5}}{x}$

$(1) \Rightarrow x^2 - \left(\dfrac{3\sqrt{5}}{x}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - 45 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -5$ (loại) hoặc

$x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3.$

Với $x = 3 \Rightarrow y = \dfrac{3\sqrt{5}}{x} = \sqrt{5}$

Với $x = -3 \Rightarrow y = \dfrac{3\sqrt{5}}{x} = -\sqrt{5}$.

Vậy $w = \pm (3 + \sqrt{5}i)$.

Trường hợp 2 : Với $w^2 = -4 - 6\sqrt{5}i$, ta có $(x + yi)^2 = -4 - 6\sqrt{5}i$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -4 - 6\sqrt{5}i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -4 & (1) \\ 2xy = -6\sqrt{5} & (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow x \neq 0$ và $y = -\dfrac{3\sqrt{5}}{x}$

$(1) \Rightarrow x^2 - \left(-\dfrac{3\sqrt{5}}{x}\right)^2 = -4 \Leftrightarrow x^4 + 4x^2 - 45 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -9$ (loại) hoặc

$x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$.

Với $x = \sqrt{5} \Rightarrow y = -\dfrac{3\sqrt{5}}{x} = -3$

Với $x = -\sqrt{5} \Rightarrow y = -\dfrac{3\sqrt{5}}{x} = 3$.

Vậy $w = \pm (\sqrt{5} - 3i)$.

Kết luận : có 4 số phức w thoả mãn $w^4 = -164 + 48\sqrt{5}i$ là :

$w = \pm (3 + \sqrt{5}i)$ và $w = \pm (\sqrt{5} - 3i)$.

III. BÀI TẬP

1. Tính căn bậc hai của các số phức sau :

a) $-15 - 8i$; b) $1 + 4\sqrt{3}\,i$; c) -4 ; d) $-5 + 12i$.

2. a) Tính căn bậc hai của số phức $-23 - 4\sqrt{6}\,i$;

b) Tính căn bậc bốn của số phức $-23 - 4\sqrt{6}\,i$.

3. a) Tìm số phức z thoả mãn $z^4 = -1$;

b) Tìm số phức z thoả mãn $\left(\dfrac{z-1}{z+i}\right)^4 = -1$.

4. Giải phương trình :

a) $\left(\dfrac{z-1}{z+i}\right)^4 = 1$; b) $\left(\dfrac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$.

Vấn đề 2

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. PHƯƠNG PHÁP

1) Dùng hằng đẳng thức đưa phương trình về dạng $(Az + B)^2 - C^2 = 0$ và biến đổi tương đương thành phương trình tích

$$(Az + B + C)(Az + B - C) = 0.$$

2) Với phương trình $Az^2 + Bz + C = 0$:

Ta tính $\Delta = B^2 - 4AC$ và tính căn bậc hai của Δ.

Gọi δ là một căn bậc hai của Δ, suy ra nghiệm của phương trình là $z = \dfrac{-B \pm \delta}{2A}$.

3) Chú ý

a) Ta chứng minh được với mọi phương trình bậc hai *hệ số thực*, nếu $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$ và $y \neq 0$) là một nghiệm thì $\overline{z} = x - yi$ cũng là nghiệm của phương trình đó.

b) Do tính chất của phép nhân số phức, định lí Vi-ét vẫn đúng cho phương trình bậc hai với ẩn $z \in \mathbb{C}$. Do đó các cách tính nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai vẫn áp dụng được.

Chẳng hạn : $A + B + C = 0 \Rightarrow z = 1, z = \dfrac{C}{A}$

$$A - B + C = 0 \Rightarrow z = -1, z = -\frac{C}{A}.$$

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các phương trình bậc hai sau đây :

a) $z^2 + 4z - 5 = 0$;

b) $(2z - 1)^2 + 9 = 0$;

c) $z^2 - 8z + 16 - 2i = 0$;

d) $z^2 + 3z + \dfrac{25}{4} = 0$.

Giải

a) Phương trình : $z^2 + 4z - 5 = 0$ có các hệ số $A + B + C = 1 + 4 - 5 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm là $z_1 = 1$ và $z_2 = -5$.

b) Phương trình $(2z - 1)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow (2z - 1)^2 = -9 \Leftrightarrow (2z - 1)^2 = (3i)^2$

$\Leftrightarrow 2z - 1 = 3i$ hoặc $2z - 1 = -3i \Leftrightarrow z = \dfrac{1+3i}{2}$ hoặc $z = \dfrac{1-3i}{2}$.

c) Phương trình $z^2 - 8z + 16 - 2i = 0 \Leftrightarrow (z - 4)^2 = 2i$

$\Leftrightarrow (z - 4)^2 = (1 + i)^2$ (chú ý là $(1 + i)^2 = 1 + i^2 + 2i = 1 - 1 + 2i = 2i$)

$\Leftrightarrow z - 4 = 1 + i$ hoặc $z - 4 = -1 - i$

$\Leftrightarrow z = 5 + i$ hoặc $z = 3 - i$.

d) Phương trình $z^2 + 3z + \dfrac{25}{4} = 0$ có :

$\Delta = 3^2 - 4.\dfrac{25}{4} = -16 = (4i)^2$. Phương trình có hai nghiệm là $z = \dfrac{-3 \pm 4i}{2}$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình bậc hai hệ số phức sau đây :

a) $z^2 - 7z + 11 + 3i = 0$;

b) $z^2 + 2(1 - 2i)z - (7 + 4i) = 0$;

c) $z^2 - 2(2 - i)z + 6 - 8i = 0$;

d) $z^2 - (2 + i)z + i + 1 = 0$.

