Mục lục

Đồng Nai, năm 2012,
Sắp chữ bằng LaTeX bởi Trần Văn Toàn,
Giáo viên trường THPT chuyên Lương Thế Vinh,
Biên Hoà, Đồng Nai.

Chương 1

Một số bài tập bổ sung

1.1 Khảo sát hàm số

Cho hàm số
$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2. \tag{1.1}$$

1) Khảo sát và và vẽ đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số.

2) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(\mathscr{C})$ tại điểm M biết điểm M cùng với hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $(\mathscr{C})$ tạo thành tam giác có diện tích bằng 6.

   Cách 1. Hai điểm cực trị của $(\mathscr{C})$ là $A(1;2)$, $B(3;-2)$. Đặt $M(a;a^3 - 6a^2 + 9a - 2)$.

   Đặt tam giác ABM vào không gian toạ độ $Oxyz$, khi đó
   $$A(1;2;0), \quad B(3;-2;0), \quad M(a;a^3 - 6a^2 + 9a - 2;0).$$

   Sử dụng công thức tính diện tích tam giác trong không gian toạ độ, ta tính được
   $$S_{ABM} = \frac{1}{2}|2a^3 - 12a^2 + 22a - 12|.$$

   Giải phương trình $S_{ABM} = 6$, ta tìm được $a = 4$ hoặc $a = 0$.

   Với $a = 4$, ta có $M(4;2)$. Phương trình tiếp tuyến tại M là $y = 9x - 34$.

   Với $a = 0$, ta có $M(0;-2)$. Phương trình tiếp tuyến tại M là $y = 9x - 2$.

- Giả sử hai điểm cực trị của $(\mathscr{C})$ là $A(1;2)$, $B(3;-2)$. Ta có $AB = 2\sqrt{5}$. Phương trình đường thẳng AB là $2x + y - 4 = 0$.
- Gọi h là khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng AB, ta có

$$S_{MAB} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot AB \Leftrightarrow h = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

Như vậy, M sẽ thuộc đường thẳng song song và cách đường thẳng AB một khoảng bằng $h = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$. Phương trình các đường thẳng này là

$$2x + y + 2 = 0, \quad 2x + y - 10 = 0.$$

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2, \\ 2x + y + 2 = 0, \end{cases}$$

ta được $M(0;-2)$. Phương trình tiếp tuyến tại M là $y = 9x - 2$.
Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2, \\ 2x + y - 10 = 0, \end{cases}$$

ta được $M(4;2)$. Phương trình tiếp tuyến tại M là $y = 9x - 34$.

Bài tập 1.1. Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{x-1}$ có đồ thị $(\mathscr{H})$. Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng $(d_m): y = -x + m$ luôn cắt đồ thị $(\mathscr{H})$ tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm m để các tiếp tuyến của $(\mathscr{H})$ tại A, B tạo với nhau một góc α thoả $\cos\alpha = \dfrac{8}{17}$.

Bài tập 1.2. Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-2}$ có đồ thị $(\mathscr{H})$. Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng $y = 2x + m$ luôn cắt đồ thị $(\mathscr{H})$ tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi d_1, d_2 là các tiếp tuyến với $(\mathscr{H})$ tại A và B. Tìm m để $I(2;1)$ cách đều d_1, d_2.

Bài tập 1.3. Cho hàm số

$$y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx - 3m + 4$$

có đồ thị là $(\mathscr{C})$. Gọi Δ là tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại điểm A có hoành độ bằng 1. Tìm m để tiếp tuyến Δ cắt $(\mathscr{C})$ tại điểm B khác A sao cho tam giác OAB cân tại O (O là gốc toạ độ)

Bài tập 1.4. Cho hàm số

$$y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x - m^3 + m$$

có đồ thị là (C_m). Chứng minh rằng hàm số đã cho luôn có cực đại và cực tiểu với mọi giá trị của m. Tìm m để các điểm cực trị của đồ thị hàm số (C_m) cùng với điểm $I(1;1)$ lập thành một tam giác nội tiếp trong một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$.

Bài tập 1.5. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là $(\mathscr{C})$. Tìm trên $(\mathscr{C})$ điểm A sao cho khoảng cách từ A đến $B(2;-4)$ là nhỏ nhất.

Bài tập 1.6. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị là $(\mathscr{C})$. Viết phương trình đường thẳng d cắt $(\mathscr{C})$ tại ba điểm $A(2;4)$, B, C sao cho gốc toạ độ O nằm trên đường tròn đường kính BC.

Bài tập 1.7. Cho hàm số $y = \dfrac{3x+1}{x-1}$ có đồ thị là $(\mathscr{C})$. Viết phương trình đường thẳng (d) cắt $(\mathscr{C})$ tại hai điểm phân biệt C, D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành, biết $A(-1;2)$ và $B(-6;3)$.

Bài tập 1.8. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là $(\mathscr{C})$. Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của $(\mathscr{C})$. Với giá trị nào của m, đường thẳng $y = -x+m$ cắt $(\mathscr{C})$ tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác IAB là tam giác đều?

Bài tập 1.9. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị là $(\mathscr{C})$. Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Tìm trên đồ thị $(\mathscr{C})$ hai điểm A và B sao cho tam giác IAB nhận điểm $H(4;-2)$ làm trực tâm.

Bài tập 1.10. Cho hàm số $y = \dfrac{mx+2}{x-1}$ $\quad (Cm)$, m là tham số thực. Cho hai điểm $A(-3;4)$ và $B(3;-2)$. Tìm m để trên đồ thị (C_m) có hai điểmP, Q cách đều hai điểm A, B và diện tích tứ giác $APBQ$ bằng 24.

Bài tập 1.11. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2-(m+1)x+2m-1}{x-2}$ (C_m), m là tham số thực.

Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng $y = 2x-4$ luôn cắt đồ thị (C_m) tại hai điểm phân biệt A và B. Tìm m sao cho tam giác OAB có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\dfrac{5\sqrt{13}}{8}$, trong đó O là gốc tọa độ.

Bài tập 1.12. Cho hàm số

$$y = x^4 - 3(m+1)x^2 + 3m + 2$$

có đồ thị là (C_m). Giả sử đồ thị hàm số (C_m)cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt. Khi $m > 0$ gọi A là giao điểm có hoành độ lớn nhất. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C_m) tại A cắt trục Oy tại B. Tìm m để tam giác OAB có diện tích bằng 24

Bài tập 1.13. Cho hàm số

$$y = x^3 + 3x^2 + mx + m$$

có đồ thị là (Cm). Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $I(-1;2)$ với hệ số góc $-m$ cắt đồ thị hàm số (Cm) tại ba điểm phân biệt A, B, I. Chứng minh rằng các tiếp tuyến của đồ thị hàm số (Cm) tại A và B song song với nhau.

Bài tập 1.14. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị là $(\mathscr{C})$. Tìm các điểm M thuộc $(\mathscr{C})$ sao cho tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại M cắt $(\mathscr{C})$ tại điểm N thoả mãn $MN = \sqrt{26}$.

Bài tập 1.15. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-4}{4x+3}$ có đồ thị là $(\mathscr{C})$. Viết phương trình các tiếp tuyến tại các điểm A thuộc $(\mathscr{C})$ biết tiếp tuyến cắt trục hoành tại B sao cho tam giác OAB cân tại A.

Bài tập 1.16. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị là $(\mathscr{C})$ và hai điểm $A(0;4)$, $B\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{9}{4}\right)$. Tìm toạ độ điểm M thuộc $(\mathscr{C})$ sao cho tam giác ABM cân tại M.

Bài tập 1.17. Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 2$ có đồ thị là $(\mathscr{C})$. Tìm số thực a dương để đường thẳng $y = a$ cắt $(\mathscr{C})$ tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB vuông tại gốc toạ độ.

1.2 Phương trình, bất phương trình, hệ phương trình

1.2.1 Phương trình

Bài tập 1.18. Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{x+1}\cdot(3x^2+x+1)=x^3+3x^2+3x;$

2) $\sqrt{1-x}\cdot(3x^2-x+1)=x^3-3x^2+3x$

Bài tập 1.19. Giải các phương trình sau:

1) $2-\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}=\sqrt{x+7};$

2) $3-\sqrt{\dfrac{x+1}{x-6}}=\sqrt{x+11}.$

Bài tập 1.20. Giải các phương trình sau:

1) $2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1};$ Đáp số. $\{4+\sqrt{6};4-\sqrt{6}\}$.

2) $x^2+2x+4=3\sqrt{x^3+4x};$ Đáp số. $\{2\}$.

3) $x^2-4x-2=2\sqrt{x^3+1};$ Đáp số. $\{5+\sqrt{33};5-\sqrt{33}\}$.

4) $2(x^2-3x+2)=3\sqrt{x^3+8};$ Đáp số. $\{3+\sqrt{13};3-\sqrt{13}\}$.

5) $2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}.$ Đáp số. $\left\{\dfrac{5+\sqrt{37}}{2};\dfrac{5-\sqrt{37}}{2}\right\}$.

Bài tập 1.21. Giải phương trình $\sqrt{2\left(x^4+4\right)}=3x^2-10x+6.$

Bài tập 1.22. Giải phương trình $4x^2-6x+1=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{16x^4+4x^2+1}.$

Bài tập 1.23. Giải phương trình $7x^2-10x+14=5\sqrt{x^4+4}.$

Bài tập 1.24. Giải phương trình $x^2-7x+1=4\sqrt{x^4+x^2+1}.$

Bài tập 1.25. Giải phương trình $3-x=\dfrac{2x^2-9x+17}{\sqrt{2x^2-6x+16}+\sqrt{3x-1}}.$

Bài tập 1.26. Giải phương trình $x^2-(x+2)\sqrt{x-1}=x-2.$

Bài tập 1.27. Giải phương trình $x+4-2\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}=0.$

Bài tập 1.28. Giải phương trình $2(x-2)\left(\sqrt[3]{4x-4}+\sqrt{2x-2}\right)=3x-1.$

Bài tập 1.29. Giải phương trình $(3x-5)\sqrt{2x^2-3}=4x^2-6x+1.$

Bài tập 1.30. Giải phương trình $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}.$

Bài tập 1.31. Giải phương trình $\dfrac{x+2}{x+\sqrt{3x^4-11x^2+9}}=\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2-3}.$

Bài tập 1.32. Giải phương trình $\sqrt{\dfrac{1+2x\cdot\sqrt{1-x^2}}{2}}=1-2x^2.$

Bài tập 1.33. Giải phương trình

$$\sqrt{6x^2-40x+150}-\sqrt{4x^2-60x+100}=2x-10.$$

Bài tập 1.34. Giải phương trình

$$\sqrt{3x^2-18x+25}+\sqrt{4x^2-24x+29}=6x-x^2-4.$$

Bài tập 1.35. Giải phương trình $x-1+\sqrt{x+1}+\sqrt{2-x}=x^2+\sqrt{2}.$

Bài tập 1.36. Giải phương trình

$$x^2+(2x+3)\cdot\sqrt{3x^2+6x+2}=6x+5.$$

Bài tập 1.37. Giải phương trình

$$\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}.$$

Bài tập 1.38. (Dự bị khối B, 2010) Giải phương trình

$$8x^2-8x+3=8x\cdot\sqrt{2x^2-3x+1}.$$

Bài tập 1.39. Giải phương trình sau trên tập số thực:

$$(3x+1)\sqrt{2x^2-1}=5x^2+\frac{3}{2}x-3.$$

Bài tập 1.40. Giải phương trình

$$x^4+4x^3+5x^2+2x-10=12\sqrt{x^2+2x+5}.$$

Bài tập 1.41. Giải phương trình

$$(x+2)\sqrt{x^2-2x+5}=x^2+5.$$

Bài tập 1.42. Giải phương trình

$$\sqrt{(x+4)(2x+3)}-3\sqrt{x+8}=4-\sqrt{(x+8)(2x+3)}+3\sqrt{x+4}.$$

Bài tập 1.43. Giải phương trình

$$\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}}-\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x+3}.$$

Bài tập 1.44. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x^3+6x^2-6x-1}=\sqrt{x^2+4x+1}.$$

Bài tập 1.45. Giải phương trình

$$\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{2x^2+x+1}=\left(x^2-1\right)\sqrt{3x^2+2x+3}.$$

Bài tập 1.46. Giải phương trình

$$x-2\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}+\sqrt{x^2-x}=0.$$

Bài tập 1.47. Giải phương trình

$$8\log_{\frac{1}{2}}\frac{(x-1)^2}{2x+1}=x^2-18x-31$$

Bài tập 1.48. Giải phương trình

$$4\cdot\sqrt{4-x^2}+12x\cdot\sqrt{4-x^2}=5x^2+6x+8.$$

Bài tập 1.49. Giải phương trình

$$\sqrt{x}+\sqrt[4]{x(1-x)^2}+\sqrt[4]{(1-x)^3}=\sqrt{1-x}+\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2(1-x)}.$$

Bài tập 1.50. Giải phương trình

$$2(2x-3)\left(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}\right)=3x-2.$$

Bài tập 1.51. Giải phương trình

$$\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}=\frac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}.$$

Bài tập 1.52. Giải phương trình sau

$$\sqrt[3]{12x^2+22x-49}-\sqrt[3]{x^3-3x^2-2x+5}=2x.$$

Bài tập 1.53. Giải phương trình

$$x^3+9x^2-156x-40(x+2)\sqrt{5x+4}-144=0.$$

Bài tập 1.54. Giải phương trình

$$5\sqrt{x^2-1}+5\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}=3x-1.$$

Bài tập 1.55. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}-(x-4)\sqrt{x-7}-3x+28=0.$$

Bài tập 1.56. Giải phương trình

$$x^3+2x-3-(2x-1)\sqrt{x^2-x+3}=0.$$

Bài tập 1.57. Giải phương trình

$$2x^2-3x-(2x+1)\sqrt{x^2-4x+3}-3=0.$$

Bài tập 1.58. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x^2+4}=\sqrt{x-1}+2x-3.$$

Bài tập 1.59. Giải phương trình

$$\frac{6-2x}{\sqrt{5-x}}+\frac{6+2x}{\sqrt{5+x}}=\frac{8}{3}.$$

Bài tập 1.60. Giải phương trình

$$x^2+5x+2=4\sqrt{x^3+3x^2+x-1}.$$

Bài tập 1.61. Tìm tất cả các nghiệm thực của phương trình sau

$$x(2x+7)-4\sqrt{2x^2+9x+10}+10=(3x+2)\left(2\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+5}\right).$$

Bài tập 1.62. Giải phương trình

$$2\cdot 9^x+\left(4x-39-\sqrt{3^x+16}\right)\cdot 3^x-(2x-13)\cdot\left(13+\sqrt{3^x+16}\right)=0.$$

Bài tập 1.63. Giải phương trình

$$x^3-1=\sqrt{x}(-3x^2+5x-3).$$

Bài tập 1.64. Giải phương trình

$$\frac{1}{\sqrt{8x^3-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^3+3x^2+3x}}=x-1.$$

Bài tập 1.65. Giải phương trình

$$\frac{1}{\sqrt{8x^3-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^3+3x^2+3x}}=x^3-1.$$

Bài tập 1.66. Giải phương trình

$$\frac{\sqrt{x^2+x+2}}{1+\sqrt{2-x-x^2}}-\frac{\sqrt{x^2-x}}{1+\sqrt{4+x-x^2}}=x^2-1.$$

Bài tập 1.67. Giải phương trình

$$(\sqrt{x+1}+1)^3=\sqrt{x^3+2}.$$

Bài tập 1.68. Giải phương trình

$$x^2-1=2x\sqrt{x^2-2x}.$$

Bài tập 1.69. Giải phương trình

$$2(\sqrt{2x^2+1}-1)=x(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}).$$

Bài tập 1.70. Giải phương trình

$$3(3x-x^2-1)\cdot\sqrt{x^2-2x}=x^3-4x^2+4x-1.$$

Bài tập 1.71. Giải phương trình

$$15x^2+2(x+1)\sqrt{x+2}=2-5x.$$

Bài tập 1.72. Giải phương trình

$$5x^2+28x+24=(3x^2+4x+8)\cdot\sqrt{2x+1}.$$

Bài tập 1.73. Giải phương trình

$$\sqrt{x+1}+x+3=\sqrt{1-x}+3\sqrt{1-x^2}.$$

Bài tập 1.74. Giải phương trình

$$2(2\cdot\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2})-\sqrt{1-x^4}=3x^2+1.$$

Bài tập 1.75. Giải phương trình

$$(4x+2)\cdot\sqrt{x+1}-(4x-2)\cdot\sqrt{x-1}=9.$$

Bài tập 1.76. Giải phương trình

$$(4x+1)\cdot\sqrt{x+2}-(4x-1)\cdot\sqrt{x-2}=21.$$

Bài tập 1.77. Giải phương trình sau:

$$(13-4x)\sqrt{2x-3}+(4x-3)\sqrt{5-2x}=2+8\sqrt{16x-4x^2-15}.$$

Bài tập 1.78. Giải phương trình

$$(9x-2)\cdot\sqrt{3x-1}+(10-9x)\cdot\sqrt{3-3x}-4\sqrt{-9x^2+12x-3}=4.$$

Bài tập 1.79*. Giải phương trình

$$7(x-2)\cdot\sqrt{2x-1}+(11-8x)\cdot\sqrt{4-x}+2x+6=5\cdot\sqrt{-2x^2+9x-4}.$$

Bài tập 1.80*. Giải phương trình

$$(x+2)\cdot\sqrt{x+1}-(4x+5)\cdot\sqrt{2x+3}=-6x-23.$$

Bài tập 1.81*. Giải phương trình

$$(6x-5)\sqrt{x+1}-(6x+2)\sqrt{x-1}+4\sqrt{x^2-1}=4x-3.$$

Bài tập 1.82*. Giải phương trình

$$(x+1)\cdot\sqrt{x+2}+(x+6)\cdot\sqrt{x+7}=(x+3)\cdot(x+4).$$

Bài tập 1.83. Giải phương trình

$$(2x-6)\sqrt{x+4}-(x-5)\sqrt{2x+3}=3(x-1).$$

Bài tập 1.84. Giải phương trình:

$$10x^2+3x-2(3x+1)\sqrt{2x^2-1}-6=0.$$

Bài tập 1.85. Giải phương trình

$$\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}.$$

Bài tập 1.86. Giải phương trình

$$8x^2-13x+7=(1+\frac{1}{x})\sqrt[3]{3x^2-2}.$$

Bài tập 1.87. Giải phương trình

$$\sqrt[4]{x^2+x+15}=1+\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}.$$

Bài tập 1.88. Giải phương trình

$$2(x^2+x-1)^2+2x^2+2x=3+\sqrt{4x+5}.$$

Bài tập 1.89. Giải phương trình

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{5x+6}+2\sqrt{8x+9}=4x^2.$$

Bài tập 1.90. Giải phương trình :

$$\sqrt{1-2x}+\sqrt{4-3x}=\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{2x^2-2x+9}.$$

Bài tập 1.91. Giải phương trình $(4x^3-x+3)^3-x^3=\dfrac{3}{2}$.

Bài tập 1.92. Giải phương trình $16x^4-24x^2+8\sqrt{3-4x}-3=0$.

Bài tập 1.93. Giải phương trình

$$7\cdot\sqrt{3x-5}+(4x-7)\cdot\sqrt{7-x}=24.$$

Bài tập 1.94. Giải phương trình

$$\sqrt{\frac{x}{2}-\frac{22}{21}}-\sqrt[3]{x^3-3x^2+\frac{23}{7}}=1.$$

Bài tập 1.95. Giải phương trình

$$1+\sqrt{1+8x^2-6x\cdot\sqrt{1-x^2}}=10x^2.$$

Bài tập 1.96. Giải phương trình $\sqrt{x}-2\sqrt{5x-x^2-1+\sqrt{5-x}}=-2$.

Bài tập 1.97. Giải phương trình $(x+2)(x^2-\sqrt{x^2+x+2})=x+1$.

Bài tập 1.98. Giải phương trình $x^3-3x+1=\sqrt{8-3x^2}$.

Bài tập 1.99. Giải phương trình $\sqrt[3]{162x^3+2}-\sqrt{27x^2-9x+1}=1$.

Bài tập 1.100. Giải phương trình

$$\sqrt{x+1}+x+3=\sqrt{1-x}+3\sqrt{1-x^2}.$$

Bài tập 1.101. Giải phương trình

$$2x+1+x\sqrt{x^2+2}+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=0.$$

Bài tập 1.102. Giải phương trình $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=x(1+2\sqrt{1-x^2})$.

Bài tập 1.103. Giải phương trình

$$\sqrt{1-2x}+\sqrt{4-3x}=\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{2x^2-2x+9}.$$

Bài tập 1.104. Giải phương trình $\dfrac{4}{\sqrt{x}} + 9\sqrt{x-1} = 5\sqrt{x} + 2\sqrt{4x-1}$.

Bài tập 1.105. Giải phương trình $\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}} = x-2$.

Bài tập 1.106. Giải phương trình sau:

$$\sqrt{4x^3-6x^2-x+10} = 1-x^2\sqrt{x(x+1)(x-2)}.$$

Bài tập 1.107. Giải phương trình

$$\log_2(2^x+4)+\log_3(4^{x+1}+17)=7, \quad (x\in\mathbb{R}).$$

Bài tập 1.108*. Giải phương trình

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-11x+33}+\sqrt{3x-5}.$$

Bài tập 1.109. Tìm tất cả các nghiệm thực của phương trình

$$4x-x^2 = \frac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt{x^4-8x^3+16x^2+1}}.$$

Bài tập 1.110. Giải phương trình

$$(x^2-6x+11)\cdot\sqrt{x^2-x+1} = 2(x^2-4x+7)\cdot\sqrt{x-2}.$$

Bài tập 1.111. Giải phương trình

$$(x+2)\cdot\left(\sqrt{x^2+4x+7}+1\right)+x\left(\sqrt{x^2+3}+1\right)=0.$$

Bài tập 1.112. Giải phương trình

$$\left(\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{x}\right)\cdot\left(2-3\cdot\sqrt[3]{x^2+4x}\right)+1=0.$$

Bài tập 1.113. Giải phương trình $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x+7} = \sqrt[4]{x+80}$.

Bài tập 1.114. Giải phương trình $x^3+3x^2+4x+2=(3x+2)\sqrt{3x+1}$.

Bài tập 1.115. Giải phương trình $x^3-4x^2-5x+6=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$.

Bài tập 1.116. Tìm các nghiệm thực của phương trình sau:

$$\sqrt{x^4+3x^2-4}+3x=\sqrt{3x^4+16}.$$

Bài tập 1.117. Giải phương trình

$$-2x^3+10x^2-17x+8=2x^2\sqrt[3]{5x-x^3}.$$

Bài tập 1.118. Giải phương trình

$$\frac{\sqrt{4-x}}{1+\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{3+x}}{1+\sqrt{1-x}}=2x-1.$$

Bài tập 1.119. Giải phương trình $x-1+\sqrt[3]{\dfrac{7}{4}-x^3}=\sqrt{4x^2-4x-1}$.

Bài tập 1.120. Giải phương trình

$$\sqrt{x^4+20}+7=\sqrt{x^4+9}+x^3.$$

Bài tập 1.121*. Giải phương trình

$$x\cdot(2x+7)-4\sqrt{2x^2+9x+10}+10=(3x+2)\cdot\left(2\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+5}\right).$$

Bài tập 1.122. Giải phương trình $(x-1)\sqrt{x}+1=\sqrt[3]{3x-2}$.

Bài tập 1.123. Giải phương trình $3^{\sqrt{2x-2}+1}-3^x=x^2-4x+3$.