Giải

a) Phương trình $z^2 - 7z + 11 + 3i = 0$ có :

$\Delta = 49 - 44 - 12i = 5 - 12i$.

Đặt $\Delta = (x + yi)^2$; $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $(x + yi)^2 = 5 - 12i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 & (1) \\ 2xy = -12 & (2) \end{cases}$

(2) $\Rightarrow x \neq 0$ và $y = -\dfrac{6}{x}$

(1) $\Rightarrow x^2 - \dfrac{36}{x^2} = 5 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4$ (loại) hoặc $x^2 = 9$

$\Leftrightarrow x = \pm 3$.

Với $x = 3 \Rightarrow y = -2$

Với $x = -3 \Rightarrow y = 2$.

Vậy $\Delta = (3 - 2i)^2$.

Phương trình có hai nghiệm là :

$z_1 = \dfrac{7+3-2i}{2} = 5 - i$ và $z_2 = \dfrac{7-3+2i}{2} = 2 + i$.

b) Phương trình $z^2 + 2(1 - 2i)z - (7 + 4i) = 0$ có :

$\Delta' = (1 - 2i)^2 + 7 + 4i = 1 - 4 - 4i + 7 + 4i = 4$.

Phương trình có hai nghiệm là

$z_1 = -1 + 2i + 2 = 1 + 2i$ và $z_2 = -1 + 2i - 2 = -3 + 2i$.

c) Phương trình $z^2 - 2(2 - i)z + 6 - 8i = 0$ có :

$\Delta' = (2 - i)^2 - 6 + 8i = 4 - 1 - 4i - 6 + 8i = -3 + 4i$.

Đặt $-3 + 4i = (x + yi)^2$ $(x, y \in \mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & (1) \\ 2xy = 4 & (2) \end{cases}$

(2) $\Rightarrow x \neq 0$ và $y = \dfrac{2}{x}$

(1) $\Rightarrow x^2 - \dfrac{4}{x^2} = -3 \Leftrightarrow x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$ hoặc $x^2 = -4$ (loại)

$\Leftrightarrow x = \pm 1$.

Với $x = 1 \Rightarrow y = 2$

Với $x = -1 \Rightarrow y = -2$.

Vậy $\Delta' = -3 + 4i = (1 + 2i)^2$

Phương trình có hai nghiệm là $z_1 = 2 - i + 1 + 2i = 3 + i$ và

$z_2 = 2 - i - 1 - 2i = 1 - 3i$.

d) Phương trình $z^2 - (2 + i)z + i + 1 = 0$ có các hệ số thoả mãn

$a + b + c = 1 - 2 - i + i + 1 = 0$, suy ra phương trình có hai nghiệm là

$z_1 = 1$ và $z_2 = 1 + i$.

Ví dụ 3.

a) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai hệ số phức $Az^2 + Bz + C = 0$ $(A \neq 0)$.

Chứng minh rằng : $z_1 + z_2 = \dfrac{-B}{A}$ và $z_1.z_2 = \dfrac{C}{A}$.

Áp dụng 1 : Biết phương trình bậc hai $(1 - i)z^2 + Bz + C = 0$ có hai nghiệm là $z_1 = 2$ và $z_2 = 1 + 2i$. Tính B và C.

b) Cho hai số phức có tổng $z_1 + z_2 = S$ và tích $z_1.z_2 = P$. Chứng minh rằng z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai

$z^2 - Sz + P = 0$.

Áp dụng 2 : Tìm hai số phức có tổng bằng 4 và tích bằng $4 + 2i$.

Giải

a) Phương trình $Az^2 + Bz + C = 0$ có $\Delta = B^2 - 4AC$. Gọi δ là một căn bậc hai của Δ.

Phương trình có hai nghiệm là

$$z_1 = \frac{-B+\delta}{2A} \text{ và } z_2 = \frac{-B-\delta}{2A}.$$

Ta có $z_1 + z_2 = \dfrac{-B+\delta}{2A} + \dfrac{-B-\delta}{2A} = -\dfrac{B}{A}$

và $z_1.z_2 = \left(\dfrac{-B+\delta}{2A}\right)\left(\dfrac{-B-\delta}{2A}\right) = \dfrac{(-B)^2-\delta^2}{4A^2} = \dfrac{B^2-(B^2-4AC)}{4A^2} = \dfrac{C}{A}$.

Áp dụng 1 : $(1-i)z^2 + Bz + C = 0$ có hai nghiệm là $z_1 = 2$ và $z_2 = 1 + 2i$.

Áp dụng kết quả trên, ta có :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\dfrac{B}{A} \\ z_1.z_2 = \dfrac{C}{A} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+(1+2i) = \dfrac{-B}{1-i} & (1) \\ 2.(1+2i) = \dfrac{C}{1-i} & (2) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow B = (-1+i)(3+2i) = -3 + 2i^2 - 2i + 3i = -5 + i$

(2) $\Rightarrow C = (1-i)(2+4i) = 2 - 4i^2 - 2i + 4i = 6 + 2i$.

Vậy $B = -5 + i$ và $C = 6 + 2i$.

b) Hiển nhiên z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai

$(z - z_1)(z - z_2) = 0$

$\Leftrightarrow z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1.z_2 = 0$

$\Leftrightarrow z^2 - Sz + P = 0$.

Áp dụng 2: Gọi hai số phức phải tìm là z_1 và z_2. Theo giả thiết ta có

$$S = z_1 + z_2 = 4 \quad \text{và } P = z_1.z_2 = 4 + 2i.$$

Do đó z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai $z^2 - Sz + P = 0$ hay $z^2 - 4z + 4 + 2i = 0$.

Phương trình trên tương đương với $(z-2)^2 = -2i$

$\Leftrightarrow (z-2)^2 = (1-i)^2 \Leftrightarrow z - 2 = \pm\ (1-i)$

$\Leftrightarrow z = 2 + 1 - i = 3 - i$ hoặc $z = 2 - 1 + i = 1 + i$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $z_1 = 3 - i$ và $z_2 = 1 + i$.

Ví dụ 4. Cho phương trình bậc hai *hệ số thực* $Az^2 + Bz + C = 0$ (1), với $A \neq 0$.

a) Chứng minh rằng nếu phương trình (1) có 1 nghiệm thực z_1 thì nghiệm còn lại z_2 cũng là số thực.

b) Chứng minh rằng nếu phương trình (1) có 1 nghiệm z_0 không là số thực thì $\overline{z_0}$ cũng là 1 nghiệm.

Áp dụng : Tìm phương trình bậc hai hệ số thực biết phương trình có 1 nghiệm là $2 + i$.

Giải

a) Ta biết rằng phương trình bậc hai $Az^2 + Bz + C = 0$ (1) có hai nghiệm là z_1 và z_2.

Theo công thức Vi-ét ta có $z_1 + z_2 = -\dfrac{B}{A}$.

Vì $A, B \in \mathbb{R}$ nên $-\dfrac{B}{A} \in \mathbb{R}$ và ta cũng có $z_1 \in \mathbb{R}$. Vậy $z_2 \in \mathbb{R}$.

b) Ta có z_0 là nghiệm của phương trình $Az^2 + Bz + C = 0$ nên :

$Az_0^2 + Bz_0 + C = 0 \Rightarrow \overline{Az_0^2 + Bz_0 + C} = 0$ (vì liên hợp của số thực là chính số thực đó

suy ra $A\left(\overline{z_0}\right)^2 + B\overline{z_0} + C = 0$).

Vậy $\overline{z_0}$ cũng là nghiệm của phương trình $Az^2 + Bz + C = 0$.

Áp dụng :

Theo chứng minh trên, phương trình bậc hai *hệ số thực* có 1 nghiệm là $z_1 = 2 + i$ thì nghiệm kia là $z_2 = 2 - i$

Ta có $S = z_1 + z_2 = (2 + i) + (2 - i) = 4$

và $P = z_1.z_2 = (2 + i)(2 - i) = 4 - i^2 = 4 + 1 = 5$.

Vậy z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai : $z^2 - Sz + P = 0$ hay $z^2 - 4z + 5 = 0$.

III. BÀI TẬP

5. Giải các phương trình sau :

a) $z^2 - 4z + 13 = 0$; b) $z^2 - (5 + 2i)z + 5 + 5i = 0$.

6. Tìm phương trình bậc hai hệ số thực biết một nghiệm là $3 - 2i$.

7. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình :

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

a) Tính z_1, z_2 ; b) Chứng minh $z_1^2 = z_2$ và $z_2^2 = z_1$.

8. Tìm các số phức a và b sao cho phương trình $(2 + i)z^2 + az + b = 0$ có hai nghiệm là $z_1 = 3 + i$ và $z_2 = 1 - 2i$.

9. Giải các phương trình sau :

a) $z^2 + 2|z| = 0$; b) $z^2 + i|z| = 0$;

c) $iz^2 + |z| + 1 = 0$; d) $z^2 + \overline{z} = 0$.

Vấn đề 3

PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA
$Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0\ (A \neq 0)$

I. PHƯƠNG PHÁP

Theo định lí cơ bản của đại số, phương trình bậc ba có đúng 3 nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).