1.2.2 Hệ phương trình

Bài tập 1.124. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+3xy^2=-4y, \\ x^4+y^4=2=2. \end{cases}$ Bình phương phương trình thứ nhất, sau đó nhân với phương trình thứ hai để tạo hệ đồng bậc, cụ thể là

$$2(x^3+3xy^2)^2=16y^2(x^4+y^4)$$

$$\Leftrightarrow x^6+6x^4y^2+9x^2y^4=8y^2x^4+8y^6.$$

Đặt $y=tx$, thế vào phương trình trên ta được:

$$x^6+6x^6t^2+9x^6t^4=8x^6t^2+8x^6t^6 \ (1)$$

Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của hệ đã cho nên:

$$(1) \Rightarrow 1 + 6t^2 + 9t^4 = 8t^2 + 8t^6$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t+1)(8t^4 - t^2 + 1) = 0$$

Bài tập 1.125. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4y^2 - 4xy + y^2 = 1, \\ 2x^2 + 1 = 2x - y. \end{cases}$

Bài tập 1.126. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 9y^3(3x^3 - 1) = -125, \\ 45x^2y + 75x = 6y^2. \end{cases}$

Bài tập 1.127. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 27x^3y^3 + 7y^3 = 8, \\ 9x^2y + y^2 = 6x. \end{cases}$

Bài tập 1.128. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + xy^2 = 40y, \\ y^3 + x^2y = 10x. \end{cases}$

Bài tập 1.129. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y = -x^3 + 3x + 4, \\ x^2 = 2y^3 - 6y - 2. \end{cases}$

Bài tập 1.130. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y(x+y)^2 = 16, \\ y(x^3 - y^3) = 26. \end{cases}$

Bài tập 1.131. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x+y)^3 + 4xy - 3 = 0, \\ (x+y)^4 - 2x^2 - 4xy + 2y^2 + x - 3y + 1 = 0. \end{cases}$$

Bài tập 1.132. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x(x^2 - 1) + (xy + 3)y = x^2 + y^2, \\ y(y^2 + 1) + (xy + 3)x = 0. \end{cases}$$

Bài tập 1.133. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(x+y)(1+xy)=18xy,\\(x^2+y^2)(1+x^2y^2)=208x^2y^2.\end{cases}$$

Bài tập 1.134. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-y^3-3y^2=9,\\x^2+y^2=x-4y.\end{cases}$

Bài tập 1.135. Giải hệ phương trình $\begin{cases}4x^2y^2-6xy-3y^2=-9,\\6x^2y-y^2-9x=0.\end{cases}$

Bài tập 1.136. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2y^2-2x+y^2=0,\\2x^2-4x+3+y^3=0.\end{cases}$

Bài tập 1.137. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^4+4x^2+y^2-4y-2=0,\\x^2y+2x^2+6y-23=0.\end{cases}$

Bài tập 1.138. Giải hệ phương trình $\begin{cases}y(x^2+1)=2x(y^2+1),\\(x^2+y^2)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=16.\end{cases}$

Bài tập 1.139. Giải hệ phương trình $\begin{cases}xy(xy+2y+1)+y=6y^2-1,\\xy+x=4y-2.\end{cases}$

Bài tập 1.140. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x+xy+y=14,\\x^3+3x^2+3x-y=1.\end{cases}$

Bài tập 1.141. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x-y)^2+x+y=y^2,\\x^4-4x^2y+3x^2=-y^2.\end{cases}$

Bài tập 1.142. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2+xy+1=4y,\\y(x+y)^2=2x^2+7y+2.\end{cases}$

Bài tập 1.143. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^4+2x^3y+x^2y^2=2x+9,\\x^2+2xy=6x+6.\end{cases}$

Bài tập 1.144. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y(x+y) + 1 = 0, \\ (x^2+1)(x+y-2) + y = 0. \end{cases}$

Bài tập 1.145. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^3 = x^3\left(9 - x^3\right), \\ x^2y + y^2 = 6x. \end{cases}$

Bài tập 1.146. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 3, \\ x\sqrt{y+1} + y\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 6. \end{cases}$$

Bài tập 1.147. (30/04, 2012) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 9, \\ 2x^2 + y^2 - 4x + y = 0. \end{cases}$$

Bài tập 1.148. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 8(x^2+y^2) + 4xy + \dfrac{5}{(x+y)^2} = 13, \\ 2x + \dfrac{1}{x+y} = 1. \end{cases}$$

Bài tập 1.149. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x(y^2+1)}{x^2+y^2} = \dfrac{3}{5}, \\ \dfrac{y(x^2-1)}{x^2+y^2} = \dfrac{4}{5}. \end{cases}$

Bài tập 1.150. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{y(xy-1)}{y^2+1} = \dfrac{2}{5}, \\ \dfrac{x(xy-1)}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Bài tập 1.151. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{x-y-1} = 1, \\ y^2 + x^4 + 4y = 1. \end{cases}$

Bài tập 1.152. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{2x-1} - y \cdot (1 + 2\sqrt{2x-1}) = -8, \\ y^2 + y \cdot \sqrt{2x-1} + 2x = 13. \end{cases}$$

Bài tập 1.153. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x-y)^4 = 13x-4, \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{3x-y} = \sqrt{2}.\end{cases}$

Bài tập 1.154. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(x+1)(y+1)+1 = (x^2+x+1)(y^2+y+1), \\ x^3+3x+(x^3-y+4)\sqrt{x^3-y+1} = 0.\end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Bài tập 1.155. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x - \dfrac{1}{x^3} = y - \dfrac{1}{y^3}, \\ (x-4y)(y-2x-4) = 36.\end{cases}$

Bài tập 1.156. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(1-\dfrac{12}{y+3x}\right)\cdot\sqrt{x} = 2, \\ \left(1+\dfrac{12}{y+3x}\right)\cdot\sqrt{y} = 6.\end{cases}$

Bài tập 1.157. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y-\sqrt{xy} = 1, \\ \sqrt{x^2+3}+\sqrt{y^2+3} = 4.\end{cases}$

Bài tập 1.158. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x-\sqrt{y+2} = \dfrac{3}{2}, \\ y+2(x-2)\sqrt{x+2} = -\dfrac{7}{4}.\end{cases}$

Bài tập 1.159. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2-(x+y)} = \dfrac{y}{\sqrt[3]{x-y}}, \\ 2(x^2+y^2)-3\sqrt{2x-11} = 11.\end{cases}$

Bài tập 1.160. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y} = 0, \\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x} = 7.\end{cases}$$

Bài tập 1.161. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(x-1)(y^2+6) = y(x^2+1) \\ (y-1)(x^2+6) = x(y^2+1)\end{cases}$$

Bài tập 1.162. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-(x+y)} = \dfrac{y}{\sqrt[3]{x-y}}, \\ 2(x^2+y^2)-3\sqrt{2x-11} = 11. \end{cases}$$

Bài tập 1.163. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{2(x^2+y^2)+2(5x-3y)-4(xy-3)} - \sqrt{y} = \sqrt{x+2}, \\ \sqrt{y^2-4(x+y)+17} - \sqrt[3]{xy-3(x+y)+18} = 1. \end{cases}$$

Bài tập 1.164. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-1)(y^2+6) = y(x^2+1) \\ (y-1)(x^2+6) = x(y^2+1) \end{cases}$$

Bài tập 1.165. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+\sqrt{y-1} = 6, \\ \sqrt{x^2+2x+y} + 2x\sqrt{y-1} + 2\sqrt{y-1} = 29. \end{cases}$$

Bài tập 1.166. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2+\dfrac{2x(y-1)}{x+y-1} = 1, \\ \sqrt{x+y-1} = x^2-y+1. \end{cases}$$

Bài tập 1.167. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x(y^2-3)-2 = x^2-y^2, \\ \log_4(x-1)+\log_4(2y^2-3) = \dfrac{1}{2}+\log_2 y. \end{cases}$$

Bài tập 1.168. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+\dfrac{2}{y} = y+\dfrac{2}{x}, \\ \sqrt{x+8} - \sqrt{2y+2} = \sqrt{3y-2}. \end{cases}$$

Bài tập 1.169. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x^2+y^2)(x+y)+2xy = x+y \\ \log_2\sqrt{x+y} = \log_3\left(\sqrt{x^2+y^2+1}-1\right) \end{cases}$$

Bài tập 1.170. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+y-3)^3 = 4y^3\left(x^2y^2+xy+\dfrac{45}{4},\right) \\ x+4y-3 = 2xy^2. \end{cases}$

Bài tập 1.171. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3y^2+x^2y^2+y^2x = 2x^2+2x-y^2 \\ 2x^3+3x^2+6y = 12x-13 \end{cases}$$

Bài tập 1.172. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{9-4^{y+1}-3^x\cdot 2^{y+2}-9^x}{4^{y+1}+3^x\cdot 2^{y+1}-3^{x+1}-9} = \dfrac{3^x+2^{y+1}-3}{3^x-1}, \\ 3^{x-1}\cdot 2^{y+1} = 1. \end{cases}$$

Bài tập 1.173. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{4-9^{y+1}-3^{x+1}\cdot 2^{y+1}-4^y}{9^{x+1}+3^{x+1}\cdot 2^y-2^{y+1}-4} = \dfrac{3^{x+1}+2^y-2}{2^y-1}, \\ 2^{y-1}\cdot 3^{x+1} = 1. \end{cases}$$

Bài tập 1.174. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x+\sqrt{2-x+y-x^2-y^2} = 1, \\ 2x^3 = 2\mathrm{y}^3+1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Bài tập 1.175. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x^2+9)(x^2+9y) = 22(y-1)^2 \\ x^2-2-4y\sqrt{y+1} = 0. \end{cases}$$

Bài tập 1.176. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} -x^2+xy+y^2 = 3, \\ -x^2+2xy-7x-5y+9 = 0. \end{cases}$$

Bài tập 1.177. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{xy}+\dfrac{2}{x+y} = \dfrac{1}{xy}, \\ x^2+y^2-\dfrac{1}{x+y} = -x^2+2x+1. \end{cases}$$

Bài tập 1.178. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + x^2(y+1) + 3x + 2xy = y^3 + (x-1)y^2 + 3(y-1), \\ \sqrt[3]{x^2 - 3y + 5} = \sqrt{y-2} + 1 - x. \end{cases}$$

Bài tập 1.179. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x\log_2 3 + \log_2 y = y + \log_2 \dfrac{3x}{2}, \\ x\log_3 12 + \log_3 x = y + \log_3 \dfrac{2y}{3}. \end{cases}$$

Bài tập 1.180. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2xy - x + 2y = 3, \\ x^3 + 4y^3 = 3x + 6y^2 - 4 \end{cases} \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Bài tập 1.181. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3x + 2xy = 0, \\ xy(x+y) + (x-1)^2 = 3y(1-y). \end{cases}$$

Bài tập 1.182. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3xy - 4x - 3y - 5 = 0, \\ \sqrt{2y+1} - \sqrt{x+y} + 2y^2 - x - 9y - 1 = 0 \end{cases}$$

Bài tập 1.183. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + 2xy^2 + 2y = x + 2xy + 4y^3 \\ 2\sqrt{3x-5} + \sqrt[3]{8y^3 - 3x + 9} = 7 \end{cases}$$

Bài tập 1.184. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 - xy + 5x - 2y = -3, \\ \sqrt{2x-5} + 2\sqrt{y} - 2x^2 = -13. \end{cases}$$

Bài tập 1.185. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x+1} - \sqrt{x^2+y} + x - y = 2, \\ x^3 + 2x^2 + (y-1)x + y = 2. \end{cases}$

Bài tập 1.186. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 1+2x-2x^2\cdot\sqrt{1+y}=4x^3y+7x^2, \\ x^2(xy+1)+(x+1)^2=x^2y+5x. \end{cases}$$

Bài tập 1.187. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (2x+3)\sqrt{4x-1}+(2y+3)\sqrt{4y-1}=2\sqrt{(2x+3)(2y+3)}, \\ x+y=4xy. \end{cases}$$

Bài tập 1.188. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{7x+y}+\sqrt{2x+y}=5, \\ \sqrt{2x+y}+x-y=1. \end{cases}$$

Bài tập 1.189. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{y+7x}-\sqrt{y+2x}=4, \\ 2\sqrt{y+2x}-\sqrt{5x+8}=2. \end{cases}$$

Bài tập 1.190. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+y+1}+1=4(x+y)^2+\sqrt{3}\sqrt{x+y}, \\ 2x-y=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Bài tập 1.191. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{1+2x^2}+\sqrt{1+2y^2}=2\cdot\sqrt{1+2xy}, \\ \sqrt{x(1-2x)}+\sqrt{y(1-2y)^2}=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Bài tập 1.192. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+3})\cdot x=y-3, \\ \sqrt{x^2+y}+\sqrt{x}=3. \end{cases}$$

Bài tập 1.193. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (11\sqrt{2x+y}-16\sqrt{x+3y})x=y(13\sqrt{x+3y}-23\sqrt{2x+y}), \\ x^2-y^2+\dfrac{4x^2+8x}{y}=-4. \end{cases}$$

Bài tập 1.194. Giải các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases} x^3 - 8 + \sqrt{x-1} = \sqrt{y}, \\ (x-1)^4 = y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt{x-2} - \sqrt{y-1} = 27 - x^3, \\ (x-2)^4 + 1 = y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{x-1} - \sqrt{y+4} = 8 - x^3, \\ (x-2)^4 - 4 = y. \end{cases}$

Bài tập 1.195. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x-y} = 9 - |x+2y|, \\ x(x+4y-2) + y(4y+2) = 41. \end{cases}$$

Bài tập 1.196. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(m^2+2m\right)x + \left(1-m^2\right)y + m^2 - 2m - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 9 = 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng hệ phương trình trên luôn có hai nghiệm phân biệt$(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$. Tìm m để biểu thức

$$P = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài tập 1.197. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + \sqrt{x^2+2y+1} = x^2y + y + 1, \\ (x+y-1)\sqrt{y+1} = 10. \end{cases}$

Bài tập 1.198. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 2y^2 + 1, \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x-2y} = 3y. \end{cases}$

Bài tập 1.199. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x-y} + \sqrt{x-2} = 2, \\ \sqrt{x^2+y^2-xy(x-y)} + \sqrt{xy-y^2} = 2\sqrt{2}(x-y-1). \end{cases} \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

Bài tập 1.200. Tìm tất cả các nghiệm thực của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (y^2-4y-8)(x+3)=64\sqrt[3]{x}, \\ y(y^2-6y+12)=8(1+x\sqrt{x}). \end{cases}$$

Bài tập 1.201. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x-y}+\sqrt{x-2}=2 \\ \sqrt{x^2+y^2-xy(x-y)}+\sqrt{xy-y^2}=2\sqrt{2}(x-y-1) \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R}).$$

Bài tập 1.202. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \left|6x+4y+6\sqrt{x+3y}+9\right|=2\left(\sqrt{5x^2+16xy+3y^2}+3\sqrt{5x+y}\right), \\ 12\sqrt{x+3y}+\frac{7}{3}(x-2y)-\frac{31}{4}\geqslant 8\left[2(m+5)-\sqrt{|1-9m^2|}\right]. \end{cases}$$

Bài tập 1.203. Giải hệ phương trình sau trên tập số thực:

$$\begin{cases} \sqrt{2y^2-7y+10-x(y+3)}+\sqrt{y+1}=x+1, \\ \sqrt{y+1}+\dfrac{3}{x+1}=x+2y. \end{cases}$$

Bài tập 1.204. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3, \\ \sqrt{x+5}+\sqrt{y+3}=5. \end{cases}$

Bài tập 1.205. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{2x-3y}+\sqrt{5-x+y}=7, \\ 3\sqrt{5-x+y}-\sqrt{2x-y-3}=1. \end{cases}$

Bài tập 1.206. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x-y\cdot\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=2, \\ \dfrac{y-x\cdot\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=\dfrac{7}{4}. \end{cases}$

Bài tập 1.207. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{1-y^2}=1, \\ y+\sqrt{1-x^2}=\sqrt{3}. \end{cases}$

Bài tập 1.208. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 16x^2y^2-17y^2=-1, \\ 4xy+2x-7y=-1. \end{cases}$

Bài tập 1.209. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2(2x+1)^3+2x+1=(2y-3)\sqrt{y-2}, \\ \sqrt{6x+3}+\sqrt{y-10}=4. \end{cases}$$

Bài tập 1.210. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (14-6x)\sqrt{4-2x}+(6y-11)\sqrt{3-2y}=0, \\ \sqrt{x}+\sqrt{3-3x+2y}=x^2-3x+3. \end{cases}$$

Bài tập 1.211. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x^2+1)x+(y-4)\sqrt{3-y}=0, \\ 22x^2+9y+18\sqrt{4-3x}=49. \end{cases}$$

Bài tập 1.212. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4-3\sqrt{y}=3x+y, \\ x\sqrt{y}(y-1)=3(x+\sqrt{y}). \end{cases}$$

Bài tập 1.213. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=x\left(1+2\sqrt{1-y^2}\right), \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{y+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+\sqrt{xy}}}. \end{cases}$$

Bài tập 1.214. (Dự bị, B, 2010) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2-z^2}+\sqrt{y^2+z^2-x^2}+\sqrt{z^2+x^2-y^2}=x+y+z, \\ xyz-x^2-y^2-\dfrac{1}{3}(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})+2=0. \end{cases}$$

Bài tập 1.215. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y^2-y\sqrt{x+3y^2}=0, \\ 2y^2-3y-x+1+\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+1}{21}}=0. \end{cases}$

Bài tập 1.216. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3=x^3\cdot(9-x^3), \\ x^2y+y^2=6x. \end{cases}$$

Bài tập 1.217. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4^{x+1} - 4^{y-1} = 2y^2 - 2x^2 - 4y - 4x - \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1}, \\ y + \sqrt{x^2+2x+2} - 1 = 4^{x+1}. \end{cases}$$

Bài tập 1.218. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y^2 - y\sqrt{x+3y^2} = 0, \\ 2y^2 - 3y - x + 1 + \sqrt{\dfrac{x^2+y^2+1}{21}} = 0. \end{cases}$$

Bài tập 1.219. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 2, \\ \dfrac{72xy}{x-y} + 29\sqrt[3]{x^2-y^2} = 4. \end{cases}$

Bài tập 1.220. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (\sqrt{x^2+y} - \sqrt{x^2+x}) \cdot x = y - x, \\ x + \dfrac{x}{\sqrt{y^2-1}} = \dfrac{-35}{12}. \end{cases}$$

Bài tập 1.221. Giải hệ phương trình trên tập số thực:

$$\begin{cases} x(x^2-1) + (xy+3)y = x^2 + y^2, \\ y(y^2+1) + (xy+3)x = 0. \end{cases}$$

Bài tập 1.222. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{2y+1} = (x-y)^2, \\ (x+y)(x+2y) + 3x + 2y = 4. \end{cases}$$

Bài tập 1.223. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 8 = \sqrt{2y-x} \cdot \sqrt{y+4}, \\ x^2 + 2x + y = y\sqrt{x^2-x+4}. \end{cases}$

Bài tập 1.224. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2+4y^2}{xy} = 4\sqrt{\left(\dfrac{2}{y} - \dfrac{3}{x}\right)(x+y)} - 1, \\ \sqrt{(x+1)^2 + xy + 3x + 2y + 5 - 2x\sqrt{x(y+3)}} = \sqrt{x} + \sqrt{y+3}. \end{cases}$$

Bài tập 1.225. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2y + y^3 = 2x^4 + x^6, \\ (x+2)\cdot\sqrt{y+1} = (x+1)^2. \end{cases}$

Bài tập 1.226. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - 6x^2y = 8y^3 - 6, \\ 4xy^2 + x = 2y + \sqrt{2y - x + 1} + 1. \end{cases}$$

Bài tập 1.227. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{8xy}{x+y} = 16, \\ \dfrac{x^2}{8y} + \dfrac{2x}{3} = \sqrt{\dfrac{x^3}{3y} + \dfrac{x^2}{4}} - \dfrac{y}{2}. \end{cases}$

Bài tập 1.228. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt[4]{x}\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}\right) = 2, \\ \sqrt[4]{y}\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}\right) = 1. \end{cases}$

Bài tập 1.229. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} = \dfrac{(x-y)^2}{2}, \\ (x+y)(x+2y) + 3x + 2y = 4. \end{cases}$

Bài tập 1.230. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{3x} + \dfrac{2x}{3y^2} = \dfrac{x+y}{2x^2+y^2}, \\ \sqrt{2y+20} = x^2 + x - 5. \end{cases}$

Bài tập 1.231. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y - x + 1 + \sqrt{2} = \sqrt{x+1} + \sqrt{2-x}, \\ 2x^3 - y^3 + x^2y^2 = 2xy - 3x^2 + 3y. \end{cases}$$

Bài tập 1.232. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4 + 2x^3 - 5x^2 + y^2 - 6x - 11 = 0, \\ x^2 + x = \frac{3\sqrt{y^2-7}-6}{\sqrt{y^2-7}}. \end{cases}$

Bài tập 1.233. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (3x+1)\sqrt{9y^2+6y+2} - y + 1 = 4x\sqrt{16y^2+1}, \\ 2012^x - 2012^y = (\log_3 y - \log_3 x)(12 + 4xy). \end{cases}$$

Bài tập 1.234. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+2x+22}-\sqrt{y}=y^2+2y+1, \\ \sqrt{y^2+2y+22}-\sqrt{x}=x^2+2x+1. \end{cases}$

Bài tập 1.235. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x^4-16}{8x}=\dfrac{y^4-1}{y}, \\ x^2-2xy+y^2=8. \end{cases}$

Bài tập 1.236. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2})=1, \\ x\sqrt{6x-2xy+1}=4xy+6x+1. \end{cases}$

Bài tập 1.237. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4+y^2+x^2y^2=y^3+x^2y-x^2, \\ -10x^3-5x+12y-11=2x^2\cdot\sqrt[3]{7x^3-7y+2x+7}. \end{cases}$$

Bài tập 1.238. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y+\sqrt{3y^2-2y+6+3x^2}=3x+\sqrt{7x^2+7}+2, \\ 3y^2-4x^2-3y+3x+1=0. \end{cases}$$

Bài tập 1.239. Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình

$$\begin{cases} (x^4-x^2-5)\cdot(\sqrt{y-1}+2)=(x^2+2)\cdot(y-6-\sqrt{y-1}), \\ x+\sqrt{y-13}=4. \end{cases}$$

Bài tập 1.240. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2(2x+1)^3+2x+1=(2y-3)\sqrt{y-2}, \\ \sqrt{4x+2}+\sqrt{2y+4}=6. \end{cases}$$

Bài tập 1.241. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (17-3x)\cdot\sqrt{5-x}+(3y-14)\cdot\sqrt{4-y}=0, \\ 2\sqrt{2x+y+5}+3\sqrt{3x+2y+11}=x^2+6x+13. \end{cases}$$

Bài tập 1.242. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (23-3x)\sqrt{7-x}+(3y-20)\sqrt{6-y}=0, \\ \sqrt{2x+y+2}-\sqrt{-3x+2y+8}+3x^2-14x-8=0. \end{cases}$$

Bài tập 1.243. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3+9x^2+26x+18=y^3+6y^2+11y,\\ x-5+\sqrt{x^2-4y+7}-2\sqrt{x-1}+4\sqrt{y-4}=0. \end{cases}$$

Bài tập 1.244. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x-2}-\sqrt{3-y}=y^2-x^2+4x-6y+5,\\ \sqrt{2x+3}+\sqrt{4y+1}=6. \end{cases}$$

Bài tập 1.245. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3\cdot(4y^2+1)+2(x^2+1)\cdot\sqrt{x}=6,\\ x^2y\cdot\left(2+2\sqrt{4y^2+1}\right)=x+\sqrt{x^2+1}. \end{cases}$$

Bài tập 1.246*. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+4=2xy,\\ 2^{x+y}=m(\sqrt{x^2+y^2+x+y+5}+x+y). \end{cases}$$

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện $x,\ y\geqslant 1$.

Bài tập 1.247. (Dự bị D, 2010), Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2-\sqrt{x^2y^4+2xy^2-y^4+1}=2\left(3-\sqrt{2}-x\right)y^2,\\ \sqrt{x-y^2}+x=3. \end{cases}$$

Bài tập 1.248. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 1+\sqrt{x+y+1}=4(x+y)^2+\sqrt{3(x+y)},\\ \log_4(3x+2y)^2+\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+1}=4. \end{cases}$$

Bài tập 1.249*. Tìm tất cả các nghiệm thực của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^4+2(3y+1)x^2+(5y^2+4y+11)x-y^2+10y+2=0,\\ y^3+(x-2)y+x^2+x+2=0. \end{cases}$$

Bài tập 1.250*. Tìm m để hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2y-3x-1 \geqslant mx\sqrt{y}(\sqrt{1-x}-1)^3, \\ \sqrt{8x^2-3xy+4y^2}+\sqrt{xy}=4y. \end{cases}$$

có nghiệm.

Bài tập 1.251. Tìm tất cả các cặp số thực $(x;\ y)$ với $x;\ y>0$ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(2^x+\dfrac{1}{2^x}\right)^y=\left(2^y+\dfrac{1}{2^y}\right)^x, \\ e^x+(x^3-y)\ln(y^2+x+2)=e^{\sqrt[3]{x}}. \end{cases}$$

Bài tập 1.252. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4+2x^3-5x^2+y^2-6x-11=0, \\ x^2+x=\dfrac{3\sqrt{y^2-7}-6}{\sqrt{y^2-7}}. \end{cases}$$

Bài tập 1.253. Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2\sqrt{y+1}-2xy-2x=1, \\ x^3-3x-3xy=a+2. \end{cases}$$

Bài tập 1.254. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{x^2+y+3}=2, \\ 2\sqrt{x+4}+3\sqrt{y+8}=13. \end{cases}$

Bài tập 1.255. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4\sqrt{1+x}+xy\sqrt{4+y^2}=0, \\ \log_2 x=2^{y+2}. \end{cases}$$

Bài tập 1.256. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}=\sqrt{4x-y}, \\ \sqrt{x^2-16}=2+\sqrt{y-3x}. \end{cases}$

1.2.3 Phương trình có chứa tham số

Bài tập 1.257. Tìm tham số m để phương trình

$$\sqrt{\frac{14x^2}{3}+\frac{1}{96x^2}+m}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=2x$$

có nghiệm duy nhất.

Bài tập 1.258. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt:

$$10x^2+8x+4=m(2x+1)\cdot\sqrt{x^2+1}$$

Bài tập 1.259. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực:

$$(4m-3)\cdot\sqrt{x+3}+(3m-4)\cdot\sqrt{1-x}+m-1=0.$$

Bài tập 1.260. Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$|x+1|+(4-m)|x-1|=(m-1)\sqrt{x^2-1}.$$

Bài tập 1.261. Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{x^4+8x}=(m-2)x^2-2(m+2)x+4m.$$

Bài tập 1.262. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực:

$$x^2+(x^2+x+1)^2=(x^2+1)^2+m(x^2-x+1)^2.$$

Bài tập 1.263. Tìm m để phương trình sau có đúng một nghiệm thực:

$$\sqrt[4]{x^2+2x+4}-\sqrt{x+1}=m, \quad (m\in\mathbb{R}).$$

Bài tập 1.264. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất trong đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$

$$3\sqrt{1-x^2}-2\sqrt{x^3+2x^2+1}=m.$$

Bài tập 1.265. Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm thực:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+4}=m(\sqrt{2-x}+\sqrt{1-x}).$$

Bài tập 1.266. Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm thực:

$$12\sqrt{4+x-3x^2} = 3x-24+m(3\sqrt{x+1}+2\sqrt{4-3x}).$$

Bài tập 1.267. Xác định giá trị tham số m để phương trình sau có nghiệm thực:

$$\sqrt{5-4x}-\sqrt{1+x} = m(\sqrt{5-4x}+2\sqrt{1+x}+6).$$

Bài tập 1.268. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2-2y=2m, \\ x^2(y+2)-4xy=(2x-1)m. \end{cases}$$

Bài tập 1.269. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực

$$x^2+7+m\cdot\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{x^4+x^2+1}+m\cdot(\sqrt{x^2-x+1}-2).$$

Bài tập 1.270. Tìm m để phương trình có ba nghiệm phân biệt:

$$\frac{x^3+1}{x\sqrt{x}}+2(m-1)\frac{x^2+1}{x}+4(1-m)\frac{x+1}{\sqrt{x}}+4m-6=0.$$

Bài tập 1.271. Tìm các giá trị của m để phương trình:

$$\sqrt{x^2-2m}+2\sqrt{x^2-1}=x$$

có nghiệm thực.