1) Để giải phương trình bậc ba tổng quát $Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0$ $(A \neq 0)$ (1), ta cần biết một nghiệm z_0 của phương trình. Khi đó phương trình (1) được biến đổi thành phương trình tích :

$$(1) \Leftrightarrow (z - z_0)(Az^2 + bz + c) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z - z_0 = 0 \\ Az^2 + bz + c = 0 \end{array}\right.$$

Muốn xác định $Az^2 + bz + c$, ta có thể dùng một trong hai cách sau :

Cách 1: Ta thực hiện phép chia đa thức $Az^3 + Bz^2 + Cz + D$ cho $z - z_0$, thương sẽ là $Az^2 + bz + c$.

Cách 2: Dùng sơ đồ Horner sau đây để xác định các hệ số A, b, c của đa thức thương $Az^2 + bz + c$.

	A	B	C	D
z_0	A	b	c	0

Dòng thứ nhất ghi các hệ số của đa thức bị chia, theo thứ tự A, B, C, D.

Dòng thứ hai sẽ xác định các hệ số của đa thức thương theo công thức sau :

Hệ số thứ nhất là A.

Hệ số thứ hai $b = z_0.A + B$ ("nhân ngang, cộng chéo").

Hệ số thứ ba $c = z_0.b + C$ ("nhân ngang, cộng chéo").

Hệ số cuối $d = z_0.c + D = 0$ (đây là số dư trong phép chia, vì chia hết nên d luôn luôn là 0).

2) Đôi khi ta có thể xác định z_0 bằng cách nhẩm nghiệm như sau :

Nếu $A + B + C + D = 0$ thì phương trình có 1 nghiệm là $z_0 = 1$.

Nếu $A - B + C - D = 0$ thì phương trình có 1 nghiệm là $z_0 = -1$.

3) Việc biến đổi thành phương trình tích có thể thực hiện dễ dàng nếu ta có thể đặt nhân tử chung.

4) Ta biết rằng nếu một phương trình đa thức *hệ số thực* có 1 nghiệm phức $z_0 = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$ và $y \neq 0$) thì $\overline{z_0} = x - yi$ cũng là 1 nghiệm. Như vậy :

* Mọi phương trình bậc 3 hệ số thực có ít nhất 1 nghiệm thực, nghĩa là

– hoặc có 3 nghiệm thực

– hoặc có 1 nghiệm thực và 2 nghiệm phức (không thực) liên hợp nhau.

* Muốn giải phương trình bậc 3 hệ số thực, ta thường phải tìm nghiệm thực của phương trình rồi biến đổi thành phương trình tích. Nghiệm thực này có thể tính chính xác nhờ máy tính bỏ túi (nếu là nghiệm hữu tỉ).

* Nếu biết phương trình bậc 3 hệ số thực $P(z) = 0$ có 1 nghiệm không là số thực z_0 thì $\overline{z_0}$ cũng là nghiệm, nên phương trình phải có dạng

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_0)(z - \overline{z_0}) = 0.$$

Chia $P(z)$ cho $(z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - (z_0 + \overline{z_0})z + z_0.\overline{z_0}$ sẽ tìm được thừa số $z - z_1$.

Như vậy phương trình có 3 nghiệm là z_0, $\overline{z_0}$ và z_1.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau :

a) $z^3 - (2 + i)z^2 + (2 + 2i)z - 2i = 0$ biết 1 nghiệm là $z_1 = i$;

b) $z^3 + 4z^2 + (4 + i)z + 3 + 3i = 0$ biết 1 nghiệm là $z_1 = -i$;

c) $z^3 - z^2 + (2 - 2i)z + 2 + 4i = 0$ biết 1 nghiệm là $z_1 = 1 - i$.

Giải

a) Chia đa thức $P(z) = z^3 - (2 + i)z^2 + (2 + 2i)z - 2i$ cho $z - i$

	1	$-2-i$	$2+2i$	$-2i$
$z_0 = i$	1	-2	2	0

Phương trình $z^3 - (2 + i)z^2 + (2 + 2i)z - 2i = 0 \Leftrightarrow (z - i)(z^2 - 2z + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} z - i = 0 & (1) \\ z^2 - 2z + 2 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\Leftrightarrow z = i$

(2) $\Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$

$\Delta' = 1 - 2 = -1 = i^2$

(2) $\Leftrightarrow z = 1 + i$ hoặc $z = 1 - i$.

Vậy phương trình có 3 nghiệm : $z_1 = i$, $z_2 = 1 + i$ và $z_3 = 1 - i$.

b) Chia đa thức $P(z) = z^3 + 4z^2 + (4 + i)z + 3 + 3i$ cho $z + i$

	1	4	4 + i	3 + 3i
$z_0 = -i$	1	4 – i	3 – 3i	0

Phương trình $z^3 + 4z^2 + (4 + i)z + 3 + 3i = 0$

$\Leftrightarrow (z + i)(z^2 + (4 - i)z + 3 - 3i) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} z + i = 0 & (1) \\ z^2 + (4 - i)z + 3 - 3i = 0 & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\Leftrightarrow z = -i$

(2) $\Leftrightarrow z^2 + (4 - i)z + 3 - 3i = 0$

$\Delta = (4 - i)^2 - 12 + 12i = 16 - 1 - 8i - 12 + 12i = 3 + 4i.$

Đặt $3 + 4i = (x + yi)2$, x và $y \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 3 + 4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & \text{(i)} \\ 2xy = 4 & \text{(ii)} \end{cases}$$

(ii) $\Rightarrow x \neq 0$ và $y = \dfrac{2}{x}$

(i) $\Rightarrow x^2 - \dfrac{4}{x^2} = 3 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = -1$ (loại) hoặc $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$

Với $x = 2 \Rightarrow y = 1$

Với $x = -2 \Rightarrow y = -1.$

Vậy $\Delta = (2 + i)^2$.

Phương trình $z^2 + (4 - i)z + 3 - 3i = 0$ có 2 nghiệm là

$$z = \frac{-4 + i + 2 + i}{2} = -1 + i \quad \text{và} \quad z = \frac{-4 + i - 2 - i}{2} = -3.$$

Vậy phương trình $z^3 + 4z^2 + (4 + i)z + 3 + 3i = 0$ có 3 nghiệm là :

$$z_1 = -i,\ z_2 = -1 + i \text{ và } z_3 = -3.$$

c) Chia đa thức $P(z) = z^3 - z^2 + (2 - 2i)z + 2 + 4i$ cho $z - (1 - i)$:

	1	-1	$2 - 2i$	$2 + 4i$
$z_0 = 1 - i$	1	$-i$	$1 - 3i$	0

Phương trình $z^3 - z^2 + (2 - 2i)z + 2 + 4i = 0$

$\Leftrightarrow (z - 1 + i)(z^2 - iz + 1 - 3i) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} z - 1 + i = 0 & (1) \\ z^2 - iz + 1 - 3i = 0 & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\Leftrightarrow z = 1 - i$

(2) $\Leftrightarrow z^2 - iz + 1 - 3i = 0$

$\Delta = i^2 - 4 + 12i = -5 + 12i.$

Đặt $-5 + 12i = (x + yi)^2$ với $x, y \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -5 + 12i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 & (i) \\ 2xy = 12 & (ii) \end{cases}$$

(ii) $\Leftrightarrow x \neq 0$ và $y = \dfrac{6}{x}$

(i) $\Leftrightarrow x^2 - \dfrac{36}{x^2} = -5 \Leftrightarrow x^4 + 5x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4$ hoặc $x^2 = -9$ (loại)

$\Leftrightarrow x = \pm 2.$

Với $x = 2 \Rightarrow y = 3$

Với $x = -2 \Rightarrow y = -3.$

Vậy $\Delta = (2 + 3i)^2.$

Phương trình (2) có 2 nghiệm là

$$z = \frac{i + 2 + 3i}{2} = 1 + 2i \text{ và } z = \frac{i - 2 - 3i}{2} = -1 - i.$$

Vậy phương trình $z^3 - z^2 + (2 - 2i)z + 2 + 4i = 0$ có 3 nghiệm là

$$z_1 = 1 - i,\ z_2 = 1 + 2i \text{ và } z_3 = -1 - i.$$

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau :

a) $z^3 - (1 + 2i)z^2 + 2(1 + i)z - 2 = 0$;

b) $z^3 - 2iz^2 + (2 - i)z + 3 + i = 0$;

c) $z^3 - (2 + i)z^2 + z - 2 - i = 0$.

Giải

a) Các hệ số của phương trình $z^3 - (1 + 2i)z^2 + 2(1 + i)z - 2 = 0$ thoả mãn :

$$A + B + C + D = 1 - 1 - 2i + 2(1 + i) - 2 = 0.$$

Vậy phương trình nhận $z = 1$ là nghiệm.

Chia đa thức $P(z) = z^3 - (1 + 2i)z^2 + 2(1 + i)z - 2$ cho $z - 1$:

	1	$-1-2i$	$2+2i$	-2
$z_0 = 1$	1	$-2i$	2	0

Phương trình $z^3 - (1 + 2i)z^2 + 2(1 + i)z - 2 = 0$ tương đương với

$$(z - 1)(z^2 - 2iz + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} z-1=0 & (1) \\ z^2-2iz+2=0 & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\Leftrightarrow$ $z = 1$

(2) $\Leftrightarrow$ $z^2 - 2iz + 2 = 0$.

$\Delta' = (-i)^2 - 2 = -1 - 2 = -3 = 3i^2$

Phương trình (2) có 2 nghiệm là $z = i \pm i\sqrt{3} = (1 \pm \sqrt{3})i$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là

$$z_1 = 1,\ z_2 = (1 + \sqrt{3})i \text{ và } z_3 = (1 - \sqrt{3})i$$

b) Các hệ số của phương trình $z^3 - 2iz^2 + (2 - i)z + 3 + i = 0$ thoả mãn :

$A - B + C - D = 1 + 2i + 2 - i - 3 - i = 0$ nên phương trình nhận $z = -1$ là 1 nghiệm.