Bài tập 1.272. Tìmmđể phương trình có nghiệm duy nhất:

$$\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+2m\sqrt{x(1-x)}-2\sqrt[4]{x(1-x)}=m^3.$$

1.2.4 Bất phương trình

Bài tập 1.273. Giải bất phương trình $\left(x-\dfrac{2x+4}{2x-5}\right)\cdot\sqrt{10x-3x^2-3}\geqslant 0.$

Bài tập 1.274. Giải bất phương trình $3\sqrt{x+2}-2\geqslant 2x+\sqrt{x+10}.$

Bài tập 1.275. Giải bất phương trình $(35-12x)\cdot\sqrt{x^2-1}<12x;$

Bài tập 1.276. Giải bất phương trình $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}>\dfrac{x-1}{x}$.

Bài tập 1.277. Giải bất phương trình

$$(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1})\cdot(x-3+\sqrt{x^2+2x-3})\geqslant 4.$$

Bài tập 1.278. Giải bất phương trình sau

$$\frac{x^4-4x^2+16}{x^2(4-x^2)}-\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}+\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)-1\leqslant 0.$$

Bài tập 1.279. Giải bất phương trình $\dfrac{x^3-2x}{x^2-1-\sqrt{x^2-1}}\geqslant 2\sqrt{2}$.

Bài tập 1.280. Giải bất phương trình

$$\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}\leqslant\sqrt{4x^2-18x+18}.$$

Bài tập 1.281. Giải bất phương trình

$$\log_{|x-1|}8+\log_4(x-1)^2\cdot\log_2\sqrt{2(x-1)^2}\geqslant 0.$$

Bài tập 1.282. Giải bất phương trình $\sqrt{2+2x}\leqslant 2\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{\dfrac{3x-1}{3x+1}}\right)$.

Bài tập 1.283. Giải bất phương trình $\sqrt[3]{x+6}-2\sqrt{5x-1}>x^2-2x-4$.

Bài tập 1.284. Giải bất phương trình

$$\sqrt{4x+6}-\sqrt[3]{x^3+7x^2+12x+6}\geqslant x^2-2.$$

Bài tập 1.285. Giải bất phương trình

$$\frac{\sqrt{x^3-2x+2012}+\sqrt{x^3-2x+1}}{\sqrt{x^3-2x+2012}-\sqrt{x^3-2x+1}}\leqslant 1.$$

Bài tập 1.286. Giải bất phương trình

$$\frac{(x+1)\sqrt{x+1}-\sqrt{2}x^2-\sqrt{2}x^3}{x-\sqrt{x}}\geqslant 0.$$

Bài tập 1.287. Giải bất phương trình

$$\frac{6-3x+\sqrt{2x^2+5x+2}}{3x-\sqrt{2x^2+5x+2}} \geqslant \frac{1-x}{x}.$$

Bài tập 1.288. Giải bất phương trình

$$\frac{3-x-\sqrt{5-x^2}}{\cos\frac{2x-7}{4}-\cos\frac{x-5}{4}} \geqslant 0.$$

Bài tập 1.289. Giải bất phương trình

$$\sqrt{\frac{x^2-22x+121}{x^2-24x+140}} \geqslant 50x-2x^2-309.$$

Bài tập 1.290. Giải bất phương trình sau:

$$\sqrt{6}\left(x^2-3x+1\right)+\sqrt{x^4+x^2+1} \leqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 1.291. Giải bất phương trình

$$\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x} \geqslant 2-x^2.$$

Bài tập 1.292. Giải bất phương trình $\quad x+\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}} > 3\sqrt{5}.$

Bài tập 1.293. Giải bất phương trình $\quad \sqrt{2(4-x^2)} \leqslant \dfrac{9x^2+8x-32}{16}.$

Bài tập 1.294. Giải bất phương trình $\dfrac{\sqrt{x(x+2)}}{\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x}} \geqslant 1.$

Bài tập 1.295. Giải bất phương trình sau trên tập số thực:

$$\frac{(2x-1)\sqrt{x+3}}{2\sqrt{x}+\left(2+\sqrt{x}\right)\sqrt{1-x}+1-x} \geqslant 1.$$

Bài tập 1.296. Giải bất phương trình $\sqrt{3x^2+\dfrac{2}{x^2}+4} \leqslant x+\dfrac{2}{x^3}.$

Bài tập 1.297. Giải bất phương trình

$$\sqrt{x^2-x-2}+3\sqrt{x} \leqslant \sqrt{5x^2-4x-6}.$$

Bài tập 1.298. Giải bất phương trình $\sqrt{\dfrac{x^3}{3-4x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}} \geqslant \sqrt{x}.$

Bài tập 1.299. Giải bất phương trình $\frac{x^2}{\sqrt{(x-3)(x-5)}}+\sqrt{(x-3)(x+5)} > \sqrt{(x-3)(4x-6)}.$

Bài tập 1.300. Giải bất phương trình $\sqrt{8-x^2}-x^3+3x^2-4x+2 \leqslant 0.$

Bài tập 1.301. Giải bất phương trình

$$\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}\right)\left(x-3+\sqrt{x^2+2x-3}\right) \geqslant 4.$$

Bài tập 1.302. Giải bất phương trình $\sqrt{2x^2+11x+15}+\sqrt{x^2+2x-3} \geqslant x+6.$
Điều kiện $x \leqslant -3$ hoặc $x \geqslant 1$. Nhận xét rằng bất phương trình luôn đúng với $x \leqslant -6$. Viết bất phương trình đã cho dưới dạng

$$\sqrt{2x^2+11x+15} \geqslant x+6-\sqrt{x^2+2x-3}.$$

Với điều kiện đã đặt, bất phương trình trên tương đương

$$\begin{cases} x+6-\sqrt{x^2+2x-3} \geqslant 0, \\ 2x^2+11x+15 \geqslant x^2+12x+36+x^2+2x-3-2(x+6)\cdot\sqrt{x^2+2x-3}. \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2x-3} \leqslant x+6, \\ (x+6)\cdot(3-2\sqrt{x^2+2x-3}) \leqslant 0. \end{cases}$$

Do $x+6>0$, nên ta có

$$\begin{cases} x^2+2x-3 \leqslant x^2+12x+36, \\ 3-2\sqrt{x^2+2x-3} \leqslant 0 \end{cases}$$

tương đương

$$\begin{cases} x \in \left[-\dfrac{39}{10};-3\right] \cup [1;+\infty), \\ x \in (-\infty;-\dfrac{7}{2}\Big] \cup \Big[\dfrac{3}{2};+\infty). \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{39}{10} \leqslant x \leqslant -\frac{7}{2} \text{ hoặc } x \geqslant \frac{3}{2}.$$

Kết hợp với điểu kiện, nghiệm bất phương trình đã cho là $x \leqslant -\dfrac{7}{2}$ hoặc $x \geqslant \dfrac{3}{2}$.

1.3 Phương trình lượng giác

Các câu trong **Bài tập 1.303** được trích trong cuốn sách "Tuyển tập các đề thi thử Đại học ba miền Bắc, Trung, Nam môn Toán."

Bài tập 1.303. Giải các phương trình sau:

1) $\sin^4\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin^4\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$; **Đáp số.** $x=\frac{k\pi}{6}$.

2) $\sin^2 x(1+\tan x)=3\sin x(\cos x-\sin x)+3$; **Đáp số.** $\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \pm\frac{\pi}{3}+k\pi.\right\}$

3) $\cos 8x+3\cos 4x+3\cos 2x=8\cos x\cdot\cos^2 3x-\frac{1}{2}$;

Đáp số. $\left\{\pm\frac{\pi}{30}+\frac{k\pi}{5}\right\}$.

4) $2\tan x+\cot x=2\sin 2x+\frac{1}{\sin 2x}$; **Đáp số.** $\left\{\pm\frac{\pi}{6}+k\pi;\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right\}$.

5) $6\sin x-2\cos^3 x=5\sin 2x\cdot\cos x$; **Đáp số.** $\left\{\frac{\pi}{4}k\pi.\right\}$

6) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)\cdot\cot 3x+\sin(\pi+2x)-\sqrt{2}\cos 5x=0$;

Đáp số. $\left\{\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3};\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3};\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}.\right\}$

7) $\dfrac{\sqrt{3}(\cos x-\sin x)\sin x-(1+\sin x+\cos x)\cos x}{\sin x+\sin 2x}=\sqrt{3}$;

Đáp số. $\left\{-\frac{\pi}{2}+k2\pi;-\frac{\pi}{6}++k\pi\right\}$.

8) $\sqrt{2}\cdot\cos 3x\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin 3x\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{2}-\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$;

Đáp số. $\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{6}+k\pi;\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}.\right\}$

9) $2\sin^2 x-\sin 2x+\sin x+\cos x-1=0$;

Đáp số. $\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{5\pi}{6}+k2\pi;2k\pi;\frac{3\pi}{2}+2k\pi.\right\}$

10) $(\tan x+\cos 2x)\sin 4x=2(\cos x+2)$; **Đáp số.** $\{\pi+k\pi.\}$

11) $(\cot x - 1)(1 - \sqrt{2}\cos 4x) = 2\sin\left(2x - \dfrac{3\pi}{2}\right)$;

Đáp số. $\left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi; -\dfrac{\pi}{8} + k\pi; -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{3}.\right\}$

12) $(1 + \tan x)\cos 5x = \sin x + \cos x + 2\cos 4x - 2\cos 2x$; **Đáp số.** $\dfrac{k\pi}{3}$.

13) $\sin 4x + \cos 3x + \cos x = 4\sin x + 2$;

Đáp số. $\left\{-\dfrac{\pi}{6} + k2\pi; \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi; k2\pi.\right\}$

14) $1 + 3\cos x + \cos 2x - 2\cos 3x = 4\sin x \cdot \sin 2x$;

Đáp số. $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi.\right\}$

15) $\dfrac{\cos^3 x - \cos^2 x}{\sin x + \cos x} = 2(1 + \sin x)$; **Đáp số.** $\left\{-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2m\pi.\right\}$

16) $2\sin^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sin^2 x - \tan x$; **Đáp số.** $\left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\right\}$.

17) $\dfrac{\sin 2x}{\sin x + \cos x} + \dfrac{1}{\sqrt{2 \cdot \tan x}} = 2\cos x$; **Đáp số.** $\left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k2\pi}{3}; \dfrac{\pi}{4} + m2\pi.\right\}$

18) $\sin^3(2 - \sin x) = \cos x(1 - \cos^3 x)$; **Đáp số.** $\left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi.\right\}$

19) $3\tan^2 x + \dfrac{3(\tan x + 1)}{\cos x} - 4\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{7\pi}{4} = 1\right)$;

Đáp số. $\left\{\pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi; \pi + 2k\pi.\right\}$

20) $\sin 5x + \cos 3x = \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{3\pi}{4} - x\right) + \sin 4x$;

Đáp số. $\left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi; \dfrac{k\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\ell\pi}{3}.\right\}$

21) $\sin 2x + \cos 2x + 7\sin x - \cos x - 4 = 0$; **Đáp số.** $\left\{\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi; \dfrac{5\pi}{6} + 2\ell\pi.\right\}$

22) $\sin^2 2x \cdot \cos 6x + \sin^2 3x = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{11x}{2} \cdot \sin\dfrac{9x}{2}$; **Đáp số.** $2k\pi$.

23) $4\sin 2x - \cot x = \sqrt{3}$; **Đáp số.** $\left\{\dfrac{\pi}{6} + k\pi; -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{m\pi}{2}.\right\}$

24) $\cot x + \sin x \cdot \left(1 + \tan x \cdot \tan\dfrac{x}{2}\right) = 4;$ **Đáp số.** $\left\{\dfrac{\pi}{12} + k\pi; \dfrac{5\pi}{12} + k\pi.\right\}$

25) $(2\cos x - 1)\cdot\cot x = \dfrac{3}{\sin x} + \dfrac{2\sin x}{\cot x - 1};$ **Đáp số.** $\left\{\pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi.\right\}$

26) $\dfrac{\sin 2x + \cos x - \sqrt{3}(\cos 2x + \sin x)}{2\sin 2x - \sqrt{3}} = 1;$ **Đáp số.** $\left\{\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi.\right\}$

27) $(\sin 2x - \cos 2x)\tan x + \dfrac{\sin 3x}{\cos x} = \sin x + \cos x;$

Đáp số. $\left\{\dfrac{\pi}{6} + k2\pi; \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi; -\dfrac{\pi}{4} + \ell\pi.\right\}$

28) $(\tan x \cdot \cot 2x - 1)\cdot\cos^3 x = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}\sin x - 2\cos x + 1);$ **Đáp số.** $\left\{-\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi.\right\}$

29) $9\sin x + 6\cos x + \cos 2x - 3\sin 2x = 8;$ **Đáp số.** $\dfrac{\pi}{2} + k2\pi.$

Các câu trong **Bài tập 1.304** được trích từ đề thi thử của một số trường trong toàn quốc năm 2012.

Bài tập 1.304. Giải các phương trình sau:

1) $\sin x - 4\sin^3 x + \cos x = 0;$ **Đáp số.** $\left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi.\right\}$

2) $\cos 2x + \cos 3x - \sin x - \cos 4x = \sin 6x;$

Đáp số. $\left\{\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3}; \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right\}$

3) $\dfrac{\cos x + \sin^2 x}{\sin x - \sin^2 x} = 1 + \sin x + \cot x;$

4) $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x;$ **Đáp số.** $\left\{k\pi, -\dfrac{\pi}{4} + k\pi.\right\}$

5) $3\sin^2 x \cdot \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) - \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)\cdot\cos x = \sin x \cdot \cos^2 x - 3\sin^2 x \cdot \cos x;$

Đáp số. $\left\{-\dfrac{\pi}{4} + k\pi; \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi.\right\}$

6) $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 + (\cos x - \sin x)^2} = \dfrac{1}{16}\sin 4x;$ **Đáp số.** $\left\{-\dfrac{\pi}{4} + k\pi.\right\}$

7) $2\cos 5x \cdot \cos 3x + \sin x = \cos 8x$; **Đáp số.** $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi; \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi.\right\}$

8) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cot x + \dfrac{\sin 2x}{\sin x + \cos x} = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$; **Đáp số.** $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\ell 2\pi}{3}.\right\}$

9) $\dfrac{4(1 - \sin x \cdot \cos x) + \cos 3x + 4\sin x - \cos x}{\sin\left(2x + \dfrac{5\pi}{2}\right) + 1} - 8\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) \cdot \sin^2 x = 0$;

10) $\cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)$; **Đáp số.** $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k2\pi; -\pi + \ell 2\pi.\right\}$

11) $\dfrac{3\cos x - \cos 3x + 2\sin x \cdot (\cos 2x + 2)}{\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{6}\cos 2x$; **Đáp số.** $\left\{-\dfrac{\pi}{4} + k\pi.\right\}$

12) $\cot^4 x + 1 = \dfrac{(2 - \sin^2 2x)(2\cos^2 2x - \cos x)}{2\sin^4 x}$;

13) $\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin x - \cos x} + \tan 2x + \cos^2 x = 0$;

14) $\dfrac{2\sin x}{2\cos 2x - 1} + \dfrac{1}{2\sin x + 1} = 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{2}$;

Đáp số. $\left\{\pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi; k\pi.\right\}$

15) $\dfrac{1}{\cos^2 x} - (\cos x + \sin x \tan\dfrac{x}{2}) = \dfrac{\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)}{\cos x}$;

Đáp số. $\left\{\dfrac{\pi}{3} + k\pi; 2k\pi.\right\}$

16) $1 + \sin x + \cos x = 2\cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$;

Đáp số. $\left\{\dfrac{\pi}{2} + 4k\pi; \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi.\right\}$

17) $\dfrac{\sin 2x}{\cos x} + \dfrac{\cos 2x}{\sin x} = \tan x - \cot x$;

18) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \dfrac{1}{\cos x}$; **Đáp số.** $\left\{\dfrac{\pi}{3} + k\pi; k\pi.\right\}$

19) $\dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\sin^2 x} = \dfrac{8}{3}\cot\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \cdot \cot\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)$;

20) $2(1+\cos x)(\cot^2 x+1)=\dfrac{\sin x-1}{\cos x+\sin x}$;

21) $\cos^2 x+2\tan x-\cos x-2\tan^2 x\cdot\cos x=0$;

22) $\dfrac{\sin x\cdot\sin 2x+2\sin x\cdot\cos^2 x+\sin x+\cos x}{\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{6}\cos 2x$;

23) $\dfrac{(\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x)^2-4\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)-4}{2\sin x+1}=0$;

24) $\tan x+\left(1+\dfrac{\cos 2x}{1+\cos 2x}\right)\cdot\cot 3x=\sqrt{3}$;

25) $\dfrac{(\sin x+\cos x)^2-2\sin^2 x}{1+\cot^2 x}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-3x\right)\right]$;

26) $\dfrac{4\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)-2\sin x-1}{\cos 2\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)}=2\sin x-1$;

27) $(2\sin x-1)\cdot\tan x=\dfrac{2\cos x}{\sin x-1}+\dfrac{3}{\cos x}$;

28) $1+\sin\dfrac{x}{2}\cdot\sin x-\cos\dfrac{x}{2}\cdot\sin^2 x=2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)$;

29) $\sqrt{3}(\sin 2x+\sin x)-\cos 2x+\cos x-4=0$;

30) $\dfrac{\cos 2x+\sqrt{3}\sin x+6\sin x-5}{2\cos^2\dfrac{x}{2}-1}=2\sqrt{3}$; **Đáp số.** $\left\{\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi.\right\}$

31) $\dfrac{(\sin x+\cos x)^2-2\sin^2 x}{1+\cot^2 x}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-3x\right)\right]$.

Đáp số. $\left\{\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\ \dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}.\right\}$

32) $\dfrac{\sin x+\tan x}{1+\tan^2 x}=\dfrac{1}{2}\sin 2x\cdot\sin x$;

33) $\tan 2x-\tan x=\dfrac{1}{6}(\sin 4x+\sin 2x)$;

34) $\sin 4x + 2 = \cos 3x + 4 \cdot \sin x + \cos x$;

Đáp số. $\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}; \dfrac{\pi}{6} + k2\pi; ; \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi.\right\}$

35) $\sqrt{3}(2\cos^2 x + \cos x - 2) + (3 - 2\cos x)\sin x = 0$;

Đáp số. $\left\{\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi; \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{6} + k\pi.\right\}$

36) $\dfrac{4\cos^3 x + 2\cos^2 x \cdot (2\sin x - 1) - \sin 2x - 2(\sin x + \cos x)}{2\sin^2 x - 1} = 0$;

Đáp số. $\dfrac{2k\pi}{3}$.

37) $2\cos^3 x = 2\cos x + 2\tan 2x + \sin x \cdot \sin 2x$;

38) $\dfrac{\cos x \cdot (\cos x + 2\sin x) + 3\sin x \cdot (\sin x + \sqrt{2})}{\sin 2x - 1} = 1$;

39) $2\sin 7x \sin x + 8\sin^4 2x + \sqrt{3}\sin 6x = 8\sin^2 2x$;

40) $\dfrac{\sin 3x + 2\sin 4x}{\cos x} = \tan x + 2\sqrt{3}\cos 2x$;

Đáp số. $\left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}; \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{k2\pi}{3}; \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi.\right\}$

41) $(\sin x + 1) \cdot (3 - 6\sin x - \cos 4x) = \sin 4x \cdot \cos x$. Đáp số. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$.

Bài tập 1.305. Giải phương trình $\cot\dfrac{x}{2} - \dfrac{1 + \cos 3x}{\sin 2x - \sin x} = 2\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Bài tập 1.306. Giải phương trình

$$\sqrt{3}\sin x(4\cos x + 15) + (4\cos x + 1)(\cos x - 4) - 20 = 0.$$

Bài tập 1.307. Giải phương trình:

$$\cos 2x + \cos x \cdot (2\tan^2 x - 1) = 2.$$

Bài tập 1.308. Giải phương trình

$$\frac{4\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right) - 4\sqrt{3}\sin x\cos x - 3}{4\cos^2 x - 1} = 1.$$

Bài tập 1.309. Giải phương trình

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \left(\cos x + \sin x \cdot \tan\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}{\cos x}.$$

Bài tập 1.310. Giải phương trình

$$\sqrt{3}(\sin 2x + \sin x) - \cos 2x + \cos x - 4 = 0.$$

Bài tập 1.311. Giải phương trình

$$\frac{\tan x \cdot \cos 3x + 2\cos 2x - 1}{1 - 2\sin x} = \sqrt{3} \cdot (\sin 2x + \cos x)$$

Bài tập 1.312. Giải phương trình

$$2 \cdot (1 + \cos x) \cdot (\cot^2 x + 1) = \frac{\sin x - 1}{\cos x + \sin x}.$$

Bài tập 1.313. Giải phương trình

$$\frac{(\cos x + 3)(1 - \cos x)}{\cos x} = 2\sin x \cdot \cos^2\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + 3\tan x.$$

Bài tập 1.314. Giải phương trình

$$\frac{(1 + \cos 2x + \sin 2x)\cos x + \cos 2x}{1 + \tan x} = \cos x.$$

Bài tập 1.315. Giải phương trình

$$(\tan x \cot 2x - 1)\sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}(\sin^4 x + \cos^4 x).$$

Bài tập 1.316. Giải phương trình

$$\frac{2\sin(x + \frac{\pi}{4})\cos(2x - \frac{\pi}{4}) - 2\sin^2 x + 4\cos^2\frac{x}{2} + 1}{\cos 2x + 3\cos x + 2} = 1.$$

Bài tập 1.317. Giải phương trình

$$\frac{2\sqrt{3}\cos^2 x + 2\sin 3x.\cos x - 4\sin x - \sqrt{3}}{\sqrt{3}\sin x + \cos x} = 1.$$

Bài tập 1.318. Giải phương trình

$$16(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3\sin 4x\left[2 + \sqrt{2}(1 + \tan x \tan 2x)\right] = 10.$$

Bài tập 1.319. Giải phương trình

$$\frac{(1+\tan x)(2\cos 2x - 1)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2}\cos 3x.$$

Bài tập 1.320. Giải phương trình

$$(1 + 2\sin x)\cos x = 2(\cos^2 x + \cos^4 x) + 1$$

Bài tập 1.321. Giải phương trình

$$\sin 4x - \cos 4x = 1 + 4(\sin x - \cos x).$$

Bài tập 1.322. Giải phương trình

$$\cos 2x + \sqrt{2}\sin x\left(\sin(\frac{\pi}{4} + 3x) - \cos(\frac{3\pi}{4} - 3x) + 1\right) = 2\sin^2(2x + \frac{\pi}{4}).$$

Bài tập 1.323. Giải phương trình

$$\frac{4\sin x.\sin(x + \dfrac{\pi}{3})\cdot\sin(x - \dfrac{\pi}{3})}{2\sin x - 3\cos x} - \cos 2x = 1.$$

Bài tập 1.324. Giải phương trình

$$\frac{\sin x - \sin 2x}{2\sqrt{3}\cos x - 2\cos 3x - \sqrt{3}} = \frac{1}{2}.$$

Bài tập 1.325. Giải phương trình

$$\sin^2 x + \frac{\sin^2 3x}{3\sin 4x}\cdot(\cos 3x\cdot\sin^3 x + \sin 3x\cdot\cos^3 x) = \sin x\cdot\sin^2 3x.$$

Bài tập 1.326. Giải phương trình

$$\frac{\sin^2 x + \sin 2x + \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{2\sin x - 1} = 0.$$

Bài tập 1.327. Giải phương trình

$$\sqrt{3}\left(2\sin^2 x+\sin x-2\right)=(2\sin x-3)\cos x$$

Bài tập 1.328. Giải phương trình

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{\sin 3x+2\cos x}{1+\cos^2 x}=\frac{2}{\cos x}.$$

Bài tập 1.329. Giải phương trình

$$\sqrt{3}\cos x\cdot\tan^2 x+\sin x=4\tan x-\sin x\cdot\tan^2 x-\sqrt{3}\cos x.$$

Bài tập 1.330. Giải phương trình

$$\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{8}{3}\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cot\left(\frac{\pi}{6}-x\right).$$

Bài tập 1.331. Giải phương trình

$$8\sqrt{2}\cos^6 x+2\sqrt{2}\sin^3 x\sin 3x-6\sqrt{2}\cos^4 x-1=0.$$

Bài tập 1.332. Giải phương trình $\dfrac{2\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)+1}{2\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)}=\sqrt{3}\cos x+\sin x.$

Bài tập 1.333. Giải phương trình

$$\sin 3x-2(\cos x-\sin x)+2\cos\left(\frac{3x}{2}+\pi\right)\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)-1=0.$$

Bài tập 1.334. Giải phương trình

$$3\tan^3 x-3\tan x+\frac{3(1+\sin x)}{\tan^2 x}-8\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=0.$$

Bài tập 1.335. Giải phương trình

$$\frac{(\cos x+\sin x)(2\sin 2x+1)+4\cos 2x}{(\cos x-\sin x)(2\sin 2x+1)+2}=\sqrt{3}.$$

Bài tập 1.336*. Giải phương trình

$$\sin\frac{x}{x^2+1}+\sin\frac{1}{x^2+x+2}=0.$$

Bài tập 1.337. Giải phương trình:

$$\left[4\cos^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)-1\right]\sin 2x=2(\sin 7x-\sin 3x)\cos\left(5x-\frac{\pi}{3}\right).$$

1.4 Hình học giải tích trong mặt phẳng

1.4.1 Đường thẳng

Bài tập 1.338. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy có điểm $M(3;1)$ nằm trên đường thẳng AB, phương trình đường phân giác trong góc A và đường cao qua C lần lượt là

$$x-y-1=0, \quad 2x+y+4=0.$$

Xác định toạ độ các đỉnh của tam giác ABC biết diện tích tam giác ABC bằng $\frac{9}{2}$.

Bài tập 1.339. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(-3;6)$, trực tâm $H(2;1)$ và trọng tâm $\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3}\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C.

Bài tập 1.340. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam có trung điểm của cạnh BC là $M(3;2)$, trọng tâm $G\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I(1;-2)$. Xác định toạ độ đỉnh C.

Bài tập 1.341. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có diện tích bằng 2, đường thẳng AB có phương trình $x-y=0$. Điểm $I(2;1)$ là trung điểm của cạnh BC . Tìm toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AC.

Bài tập 1.342. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho tam giác ABC. Biết $A(-1;2)$; B, C lần lượt thuộc các đường thẳng

$$d_1: x-3y=0 \quad d_2: x-y=0,$$

trung điểm M của đoạn BC thuộc trục hoành và có hoành độ dương, diện tích tam ABC bằng 14. Tìm tọa độ các đỉnh B, C .

Bài tập 1.343. Trong mặt phẳng Oxy cho hình vuông $ABCD$ có $A(-2,6)$, đỉnh B nằm trên đường thẳng $x-2y+6=0$. Gọi M và N lần lượt nằm trên BC, CD sao cho $BM=CN$. Biết AM cắt BN tại $I\left(\frac{2}{5},\frac{14}{5}\right)$. Tìm tọa độ điểm C.

Bài tập 1.344. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho các điểm

$$A(1;0),\quad B(-2;4),\quad C(-1;4),\quad D(3;5)$$

và đường thẳng $d: 3x-y-5=0$. Tìm tọa độ điểm M trên d sao cho hai tam giác MAB và MCD có diện tích bằng nhau.

Bài tập 1.345. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;-1)$ và $B(1,-2)$. Biết trọng tâm G của tam giác MAB thuộc đường thẳng d : $x+y-2=0$ và diện tích tam giác MAB bằng 12. Tìm tọa độ điểm M.

Bài tập 1.346. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Biết rằng cạnh huyền nằm trên đường thẳng có phương trình $x+7y-31=0$, điểm $N\left(1;\dfrac{5}{2}\right)$ thuộc đường thẳng AC, điểm $M(2;-3)$ thuộc đường thẳng AB. Xác định toạ độ các đỉnh của tam giác ABC.

Bài tập 1.347. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$, M là trung điểm cạnh BC, phương trình đường thẳng DM là $x-y-2=0$ và $C(5;1)$. Đỉnh A thuộc đường thẳng $d: 2x-y+1=0$. Xác định tọa độ các đỉnh A, B, D.

Bài tập 1.348. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hình thang vuông tại A, B có $AD=2AB$, đường thẳng AD có phương trình $x-\sqrt{2}y=0$, trung điểm cạnh BC là $M(1;0)$. Tìm tọa độ đỉnh A.

Bài tập 1.349. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(0;3)$, trực tâm $H(0;1)$ và điểm $M(1;0)$ là trung điểm của cạnh BC . Tìm tọa độ đỉnh B biết đỉnh B có hoành độ âm.

Bài tập 1.350. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có phương trình cạnh BD là $x-y=0$. Đường thẳng AB đi qua điểm $P(1;\sqrt{3})$, đường thẳng CD đi qua điểm $Q(-2;-2\sqrt{3})$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi, biết độ dài $AB=AC$ và điểm B có hoành độ lớn hơn 1.

Bài tập 1.351. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $A(5;2)$, phương trình đường trung trực cạnh BC và trung tuyến xuất phát từ đỉnh C lần lượt tương ứng là

$$d_1: 2x+y-5=0,\quad d_2: x+y-6=0.$$

Tìm tọa độ các đỉnh B, C của tam giác.

Bài tập 1.352. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đường cao $BH : x+2y-3=0$, trung tuyến $AM : 3x+3y-8=0$. Cạnh BC đi qua $N(3;-2)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C của tam giác

Bài tập 1.353. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A(1;2)$ và các đường thẳng

$$d_1 : x+2y-1=0; \quad d_2 : x+2y+8=0.$$

Tìm B thuộc d_1, D thuộc d_2 và C sao cho $ABCD$ là hình vuông.

Bài tập 1.354. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(2;3)$, đường phân giác trong góc A có phương trình $x-y+1=0$ và tâm đường tròn ngoại tiếp $I(6;6)$.Viết phương trình cạnh BC, biết diện tích tam giác ABC gấp ba lần diện tích tam giác IBC.

Bài tập 1.355. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy. Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác biết $AB=\sqrt{5}$, $C(-1;-1)$, đường thẳng $AB : x+2y-3=0$ và trọng tâm G của tam giác ABC thuộc đường thẳng $d : x+y-2=0$.

Bài tập 1.356. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $M(-1;2)$, $N\left(\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$ lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB và CA. Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác ABC, biết $H(2;1)$ là trực tâm của tam giác ABC.

Bài tập 1.357. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(-3;4)$ và hai đường thẳng

$$d_1 : x-2y-3=0, \quad d_2 : x-y=0.$$

Đường thẳng d qua M, cắt d_1 và d_2 tương ứng ở A và B sao cho $MA = 3MB$. Viết phương trình d, biết điểm A có tung độ dương.

Bài tập 1.358. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A, biết $A(3;-3)$, hai đỉnh B, C thuộc đường thẳng $(d) : x-2y+1=0$ và điểm $E(3;0)$ nằm trên đường cao kẻ từ đỉnh C. Tìm tọa độ hai đỉnh B, C.

Bài tập 1.359. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình thoi $ABCD$ biết đường chéo AC có phương trình $x-y-5=0$, cạnh CD có phương trình $2x+y-1=0$, cạnh AD đi qua điểm $E\left(2;-\frac{3}{2}\right)$. Tìm toạ độ các đỉnh của hình thoi.

Bài tập 1.360. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC với $B(1;-2)$ đường cao $AH: x-y+3=0$. Tìm toạ độ các đỉnh A, C của tam giác ABC biết C thuộc đường thẳng $d: 2x+y-1=0$ và diện tích của tam giác ABC bằng 1.

Bài tập 1.361. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình bình hành $OABC$ có diện tích bằng 4. Biết $A(-1;2)$ và giao điểm I của hai đường chéo nằm trên đường thẳng $\Delta: x-y-1=0$. Tìm toạ độ hai đỉnh B và C.

Bài tập 1.362. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có $D(-1;-1)$, đường thẳng Δ chứa phân giác trong góc A có phương trình là $x-y+2=0$. Tìm toạ độ đỉnh B, biết điểm A có tung độ âm và diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng 6.

Bài tập 1.363*. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(1;2)$ và đường thẳng $d: 4x-3y-23=0$. Hai điểm B và C di động trên d sao cho đoạn BC luôn có độ dài bằng 5. Tìm toạ độ hai điểm B và C sao cho chu vi tam giác ABC là nhỏ nhất.

Bài tập 1.364. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình thoi $ABCD$ với $A(1;0)$, đường chéo BD có phương trình $x-y+1=0$. Tìm toạ độ các đỉnh B, C, D biết $BD=4\sqrt{2}$.

Bài tập 1.365. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A, $B(1;1)$ và phương trình đường thẳng AC là $4x+3y-32=0$. Tia BC chứa điểm M sao cho $BM\cdot BC=75$. Tìm toạ độ điểm C biết bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC bằng $\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$.

Bài tập 1.366. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A; hai điểm A, B thuộc trục hoành. Phương trình đường thẳng BC là $4x+3y-16=0$. Xác định toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC, biết rằng bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng 1.

Bài tập 1.367. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông cân tại , phương trình $BC: 2x-y-7=0$, đường thẳng AC đi qua điểm $M(-1;1)$, điểm A nằm trên đường thẳng $\Delta: x-4y+6=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết rằng đỉnh A có hoành độ dương.

Bài tập 1.368. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;5)$, $B(-4;0)$, $C(5;-1)$. Viết phương tình đường thẳng đi qua A và chia tam giác ABC thành hai phần có tỉ số diện tích bằng 2.

Bài tập 1.369. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm $H\left(-\frac{16}{27};\frac{23}{9}\right)$, phương trình cạnh $BC: x-6y+4=0$ và trung điểm cạnh AB là $K\left(-\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$. Viết phương trình các đường thẳng AB, AC.

Bài tập 1.370. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC với đường cao AH có phương trình $3x+4y+10=0$ và đường phân giác trong BE có phương trình $x-y+1=0$. Điểm $M(0;2)$ thuộc đường thẳng AB và cách đỉnh C một khoảng bằng $\sqrt{2}$. Tính diện tích tam giác ABC. Đáp số. $S_{ABC}=\frac{49}{8}$.

Bài tập 1.371. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(2;3)$, tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(6;6)$, tọa độ tâm đường tròn nội tiếp là $K(4;5)$. Viết phương trình các cạnh của tam giác.

Bài tập 1.372. Trong mặt phẳng Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 6, phương trình đường chéo BD là $2x+y=12$, đường thẳng AB đi qua điểm $M(5;1)$, đường thẳng BC đi qua điểm $N(9;3)$. Viết phương trình các cạnh của hình chữ nhật, biết điểm Bcó hoành độ lớn hơn 5.

Bài tập 1.373. Cho tam giác ABC có diện tích bằng 24 và phương trình các đường trung tuyến kẻ từ các đỉnh A, B, C lần lượt là

$$\Delta_1: x-y+2=0,\quad \Delta_2: 5x-y-2=0,\quad \Delta_3: x+3y-10=0.$$

Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác ABC.

Bài tập 1.374. Cho tam giác ABC biết $A(1;2)$, $B(3;4)$ và tan các góc trong của tam giác tại các đỉnh A và B là $\tan A=-\frac{1}{2}$, $\tan B=\frac{1}{3}$. Tìm toạ độ đỉnh C của tam giác ABC biết rằng hai điểm C và O ở về cùng một phía của đường thẳng AB.

Bài tập 1.375. Trong hệ Oxy cho hình chữ nhật có diện tích bằng 12 đơn vị diện tích. Giao điểm của hai đường chéo là $I\left(\frac{9}{2};\frac{-3}{2}\right)$, điểm $E(3,0)$ là trung điểm của một cạnh của một hình chữ nhật. Hãy xác định tọa độ của hình chữ nhật.

Bài tập 1.376. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AC: 3x+5y-14=0$, đường thẳng AD đi qua $E\left(\frac{7}{5};4\right)$ và $5AB=3AD$. Tìm tọa độ A.

Bài tập 1.377. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm $A(2;3)$, $B(5;2)$, $C(8;6)$ và một đường thẳng $d: y=x+5$. Tìm trên d một điểm D sao cho hình vuông $MNPQ$ có các cạnh MN, NP, PQ, QM lần lượt đi qua các điểm A, B, C, D có diện tích đạt giá trị lớn nhất.

Bài tập 1.378. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $A(-11;3)$ và $B(9;-7)$. Lập phương trình đường thẳng song song với đường thẳng AB, cắt đường tròn đường kính AB tại hai điểm C, D sao cho hình chiếu vuông góc của chúng trên đường thẳng AB là bốn đỉnh của một hình vuông.

Bài tập 1.379. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có hai cạnh AB, CD lần lượt nằm trên hai đường thẳng

$$(d_1): x-2y+5=0, \quad (d_2): x-2y+1=0.$$

Viết phương trình các đường thẳng AD và BC, biết điểm $M(-3;3)$ thuộc đường thẳng AD và điểm $N(-1;4)$ thuộc đường thẳng BC.

Bài tập 1.380. Cho hình vuông $ABCD$ có M là trung điểm cạnh BC, đường thẳng DM có phương trình $x-y-2=0$, điểm $C(3;-3)$, điểm A thuộc đường thẳng $(d): 3x+y-2=0$. Tìm toạ độ các đỉnh A, B, D.

Bài tập 1.381. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có tâm $I(1;1)$; hai đường thẳng AB và CD lần lượt đi qua điểm $M(-2;2)$ và $N(2;-2)$. Tìm toạ độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết đỉnh C có tung độ âm.

Bài tập 1.382*. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;3)$, đường phân giác trong của góc A có phương trình $x-y+1=0$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là $I(6;6)$ và diện tích tam giác ABC gấp ba lần diện tích tam giác IBC. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh BC.

Bài tập 1.383. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(2;1)$ bán kính bằng 5. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác biết trực tâm tam giác là $H(-1;-1)$, $\sin\widehat{BAC}=\dfrac{4}{5}$ và điểm A có hoành độ âm.

1.4.2 Đường tròn

Bài tập 1.384. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(2;3)$. Tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt là $J(6;6)$ và $I(4;5)$. Viết phương trình đường thẳng chứa các cạnh của tam giác ABC.

Bài tập 1.385. Cho đường tròn $(\mathscr{C}):(x-4)^2+y^2=25$ và điểm $M(1;-1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M và cắt đường tròn $(\mathscr{C})$ tại hai điểm A, B sao cho $MA=3MB$.

Bài tập 1.386. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(\mathscr{C})$ có phương trình

$$x^2+y^2-2x-4y=0$$

và điểm $M(6;2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M và cắt $(\mathscr{C})$ tại hai điểm A, B sao cho $MA^2+MB^2=50$.

Bài tập 1.387. (Dự bị 1, khối B, 2010) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn $(\mathscr{C}):(x-1)^2+(y+1)^2=16$. Gọi I là tâm của $(\mathscr{C})$ và $A(1+\sqrt{3};2)$. Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua A luôn cắt $(\mathscr{C})$ tại hai điểm phân biệt. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và cắt $(\mathscr{C})$ tại hai điểm B, C sao cho tam giác IBC không có góc tù và có diện tích bằng $4\sqrt{3}$.

Bài tập 1.388. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn $(\mathscr{C})$ có phương trình $x^2+y^2-2x+4y+2=0$. Gọi $(\mathscr{C}')$ là đường tròn có tâm $M(5;1)$, $(\mathscr{C}')$ cắt $(\mathscr{C})$ tại hai điểm A, B sao cho độ dài đoạn thẳng AB bằng $\sqrt{3}$. Viết phương trình của đường tròn $(\mathscr{C}')$.

Bài tập 1.389. Cho đường tròn $(\mathscr{C})$ có phương trình $x^2+y^2=1$. Viết phương trình đường tròn $(\mathscr{C}')$ có tâm $I(2;2)$ và cắt $(\mathscr{C})$ tại hai điểm A, B sao cho độ dài đoạn AB bằng $\sqrt{2}$. Viết phương trình đường thẳng AB.

Bài tập 1.390. Cho hai đường tròn

$$(\mathscr{C}):(x-1)^2+(y+2)^2=5 \quad \text{và} \quad (\mathscr{C}'):(x+1)^2+(y+3)^2=9.$$

Viết phương trình đường thẳng Δ tiếp xúc với $(\mathscr{C})$ và cắt $(\mathscr{C}')$ tại hai điểm A, B sao cho $AB=4$.

Bài tập 1.391. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(\mathscr{C})$ có phương trình

$$(x-1)^2+(y-2)^2=5.$$

Tìm m để đường thẳng $d: mx-y-2m+1=0$ cắt $(\mathscr{C})$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho độ dài đoạn thẳng AB nhỏ nhất.

Bài tập 1.392. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(\mathscr{C})$ có phương trình

$$x^2+y^2-2x-4y-5=0$$

và điểm $A(0;-1)$. Tìm toạ độ các điểm B, C thuộc $(\mathscr{C})$ sao cho tam giác ABC đều.

Bài tập 1.393. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(\mathscr{C})$ có phương trình

$$(x-3)^2+(y-4)^2=4$$

và hai điểm $B(4;1)$, $C(8;3)$. Tìm toạ độ điểm A nằm trên đường tròn $(\mathscr{C})$ sao cho tam giác ABC vuông tại A.

Bài tập 1.394. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(\mathscr{C})$ có phương trình

$$x^2+y^2-x-4y-2=0$$

và các điểm $A(3;-5)$, $B(7;-3)$. Tìm điểm M trên đường tròn $(\mathscr{C})$ sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất.

Bài tập 1.395. Cho đường tròn

$$(\mathscr{C}):(x-1)^2+(y-2)^2=5$$

và điểm $A(-3;4)$. Qua A kẻ các tiếp tuyến AB và AC tới $(\mathscr{C})$ (B, C là các tiếp điểm). Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bài tập 1.396. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(2;5)$ và đường tròn

$$(\mathscr{C}):x^2+y^2-10x-2y-10=0.$$

Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua M cắt (C) tại hai điểm P, Q sao cho tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại P, Q cắt nhau tại K thỏa mãn $\widehat{PKQ}=60°$.

Bài tập 1.397. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn

$$(\mathscr{C}):x^2+y^2=20$$

và điểm $A(6;0)$. Viết phương trình đường tròn $(\mathscr{C}')$ đi qua A và cắt đường tròn $(\mathscr{C})$ tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Bài tập 1.398. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình

$$x^2+y^2-2x-2y+1=0$$

và điểm $M(m;-1)$ nằm ngoài (C). Gọi A, B là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến đường tròn (C). Tìm m để khoảng cách từ tâm của (C) đến đường thẳng AB bằng $\frac{1}{2}$.

Bài tập 1.399. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình

$$x^2+y^2-4x-8y+11=0$$

Lập phương trình đường tròn có bán kính bé nhất tiếp xúc đồng thời với trục Ox và đường tròn (C).

Bài tập 1.400. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;1)$, $B(4;5)$ và đường tròn (C) có phương trình

$$x^2+y^2-2x-4y+3=0$$

Lập phương trình đường tròn (C') qua B và tiếp xúc với (C) tại A.

Bài tập 1.401. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(6;2)$ và đường tròn (C) có phương trình

$$(x-1)^2+(y-2)^2=5.$$

Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua M và cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB=\sqrt{10}$.

Bài tập 1.402. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(-2;0)$ và đường tròn

$$(\mathscr{C}):(x-1)^2+(y+1)^2=4$$

có tâm I. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A và cắt $(\mathscr{C})$ tại hai điểm phân biệt M, N sao cho diện tích tam giác IMN bằng $\sqrt{3}$ đồng thời tam giác IMN là tam giác tù.

Bài tập 1.403. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d):x-y+1=0$ và đường tròn

$$(C):x^2+y^2-2x+4y-4=0.$$

Tìm điểm M thuộc đường thẳng (d) sao cho qua M kẻ được các tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn với A, B là các tiếp điểm đồng thời khoảng cách từ điểm $N\left(\frac{1}{2};1\right)$ đến đường thẳng AB là lớn nhất.

Bài tập 1.404. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn

$$(C):x^2+(y-3)^2=4$$

và một đường tròn (C') cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Giả sử đường thẳng AB có phương trình là $x+y-2=0$, hãy viết phương trình của đường tròn (C') có bán kính nhỏ nhất.

Bài tập 1.405. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn

$$(K):x^2+y^2=4$$

và hai điểm $A(0;2)$, $B(0;-2)$. Lấy C, D là hai điểm thuộc (K) (không trùng với A, B) và đối xứng với nhau qua trục tung. Biết rằng giao điểm E của hai đường thẳng AC, BD nằm trên đường tròn

$$(K_1):x^2+y^2+3x-4=0,$$

hãy tìm tọa độ của E.

Bài tập 1.406. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn

$$(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 10.$$

Điểm $M(0;2)$ là trung điểm cạnh BC và diện tích tam giác ABC bằng 12. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Bài tập 1.407*. Cho tam giác ABC có trực tâm H thuộc đường thẳng $3x - y - 4 = 0$; đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC có phương trình là

$$x^2 + y^2 - x - 5y + 4 = 0.$$

trung điểm cạnh AB là $M(2;3)$. Tìm tọa độ ba đỉnh tam giác ABC.

Bài tập 1.408. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường tròn

$$(C): x^2 + y^2 = 13$$

và

$$(C'): (x-6)^2 + y^2 = 25.$$

Gọi A là giao điểm của (C) và (C') với $y < 0$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A và cắt (C) và (C') theo hai dây cung có độ dài bằng nhau.

Bài tập 1.409. Cho điểm $A(0;2)$ và đường tròn

$$(\mathscr{C}): x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$$

Tìm toạ độ các điểm B, C thuộc $(\mathscr{C})$ sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Bài tập 1.410. Cho điểm $A(2;1)$ và đường tròn

$$(\mathscr{C}): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5.$$

Viết phương trình đường thẳng(Δ) qua A và cắt $(\mathscr{C})$ tại hai điểm B, C sao cho đoạn thẳng BC ngắn nhất.

Bài tập 1.411. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho điểm $I(2;4)$ và hai đường thẳng

$$(d_1): 2x - y - 2 = 0, \quad (d_2): 2x + y - 2 = 0.$$

Viết phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm I, cắt (d_1) tại hai điểm A, B và cắt (d_2) tại hai điểm C, D sao cho $AB + CD = \frac{16}{\sqrt{5}}$.

Bài tập 1.412. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn

$$(K): x^2 + y^2 = 4$$

và hai điểm $A(0;2)$ và $B(0;-2)$ lấy hai điểm C và D $((C \not\equiv A), B)$ là hai điểm thuộc (K) và đối xứng với nhau qua trục tung. Biết rằng giao điểm E của hai đường thẳng AC, BD nằm trên đường tròn

$$(K_1): x^2 + y^2 + 3x - 4 = 0,$$

hãy tìm tọa độ của E.

Bài tập 1.413. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC cân tại A có phương trình các cạnh BC, AB lần lượt là

$$x + 2y - 2 = 0 \quad \text{và } 3x - y + 10 = 0.$$

Tìm tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC biết cạnh AC đi qua $M(2;2)$.

Bài tập 1.414. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn

$$(T): (x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$$

và hai điểm $A(2;1)$, $B(0;5)$. Từ điểm M thuộc đường thẳng $(d): x+2y+1 = 0$ kẻ hai tiếp tuyến ME, MF đến đường tròn (T), (E, F là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm E, F biết $ABEF$ là hình thang.

Bài tập 1.415. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn

$$(C): (x+6)^2 + (y-6)^2 = 50.$$

Viết phương trình đường thẳng (d) cắt hai trục tọa độ tại A, B và tiếp xúc với đường tròn (C) tại điểm M sao cho M là trung điểm của AB.

Bài tập 1.416. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A(2;6)$ chân đường phân giác trong góc A là $D\left(2;\frac{-3}{2}\right)$ tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác là $I\left(\frac{-1}{2};1\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Bài tập 1.417. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có điểm $B(1;1)$, trung tuyến $CM: 5x-9y+20=0$, đường cao $AH: x+y-4=0$ và các đường cao BK, CI. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác HIK.

Bài tập 1.418. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn

$$(C_1): (x+2)^2+(y-1)^2=\frac{4}{3}$$

có tâm O_1. Đường tròn (C_2) có bán kính bằng 2, tâm O_2 nằm trên đường thẳng $(d): x+y-2=0$ và cắt (C_1) tại hai điểm A, B sao cho tứ giác O_1AO_2B có diện tích bằng $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Viết phương trình đường tròn (C_2).

Bài tập 1.419. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(-1;-3)$, trực tâm $H(1;-1)$ và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $I(2;-2)$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C của tam giác ABC.

Bài tập 1.420. Trong mặt phẳng Oxy, xét tam giác ABC có A(1;5), đường thẳng BC có phương trình $x-2y-6=0$, điểm $I(1;0)$ là tâm đường tròn nội tiếp. Hãy tìm tọa độ các đỉnh B, C.

Bài tập 1.421. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn

$$(\mathscr{C}): (x-3)^2+(y-2)^2=101.$$

và hai điểm $A(4;2)$, $B(5;3)$. Tìm toạ độ hai điểm C, D thuộc đường tròn $(\mathscr{C})$ sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Bài tập 1.422. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn

$$(\mathscr{C}): x^2+y^2-2x+2y-6=0.$$

Biết đường thẳng AB song song với đường thẳng $(d): x-y=0$. Tìm toạ độ điểm A, B.

Bài tập 1.423. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A nằm trên đường thẳng $\Delta: x+2y+1=0$, đường cao BH có phương trình $x+1=0$, đường thẳng BC đi qua điểm $M(5;1)$ và tiếp xúc với đường tròn $(\mathscr{C}): x^2+y^2=8$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết các đỉnh B, C có tung độ âm và đoạn thẳng $BC=7\sqrt{2}$.

Bài tập 1.424. Cho mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC vuông cân tại $A(1;2)$. Viết phương trình đường tròn (T) ngoại tiếp tam giác ABC biết đường thẳng $d: x-y-1=0$ là tiếp tuyến của (T) tại điểm B.

Bài tập 1.425. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $B(-1;1)$, $C(2;-2)$. Đường tròn tâm $I(2;1)$ đi qua B, C cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N tương ứng sao cho $MA=MB$ và $NC=2NA$. Tìm tọa độ đỉnh A.

Bài tập 1.426. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường tròn

$$(\mathscr{C}): x^2+y^2-2x-4y+1=0$$

và đường thẳng $\Delta: x-y+2=0$. Tìm toạ độ điểm M thuộc Δ sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm) và $AB=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

Bài tập 1.427. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai đường tròn

$$(\mathscr{C}): x^2+y^2-18x-6y+65=0, \quad (\mathscr{C}'): x^2+y^2=9.$$

Từ một điểm M thuộc đường tròn $(\mathscr{C})$ kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn $(\mathscr{C}')$ (A, B là các tiếp điểm). Tìm toạ độ điểm M biết độ dài đoạn thẳng AB bằng $\dfrac{24}{5}$.

Bài tập 1.428. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A, các đỉnh A và B thuộc đường thẳng $d: y=2$, phương trình cạnh $BC: \sqrt{3}x-y+2=0$. Tìm toạ độ các đỉnh A, B, C biết bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng $\sqrt{3}$.

Bài tập 1.429. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho đường tròn

$$(\mathscr{C}): x^2+y^2-8x+6y+23=0$$

và đường thẳng $d: x+y-1=0$. Xác định toạ độ các đỉnh A và C của hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(\mathscr{C})$, biết điểm A thuộc đường thẳng d.

Bài tập 1.430. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: 5x-2y-19=0$ và đường tròn

$$(\mathscr{C}): x^2+y^2-4x-2y=0.$$

Từ một điểm M nằm trên đường thẳng Δ kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn $(\mathscr{C})$ (A và B là các tiếp điểm). Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB biết $AB=\sqrt{10}$.

Bài tập 1.431. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) : $(x+1)^2+(y-2)^2=16$ và đường thẳng Δ có phương trình $3x+4y-5=0$. Viết phương trình đường tròn (C') có bán kính bằng 1 tiếp xúc ngoài với (C) sao cho khoảng cách từ tâm I của nó đến Δ là lớn nhất.

Bài tập 1.432. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường tròn (C_1) : $(x-1)^2+(y-2)^2=9$ và $(C_2): (x+2)^2+(y-10)^2=4$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết rằng A thuộc (C_1); C thuộc (C_2); B, D thuộc đường thẳng $d: x-y+6=0$ và tung độ điểm C lớn hơn 9.

Bài tập 1.433. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x+y=0$. Gọi (C) là đường tròn tâm I, (C) cắt d tại A và B sao cho $OA\cdot OB=6$, đồng thời tam giác AIB vuông tại I và có diện tích bằng 2. Viết phương trình của (C), biết O ở ngoài (C).