Chia đa thức $P(z) = z^3 - 2iz^2 + (2 - i)z + 3 + i$ cho $z - (-1)$

	1	$-2i$	$2-i$	$3+i$
$z_0 = -1$	1	$-1-2i$	$3+i$	0

Phương trình $z^3 - 2iz^2 + (2 - i)z + 3 + i = 0$ tương đương với

$$(z + 1)[z^2 - (1 + 2i)z + 3 + i] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} z+1=0 & (1) \\ z^2-(1+2i)z+3+i=0 & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\Leftrightarrow$ $z = -1$

Vậy phương trình $z^3 + 4z^2 + (4 + i)z + 3 + 3i = 0$ có 3 nghiệm là :

$z_1 = -i$, $z_2 = -1 + i$ và $z_3 = -3$.

c) Chia đa thức $P(z) = z^3 - z^2 + (2 - 2i)z + 2 + 4i$ cho $z - (1 - i)$:

	1	−1	2 − 2i	2 + 4i
$z_0 = 1 - i$	1	$-i$	$1 - 3i$	0

Phương trình $z^3 - z^2 + (2 - 2i)z + 2 + 4i = 0$

$\Leftrightarrow (z - 1 + i)(z^2 - iz + 1 - 3i) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} z-1+i=0 & (1) \\ z^2-iz+1-3i=0 & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\Leftrightarrow z = 1 - i$

(2) $\Leftrightarrow z^2 - iz + 1 - 3i = 0$

$\Delta = i^2 - 4 + 12i = -5 + 12i$.

Đặt $-5 + 12i = (x + yi)^2$ với $x, y \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -5 + 12i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-5 & (i) \\ 2xy=12 & (ii) \end{cases}$$

(ii) $\Leftrightarrow x \neq 0$ và $y = \dfrac{6}{x}$

(i) $\Leftrightarrow x^2 - \dfrac{36}{x^2} = -5 \quad \Leftrightarrow x^4 + 5x^2 - 36 = 0 \quad \Leftrightarrow x^2 = 4$ hoặc $x^2 = -9$ (loại)

$\Leftrightarrow x = \pm 2$.

Với $x = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 3$

Với $x = -2 \quad \Rightarrow \quad y = -3$.

Vậy $\Delta = (2 + 3i)^2$.

Phương trình (2) có 2 nghiệm là

$$z = \frac{i+2+3i}{2} = 1+2i \text{ và } z = \frac{i-2-3i}{2} = -1-i.$$

Vậy phương trình $z^3 - z^2 + (2 - 2i)z + 2 + 4i = 0$ có 3 nghiệm là

$z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 + 2i$ và $z_3 = -1 - i$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau :

a) $z^3 - (1 + 2i)z^2 + 2(1 + i)z - 2 = 0$;

b) $z^3 - 2iz^2 + (2 - i)z + 3 + i = 0$;

c) $z^3 - (2 + i)z^2 + z - 2 - i = 0$.

Giải

a) Các hệ số của phương trình $z^3 - (1 + 2i)z^2 + 2(1 + i)z - 2 = 0$ thoả mãn :

$$A + B + C + D = 1 - 1 - 2i + 2(1 + i) - 2 = 0.$$

Vậy phương trình nhận $z = 1$ là nghiệm.

Chia đa thức $P(z) = z^3 - (1 + 2i)z^2 + 2(1 + i)z - 2$ cho $z - 1$:

	1	$-1-2i$	$2+2i$	-2
$z_0 = 1$	1	$-2i$	2	0

Phương trình $z^3 - (1 + 2i)z^2 + 2(1 + i)z - 2 = 0$ tương đương với

$$(z - 1)(z^2 - 2iz + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} z-1=0 & (1) \\ z^2-2iz+2=0 & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\Leftrightarrow$ $z = 1$

(2) $\Leftrightarrow$ $z^2 - 2iz + 2 = 0$.

$\Delta' = (-i)^2 - 2 = -1 - 2 = -3 = 3i^2$

Phương trình (2) có 2 nghiệm là $z = i \pm i\sqrt{3} = (1 \pm \sqrt{3})i$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là

$$z_1 = 1, z_2 = (1 + \sqrt{3})i \text{ và } z_3 = (1 - \sqrt{3})i$$

b) Các hệ số của phương trình $z^3 - 2iz^2 + (2 - i)z + 3 + i = 0$ thoả mãn :

$A - B + C - D = 1 + 2i + 2 - i - 3 - i = 0$ nên phương trình nhận $z = -1$ là 1 nghiệm.

Chia đa thức $P(z) = z^3 - 2iz^2 + (2 - i)z + 3 + i$ cho $z - (-1)$

	1	$-2i$	$2-i$	$3+i$
$z_0 = -1$	1	$-1-2i$	$3+i$	0

Phương trình $z^3 - 2iz^2 + (2 - i)z + 3 + i = 0$ tương đương với

$$(z + 1)[z^2 - (1 + 2i)z + 3 + i] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} z+1=0 & (1) \\ z^2-(1+2i)z+3+i=0 & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\Leftrightarrow$ $z = -1$

(2) $\Leftrightarrow$ $z^2 - (1 + 2i)z + 3 + i = 0$.