Bài tập 1.434. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn hai đường tròn có phương trình lần lượt là

$$(C_1): (x-1)^2+(y-2)^2=9, \quad (C_2): (x+1)^2+y^2=16$$

và đường thẳng $d: 2x+4y-15=0$. Tìm M trên (C_1) và N trên (C_2) sao cho MN nhận đường thẳng d là đường trung trực và N có hoành độ âm.

Bài tập 1.435. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy lập phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC, biết trực tâm của tam giác ABC là $H(2;10)$, phương trình cạnh BC là $x+2y-7=0$, tâm của đường tròn (C) nằm trên đường thẳng $x-y-3=0$, đồng thời bán kính đường tròn bằng 5.

Bài tập 1.436. Trong mặt phẳng Oxy, hãy lập phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, biết các đỉnh $B(0;1)$,, $C(-2;1)$ và trực tâm của tam giác là $H(1;-2)$.

Bài tập 1.437. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn

$$(\mathscr{C}):(x-2)^2+(y-1)^2=8$$

và điểm $A(0;3)$. Lập phương trình đường tròn $(\mathscr{C}')$ đi qua A có tâm nằm trên đường tròn

$$(C_1):(x-6)^2+(y+1)^2=18$$

và cắt $(\mathscr{C})$ theo một dây cung có độ dài lớn nhất.

1.5 Hình học giải tích trong Không gian

1.5.1 Đường thẳng và mặt phẳng

Bài tập 1.438. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ điểm $A(1;-1;-1)$, hai mặt phẳng

$$(P):x+y+2z-3=0, \quad (Q):2x-y-3z+5=0$$

và đường thẳng

$$\Delta:\begin{cases} x=-t+2, \\ y=2t-1, \\ z=-t. \end{cases}$$

Viết phương trình đường thẳng (ℓ) đi qua điểm A, vuông góc với Δ, cắt hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt tại hai điểm M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Bài tập 1.439. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng

$$(\Delta_1): \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}, \quad (\Delta_2): \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2}.$$

và điểm $A(-1;0;1)$. Tìm M thuộc (Δ_1) và N thuộc (Δ_2) sao cho $MN = 2\sqrt{6}$ và tam giác AMN vuông tại A.

Bài tập 1.440. Trong không gian với hệ tọa độ vuông góc $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;0;1)$; $B(0;-2;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 4 = 0$. Tìm tọa độ điểm C thuộc (P) sao cho tam giác ABC cân tại C và có diện tích $S = 3\sqrt{2}$.

Bài tập 1.441. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;0;0)$, $H(0;-2;5)$.Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, cắt Oy, Oz lần lượt tại B và C sao cho tam giác ABC nhận AH làm đường cao.

Bài tập 1.442. Cho hai điểm $A(1;-2;3)$, $B(2;1;1)$ và mặt phẳng

$$(P): x + y + 2z + 2 = 0.$$

Chứng minh đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P). Tìm toạ độ điểm C thuộc mặt phẳng (P) sao cho tam giác ABC cân đỉnh C và có chu vi nhỏ nhất.

Bài tập 1.443. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho ba điểm

$$A(-1;0;2), \quad B(2;1;4), \quad C(1;-1;2).$$

Tìm tọa độ điểm M sao cho $MA = MB = MC$ và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (ABC) bằng $\sqrt{5}$.

Bài tập 1.444. Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(-1;1;1)$, song song với đường thẳng

$$\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1}$$

và cách đường thẳng Δ một khoảng bằng 2.

Bài tập 1.445. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;3)$, $B(-5;10;-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+2z-1=0$. Gọi M là một điểm trên (P) sao cho $MA+MB=4\sqrt{14}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M cắt $d$và tạo với d một góc φ có giá trị $\cos\varphi=\dfrac{2\sqrt{10}}{9}$, biết

$$d: \frac{x}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}.$$

Bài tập 1.446. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 2x+y-z=0$ và hai đường thẳng

$$(d): \frac{x-4}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-3} \quad (d'): \frac{x-3}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{2}.$$

Tìm điểm M thuộc (P), N thuộc (d) sao cho M, N đối xứng nhau qua (d'). Viết phương trình mặt cầu có tâm I thuộc (d') và đi qua M,N sao cho tam giác IMN vuông.

Bài tập 1.447. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $M(1;-1;0)$ và đường thẳng

$$\Delta: \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{1}$$

và mặt phẳng $(P): x+y+z-2=0$. Tìm điểm A thuộc mặt phẳng (P) sao cho AM vuông góc với Δ và khoảng cách từ A đến Δ bằng $\dfrac{\sqrt{66}}{2}$.

Bài tập 1.448. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x+y+z-2=0$ và hai đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1} \quad \text{và} \quad \Delta_2: \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{-2}.$$

Chứng minh Δ_1 và Δ_2 chéo nhau. Lập phương trình đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) cắt Δ_1 và Δ_2 lần lượt tại A, B sao cho độ dài AB nhỏ nhất.

Bài tập 1.449. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng

$$d: \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-1}{-2}.$$

Xét hình bình hành $ABCD$ có

$$A(1;0;0),\quad C(2;2;2),\quad D\in d.$$

Tìm toạ độ đỉnh B biết diện tích hình bình hành $ABCD$ bằng $3\sqrt{2}$.

Bài tập 1.450. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ điểm $A(2;1;-3)$ và đường thẳng

$$d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+1}{-4}$$

B là điểm đối xứng của A qua (d). Tìm tọa độ điểm C thuộc mặt phẳng

$$(P): x+2y-3z+5=0$$

sao cho BC có độ dài nhỏ nhất.

Bài tập 1.451. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d_1:\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-5},\quad d_2:\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{2}.$$

và mặt phẳng

$$(\alpha): 2x+y+z-7=0.$$

Đường thẳng Δ cắt d_1 và d_2 tương ứng ở A và B, đồng thời khoảng cách từ Δ đến mặt phẳng (α) bằng $\sqrt{6}$. Viết phương trình Δ, biết điểm A có hoành độ dương.

Bài tập 1.452. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;1)$, đường thẳng

$$(d):\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}$$

và mặt phẳng $(P): x+y-z+3=0$. Gọi A là giao điểm của d và (P). Viết phương trình đường thẳng Δ chứa M, cắt (d) và (P) tương ứng ở B và C sao cho tam giác ABC cân tại B.

Bài tập 1.453. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm

$$A\left(0;\frac{5}{2};4\right),\quad B\left(2;6;\frac{1}{2}\right),\quad C(2;1;0),\quad D(0;5;8),\quad E(-2;9;1).$$

Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng DE sao cho hai đường thẳng AB và CM cắt nhau.

Bài tập 1.454. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 4 + t, \\ z = 1 - 2t. \end{cases}$$

Viết phương trình mặt phẳng chứa Δ và cắt các trục toạ độ tại các điểm M, N, P sao cho hình chóp $O.MNP$ là hình chóp đều.

Bài tập 1.455. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}, \quad d_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}$$

và điểm $A(1;-1;2)$. Tìm toạ độ các điểm B, C lần lượt thuộc d_1, d_2 sao cho đường thẳng BC nằm trong mặt phẳng đi qua A và đường thẳng d_1, đồng thời $AC = 2AB$. Biết điểm B có hoành độ dương.

Bài tập 1.456. Cho điểm $A(1;1;2)$ và đường thẳng

$$(d) : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-1}.$$

Tìm hai điểm M và N trên (d) sao cho tam giác AMN vuông cân tại M và có diện tích bằng $3\sqrt{2}$.

Bài tập 1.457. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng

$$(P) : x + y + z + 2 = 0, \quad (Q) : x + y - z - 1 = 0.$$

Lập phương trình đường thẳng (d) song song với hai mặt phẳng (P) và (Q) đồng thời cách hai mặt phẳng đó một đoạn bằng $\sqrt{3}$.

Bài tập 1.458. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng

$$(P) : x + z - 3 = 0, \quad (Q) : y + z + 5 = 0$$

và điểm $A(1;-1;-1)$. Viết phương trình của đường thẳng (Δ) đi qua điểm A, vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q), đồng thời cắt hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt tại M, N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Bài tập 1.459. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$\Delta_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-1} \quad \text{và} \quad \Delta_2 : \begin{cases} x = 2-t, \\ y = 3-t, \\ z = -2. \end{cases}$$

Viết phương trình mặt phẳng (P) vuông góc với Δ_1 và cắt Δ_1, Δ_2 tại M và N sao cho MN nhỏ nhất.

Bài tập 1.460. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có điểm $M(3;2;0)$ nằm trên cạnh BC.Phương trình đường phân giác trong góc B và đường trung trực của BC có phương trình lần lượt là

$$(d_1) : \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{2} \ ; \ (d_2) : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{1}.$$

Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết $AB = \sqrt{867}$.

1.5.2 Mặt cầu

Bài tập 1.461. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng

$$\Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$$

và mặt phẳng $(P) : x - y + 2z - 1 = 0$. Gọi A là giao điểm của Δ và (P). Tìm toạ độ điểm M thuộc Δ sao cho mặt cầu tâm M, bán kính MA cắt mặt phẳng (P) theo một đường tròn có bán kính bằng $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Bài tập 1.462. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 6 = 0,$$

mặt phẳng $(P) : 2x + y + 1 = 0$ và điểm $A(1;0;1)$. Hãy viết phương trình đường thẳng (d) đi qua A, song song với (P) và cắt (S) tại EF với $EF = 4$.

Bài tập 1.463. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu

$$(\mathscr{S}) : x^2 + y^2 + z^2 - 8z - 20 = 0$$

và mặt phẳng $(P) : 2x + 2y - z - 5 = 0$. Lập phương trình đường thẳng (Δ) nằm trong (P), đi qua điểm $M(-1;4;1)$ đồng thời cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 6\sqrt{3}$.

Bài tập 1.464. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x+y-3=0$. Gọi N là giao điểm của (P) và (d). Lập phương trình mặt cầu có tâm I thuộc mặt phẳng $(Q): 2x-2y+z+1=0$ tiếp xúc với (P) tại M đồng thời tam giác IMN vuông cân tại M.

Bài tập 1.465. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;1)$ và $B(1;2;1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có đường kính là đoạn vuông góc chung của đường thẳng AB và đường thẳng chứa trục Ox.

Bài tập 1.466. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;-3)$. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$, biết các điểm A, B, C lần lượt nằm trên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz tương ứng sao cho mặt phẳng (ABC) đi qua điểm M và tam giác ABC nhận M làm trực tâm.

Bài tập 1.467. Cho hai điểm $A(7;-6;-3)$, $B(3;6;-1)$ và mặt cầu

$$(\mathscr{S}): x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=9.$$

Tìm điểm M trên mặt cầu $(\mathscr{S})$ sao cho diện tích tam giác MAB đạt giá trị lớn nhất; nhỏ nhất.

Bài tập 1.468. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-1;-1;-2)$ cắt đường thẳng

$$d: \frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{1}$$

và cắt mặt cầu

$$(S): (x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$$

tại hai điểm A, B sao cho $AB=8$.

Bài tập 1.469. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z+2=0$ và đường thẳng

$$(d): \frac{x-2}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{3}.$$

Mặt cầu (S) có tâm I nằm trên đường thẳng (d) và giao với mặt phẳng (P) theo một đường tròn, đường tròn này với tâm I tạo thành một hình nón có thể tích lớn nhất. Viết phương trình mặt cầu (S), biết bán kính mặt cầu bằng $3\sqrt{3}$.

Bài tập 1.470. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

$$(\alpha): x+y-z+6=0, \quad (\beta): 2x-2y+z+3=0.$$

Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên mặt phẳng (α), đi qua điểm $A(1;-2;4)$, tiếp xúc (β) và cắt đường thẳng

$$(d): \frac{x+3}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{-1}$$

tại hai điểm B, C sao cho $BC=\dfrac{\sqrt{14}}{7}$.

Bài tập 1.471. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu

$$(\mathscr{S}): x^2+y^2+z^2-10x-2y-6z+10=0$$

và mặt phẳng $(P): x+2y+2z+5=0$. Từ một điểm M trên mặt phẳng (P) kẻ một đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu $(\mathscr{S})$ tại điểm N. Tìm vị trí của M để $MN=\sqrt{11}$.

Bài tập 1.472. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $B(2;1;2)$, đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng

$$d_1: \frac{x+2}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+4}{4}.$$

Đường thẳng d_2 cắt Δ tại M, đi qua điểm $N(2;2;0)$ và tiếp xúc với mặt cầu

$$(\mathscr{S}): x^2+y^2+z^2=4.$$

Tìm tọa độ điểm M.

Bài tập 1.473. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$$(S): (x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=8$$

và đường thẳng d có phương trình

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}.$$

Lập phương trình mặt cầu (S') có tâm thuộc đường thẳng d, tiếp xúc với mặt cầu (S) và có bán kính gấp đôi bán kính của mặt cầu (S).

Bài tập 1.474. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu

$$(S): x^2+y^2+z^2-8z-20=0$$

và mặt phẳng $(P): 2x+2y-z-5=0$. Lập phương trình đường thẳng (Δ) nằm trong (P) , đi qua điểm $M(-1;4;1)$ đồng thời cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB=6\sqrt{3}$.

Bài tập 1.475. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng

$$(P): x+y-3=0, \quad (Q): 2x-2y+z+1=0,$$

đường thẳng

$$(d): \begin{cases} x=1+2t, \\ y=1-t, \\ z=t \end{cases}$$

và điểm $M(1;2;1)$. Gọi N là giao điểm của (d) và (P). Viết phương trình mặt cầu có tâm I thuộc mặt phẳng (Q), tiếp xúc với (P) tại M sao cho tam giác IMN vuông cân tại M.

Bài tập 1.476*. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$$(\mathscr{S}): (x-2)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=1.$$

Tìm toạ độ điểm M thuộc trục Oz sao cho qua Q kẻ được ba tiếp tuyến MA, MB, MC tới mặt cầu $(\mathscr{S})$ và điểm $D(1;2;5)$ thuộc mặt phẳng (ABC).

Bài tập 1.477. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$(\Delta_1): \frac{x-1}{-2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{1}\ ;\ (\Delta_2): \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-3}.$$

Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I(-1;-2;-1)$ và cắt đường thẳng (Δ_1) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I. Tìm điểm M trên (Δ_2) sao cho từ đó có thể kẻ được đến mặt cầu (S) một tiếp tuyến (tức đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu (S)) có độ dài bằng $\dfrac{2\sqrt{30}}{3}$.

1.6 Hình không gian

1.6.1 Khối chóp

Bài tập 1.478. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3a$; đường thẳng SA hợp với mặt phẳng (ABC) một góc bằng $60°$. Tam giác ABC vuông tại B, $\widehat{ACB} = 30°$; G là trọng tâm tam giác ABC. Hai mặt phẳng (SGB) và (SGC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Đáp số. $\dfrac{243}{112}a^3$.

Bài tập 1.479. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AD = DC$, $AB = 2AD$, mặt bên (SBC) là tam giác đều có cạnh bằng $2a$ và thuộc mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

Bài tập 1.480. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$. Mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, tam giác SAD vuông tại S và góc SAD bằng $60°$. Điểm M là trung điểm của cạnh SC. Tính thể tích khối chóp $M.BCD$ và côsin của góc tạo bởi hai đường thẳng AC và DM.

Bài tập 1.481. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{3}$, tam giác SBC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đường thẳng SD tạo với mặt phẳng (SBC) một góc bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SBD).

Bài tập 1.482. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$. Mặt bên (SBC) vuông góc với mặt phẳng đáy, hai mặt bên còn lại cùng hợp với mặt phẳng (ABC) góc $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ theo a.

Bài tập 1.483. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và cạnh bằng a; SA vuông góc với đáy $ABCD$, SC tạo với mặt phẳng

(SAB) một góc bằng 30^circ. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC Tính thể tích khối chóp $O.AMN$ và khoảng cách từ điểm N đến mặt phẳng (AOM).

Bài tập 1.484. Cho hình chóp $S.ACD$ có đáy ACD là tam giác đều cạnh a, tam giác SAD cân và $SD = a\sqrt{2}$. Gọi B là điểm đối xứng với D qua trung điểm O của cạnh AC, M là trung điểm của cạnh AB, SM vuông góc với AB. Tính thể tích khối chóp $A.AMCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SA theo a.

Bài tập 1.485. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = 6$, cạnh$CD = 8$ và các cạnh còn lại bằgn $\sqrt{74}$. Tìm bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Bài tập 1.486. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCS)$ và đường thẳng SC hợp với mặt phẳng (SAB) một góc $30°$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu góc của A lên SB, SC. Tính thể tích khối chóp $O.AMN$ và khoảng cách từ điểm N đến mặt phẳng (AOM).

Bài tập 1.487. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành với $AB = a$, $AD = 2a$, SC vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $\widehat{BAD} = 60°$; SA hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ góc $45°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD.

Bài tập 1.488. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O, $AB = a$, $AD = 2a$; M là điểm thuộc cạnh AB sao cho $MA = 2MB$, tam giác SMO cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Biết mặt bên (SBC) hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ góc $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.AMOD$ theo a.

Bài tập 1.489. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$; Cạnh SA vuông góc với đáy, cạnh SB lập với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc $60°$. Trên cạnh SA lấy điểm M với $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Mặt phẳng (BCM) cắt cạnh SD tại N. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC và thể tích khối chóp $S.BCNM$.

Bài tập 1.490. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{3}$, tam giác SBC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đường thẳng SD hợp với mặt phẳng (SBC) một góc bằng $60°$. Tính thể tich khối chóp $S.ABCD$ theo a và góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.

Bài tập 1.491. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là thang vuông tại A và B, $AB = SD = 3a$, $AD = SB = 4a$. Đường chéo AC vuông góc với mặt phẳng (SBD). Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD.

Bài tập 1.492. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$, $\widehat{BAD} = 60°$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC. Tính thể tích khối tứ diện $NSDC$ và cô sin của góc hợp bởi hai đường thẳng SM và DN.

1.6.2 Khối lăng trụ

Bài tập 1.493. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A. Mặt bên $ABB'A'$ là hình thoi cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc $A'AB$ có độ lớn bằng $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC'.

Bài tập 1.494. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại C, cạnh đáy AB bằng $2a$ và $\widehat{ABC} = 30°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CB' bằng $\dfrac{a}{2}$.

Bài tập 1.495. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A_1B_1C_1$ có chín cạnh đều bằng 5. Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB_1 và BC_1.

Bài tập 1.496. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AC = a$, $BC = 2a$ và $\widehat{ACB} = 120°$. Đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ một góc $30°$. Gọi M là trung điểm của cạnh BB'. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và CC' theo a.

Bài tập 1.497. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài các cạnh bằng 1. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và BB'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng IK, AD và tính thể tích của khối tứ diện $IKAD$.

Bài tập 1.498. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên là hình vuông cạnh bằng a. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, $A'C'$, $B'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và $A'F$ theo a.

1.7 Tích phân

Các câu tích phân trong **Bài tập 1.499** được lấy từ các đề thi thử năm 2012 của một số trường trong toàn quốc.

Bài tập 1.499. Tính các tích phân sau:

1) $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{x+\sqrt{x^2+9}}\,\mathrm{d}x$; Đáp số. $\dfrac{34}{27}$.

2) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\,\mathrm{d}x$; Đáp số. $\dfrac{26-16\sqrt{2}}{27}$.

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(5x+4)^3\cdot 3x+1}}\,\mathrm{d}x$; Đáp số. $\dfrac{1}{21}$.

4) $\displaystyle\int_2^5 \frac{x^2+2x\cdot\sqrt{x-1}}{1+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$. Đáp số. $\dfrac{827}{30}$.

5) $\displaystyle\int_0^1 (x-1)^3\cdot\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$; Đáp số. $-\dfrac{2}{15}$.

6) $\displaystyle\int_2^5 \frac{\sqrt{x-1}-2}{x\cdot\sqrt{x-1}+2x-2}\,\mathrm{d}x$; Đáp số. $1+2\ln\dfrac{3}{2}$.

7) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}+x}\,\mathrm{d}x$; Đáp số. $\dfrac{58}{15}-\dfrac{9\sqrt{3}}{5}$.

8) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2x-x^2}}{(x-1)^4}\,\mathrm{d}x$; Đáp số. $\sqrt{3}$.

9) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{x+\ln x-1}{(x\cdot\ln x+2)^2}\,\mathrm{d}x$; Đáp số. $\dfrac{1}{2}$.

10) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{\sin x + \sqrt{3}\cos x}\,\mathrm{d}x.$ Đáp số. $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8}\ln 3.$

11) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(2x+1)\cdot \ln x + 3}{x\cdot \ln x + 1}\,\mathrm{d}x;$ Đáp số. $\ln(1+\mathrm{e}) + 2(\mathrm{e}-1).$

12) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{2x^2 + x(1+2\ln x) + \ln^2 x}{(x^2 + x\ln x)}\,\mathrm{d}x;$ Đáp số. $2 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} + \dfrac{1}{\mathrm{e}+1}.$

13) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 3x + 3\sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x;$ Đáp số. $1 - \ln 2 + \dfrac{\pi}{4}.$

14) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{\cos x \cdot \sqrt{\sin 2x + \cos^2 x}}\,\mathrm{d}x;$ Đáp số. $\pi\left(1 + \dfrac{\ln 3}{8}\right).$

15) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\sqrt{2+x}}{x\left(\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}\right)}\,\mathrm{d}x;$ Đáp số. $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\ln 2.$

16) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{(x^3+1)\cdot \ln x + 2x^2 + 1}{2 + x\cdot \ln x}\,\mathrm{d}x;$ Đáp số. $\dfrac{\mathrm{e}^3 - 1}{3} + \ln\dfrac{\mathrm{e}+2}{2}.$

17) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x;$ Đáp số. $\ln\left[\dfrac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}+1)}{2}\right].$

18) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x(2\cos x - 3)}{\sin^2 x + 2\cos x - 2}\,\mathrm{d}x.$ Đáp số. $2\ln x + 1.$

19) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x - 1}{x^2 - (\ln x)^2}\,\mathrm{d}x;$ Đáp số. $-\ln 2 - \dfrac{1}{2}.$

20) $\displaystyle I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x \cdot \cos x}{1 + \cos^2 2x}\,\mathrm{d}x.$ Đáp số. $\dfrac{\pi}{16}.$

21) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x - 1 + \sqrt{\mathrm{e}^x - 2}}\,\mathrm{d}x.$ Đáp số. $2\ln 3 - 1.$

22) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(x^2-1)\ln x + x^2}{x + x\ln x}\,\mathrm{d}x;$ Đáp số. $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 + \ln 2 - \dfrac{3}{2}.$

23) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot x \cdot \ln(\sin x)}{\sin x}\,\mathrm{d}x;$ Đáp số. $\sqrt{2} - 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln 2.$

24) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos 2x}\mathrm{d}x.$ Đáp số. $\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right).$

25) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{5\cos^2 x-8\sin x\cdot\cos x+3\sin^2 x}\mathrm{d}x;$ Đáp số. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{6+\sqrt{3}}{5}.$

26) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x-1}{\ln^2 x-x^2}\mathrm{d}x;$ Đáp số. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}.$

27) $\displaystyle\int_1^{6} \frac{\ln(2+x\cdot\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}}\mathrm{d}x;$ Đáp số. $-8\ln 2-6+10\ln 5.$

28) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{1} \left[\ln(3x^4+x^2)-2\ln x\right]\mathrm{d}x;$ Đáp số. $\dfrac{4\ln x+\ln 3}{3}-\dfrac{4}{3}+\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}.$

29) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x;$ Đáp số. $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}\ln 2.$

Bài tập 1.500. Tính tích phân $\displaystyle\int_1^2 \frac{2(1+x\mathrm{e}^x)+x^2\mathrm{e}^x}{x^2(2+x\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}x.$

Bài tập 1.501. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_1^{\sqrt{5}} \frac{\ln x^2-\ln\left(x^2+15\right)}{\sqrt{x^2+15}\left(x+\sqrt{x^2+15}\right)^2}\mathrm{d}x.$

Bài tập 1.502. Tính tích phân $\displaystyle\int_1^2 (1+(x+1)\cdot\ln x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$

Bài tập 1.503. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin^2 x}{1+\sin 2x}\mathrm{d}x.$

Bài tập 1.504. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^2 x+\ln x}{(\ln x+x+1)^3}\mathrm{d}x$

Bài tập 1.505. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{1+\ln x(3+2\ln x)}{x\left(1+\sqrt{2+\ln x}\right)}\mathrm{d}x.$

Bài tập 1.506. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^4 \frac{(x+1)}{(1+\sqrt{1+2x})^2}\mathrm{d}x.$

Bài tập 1.507. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{2x-x^2}+2\right)^2}.$

Bài tập 1.508. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{2+\ln x(2+\ln^2 x)}{x^2.\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Bài tập 1.509. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{x(x+\sin x)}{(1+\sin x)\sin x}\,\mathrm{d}x$.

Bài tập 1.510. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}}\frac{\ln^2 x-3\ln x+3}{x(\ln x-2)}\mathrm{d}x$.

Bài tập 1.511. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos^4(\pi-x)}{\cos^4\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)+\sin^4\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)-1}\mathrm{d}x$.

Bài tập 1.512. Tính tích phân $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}}\frac{\sin 2x+\ln(\mathrm{e}\cdot x)+x\cdot\sin 2x\cdot\ln x}{1+x\ln x}\,\mathrm{d}x$.

Bài tập 1.513. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(3\cos x-4\cos^3 x)\cdot\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$.

Bài tập 1.514. Tính tích phân $\displaystyle\int_{1}^{4}\frac{(1-2x)\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}(x-\mathrm{e}^{2x})}\,\mathrm{d}x$.

Bài tập 1.515. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{2}^{5}\frac{\ln\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{x-1+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$.

Bài tập 1.516. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+2\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{x}{2}}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

Bài tập 1.517. Tính tích phân $J=\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{(1+\cos x)^{\sin x+1}}{\sin x+1}\,\mathrm{d}x$.

Bài tập 1.518. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{(\sqrt{3}\sin x+\cos x)^3}\mathrm{d}x$.

Bài tập 1.519. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x(x\sin x+\sqrt{x})-\sin x}{x-1}\mathrm{d}x$.

Bài tập 1.520. Tính tích phân $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x$.

Bài tập 1.521. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{3}^{5}\frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}}{(x+1)\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$.

Bài tập 1.522. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x$.

Bài tập 1.523. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin x}{(\sin x+\cos x)^3}\,\mathrm{d}x$.

Bài tập 1.524. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^4 \frac{(x+1)}{(1+\sqrt{1+2x})^2}\,\mathrm{d}x$.

Bài tập 1.525. Tính tích phân $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cdot(1+14x\cos x)-x\sin 4x}{7-2\cos 2x}\mathrm{d}x$.

Bài tập 1.526. Tính tích phân $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{\sqrt{x}\ln x}{1+\ln x}\right)^2\,\mathrm{d}x$.

Bài tập 1.527. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{(x^2+2)\mathrm{e}^{2x}+x^2(1-\mathrm{e}^x)-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$.

Bài tập 1.528. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^3} \frac{2\ln x+1}{x(\sqrt{\ln x+1}+1)}\,\mathrm{d}x$.

Bài tập 1.529. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x^3\ln x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$.

Bài tập 1.530. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{x-\mathrm{e}^{2x}}{x\cdot\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$.

Bài tập 1.531. Tính tích phân $T=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\sqrt{1-\sin x}}{\sin x+3}\mathrm{d}x$

Bài tập 1.532. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x^2\cos^2 x-x\sin x-\cos x-1}{(1+x\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$.

Bài tập 1.533. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_3^{10} \frac{4+(x^2-x)\sqrt[3]{x-2}}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x$.

Bài tập 1.534. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{2-x+(x-1)\ln x-\ln^2 x}{(1+x\ln x)^2}\mathrm{d}x$.

Bài tập 1.535. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_1^2 x\left(1-\frac{1}{x^4}\right)\left[\ln(x^2+1)-\ln x\right]\,\mathrm{d}x$.

Bài tập 1.536. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{x}{1-x^4} \ln\left(\frac{3-x^2}{2}\right) \mathrm{d}x.$

Bài tập 1.537. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\mathrm{e}^x[4+4(\sin x+\cos x)+\sin 2x]}{(1+\cos x)^2} \mathrm{d}x.$

Bài tập 1.538. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{2\mathrm{e}^x+3}{e^x+2\mathrm{e}^{-x}+3} \mathrm{d}x.$

Bài tập 1.539. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_1^{\sqrt{5}} \frac{\ln x^2 - \ln\left(x^2+15\right)}{\sqrt{x^2+15}\left(x+\sqrt{x^2+15}\right)^2} \mathrm{d}x.$

Bài tập 1.540. Tính tích phân $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2\cos 2x - x\sin 2x - \cos^4 x}{(x+\sin x\cos x)^2} \mathrm{d}x.$

Bài tập 1.541. Tính tích phân $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x - x^2\cos x - x\sin 2x}{(x\sin x+\sin^2 x)^2} \mathrm{d}x.$

Bài tập 1.542. Tính tích phân $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2\cdot(2\ln^2 x - \ln x - 4)}{\sqrt{\ln x+1}} \mathrm{d}x.$

1.8 Số phức

Bài tập 1.543. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình

$$z^2-(2i+m)z-1+3\mathrm{i}=0.$$

Tìm số phức m sao cho

$$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=\frac{-1+\mathrm{i}}{2}.$$

1.8.1 Bất đẳng thức

1.9 Bất đẳng thức

Bài tập 1.544. Cho x, y là hai số dương thoả mãn

$$x^2y+xy^2=x+y+3xy.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thứcc

$$P = x^2 + y^2 + \frac{(1+2xy)^2 - 3}{2xy}.$$

Bài tập 1.545. Cho các số thực x, y thay đổi và thỏa mãn

$$x^2 - xy + y^2 = 1.$$

Tìm GTLN, GTNN của biểu thức

$$P = \frac{(x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 + 2xy(xy-1) + 3}{x^2 + y^2 - 3}.$$

Bài tập 1.546. Cho ba số a, b, c thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} 1 \leqslant a, b, c \leqslant 3 \\ a + b + 2c = 6 \end{cases}$$

Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + 5c^3 \leqslant 42.$$

Bài tập 1.547. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \leqslant \frac{3}{5}$$

Bài tập 1.548. Cho a, b, $c > 0$. Chứng minh

$$\frac{a^2+bc}{(b+c)^2} + \frac{b^2+ac}{(c+a)^2} + \frac{c^2+ab}{(a+b)^2} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Bài tập 1.549. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3.$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$P = (x+2)(y+2)(z+2).$$

Bài tập 1.550. Cho các số thực không âm thỏa mãn

$$a^2+b^2+c^2=\frac{5}{2}(ab+bc+ca).$$

Tìm GTNN của biểu thức

$$P=\frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Bài tập 1.551. Cho a, b, $c \geqslant 0$ thỏa mãn $a+b+c=2$. Chứng minh rằng

$$(1-ab)(1-bc)(1-ca) \geqslant (1-a^2)(1-b^2)(1-c^2).$$

Bài tập 1.552. Cho x, y, z là ba số dương, thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng

$$x^2+y^2+z^2+x+y+z \geqslant 2(xy+yz+zx).$$

Bài tập 1.553. Cho a, b, c là ba số không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+abc \geqslant 4.$$

Bài tập 1.554. Cho ba số thực không âm x, y, z, thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

$$xy+yz+zx-xyz \leqslant \frac{8}{27}.$$

Bài tập 1.555. ba số thực không âm x, y, z, thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm GTLN, GTNN của

$$P=xy+yz+zx-2xyz.$$

Bài tập 1.556. Chứng minh

$$\frac{xy}{4x^2+y^2+z^2}+\frac{yz}{4y^2+z^2+x^2}+\frac{zx}{4z^2+x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2},$$

với x, y, z là ba số thực dương.

Bài tập 1.557. Chứng minh rằng nếu x, y, z là ba số thực dương thì

$$\frac{2x^2+xy}{(y+\sqrt{zx}+z)^2}+\frac{2y^2+yz}{(z+\sqrt{xy}+x)^2}+\frac{2z^2+zx}{(x+\sqrt{yz}+y)^2} \geqslant 1.$$

Bài tập 1.558. Cho

$$x, y \geqslant 0, \quad x^3 + y^3 = 16.$$

Tìm GTLN, GTNN của

$$P = x^2 + y^2 - 4(1-x)(1-y).$$

Bài tập 1.559. Cho $a, b, c \in [0;2]$ và $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$P = a^2 + 2b^2 + 3c^2 - 2a - 24c + 2060.$$

Bài tập 1.560. Với mọi số thực x, y thỏa điều kiện

$$2\left(x^2 + y^2\right) = xy + 1.$$

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x^4 + y^4}{2xy + 1}$.

Bài tập 1.561. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn

$$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant \frac{3}{4}.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (a+b)(b+c)(c+a) + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Bài tập 1.562. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$ab + bc + ca + 3 \geqslant a^2 \cdot b + b^2 \cdot c + c^2 \cdot a + 3abc.$$

Bài tập 1.563. Cho các số thực x, y, $z \neq 1$ thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{y}{y-1}\right)^2 + \left(\frac{z}{z-1}\right)^2 \geqslant 1.$$

Bài tập 1.564. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca \leqslant abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{10a + b + c} + \frac{1}{a + 10b + c} + \frac{1}{a + b + 10c} \leqslant \frac{1}{12}.$$

Bài tập 1.565. Cho a, b, c là ba số dương . Chứng minh

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\geqslant\frac{10}{(a+b+c)^2}.$$

Bài tập 1.566. Cho ba số thực a, b, c thuộc đoạn [1;2]. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{a}{b}+2\frac{b}{c}+3\frac{c}{a}.$$

Bài tập 1.567. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=ab+bc+2ca$.

Bài tập 1.568. Cho a, b, c không âm thỏa mãn $ab+bc+ca=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=5a+5b+8c^2$.

Bài tập 1.569. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{3c}{\sqrt{1+c^2}}\leqslant\sqrt{10}.$$

Bài tập 1.570. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=\sqrt{\frac{x^2+4y^2}{z^2+4xy}}+\frac{2}{5}\sqrt{z^2+4xy},$$

biết x, y, z là các số thực dương thoả điều kiện $4xy+2yz-zx=25$.

Bài tập 1.571. Với a, b, c là ba số thực dương và $a+b+c=3$. Chứng minh

$$\frac{a(a-2b+c)}{ab+1}+\frac{b(b-2c+a)}{bc+1}+\frac{c(c-2a+b)}{ca+1}\geqslant 0.$$

Bài tập 1.572. Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh

$$\frac{a-b}{\sqrt{b+c}}+\frac{b-c}{\sqrt{c+a}}+\frac{c-a}{\sqrt{a+b}}\geqslant 0.$$

Bài tập 1.573. Cho a, b, c là ba số thực không âm và $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P=\frac{1}{a^2-4a+9}+\frac{1}{b^2-4b+9}+\frac{1}{c^2-4c+9}.$$

Bài tập 1.574. Cho a, b, c là ba số thực không âm và $a+b+c=4$. Chứng minh rằng
$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \geqslant \frac{71-8\sqrt{2}}{4}.$$

Bài tập 1.575. Cho x, y, z là ba số dương thoả$x+y+z \leqslant 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của
$$P = \frac{2}{x^3}+\frac{2}{y^3}+\frac{2}{z^3}+\frac{1}{x^2-xy+y^2}+\frac{1}{y^2-yz+z^2}+\frac{1}{z^2-xz+x^2}.$$

Bài tập 1.576. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{2a+b+c}}+\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{2b+c+a}}+\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2c+a+b}}.$$

Bài tập 1.577. Cho $a,b,c \in R$. Chứng minh rằng
$$\sqrt{(a-b)^2+2c^2}+\sqrt{(b-c)^2+2a^2}+\sqrt{(c-a)^2+2b^2} \geqslant \sqrt{6(a^2+b^2+c^2)}.$$

Bài tập 1.578. Cho x, y, z là các số thực không âm thay đổi khác nhau đôi một và thoả $xy+yz+zx=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$F = \frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}.$$

Bài tập 1.579. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn
$$x^2+y^2+xy-6(x+y)+11=0.$$
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P = \frac{x+y-1}{x+2y+1}.$$

Bài tập 1.580. Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng
$$\frac{a^2}{\sqrt{2a^2+ab+b^2}}+\frac{b^2}{\sqrt{2b^2+bc+c^2}}+\frac{c^2}{\sqrt{2c^2+ca+c^2}} \geqslant \frac{a+b+c}{2}.$$
Ta có
$$\frac{a^2}{\sqrt{2a^2+ab+b^2}} \geqslant \alpha b+\beta a \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+x+2}} \geqslant \alpha x+\beta, x=\frac{b}{a}.$$
Như vậy ta dùng phương pháp tiếp tuyến với hàm số
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+x+2}},\ x=\frac{b}{a}.$$

1.10 Đáp số, hướng dẫn giải bài tập Chương 1

1.1. Đáp số. $m = \dfrac{7}{2}$, $m = \dfrac{1}{2}$.

1.3. Đáp số. $m = \dfrac{1}{3}$.

1.4. Đáp số. $m = -1$ hoặc $m = \dfrac{3}{5}$.

1.6. Đáp số. $y = x + 2$.

1.8. Đáp số. $m = 3 \pm \sqrt{6}$.

1.16. Đáp số. $M_1\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{8}\right)$, $M_2\left(\dfrac{-1+\sqrt{77}}{4};\dfrac{-7+4\sqrt{77}}{8}\right)$; $M_3\left(\dfrac{-1-\sqrt{77}}{4};\dfrac{-7-4\sqrt{77}}{8}.\right)$

1.17. Đáp số. $a = 2$.

1.18. ***Hướng dẫn.***

1) Đặt $t = \sqrt{x+1} \geqslant 0$. Ta có phương trình

$$t \cdot (3x^2 + t^2) = x^3 + 3xt^2 \Leftrightarrow (x-t)^3 = 0.$$

Đáp số. $\left\{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}$.

2) Đáp số. $\left\{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$.

1.19. ***Hướng dẫn.***

1) Đặt $t = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}} \geqslant 0$. Suy ra $x = \dfrac{2+3t^2}{t^2-1}$. Thay vào phương trình đã cho ta được,

$$t^4 - 4t^3 - 7t^2 + 4t + 1 = 0. \tag{1.2}$$

Chia (1.2) cho t^2. Đáp số. $\left\{\dfrac{1-5\sqrt{5}}{2}\right\}$.

2) Đáp số. $\left\{\dfrac{5-7\sqrt{5}}{2}\right\}$.

1.20. ***Hướng dẫn ý thứ nhất.*** Viết phương trình đã cho thành

$$2(x^2+x+1)+3(x-1)=7\sqrt{x^2+x+1}\cdot\sqrt{x-1}. \tag{1.3}$$

Phương trình (1.3) là phương trình đẳng cấp bậc hai theo $\sqrt{x^2+x+1}$ và $\sqrt{x-1}$. Chia (1.3) cho x^2+x+1, ta được

$$2+3\frac{x-1}{x^2+x+1}=7\sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+1}}.$$

Đáp số. $\{4+\sqrt{6};4-\sqrt{6}\}$.

1.21. Ta có

$$x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-4x^2=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2).$$

Phương trình đã cho được viết lại như sau

$$4(x^2-2x+2)-(x^2+2x+2)=\sqrt{2(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)}.$$

Chia hai vế phương trình cho x^2+2x+2 ta thu được phương trình sau

$$4\left(\frac{x^2-2x+2}{x^2+2x+2}\right)-\sqrt{2\left(\frac{x^2-2x+2}{x^2+2x+2}\right)}-1=0.$$

Đặt $t=\sqrt{2\left(\dfrac{x^2-2x+2}{x^2+2x+2}\right)}>0$.

1.22. Ta có

$$16x^4+4x^2+1=(4x^2+1)^2-4x^2=(4x^2-2x+1)(4x^2+2x+1).$$

Do đó phương trình đã cho tương đương

$$3(4x^2-6x+1)=-\sqrt{3}\sqrt{(4x^2-2x+1)(4x^2+2x+1)}.$$

hay

$$6(4x^2-2x+1)-3(4x^2+2x+1)=-\sqrt{3}\sqrt{(4x^2-2x+1)(4x^2+2x+1)}.$$

Do $4x^2+2x+1>0$ với mọi x, nên chia hai vế của phương trình cho $4x^2+2x+1$ ta được

$$6-3\frac{4x^2-2x+1}{4x^2+2x+1}=-\sqrt{3}\sqrt{\frac{4x^2-2x+1}{4x^2+2x+1}}.$$

Đặt: $\sqrt{\dfrac{4x^2-2x+1}{4x^2+2x+1}}=a>0$ ta được phương trình bậc hai quen thuộc

1.23. Đáp số. $\left\{\dfrac{5-\sqrt{7}}{3};\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}\right\}$.

Cách 1. Để ý rằng $7x^2-10x+14>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

- $x=0$ không là nghiệm của phương trình.
- Với $x>0$, chia phương trình cho x, ta được

$$7\left(x+\frac{2}{x}\right)-10=5\cdot\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}.$$

Đặt $t=x+\dfrac{2}{x}\geqslant 2\sqrt{2}$, ta được

$$7t-10=5\sqrt{t^2-4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{5}{2}, \\ t=\dfrac{10}{3}. \end{array}\right.$$

- Với $x<0$, vẫn chia phương trình cho x, ta có

$$7\left(x+\frac{2}{x}\right)-10=-5\cdot\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}.$$

Đặt $t=x+\dfrac{2}{x}$, ta được

$$7t-10=-5\sqrt{t^2-4}.$$

Phương trình này vô nghiệm.

Cách 2. Ta có

$$x^4+4=(x^2+2)^2-4x^2=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2).$$

Ta biểu diễn $7x^2 - 10x + 14$ qua $x^2 + 2x + 2$ và $x^2 - 2x + 2$ bằng cách giả sử

$$7x^2 - 10x + 14 = a(x^2 + 2x + 2) + b(x^2 - 2x + 2), \quad \forall a, b,$$

hay

$$7x^2 - 10x + 14 = (a + b)x^2 + (2a - 2b)x + 2a + 2b, \quad \forall a, b$$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a + b = 7, \\ 2a - 2b = -10, \\ 2a + 2b = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 6. \end{cases}$$

Do đó, ta có

$$7x^2 - 10x + 14 = x^2 + 2x + 2 + 6(x^2 - 2x + 2).$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 + 2x + 2 + 6(x^2 - 2x + 2) = 5\sqrt{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)}.$$

Đặt

$$a = \sqrt{x^2 - 2x + 2} \geqslant 0, \quad b = \sqrt{x^2 + 2x + 2} \geqslant 0.$$

Ta được

$$6a^2 + b^2 = 5ab \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2a, \\ b = 3a. \end{array}\right.$$

Cách 3. Do $7x^2 - 10x + 14 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, nên phương trình đã cho tương đương với

$$49x^4 - 140x^3 + 296x^2 - 280x + 171 = 0 \Leftrightarrow (7x^2 - 10x + 9) \cdot (7x^2 - 10x + 19) = 0.$$

1.24. Đáp số. $\left\{\dfrac{-13 \pm \sqrt{69}}{10}\right\}$.

Cách 1.

Đặt $y = x^2 + 1 > 0$. Ta có phương trình

$$y - 7x = 4\sqrt{y^2 - x^2} \Leftrightarrow 15y^2 + 14xy - 65x^2 = 0.$$

Hay

$$\Leftrightarrow (3y - 5x)(5y + 13x) = 0 \Leftrightarrow 3y - 5x = 0 \vee 5y + 13x = 0.$$

Cách 2. Ta có

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

nên ta tìm cách biểu diễn $x^2 - 7x + 1$ qua $x^2 - x + 1$ và $x^2 + x + 1$. Muốn vậy, ta viết

$$x^2 - 7x + 1 = a(x^2 - x + 1) + b(x^2 + x + 1).$$

Bằng cách đồng nhất hệ số, ta được $a = 4$, $b = 3$. Do đó, với cách đặt

$$u = \sqrt{x^2 - x + 1} > 0, \quad v = \sqrt{x^2 + x + 1} > 0,$$

phương trình đã cho thành

$$4u^2 - 4uv - 3v^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \dfrac{3v}{2}, \\ u = -\dfrac{v}{2}. \end{array}\right.$$

Cách 3.

Bình phương phương trình đã cho, ta được

$$15x^4 + 14x^3 - 35x^2 + 14x + 15 = 0.$$

Chia phương trình cho x^2, ta có

$$15\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 14\left(x + \frac{1}{x}\right) - 35 = 0.$$

Đặt $t = x + \dfrac{1}{x}$, ta có $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Ta có phương trình

$$15t^2 + 14t - 65 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{5}{3}, \\ t = -\dfrac{13}{5}. \end{array}\right.$$

Cách 4.

$$15x^4 + 14x^3 - 35x^2 + 14x + 15 = 0 \Leftrightarrow (3x^2 - 5x + 3) \cdot (5x^2 + 13x + 5) = 0.$$

1.25. Điều kiện $x \geqslant \dfrac{1}{3}$. Hơn nữa, ta phải có $3 - x > 0$. Vậy điều kiện của x là $\dfrac{1}{3} \leqslant x < 3$. Nhân lượng liên hợp của mẫu ở vế phải, phương trình đã cho tương đương

$$3 - x = \sqrt{2x^2 - 6x + 16} - \sqrt{3x - 1}$$

hay
$$3-x+\sqrt{3x-1}=\sqrt{2x^2-6x+16}.$$
tương đương
$$(3-x)^2+2\cdot(3-x)\cdot\sqrt{3x-1}+(3x-1)=2x^2-6x+16.$$
$$\Leftrightarrow x^2-3x+8+2(x-3)\sqrt{3x-1}=0$$
Biểu diễn x^2-3x+8 qua $(x-3)^2$ và $3x-1$, ta được
$$x^2-3x+8=(x-3)^2+(3x-1).$$
Do đó, ta có
$$(x-3)^2+(3x-1)+2(x-3)\sqrt{3x-1}=0.$$
Thu gọn phương trình trên, ta được
$$(x-3+\sqrt{3x-1})^2=0\Leftrightarrow 3-x=\sqrt{3x-1}.$$
Giải phương trình trên và đối chiếu điều kiện, ta có nghiệm phương trình đã cho là $x=\dfrac{9-\sqrt{41}}{2}$.

1.26. ***Cách 1.*** Đặt $t=\sqrt{x-1}\geqslant 0$. Phương trình đã cho thành
$$t^4-t^3+t^2-3t+2=0\Leftrightarrow (t^2+t+2)(t-1)^2=0.$$
Với $t=1$, phương trình có nghiệm $x=2$.

Cách 2. Điều kiện x⩾1. Đặt $a=\sqrt{x-1}$, $b=x+1$. Từ đó ta suy ra được
$$\begin{cases} a^4+b=ab+a,\\ b-a^2=2.\end{cases}$$
Suy ra
$$a^4-a^3+a^2-3a+2=0\Leftrightarrow (a-1)^2(a^2+a+2)=0\Leftrightarrow a=1\Rightarrow b=3\Rightarrow x=2.$$
Vậy $x=2$ là nghiệm của phương trình.

Cách 3. (Dùng liện hợp) Phương trình tương đương
$$x^2-2x-(x+2)[\sqrt{x-1}-1]=0$$

hay

$$x(x-2)-\frac{(x+2)(x-2)}{\sqrt{x-1}+1}=0$$

tương đương

$$(x-2)\left[\frac{x\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x-1}+1}\right]=0.$$

Để ý phương trình $x\sqrt{x-1}-2=0$ cũng có nghiệm $x=2$.

Vậy $x=2$ là nghiệm của phương trình.

Cách 4. Đặt $t=\sqrt{x-1}\geqslant 0$. Ta có phương trình

$$2t^2+(x+2)t-x^2-x=0.$$

Phương trình này có $\Delta=(3x+2)^2$.

Cách 5. Bình phương phương trình đã cho ta được

$$x^4-3x^3+2x^2-4x+8=0.$$

Phân tích thành nhân tử phương trình trên ta có

$$(x^2+x+2)(x-2)^2=0.$$

Phương trình này có nghiệm $x=2$. Thử lại ta thấy $x=2$ thoả phương trình đã cho.

1.27. Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}\geqslant 0$, suy ra $x=\dfrac{1+2t^2}{1-t^2}$. Phương trình đã cho trở thành

$$\frac{2t^3-2t^2-5t+2}{(t^2-1)t}=0.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2,\\ t=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}.\end{array}\right.$$

Trở về ẩn x, phương trình đã cho có nghiệm $x=-3$, $x=2\sqrt{3}-2$.

1.28. Điều kiện $x\geqslant 1$. Dễ thấy khi $x<2$ phương trình vô nghiệm. Xét $x\geqslant 2$ Phương trình đã cho tương đương:

$$2(x-2)\sqrt[3]{4x-4}+2(x-2)\sqrt{2x-2}=3x-1$$

$$\Leftrightarrow 2(x-2)\sqrt[3]{4x-4}-4(x-2)+2(x-2)\sqrt{2x-2}-4(x-2)+5x-15=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-2)(\sqrt[3]{4x-4}-2)+2(x-2)(\sqrt{2x-2}-2)+5(x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-2)(4x-12)}{(\sqrt[3]{4x-4})^2+2\sqrt[3]{4x-4}+4}+\frac{2(x-2)(2x-6)}{\sqrt{x-2}+2}+5(x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{8(x-2)}{(\sqrt[3]{4x-4})^2+2\sqrt[3]{4x-4}+4}+\frac{4(x-2)}{\sqrt{x-2}+2}+5\right]=0$$

Vì

$$x \geqslant 2 n\H{u}n \frac{8(x-2)}{(\sqrt[3]{4x-4})^2+2\sqrt[3]{4x-4}+4}+\frac{2(x-2)}{\sqrt{x-2}+2}+5>0$$

Nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$

1.29. Đặt $t=\sqrt{2x^2-3}\geqslant 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$t^2-(3x-5)t+2x^2-6x+4=0.$$

Ta

$$\Delta = x^2-6x+9=(x-3)^2.$$

Đáp số. $x=\sqrt{5}-1$ và $x=\dfrac{8+\sqrt{26}}{2}$.

1.30. Điều kiện $|x|\leqslant 2$. Phương trình đã cho tương đương

$$4(2x+4)+16\sqrt{2(4-x^2)}+16(2-x)=9x^2+16,$$

hay

$$8(4-x^2)+16\sqrt{2(4-x^2)}=x^2+8x.$$

Đặt $\sqrt{2(4-x^2)}=t$, $(t\geqslant 0)$, ta có

$$4t^2+16t-x^2-8x=0.$$

Coi là phương trình bậc hai ẩn t thì

$$\Delta'=(2x+8)^2\geqslant 0.$$

Đáp số. $x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

1.31. Điều kiện $\begin{cases} x+\sqrt{3x^4-11x^2+9}\neq 0 \\ |x|\neq 1 \\ |x|\neq 3 \end{cases}$

Phương trình tương đương:

$$\frac{(x+2)(x-\sqrt{3x^4-11x^2+9})}{x^2-(3x^4-11x^2+9)}=\frac{(x^2-3)-(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2-3)}$$

hay

$$\frac{-(x+2)(x-\sqrt{3x^4-11x^2+9})}{3(x^2-1)(x^2-3)}=\frac{-2}{(x^2-1)(x^2-3)}.$$

Tương đương

$$(x+2)(\sqrt{3x^4-11x^2+9}-x)=-6,$$

hay

$$(x+2)\cdot\sqrt{3x^4-11x^2+9}=x^2+2x-6.$$

Bình phương hai vế và rút gọn ta được:

$$3x^6+12x^5-48x^3-27x^2+60x=0$$

Tương đương

$$x\cdot(x-1)\cdot(x^2+x-4)\cdot(3x^2+12x+15)=0.$$

1.32. Bình phương phương trình đã cho ta được

$$1+2x\cdot\sqrt{1-x^2}=2(1-4x^2+4x^4).$$

Đặt $t=2x\cdot\sqrt{1-x^2}$, phương trình trên trở thành

$$1+t=2(1-t^2)\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\quad\text{hoặc}\quad t=-1.$$

- Với $t=\frac{1}{2}$, ta có

$$2x\cdot\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\quad\text{hoặc}\quad x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

- Với $t=-1$, ta có

$$2x\cdot\sqrt{1-x^2}=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Thử lại, ta được tập nghiệm của hệ đã cho là $\mathscr{S} = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right\}$.