$\Delta = (1 + 2i)^2 - 12 - 4i = 1 - 4 + 4i - 12 - 4i = -15$.

Phương trình (2) có 2 nghiệm là : $z = \dfrac{1+2i+\sqrt{15}\,i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(2+\sqrt{15}\right)i$ hoặc

$z = \dfrac{1+2i-\sqrt{15}\,i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(2-\sqrt{15}\right)i$.

Kết luận : Phương trình $z^3 - 2iz^2 + (2 - i)z + 3 + i = 0$ có 3 nghiệm là :

$z_1 = -1,\ z_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(2+\sqrt{15}\right)i$ và $z_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(2-\sqrt{15}\right)i$.

c) Phương trình $z^3 - (2 + i)z^2 + z - 2 - i = 0$ tương đương với

$z^2(z - 2 - i) + z - 2 - i = 0$

$\Leftrightarrow$ $(z - 2 - i)(z^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow$ $z - 2 - i = 0$ hoặc $z^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow$ $z = 2 + i$ hoặc $z^2 = -1$

$\Leftrightarrow$ $z = 2 + i$ hoặc $z = \pm i$.

Vậy phương trình $z^3 - (2 + i)z^2 + z - 2 - i = 0$ có 3 nghiệm là

$z_1 = 2 + i$, $z_2 = i$ và $z_3 = -i$.

III. BÀI TẬP

10. Giải các phương trình :

a) $z^3 - (1 + i)z^2 + az + b - 4i = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ và biết phương trình có 1 nghiệm là $z = 1 + i$.

b) $z^3 + aiz^2 + (i - b)z - 2 - 2i = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ và biết phương trình có 1 nghiệm là $z = 1 - i$.

11. Giải các phương trình :

a) $2z^3 + 9z^2 + 14z + 5 = 0$;

b) $z^3 - 7z^2 + 17z - 15 = 0$;

c) $z^3 - (6 + \sqrt{2})z^2 + (13 + 6\sqrt{2})z - 13\sqrt{2} = 0$ biết phương trình có 1 nghiệm là $z_1 = 3 - 2i$.

12. Giải các phương trình :

a) $z^3 - 2z^2 + 25z + b = 0$, $b \in \mathbb{R}$ và biết phương trình có nghiệm thuần ảo.

b) $z^3 + bz^2 + (9 - i)z - 6 + 2i = 0$, $b \in \mathbb{R}$ và biết phương trình có nghiệm thực.

Vấn đề 4

PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN
$Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E = 0 \ (A \neq 0)$

I. PHƯƠNG PHÁP

1) Với dạng phương trình trùng phương, ta đặt $w = z^2$, sẽ đưa về phương trình bậc hai theo w. Giải phương trình này, tính w rồi lại giải phương trình $w = z^2$ để tính z.

2) Nếu $A + B + C + D + E = 0$ thì phương trình $Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E = 0$ có 1 nghiệm là $z = 1$. Chia $P(z) = Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E$ cho $z - 1$, phương trình $P(z) = 0$ tương đương với phương trình $(z - 1)(Az^3 + bz^2 + cz + d) = 0$.

3) Nếu $A - B + C - D + E = 0$ thì phương trình $Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E = 0$ có 1 nghiệm là $z = -1$. Chia $P(z) = Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E$ cho $z + 1$, phương trình $P(z) = 0$ tương đương với phương trình $(z + 1)(Az^3 + bz^2 + cz + d) = 0$.

Như vậy ta nên viết các hệ số của phương trình để xem phương trình có rơi vào hai trường hợp đặc biệt này không.

4) Trường hợp phương trình *hệ số thực*, nếu biết 1 nghiệm z_0 (không là số thực) thì $\overline{z_0}$ cũng là nghiệm. Do đó phương trình có dạng

$$(z - z_0)(z - \overline{z_0})(Az^2 + bz + c) = 0.$$

Khai triển phương trình này và đồng nhất với phương trình đã cho sẽ tìm được hệ số b và c.

Giải phương trình : $Az^2 + bz + c = 0$ ta được hai nghiệm z_1, z_2.

Như vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là : z_0, $\overline{z_0}$, z_1 và z_2.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các phương trình :

a) $z^4 + 4z^2 - 5 = 0$; b) $z^4 - (8 + 8i)z^2 + 63 + 16i = 0$;

c) $iz^4 + 2(1 + 2i)z^2 + 8 = 0$.