1.33. ***Cách 1.*** Đặt

$$y = \sqrt{6x^2 - 40x + 150} \geqslant 0, \quad z = \sqrt{4x^2 - 60x + 100} \geqslant 0.$$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} y - z = 2(x-5), \\ y^2 + z^2 = 10(x-5)^2. \end{cases}$$

Thay phương trình thứ nhất vào phương trinh thứ hai, ta được

$$3y^2 - 10yz + 3z^2 = 0 \Leftrightarrow y = 3z \text{ hoặc } y = \frac{z}{3}.$$

- Với $y = 3z$, ta có

$$\sqrt{6x^2 - 40x + 150} = 3\sqrt{4x^2 - 60x + 100} \Leftrightarrow x = 15 \text{ hoặc } x = \frac{5}{3}.$$

  Thử lại, ta chỉ nhận nghiệm $x = 15$.

- Với $y = \frac{z}{3}$, ta có

$$3\sqrt{6x^2 - 40x + 150} = \sqrt{4x^2 - 60x + 100}.$$

  Phương trình này vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 15$.

Cách 2. Xét $x > 5$. Chia phương trình cho $x - 5$, ta được

$$\sqrt{\frac{6x^2 - 40x + 150}{(x-5)^2}} - \sqrt{\frac{4x^2 - 60x + 100}{(x-5)^2}} = 2,$$

hay

$$\sqrt{\frac{5(x-5)^2 + (x+5)^2}{(x-5)^2}} - \sqrt{\frac{5(x-5)^2 - (x+5)^2}{(x-5)^2}} = 2.$$

Tương đương

$$\sqrt{5 + \left(\frac{x+5}{x-5}\right)^2} - \sqrt{5 - \left(\frac{x+5}{x-5}\right)^2} = 2.$$

Đặt $y = \left(\dfrac{x+5}{x-5}\right)^2 \geqslant 0$, phương trình trên trở thành

$$\sqrt{5+y} - \sqrt{5-y} = 2. \tag{1.4}$$

Hàm số

$$f(y) = \sqrt{5+y} - \sqrt{5-y}, \quad 0 \leqslant y \leqslant 5$$

đồng biến trên đoạn $[0;5]$, lại thấy $y = 4$ là một nghiệm của phương trình (1.4), nên (1.4) có nghiệm duy nhất $y = 4$. Với $y = 4$, ta có

$$\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow x = 15 \text{ hoặc } x = \frac{5}{3} \text{ (loại)} .$$

Nếu $x - 5 < 0$, ta có $x - 5 = -\sqrt{(x-5)^2}$. Vẫn lí luận như trên, ta có phương trình

$$\sqrt{5+y} - \sqrt{5-y} = -2.$$

Giải phương trình này, ta được $y = -4$. Trở lại ẩn x, ta có

$$\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^2 = -4.$$

Phương trình này vô nghiệm Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 15$.

Cách 3. Bình phương phương trình đã cho ta được

$$6x^2 - 60x + 150 = 2\sqrt{(6x^2 - 40x + 150)(4x^2 - 60x + 100)}.$$

Tiếp tục bình phương, ta có

$$\Leftrightarrow 15x^4 - 340x^3 + 2250x^2 - 8500x + 9375 = 0.$$

Dùng máy tính ta có được một nghiệm $x = 15$, nên ta phân tích được

$$\Leftrightarrow (x-15)(15x^3 - 115x^2 + 525x - 625) = 0.$$

Từ đó, ta có $\Leftrightarrow x = 15$ hoặc $x = \dfrac{5}{3}$. Thử lại ta chỉ nhận nghiệm $x = 15$.

1.34. Ta biến đổi phương trình thành

$$\sqrt{3(x-3)^2-2}+\sqrt{4(x-3)^2-7}=5-(x-3)^2.$$

Đặt $y=(x-3)^2 \geqslant 0$, phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{3y-2}+\sqrt{4y-7}=5-y. \tag{1.5}$$

Từ phương trình này, ta phải có $\frac{7}{4} \leqslant y \leqslant 5$. Hàm số

$$f(y)=\sqrt{3y-2}+\sqrt{4y-7}$$

đồng biến trên $\left[\frac{7}{4};5\right]$, hàm số $g(y)=5-y$ nghịch biến trên khoảng này. Nhận thấy $y=2$ là một nghiệm của phương trình (1.5), nên (1.5) có nghiệm duy nhất $y=2$. Với $y=2$, ta có

$$(x-3)^2=2 \Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{2}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=3+\sqrt{2}$, $x=3-\sqrt{2}$.

Cách khác. Đặt

$$a=\sqrt{3x^2-18x+25} \geqslant 0, \quad b=\sqrt{4x^2-24x+29} \geqslant 0.$$

Ta có phương trinh

$$a+b=a^2-b^2 \Leftrightarrow a+b=(a+b)(a-b).$$

Từ phương trình này, ta có

$$a+b=0 \quad \text{hoặc} \quad a-b=1.$$

- Trường hợp 1. $a+b=0$. Điều này chỉ xảy ra khi và chỉ khi $a=b=0$. Khi đó
$$\begin{cases} \sqrt{3x^2-18x+25}=0, \\ \sqrt{4x^2-24x+29}=0. \end{cases}$$
Hệ này vô nghiệm.

- Trường hợp 2. $a-b=1$. Ta có

$$a-b=1 \Leftrightarrow a=1+b \Leftrightarrow a^2=1+2b+b^2.$$

Hay

$$2\sqrt{4x^2-6x+29}+4x^2-6x+5=0.$$

Đặt $t=\sqrt{4x^2-6x+29}\geqslant 0$, ta có phương trình

$$2t+\frac{t^2-29}{4}+5=0 \Leftrightarrow t=1 \text{ hoặc } t=-9 \text{ (loại)}.$$

Với $t=1$, ta có

$$\sqrt{4x^2-6x+29}=1 \Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{2}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=3+\sqrt{2}$, $x=3-\sqrt{2}$.

1.35. Điều kiện $-1\leqslant x\leqslant 2$. Ta có

$$x-1+\sqrt{x+1}+\sqrt{2-x}=x^2+\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2-x=\sqrt{x+1}-\sqrt{2}+\sqrt{2-x}-1$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)=\frac{x-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}+\frac{1-x}{\sqrt{2-x}+1} \Leftrightarrow (x-1)\left[x+\frac{1}{\sqrt{2-x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}\right]=0$$

Xét phương trình

$$x+\frac{1}{\sqrt{2-x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}=0 \Leftrightarrow x+\frac{1}{\sqrt{2-x}+1}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}$$

Ta có hàm số $f(x)=x+\dfrac{1}{\sqrt{2-x}+1}$ đồng biến, hàm số $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}$ nghịch biến, mặt khác $f(0)=g(0)$ nên $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=g(x)$ Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=0$ và $x=1$.

1.36. Đặt $t=\sqrt{3x^2+6x+2}$, ta có $u^2=3x^2+6x+2$. Phương trình viết lại thành

$$u^2-2(2x+3)u-5x^2+6x+8=0.$$

Đến đây ta có

$$\Delta'_u=(2x+3)^2+5x^2-6x-8=(3x+1)^2.$$

Đặt $t = \sqrt{3x^2+6x+2}$ $t \geqslant 0$.

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{t^2-6x-2}{3}, \\ (2x+3)t = -x^2+6x+5. \end{cases}$$

Ta viết phương trình ban đầu dưới dạng:

$$(2x+3)t = m\frac{t^2-6x-2}{3} + (-1-m)x^2 + 6x + 5.$$

Tương đương

$$\frac{m}{3}t^2 - (2x+3)t - (m+1)x^2 + (6-2m)x + 5 - \frac{2m}{3} = 0. \tag{1.6}$$

Ta xét Δ của phương trình trên

$$\begin{aligned} \Delta &= (2x+3)^2 - 4\frac{m}{3}\left[(6-2m)x + 5 - \frac{2m}{3} - (m+1)x^2\right] \\ &= \left[4 + \frac{4m}{3}(m+1)\right]x^2 + \left[12 - \frac{4m}{3}(6-2m)\right]x + \left(9 - \frac{20m}{3} + \frac{8m^2}{9}\right). \end{aligned}$$

Rồi ta xét Δ của phương trình trên:

$$\left(12 - 8m + \frac{8m^2}{3}\right)^2 - 4\left(4 + \frac{4m^2}{3} + \frac{4m}{3}\right)\left(\frac{8m^2}{9} - \frac{20m}{3} + 9\right) = 0.$$

Giải phương trình trên ta được $m = 0$ và $m = \dfrac{3}{2}$.

Cách khác. Điều kiện $3x^2+6x+2 \geqslant 0$, $x \in \left(-\infty; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[-1 + \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 - 6x - 5 + (2x+3)(2-x) + (2x+3)\left[\sqrt{3x^2+6x+2} - (2-x)\right] = 0,$$

hay

$$-(x^2+5x-1) + (2x+3)\left[\sqrt{3x^2+6x+2} - (2-x)\right] = 0.$$

Bây giờ, nhân cả hai vế của phương trình với $\sqrt{3x^2+6x+2} + 2 - x$, ta được

$$-(x^2+5x-1)\left(\sqrt{3x^2+6x+2} + 2 - x\right) + (2x+3)\left[(3x^2+6x+2) - (2-x)^2\right] = 0,$$

hay tương đương

$$-(x^2+5x-1)\left(\sqrt{3x^2+6x+2} + 2 - x\right) + 2(2x+3)(x^2+5x-1) = 0.$$

Sau khi thu gọn, ta viết được phương trình dưới dạng

$$(x^2+5x-1)\left(5x+4-\sqrt{3x^2+6x+2}\right)=0.$$

Mặt khác, do

$$(5x+4)^2-(3x^2+6x+2)=2(11x^2+17x+7)>0,\ \forall x$$

nên ta có

$$5x+4-\sqrt{3x^2+6x+2}\neq 0,\quad \forall x$$

Từ đây ta suy ra $x^2+5x-1=0$, hay

$$x=-\frac{5+\sqrt{29}}{2}\vee x=\frac{-5+\sqrt{29}}{2}.$$

Thử lại, ta thấy hai giá trị này đều thỏa mãn phương trình đã cho ban đầu.

1.37. ***Phân tích và hướng giải.***

Ở bài toán này, trước tiên, ta sẽ đặt điều kiện cho tất cả các biểu thức chứa trong căn để bài toán có nghĩa đã

$$\begin{cases}5x^2+14x+9\geqslant 0,\\ x^2-x-20\geqslant 0,\\ x+1\geqslant 0.\end{cases}$$

Với các điều kiện trên, ta quan sát thấy bài toán này nếu muốn tìm được lời giải cho nó một cách gọn nhẹ, ta nên thực hiện một bước quan trọng đó là chuyển dấu sang bên phải và thực hiện phép bình phương. Cụ thể ta có

$$\sqrt{5x^2+14x+9}=5\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-x-20}$$

Tương đương

$$5x^2+14x+9=25(x+1)+x^2-x-20+10\sqrt{(x^2-x-20)(x+1)}.$$

Tới bước này ta làm gọn những gì bên ngoài lại cho nó đẹp nhé. Tức là ta có

$$4x^2-10x+4=10\sqrt{(x^2-x-20)(x+1)}\Leftrightarrow 2x^2-5x+2=5\sqrt{(x^2-x-20)(x+1)}.$$

Tới đây có các bạn đã cảm giác bài toán này có gì khá quen thuộc rồi. Nhưng để ý một tý sự quen thuộc này nó cũng có cái khó của nó đấy các bạn à! Theo thông thường gặp bài toán này ta hay đi xác định hai số a, b sao cho

$$a(x^2-x-20)+b(x+1)=2x^2-5x+2 \Leftrightarrow ax^2+(b-a)x-20a+b=2x^2-5x+2.$$

Đồng nhất hệ số hai phương trình ta có

$$\begin{cases} a=2, \\ b-a=-5, \\ -20a+b=2. \end{cases}$$

Chúng ta sẽ không tìm được a, b tương ứng để thỏa điều kiện này. Vậy rõ ràng cái quen thuộc đã trở nên khá xa lạ rồi đây. Bình tĩnh nhé ta có một điều đặc biệt ấy là

$$x^2-x-20=(x+4)(x-5).$$

Và bây giờ cũng theo ý tưởng ấy ta đưa phương trình về dạng sau

$$2x^2-5x+2=5\sqrt{(x+4)(x-5)(x+1)} \Leftrightarrow 2x^2-5x+2=5\sqrt{(x^2-4x+5)(x+4)}.$$

Tới đây các bạn tiếp tục đi tìm hai hệ số a, b như trên và làm tiếp nhé!

1.38. Đáp số. $\left\{\dfrac{\sqrt{7}-1}{4}; \dfrac{3-\sqrt{3}}{4}; \dfrac{3-\sqrt{3}}{4}\right\}$.

Cách 1. Phương trình đã cho tương đương với

$$(2x-2\sqrt{2x^2-3x+1})^2=(2x-1)^2.$$

Cách 2. Viết lại phương trình dưới dạng

$$4(2x^2-3x+1)+4x-1-8x\cdot\sqrt{2x^2-3x+1}=0.$$

Đặt $t=\sqrt{2x^2-3x+1}\geqslant 0$, ta có

$$4t^2-8\cdot x\cdot t+4x-1=0.$$

Xem đây là phương trình bậc hai theo t. Từ phương trình trên, ta có

$$t=\frac{1}{2} \text{ hoặc } t=2x-\frac{1}{2}.$$

Cách 3. Bình phương hai vế của phương trình, ta được

$$64x^4 - 64x^3 - 48x^2 + 48x - 9 = 0.$$

Hay

$$(8x^2 + 4x - 3)\cdot(8x^2 - 12x + 3) = 0.$$

1.39. Lại một bài nữa của HSG lớp 9, nó làm mình nhớ về một thời oanh liệt. Đã thế phải "chém" cho thích tay. Đầu tiên nhìn vào cái loại phương trình này chúng ta có thể cứ bình phương lên ra phương trình bậc bốn. Cách giải quyết với bậc bốn có vài cách.

Giờ thì ta đi vào vấn đề nhé. Bài này ở loại ẩn phụ không hoàn toàn. Do có cái dạng $P(x)\sqrt{Q(x)}$ nên mình nghĩ vậy thôi nên cứ $t = \sqrt{2x^2 - 1}$. Đến đây bài toán được viết thành

$$\begin{cases} x^2 = \frac{t^2+1}{2}, \\ (3x+1)t = 5x^2 + \frac{3}{2}x - 3. \end{cases}$$

Điều mà chúng ta băn khoăn bây giờ là sẽ thế như thế nào

$$5x^2 = 5\frac{t^2+1}{2} \quad \text{hay} \quad 5x^2 = 3x^2 + t^2 + 1.$$

Thế thì biết đằng nào mà lần? Thôi thì ta cứ thử từng trường hợp

$$\begin{cases} (3x+1)t = 5\frac{t^2+1}{2} + \frac{3}{2}x - 3 \\ \Leftrightarrow \frac{5}{2}t^2 - (3x+1)t + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

Thế xong rồi làm gì nữa? Tính Δ xem có chính phương không thôi chứ còn sao.

$$\Delta = (3x+1)^2 - 4\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right) = 9x^2 - 1$$

Suýt nữa ngon. Nhưng đứng nản lòng, chúng ta thử thêm cách tách

$$5x^2 = x^2 + 2t^2 + 2$$

Khi đó ta được

$$(3x+1)t = x^2 + 2t^2 + 2 + \frac{3}{2}x - 3$$

hay

$$3x+1)t = 2t^2 + x^2 + \frac{3}{2}x - 1.$$

Ta tính được

$$\Delta = (3x+1)^2 - 4.2.(x^2 + \frac{3}{2}x - 1) = x^2 - 6x + 9$$

Cuối cùng ta có đáp số là

$$\frac{1}{2}(\sqrt{6}-1), \quad \frac{-2}{7}(\sqrt{15}-1), \quad \frac{2}{7}(1+\sqrt{15}).$$

Bài toán này có phần ăn may thì phải, chúng ta cứ thử $5x^2 = 4x^2 + ...$ rồi $3x^2 + ...$, tiếp đến $2x^2 + ...$, $x^2 + ...$ mới được. Vậy nhỡ bài nào đó thử hoài mà không ra thì sao. Tuy nhiên, theo mình thì cách thử trên là nhanh và hiệu quả nhất., Nếu muốn hiểu bản chất thì đành phải đồng nhất hệ số bằng cách sau đây. Ta có

$$(3x+1)t = m\frac{t^2+1}{2} + (5-m)x^2 + \frac{3}{2}x - 3 = \frac{m}{2}t^2 + (5-m)x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{m}{2} - 3.$$

Tính Δ của phương trình này

$$\begin{aligned}\Delta &= (3x+1)^2 - 2m\left((5-m)x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{m}{2} - 3\right)\\ &= (9-10m+2m^2)x^2 + (6-3m)x + (1-m^2+6m)\end{aligned}$$

Để denta là số chính phương thì

$$(6-3m)^2 - 4(9-10m+2m^2)(1-m^2+6m) = 0.$$

Dùng chức năng giải phương trình của máy tính ta có được 2 nghiệm nguyên là $m = 0$ và $m = 4$. Chỉ là dùng cái SOLVE thôi nhá, bởi bản chất chỗ mò này là đoán được một số m đèm đẹp cũng toại nguyện rồi. Chứ phá ra để được phương trình bậc bốn mới với m thì quá tội, mặc dù bài này nó dễ giải. Tuy nhiên, ở bước lấy Δ thì ta đã coi tam thức là bậc hai với t rồi nên $m = 4$ được thôi.

1.40. Phương trình đã cho tương đương với

$$(x^2+2x+5)^2 - 9(x^2+2x+5) + 10 = 12\sqrt{x^2+2x+5}.$$

Đặt $t = x^2 + 2x + 5$, ta được

$$t^4 - 9t^2 + 10 = 12t \Leftrightarrow (t^2 - 4t + 2)(t^2 + 4t + 5) = 0.$$

Đáp số. $x = -1 \pm \sqrt{2 + 4\sqrt{2}}$.

1.41. Đáp số. $\left\{1; \frac{5}{2}.\right\}$

Cách 1. Đặt

$$\sqrt{x^2 - 2x + 5} = t \Rightarrow t^2 = x^2 - 2x + 5 \Leftrightarrow t^2 + 2x = x^2 + 5.$$

Phương trình đã cho được viết lại như sau

$$(x+2)t = t^2 + 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = x. \end{array}\right.$$

Cách 2. Bình phương hai vế, ta được

$$2x^3 - 9x^2 + 12x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \dfrac{5}{2}. \end{array}\right.$$

Thử lại các nghiệm này đều thoả phương trình đã cho.

1.42. Đặt

$$a = \sqrt{x+4} \geqslant 0, \quad b = \sqrt{2x+3} \geqslant 0, \quad c = \sqrt{x+8} \geqslant 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned} ab - 3a + bc - 3c &= 4, \\ \Leftrightarrow a \cdot (b-3) + c \cdot (b-3) &= 0, \\ \Leftrightarrow (b-3) \cdot (a+c) &= 4. \end{aligned}$$

Do $a + c \geqslant 0$, nên $b - 3 > 0$ hay $\sqrt{2x+3} > 3$ tức là $x > 3$. Ta có

$$(b-3) \cdot (a+c) = 4.$$

hay

$$(\sqrt{2x+3} - 3) \cdot (\sqrt{x+4} + \sqrt{x+8}) = 4. \tag{1.7}$$

Hàm số

$$f(x) = (\sqrt{2x+3} - 3) \cdot (\sqrt{x+4} + \sqrt{x+8})$$

đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$ và $x = 5$ là một nghiệm của phương trình (1.7), nên $x = 5$ cũng là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

1.43. Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{x+3}$, ta được

$$\sqrt{\left(\frac{x+1}{x+2}\right) \cdot \left(\frac{x^2 - x + 1}{x+3}\right)} - \sqrt{\frac{x+1}{x+3}} = \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x+3}} - 1.$$

Đặt

$$a = \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x+3}}, \quad b = \sqrt{\frac{x+1}{x+3}}.$$

Cách 2. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x+1}.$$

Bình phương hai vế rồi rút gọn, ta được

$$\frac{x^3+1}{x+3} + x + 3 = x^2 - x + 1 + x + 1.$$

Hay

$$\Leftrightarrow \frac{x^3+1}{x+3} = x^2 - x - 1$$

Đáp số. $\{1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}\}$.

1.44. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt[3]{(x+2)^3 - 9(2x+1)} = \sqrt{(x+2)^2 - 3}.$$

Đáp số. $\{-3 - 2\sqrt{2}; -3 + 2\sqrt{2}\}$.

1.45. Đặt

$$u = \sqrt{x^2 + x + 2} \geqslant 0, \quad v = \sqrt{2x^2 + x + 1} \geqslant 0.$$

Ta có

$$u - v = (v^2 - u^2) \cdot \sqrt{u^2 + v^2}$$

hay
$$(u-v)\cdot[1+(u+v)\cdot\sqrt{u^2+v^2}]=0.$$
Do $u \geqslant 0$ và $v \geqslant 0$, nên từ phương trình trên, ta có $u=v$.

Đáp số. $x=1$ hoặc $x=-1$.

1.46. Điều kiện $x \geqslant 1$. Viết phương trình đã cho tương đương
$$(\sqrt{x-1}-1)^2-\sqrt{x^2-x}\cdot(\sqrt{x-1}-1)=0.$$
Đặt nhân tử chung ta được
$$(\sqrt{x-1}-1)\cdot(\sqrt{x-1}-1-\sqrt{x^2-x})=0.$$

- *Trường hợp 1.*
$$\sqrt{x-1}-1=0 \Leftrightarrow x=2.$$
- *Trường hợp 2.*
$$\sqrt{x-1}=1+\sqrt{x^2-x}.$$
  Bình phương phương trình trên, ta có
$$x-1=x^2-x+1+2\sqrt{x^2-x}.$$
  tương đương
$$x^2-2x+2+2\sqrt{x^2-x}=0$$
  hay
$$(x-1)^2+1+2\sqrt{x^2-x}=0.$$
  Phương trình này vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=2$.

1.47. Điều kiện $x>-\frac{1}{2}, x\neq 1$. Ta có phương trình đã cho tương đương với
$$-8\left\{\log_2\left[(x-1)^2\right]-\log_2(2x+1)\right\}=x^2-18x-31.$$
Do
$$x^2-18x-31=(x-1)^2-8(2x+1)-24$$

nên ta có

$$(x-1)^2 + 8\log_2\left[(x-1)^2\right] = 8(2x+1) + 24 + 8\log_2(2x+1),$$

hay tương đương

$$(x-1)^2 + 8\log_2\left[(x-1)^2\right] = 8(2x+1) + 8\log_2[8(2x+1)].$$

Phương trình cuối có dạng

$$f\left((x-1)^2\right) = f\left(8(2x+1)\right)$$

với

$$f(t) = t + 8\log_2 t.$$

Rõ ràng $f(t)$ là hàm liên tục và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ do đó ta có

$$f\left((x-1)^2\right) = f\left(8(2x+1)\right)$$

khi và chỉ khi

$$(x-1)^2 = 8(2x+1),$$

tức

$$x = 9 - 2\sqrt{22} \vee 9 + 2\sqrt{22}.$$

Vậy phương trình đã cho có tất cả hai nghiệm là $x = 9 - 2\sqrt{22}$ và $x = 9 + 2\sqrt{22}$.

1.48. Phương trình đã cho tương đương với

$$2(2\sqrt{4-x^2} - 3x) = 9x^2 - 12x\sqrt{4-x^2} + 4(4-x^2) - 8.$$

Đặt $t = 2\sqrt{4-x^2} - 3x$.

1.50. Điều kiện $x \geqslant 1$. Do $3x-2 > 0$ nên từ phương trình ta suy ra $2x-3 > 0$. Bây giờ, ta xét hai trường hợp:

- Nếu $x > 2$ thì ta có
$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x-1} > 2,$$
do đó
$$VT - VP > 4(2x-3) - (3x-2) = 5(x-2) > 0.$$
Điều này mâu thuẫn với giả thiết $VT = VP$.

- Nếu $\frac{3}{2} < x < 2$ thì ta có

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x-1} < 2,$$

Ta có

$$VT - VP < 4(2x-3) - (3x-2) = 5(x-2) < 0,$$

Từ kết quả hai trường hợp trên, ta thấy rằng x phải bằng 2. Mặt khác, khi thử trực tiếp, ta thấy $x = 2$thỏa mãn phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

1.51. Dùng nhân liên hợp, ta được

$$\frac{2(3x-2)}{\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}} = \frac{4(3x-2)}{\sqrt{9x^2+16}}.$$

Từ đây, dễ thấy $x = \frac{2}{3}$ là một nghiệm của phương trình. Xét trường hợp $x \neq \frac{2}{3}$. Khi đó, phương trình trên tương đương với

$$2\left(\sqrt{2x+4} + 2\sqrt{2-x}\right) = \sqrt{9x^2+16}.$$

Bình phương hai vế, ta được

$$4\left[(2x+4) + 4(2-x) + 4\sqrt{2(4-x^2)}\right] = 9x^2 + 16,$$

hay

$$9x^2 + 8x - 32 = 16\sqrt{2(4-x^2)}.$$

Phương trình cuối có thể được viết dưới dạng

$$9x^2 - 32 = 8\left[2\sqrt{2(4-x^2)} - x\right].$$

Từ đây, ta suy ra

$$(9x^2-32)\left[2\sqrt{2(4-x^2)} + x\right] = 8\left[8(4-x^2) - x^2\right] = 8(32 - 9x^2),$$

hay là

$$(9x^2-32)\left[2\sqrt{2(4-x^2)} + x + 8\right] = 0.$$

Do $-2 \leqslant x \leqslant 2$, nên $2\sqrt{2(4-x^2)}+x+8>0$, suy ra $(9x^2-32)=0$, tức $x=\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.
Thử lại chỉ có $x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ thoả mãn.