Giải

a) Phương trình : $z^4 + 4z^2 - 5 = 0$ ta coi là phương trình bậc hai theo z^2, phương trình có hai nghiệm là $z^2 = 1$ hoặc $z^2 = -5 = 5i^2$

$\Leftrightarrow$ $z = \pm 1$ hoặc $z = \pm\sqrt{5}\,i$.

b) Đặt $w = z^2$, phương trình : $z^4 - (8 + 8i)z^2 + 63 + 16i = 0$ (1) trở thành

$w^2 - (8 + 8i)w + 63 + 16i = 0$

$\Leftrightarrow$ $w^2 - 2(4 + 4i)w + 63 + 16i = 0$ (2)

$\Delta' = (4 + 4i)^2 - 63 - 16i = 32i - 63 - 16i = -63 + 16i = (1 + 8i)^2$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} w = 4 + 4i + 1 + 8i = 5 + 12i \\ w = 4 + 4i - 1 - 8i = 3 - 4i \end{array}\right.$

Với $w = 5 + 12i$ $\Leftrightarrow$ $z^2 = 5 + 12i = (3 + 2i)^2$ $\Leftrightarrow$ $z = \pm(3 + 2i)$

Với $w = 3 - 4i$ $\Leftrightarrow$ $z^2 = 3 - 4i = (2 - i)^2$ $\Leftrightarrow$ $z = \pm(2 - i)$.

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm là : $z = \pm(3 + 2i)$ và $z = \pm(2 - i)$.

c) $iz^4 + 2(1 + 2i)z^2 + 8 = 0$ (1)

Đặt $w = z^2$, phương trình $iz^4 + 2(1 + 2i)z^2 + 8 = 0$ trở thành

$iw^2 + 2(1 + 2i)w + 8 = 0$ (2)

$\Delta' = (1 + 2i)^2 - 8i = 1 + 4i^2 + 4i - 8i = 1 + 4i^2 - 4i = (1 - 2i)^2$

Phương trình (2) có 2 nghiệm là : $w_1 = \dfrac{-1 - 2i + 1 - 2i}{i} = -4$

và $w_2 = \dfrac{-1 - 2i - 1 + 2i}{i} = -\dfrac{2}{i} = -\dfrac{2i}{i^2} = 2i$.

Với $w = -4$ $\Leftrightarrow$ $z^2 = 4i^2$ $\Leftrightarrow$ $z = \pm 2i$

Với $w = 2i$ $\Leftrightarrow$ $z^2 = (1 + i)^2$ $\Leftrightarrow$ $z = \pm(1 + i)$.

Vậy phương trình $iz^4 + 2(1 + 2i)z^2 + 8 = 0$ có 4 nghiệm là : $z = \pm 2i$ và $z = \pm(1 + i)$.

Ví dụ 2. Cho phương trình bậc bốn *hệ số thực*

$$P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 + mz + 20 = 0,\ m \in \mathbb{R}.$$

Biết phương trình có một nghiệm $z_1 = -2i$. Tính m và các nghiệm còn lại.

Giải

Ta có $z_1 = -2i$ là nghiệm của phương trình : $z^4 - 4z^3 + 9z^2 + mz + 20 = 0$

$\Leftrightarrow$ $(-2i)^4 - 4(-2i)^3 + 9(-2i)^2 + m(-2i) + 20 = 0$

$\Leftrightarrow$ $16 - 32i - 36 - 2mi + 20 = 0$

$\Leftrightarrow$ $(-32 - 2m)i = 0$

$\Leftrightarrow$ m = –16.

Phương trình trở thành $P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 16z + 20 = 0$ (1)

Ta biết rằng nếu một phương trình đa thức *hệ số thực* nhận z_1 là một nghiệm phức, không thực, $z_1 = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$) thì $\overline{z_1} = x - yi$ cũng là nghiệm của phương trình. Như vậy phương trình nhận 2 nghiệm là $z_1 = -2i$ và $z_2 = 2i$. Do đó phương trình (1) phải có dạng :

$$P(z) = (z - 2i)(z + 2i)(z^2 + az + b) = 0 \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow P(z) = (z^2 + 4)(z^2 + az + b) = 0$$

$$\Leftrightarrow P(z) = z^4 + az^3 + (b + 4)z^2 + 4az + 4b = 0 \qquad (2)$$

Đồng nhất hệ số của hai phương trình (1) và (2) ta được $a = -4$ và $b = 5$.

Vậy phương trình $P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 16z + 20 = 0$

$$\Leftrightarrow (z^2 + 4)(z^2 - 4z + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 + 4 = 0 \\ z^2 - 4z + 5 = 0 \end{array}\right.$$

$$z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -4 \Leftrightarrow z = \pm 2i$$

$$z^2 - 4z + 5 = 0 \quad (\Delta' = 4 - 5 = -1 = i^2)$$

$$\Leftrightarrow z = 2 \pm i.$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm : $z = \pm 2i$ và $z = 2 \pm i$.

III. BÀI TẬP

13. Giải phương trình sau biết phương trình có nghiệm thực :

$$P(z) = z^4 + z^3 - (3 + i)z^2 - 4z + 4i - 4 = 0.$$

14. Giải phương trình sau, biết phương trình có nghiệm thuần ảo :

$$P(z) = z^4 + 2iz^3 - z^2 + 2iz - 2 = 0.$$

15. Giải phương trình : $z^4 - 3z^3 + (2 - i)z^2 + 3z - 3 + i = 0$ (1)