Vậy phương trình đã cho có tất cả hai nghiệm là $x=\dfrac{2}{3}$ và $x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

1.54. ***Cách 1.*** Điều kiện $x \geqslant 1$. Đặt

$$t=\sqrt{x+1} \geqslant 0 \Rightarrow t^2=x+1.$$

Ta sẽ tạo ra phương trình bậc hai cuả t bằng cách thêm bớt vào một lượng mt^2.

Phương trình đã cho được viết lại như sau

$$mt^2-t(5\sqrt{x-1}+1)+3x-1-m(x+1)-5\sqrt{x-1}=0$$

hay

$$mt^2-t(5\sqrt{x-1}+1)+(3-m)(x-1)+2-2m-5\sqrt{x-1}=0. \qquad (1.8)$$

Ta có

$$\begin{aligned}\Delta &= 25(x-1)+10\sqrt{x-1}+1-4m(3-m)(x-1)-4m(2-2m)+20m\sqrt{x-1}\\ &=(4m^2-12m+25)(x-1)+(10+20m)\sqrt{x-1}+8m^2-8m+1.\end{aligned}$$

Ta mong muốn

$$\Delta=(A\sqrt{x-1}+B)^2.$$

Để có điều này ta cần

$$\Delta'_m=(5+10m)^2-(4m^2-12m+25)(8m^2-8m+1)=0.$$

Từ đó dễ dàng tìm được $m=3$. Phương trình (1.8) trở thành

$$3t^2-t(5\sqrt{x-1}+1)-4-5\sqrt{x-1}=0. \qquad (1.9)$$

Phương trình (1.9) có biệt thức

$$\Delta=25(x-1)+70\sqrt{x-1}+49=(5\sqrt{x-1}+7)^2,$$

nên có hai nghiệm

$$t = -1 \text{ (loại) } v\breve{a} t = \frac{5\sqrt{x-1}+4}{3}.$$

Với $t = \dfrac{5\sqrt{x-1}+4}{3}$, ta có

$$\frac{5\sqrt{x-1}+4}{3} = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow 5\sqrt{x-1}+4 = 3\sqrt{x+1}.$$

Cách 2. Ta có

$$5\sqrt{x-1}(\sqrt{x+1}+1)+(\sqrt{x+1}+1) = 3(\sqrt{(x+1)^2}-1)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1}+1)[5\sqrt{x-1}+1-3(\sqrt{x+1}-1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1}+1)(5\sqrt{x-1}-3\sqrt{x+1}+4) = 0$$

Cách 3. Đặt

$$u = \sqrt{x-1} \geqslant 0, \quad v = \sqrt{x+1} \geqslant 0.$$

Ta có hệ

$$\begin{cases} 5uv+5u+v-2u^2-v^2 = 0, \\ u^2-v^2+2 = 0. \end{cases}$$

Ta có

$$5uv+5u+v-2u^2-v^2+2(u^2-v^2+2) = (v+1)(-3v+4+5u).$$

Đáp số. $\dfrac{17}{4} - \dfrac{15\sqrt{3}}{8}$.

1.55. Phương trình tương đương với

$$(\sqrt[3]{x}-1)^2 = (\sqrt{x-7}+1)^3 - 7.$$

Đặt

$$a = \sqrt[3]{x}-1, \quad b = \sqrt{x-7}+1.$$

1.56. Đặt

$$a = 2x-1, \quad b = \sqrt{x^2-x+3}.$$

Ta có

$$ab^2 = 2x^3 - 3x^2 + 7x - 3 = 2(x^3 + 2x - 3) - 3(x^2 - x + 3) + 12.$$

Suy ra

$$x^3 + 2x - 3 = \frac{ab^2 + 3b^2 - 12}{2}.$$

Khi đó phương trình trở thành

$$\frac{ab^2 + 3b^2 - 12}{2} - ab = 0 \Leftrightarrow (b-2)(ab + 3(b+2)) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2 \\ ab + 3b + 6 = 0 \end{array}\right.$$

1.57. Ta có

$$\begin{aligned}
&2x^2 - 3x - (2x+1)\sqrt{x^2 - 4x + 3} - 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 3} = \frac{2x^2 - 3x - 3}{2x + 1} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 3} = \frac{x(2x+1) - 2(2x+1) - 1}{2x - 1} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 3} - (x - 2) = \frac{-1}{2x + 1} \\
&\Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 4x + 3} + (x-2)} = \frac{-1}{2x + 1} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 3} = x + 1 \\
&\Leftrightarrow x = -1.
\end{aligned}$$

1.58. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{x^2 + 4} - x = \sqrt{x - 1} - 1 + x - 2 \\
&\Leftrightarrow \frac{-x^3 + x^2 + 4}{\sqrt[3]{(x^2+4)^2} + x\sqrt[3]{x^2 + 4} + x^2} = \frac{x - 2}{\sqrt{x-1} + 1} + (x - 2) \\
&\Leftrightarrow \frac{(x-2)(-x^2 - x - 2)}{\sqrt[3]{(x^2+4)^2} + x\sqrt[3]{x^2 + 4} + x^2} - \frac{x - 2}{\sqrt{x-1} + 1} - (x - 2) = 0
\end{aligned}$$

Do

$$\frac{-x^2 - x - 2}{\sqrt[3]{(x^2+4)^2} + x\sqrt[3]{x^2 + 4} + x^2} - \frac{1}{\sqrt{x-1} + 1} - 1 < 0$$

nên phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

1.59. Đặt
$$a = \sqrt{5+x}, \quad b = \sqrt{5-x}, \quad (a, b > 0).$$
Khi đó ta có
$$6 - 2x = 2b^2 - 4, \quad 6 + 2x = 2a^2 - 4.$$
Phương trìn đã cho trở thành
$$\frac{2b^2-4}{a} + \frac{2a^2-4}{b} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow (2b^2-4)a + (2a^2-4)b = \frac{8}{3}ab$$
$$\Leftrightarrow 2ab(a+b) - 4(a+b) = \frac{8}{3}ab.$$
Từ đó ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2ab(a+b) - 4(a+b) = \dfrac{8}{3}ab, \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab(a+b) - 4(a+b) = \dfrac{8}{3}ab, \\ (a+b)^2 - 2ab = 10. \end{cases}$$
Đây là hệ đối xứng loại Một.

Đáp số. $\{4; -4\}$

1.60. Đặt
$$a = x^2 + 2x - 1, \quad b = x + 1, \quad a \cdot b \geqslant 0.$$
Ta có
$$a + 3b = 4\sqrt{ab} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 10ab + 9b^2 = 0, \\ a + 3b \geqslant 0. \end{cases}$$

1.63. Điều kiện $x \geqslant$. Lấy bình phương hai vế, ta được
$$(x^3-1)^2 = x(3x^2 - 5x + 3)^2,$$
tương đương
$$x^6 - 2x^3 + 1 = x(3x^2 - 5x + 3)^2.$$
Dễ thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình này nên ta chỉ cần xét $x > 0$ là đủ. Khi đó, chia cả hai vế của phương trình cho x^3, ta được
$$x^3 + \frac{1}{x^3} - 2 = \left(3x + \frac{3}{x} - 5\right)^2.$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, $t \geqslant 2$. Phương trình trở thành

$$(t^3 - 3t) - 2 = (3t - 5)^2,$$

tương đương

$$t^3 - 9t^2 + 27t - 27 = 0,$$

hay

$$(t - 3)^3 = 0.$$

Từ đây ta suy ra $t = 3$, hay

$$x + \frac{1}{x} = 3.$$

Giải phương trình này, ta thu được $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ hoặc $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$. Tuy nhiên, khi thử lại, ta thấy chỉ có giá trị $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ thoả mãn phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Cách khác.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = -\sqrt{3}x(x^2 + x + 1) + 8x\sqrt{x}.$$

Hay

$$(x - 1 + 3\sqrt{x})(x^2 + x + 1) = 8x\sqrt{x}.$$

Chia phương trình cho $x\sqrt{x}$, ta được

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + 3\right) \cdot \left(x + \frac{1}{x} + 1\right) = 8.$$

Đặt

$$\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = t.$$

Ta có

$$(t + 3)(t^2 + 3) = 8.$$

Hay

$$(t + 1)^3 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

1.64. Phương trình tương đương với

$$\frac{1}{\sqrt{(2x)^3-1}}-(2x)=\frac{1}{\sqrt{(x+1)^3-1}}-(x+1).$$

Xét hàm số

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{t^3-1}}-t, f'(t)=\frac{-3t^2}{2\sqrt{(t^3-1)^3}}-1<0, \forall t>1$$

1.67. Không khó để thấy rằng phương trình có nghiệm là $x=-1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3+2+3\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)=\sqrt{x^3+2}\Leftrightarrow\sqrt{x^3+2}(\sqrt{x^3+2}-1)+3\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)=0.$$

Tương đương với

$$\sqrt{x+1}\left[\frac{\sqrt{(x^2+3)(x+1)}(x^2-x+1)}{\sqrt{x^3+2}+1}+3(\sqrt{x+1}+1)\right]=0.$$

Dễ thấy biểu thức trong ngoặc luôn dương nên ta suy ra phương trình tương đương với $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-1$.

1.68. ***Cách 1***. Đặt $t=\sqrt{x^2-2x}\geqslant 0$, ta có hệ

$$\begin{cases} x^2-1=2xt,\\ x^2-2x=t^2.\end{cases}$$

Trừ hai phương trình cho nhau, ta được

$$2x-1=2xt-t^2\Leftrightarrow t^2-2xt+2x-1=0.$$

Từ đó, ta tìm được

$$t=1 \quad \text{hoặc} \quad t=2x-1.$$

Đáp số. $\{1\pm\sqrt{2}\}$.

Cách 2. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)^2=(x-1)^2.$$

1.69. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x^2+1} = \frac{3x^2+x+2}{2-8x}. \tag{1.10}$$

Từ phương trình trên, ta phải có

$$2-8x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}.$$

Vẽ đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số $y = \sqrt{2x^2+1}$ và đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số $y = \dfrac{3x^2+x+2}{2-8x}$ trong khoảng $\left(-\infty; \dfrac{1}{4}\right)$, ta thấy hai đồ thị này cắt nhau tại một điểm duy nhất có hoành độ $x = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Cách khác. Vẫn lí luận như cách trên, ta phải có $x < \dfrac{1}{4}$. Bình phương hai vế phương trình (1.10), ta được

$$(119x^3 - 70x^2 + 59x - 36)x = 0.$$

Từ đây, ta có nghiệm thứ nhất là $x = 0$.

Bây giờ ta chứng minh phương trình

$$119x^3 - 70x^2 + 59x - 36 = 0$$

không có nghiệm trên khoảng $\left(-\infty; \dfrac{1}{4}\right)$.

Thật vậy, xét hàm số

$$f(x) = 119x^3 - 70x^2 + 59x - 36$$

trên khoảng $\left(-\infty; \dfrac{1}{4}\right)$. Dễ thấy, hàm số đồng biến trên trên $\mathbb{R}$. Mặt khác,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{73}{8}, \quad f(1) = 72.$$

Vì f đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0$, nên phương trình có duy nhất một nghiệm trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$. Và như vậy, phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm nào khác trên khoảng $\left(-\infty; \dfrac{1}{4}\right)$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

1.70. Ta có

$$x^3-4x^2+4x-1=(x-1)^3-x(x-1)=(x-1)(x^2-3x+1).$$

Đáp số. $\left\{\dfrac{4-3\sqrt{2}}{4};\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}.\right\}$

1.71. Cách 1. Những bài như thế này mình thấy đều có thể dùng hệ bất định để giải đó bạn, cụ thể nhé:

Điều kiện $x \geqslant -2$. Đặt $y=\sqrt{x+2}$ thì ta có

$$\begin{cases}15x^2+2y(x+1)+5x-2=0,\\ y^2-x-2=0.\end{cases}$$

Lúc này, bằng cách sử dụng các phương pháp giải hệ bậc hai, ta tìm được đẳng thức

$$\left[15x^2+2y(x+1)+5x-2\right]-(y^2-x-2)=(3x+y)(5x-y+2).$$

Phần còn lại khá dễ dàng, ta có thể được y theo x và thế trở lại phương trình $y^2-x-2=0$ để giải ra x. Cuối cùng ta thử lại để loại nghiệm là ổn.

Cách khác. Biến đổi phương trình thành

$$x+2-2(x+1)\sqrt{x+2}-6x-15x^2=0.$$

Đặt $t=\sqrt{x+2}$. Khi đó ta được phương trình bậc hai

$$t^2-2(x+1)t-15x^2-6x=0.$$

Ta có

$$\Delta'_t=(x+1)^2+(6x+15x^2)=(4x+1)^2.$$

Đáp số. $\left\{-\dfrac{19}{50}+\dfrac{\sqrt{161}}{50};\dfrac{1}{18}-\dfrac{\sqrt{73}}{18}.\right\}$

1.72. Bình phương hai vế và thu gọn, ta được

$$(x-4)\cdot(9x^2+16x+8)\cdot(x^2+4x+8)=0.$$

Đáp số. $x=4$.

1.73. Điều kiện $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Đặt $a = \sqrt{1-x}$ và $b = \sqrt{1-x}$. khi đó ta có

$$a^2 + b^2 = 2, \quad x = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

và

$$b + \frac{b^2 - a^2}{2} + 3 = a + 3ab.$$

Như vậy, ta có hệ

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2, \\ 2b + b^2 - a^2 + 6 = 2a + 6ab. \end{cases}$$

Lúc này, bằng cách sử dụng phân tích

$$(2b + b^2 - a^2 + 6 - 2a - 6ab) + 3(a^2 + b^2 - 2) = 2(a-b)(a-2b-1).$$

Kết hợp với các giả thiết có được từ hệ, ta thu được $a = b$ hoặc $a = 1 + 2b$.

Đáp số. Phương trình có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = -\frac{24}{25}$.

1.74. Cách 1. Điều kiện $1 - x^4 \geqslant 0$.

Phương trình đã cho được biến đổi về phương trình

$$1 - x^2 - \left(2 + \sqrt{1+x^2}\right)\sqrt{1-x^2} - 2\left(x^2 + 1 - 2\sqrt{1-x^2}\right) = 0. \tag{1.11}$$

Đặt $t = \sqrt{1-x^2}$ $\quad (t \geqslant 0)$. Khi đó phương trình (1.11) được biến đổi thành phương trình

$$t^2 - \left(2 + \sqrt{1+x^2}\right)t - 2\left(x^2 + 1 - 2\sqrt{1-x^2}\right) = 0. \tag{1.12}$$

Xem phương trình (1.12) là phương trình bậc hai theo ẩn t, phương trình này có biệt số

$$\Delta = \left(2 + \sqrt{1+x^2}\right)^2 + 8\left(x^2 + 1 - 2\sqrt{1+x^2}\right) = \left(2 - 3\sqrt{1+x^2}\right)^2.$$

Suy ra phương trình hai có hai nghiệm phân biệt

$$\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{2 + \sqrt{1+x^2} + 2 - 3\sqrt{1+x^2}}{2} = 2 - \sqrt{1+x^2} \\[3ex] t = \dfrac{2 + \sqrt{1+x^2} - 2 + 3\sqrt{1+x^2}}{2} = 2\sqrt{1+x^2} \end{array}\right.$$

- Với $t = 2-\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2} = 2 \Leftrightarrow x = 0$
- Với $t = 2\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 2\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow 5x^2+3 = 0$ vô nghiệm

Đối chiếu điều kiện của bài toán ta có $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Cách 2. Mình trình bày cách 2 nhé. Bạn quan sát thấy $\sqrt{1-x^4}$ và $3x^2+1$ hoàn toàn có thể biểu diễn qua $\sqrt{1+x^2}$ và $\sqrt{1-x^2}$ nên điều này làm mình đi đến ý tưởng đưa phương trình này về hệ phương trình với hai ẩn $a = \sqrt{1+x^2}$ và $b = \sqrt{1-x^2}$.

Điều kiện $|x| \leqslant 1$. Đặt

$$\begin{cases} a = \sqrt{1+x^2} \geqslant 1, \\ b = \sqrt{1-x^2} \geqslant 0. \end{cases}$$

Ta có

$$ab = \sqrt{1-x^4}, \quad 2a^2-b^2 = 3x^2+1.$$

Vậy phương trình ở đề bài trở thành

$$2(2a-b)-ab = 2a^2-b^2.$$

Kết hợp $a^2+b^2 = 2$ ta có hệ

$$\begin{cases} 2(2a-b)-ab = 2a^2-b^2, \\ a^2+b^2 = 2. \end{cases}$$

Phương trình thứ nhất của hệ viết lại

$$2a^2+(b-4)a-b^2+2b = 0. \tag{1.13}$$

Ta có

$$\Delta = (b-4)^2-8(-b^2+2b) = (3b-4)^2.$$

Suy ra phương trình (1.13) có hai nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} a = \dfrac{-(b-4)+(3b-4)}{2} = b \\ a = \dfrac{-(b-4)-(3b-4)}{2} = 4-2b \end{array}\right.$$

Nếu $a = b$. Từ (1.13), ta có $a = b = 1$ (vì $a, b \geqslant 0$), khi đó, $x = 0$.

Nếu $a = 4 - 2b$. Từ (1.13), ta có

$$(4-2b)^2 + b^2 = 2 \Leftrightarrow 5b^2 - 16b + 14 = 0.$$

(phương trình này vô nghiệm).

Tóm lại phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Cách 3. Đặt $u = \sqrt{1+x^2} \geqslant 1$, $v = \sqrt{1-x^2} \geqslant 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 2, \\ 2(2u - v) - uv = 3u^2 - 2. \end{cases} \tag{1.14}$$

Từ phương trình thứ hai của hệ, ta suy ra

$$v = \frac{-3u^2 + 4u + 2}{u + 2}.$$

Thay vào phương trình thứ nhất và thu gọn, ta được

$$5u^4 - 10u^3 + 3u^2 + 4u - 2 = 0.$$

Giải phương trình trên với điều kiện $u \geqslant 1$, ta được $u = 1$.

Với $u = 1$, ta suy ra $v = 1$. Khi đó phương trình có nghiệm $x = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$.

1.75. Điều kiện $x \geqslant 1$. Đặt $a = 2\sqrt{x+1} > 2$ và $b = 2\sqrt{x-1}$, ta có $a^2 - b^2 = 8$, hay

$$(a-3)(a+3) = (b-1)(b+1). \tag{1.15}$$

Ngoài ra, từ phương trình ta cũng có

$$(a^2 - 2) \cdot \frac{a}{2} - (b^2 + 2) \cdot \frac{b}{2} = 9,$$

hay

$$a(a^2 - 2) - 21 = b(b^2 + 2) - 3.$$

Sau khi phân tích nhân tử, ta được

$$(a-3)(a^2 + 3a + 7) = (b-1)(b^2 + b + 3). \tag{1.16}$$

Từ (1.15) và (1.16), ta thu được

$$(a-3)(b-1)(a^2+3a+7)(b+1)=(a-3)(b-1)(b^2+b+3)(a+3),$$

hay tương đương

$$(a^2-9)(b^2-1)\left(\frac{a^2+3a+7}{a+3}-\frac{b^2+b+3}{b+1}\right)=0. \tag{1.17}$$

Bây giờ, ta sẽ chứng minh

$$\frac{a^2+3a+7}{a+3}>\frac{b^2+b+3}{b+1}, \tag{1.18}$$

hay

$$a+\frac{7}{a+3}>b+\frac{3}{b+1}.$$

Do

$$\frac{7}{a+3}-\frac{3}{a+1}=\frac{4a-2}{(a+3)(a+1)}>0,$$

nên ta chỉ cần chứng minh

$$a+\frac{3}{a+1}>b+\frac{3}{b+1},$$

hay tương đương

$$a-b>3\left(\frac{1}{b+1}-\frac{1}{a+1}\right)=\frac{3(a-b)}{(a+1)(b+1)}.$$

Do $ab>0$ và

$$(a+1)(b+1)>a+1>3$$

nên ta có bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng.Vậy (1.18) được chứng minh. Từ (1.17) và (1.18) ta suy ra

$$(a^2-9)(b^2-1)=0.$$

Giải phương trình này, ta tìm được ngay $x=\dfrac{5}{4}$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho ban đầu.

1.76. ***Cách 1.*** Đặt $u=\sqrt{x+2}\geqslant 0$, $v=\sqrt{x-2}\geqslant 0$. Ta có

$$u^2+v^2=2x,\quad u^2-v^2=4.$$

Phương trình đã cho thành

$$2[(u^2+v^2)+1]u-2[(u^2+v^2)-1]v=21,$$

hay

$$2(u^2+v^2)(u-v)+u+v=21. \tag{1.19}$$

Để ý

$$2(u^2+v^2)=(u+v)^2+(u-v)^2=(u+v)^2+\frac{16}{(u+v)^2}.$$

Phương trình (1.19) viết lại thành

$$\left[(u+v)^2+\frac{16}{(u+v)^2}\right]\frac{4}{u+v}+t=21.$$

Đặt

$$t=u+v=\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\geqslant 2.$$

Ta có

$$\left[t^2+\frac{16}{t^2}\right]\frac{4}{t}+t=21,$$

tương đương

$$5t^4-21t^3+64=0 \Leftrightarrow (t-4)(5t^3-t^2-4t-16)=0.$$

- Với $t=4$, ta có $u+v=4$. Xét hệ

$$\begin{cases} u+v=4, \\ u^2-v^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\frac{5}{2} \\ v=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

  Khi đó, ta tìm được $x=\dfrac{17}{4}$.

- Trường hợp $5t^3-t^2-4t-16=0$, dùng máy tính bỏ túi, ta có nghiệm gần đúng là 1.730649271. Ta lí luận như sau: Đặt

$$f(t)=5t^3-t^2-4t-16, \quad t\geqslant 2.$$

  Ta có

$$f'(t)=15t^2-2t-4.$$

Giải phương trình $f'(t) = 0$, ta được

$$t = \frac{1-\sqrt{61}}{15} \text{ hoặc } t = \frac{1+\sqrt{61}}{15}.$$

Các cực trị của hàm số là

$$f\left(\frac{1-\sqrt{61}}{15}\right) = -\frac{10982}{675} + \frac{122\sqrt{61}}{675} \approx -14.85799932$$

và

$$f\left(\frac{1+\sqrt{61}}{15}\right) = -\frac{10982}{675} - \frac{122\sqrt{61}}{675} \approx -17.68125994.$$

Ta thấy

$$f\left(\frac{1-\sqrt{61}}{15}\right) \cdot f\left(\frac{1+\sqrt{61}}{15}\right) > 0,$$

nên đồ thị hàm số f cắt trục hoành tại đúng một điểm.

Mặt khác

$$f(1) \cdot f(2) = -16 \cdot 12 < 0,$$

nên phương trình $f(t) = 0$ có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(1;2)$. Do điều kiện $t \geqslant 2$, nên nghiệm này bị loại.

Như vậy, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{17}{4}$.

Cách 2. Đặt $u = \sqrt{x+2} \geqslant 0$, $v = \sqrt{x-2} \geqslant 0$.

Ta biểu diễn $4x+1$ qua $x+2$ và $x-2$, bằng cách giả sử

$$4x + 1 = m(x+2) + n(x-2)$$

hay

$$4x + 1 = (m+n)x + 2m - 2n \tag{1.20}$$

khi đó

$$\begin{cases} m + n = 4, \\ 2m - 2n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{9}{4}, \\ n = \dfrac{7}{4}. \end{cases}$$

Do đó, ta có

$$4x + 1 = \frac{9}{4}(x+2) + \frac{7}{4}(x-2),$$

hay
$$4x+1=\frac{9}{4}u^2+\frac{7}{4}v^2.$$
Tương tự ta cũng có
$$4x+1=\frac{7}{4}u^2+\frac{9}{4}v^2.$$
Viết lại phương trình đã cho dưới dạng
$$(9u^2+7v^2)u-(7u^2-9v^2)v=84,$$
tương đương
$$9(u^3-v^3)+7uv(v-u)=84,$$
hay
$$(u-v)[9(u^2+v^2)+2uv]=84.$$
Đặt
$$t=u+v=\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\geqslant 2.$$
Ta có
$$u^2+v^2=\frac{(u+v)^2+(u-v)^2}{2}=\frac{t^2+\dfrac{16}{t^2}}{2}=\frac{t^4+16}{2t^2};$$
và
$$uv=\frac{(u+v)^2-(u-v)^2}{4}=\frac{t^2-\dfrac{16}{t^2}}{4}=\frac{t^4-16}{4t^2}.$$
Phương trình (1.20) thành
$$\frac{4}{t}\left(\frac{9t^4+144}{2t^2}+\frac{t^4-16}{2t^2}\right)=84.$$
Rút gọn phương trình trên, ta được
$$5t^4-21t^3+64=0.$$
Tới đây, ta lại trở lại cách trên.

Cách 3. Dùng máy tính bỏ túi ta tính được một nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{17}{4}$. Nên có thể nghĩ tới dùng liên hợp. Viết phương trình đã cho dưới dạng
$$(4x+1)\left(\sqrt{x+2}-\frac{5}{2}\right)-(4x-1)\left(\sqrt{x-2}-\frac{3}{2}\right)=17-4x,$$

tương đương

$$\frac{(4x+1)\left(x-\frac{17}{4}\right)}{\sqrt{x+2}+\frac{5}{2}}-\frac{(4x-1)\left(x-\frac{17}{4}\right)}{\sqrt{x-2}+\frac{3}{2}}=17-4x,$$

hay

$$\left(x-\frac{17}{4}\right)\left(\frac{4x+1}{\sqrt{x+2}+\frac{5}{2}}-\frac{4x-1}{\sqrt{x-2}+\frac{3}{2}}+4\right)=0. \tag{1.21}$$

1.77. Với những bài toán phương trình vô tỉ cho dưới hình thức này ta thường khéo léo "kéo" các mối quan hệ giữa "căn thức và đa thức" sao cho thật khéo nhất. Nhưng ta cần chú ý tới khi muốn áp dụng cho bài toán ta cần để ý tới mối lương duyên của "$\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{ab}$". Bây giờ mình đưa ra hai hướng giải cho bài toán này như sau.

Trước tiên ta cần đặt điều kiện cho các căn thức có nghĩa. Điều kiện:

$$\begin{cases} 2x-3\geqslant 0 \\ 5-2x\geqslant 0 \\ 16-4x^2-15x\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}.$$

Hướng giải 1. Ta để ý rằng

$$(2x-3)(5-2x)=16-4x^2-15.$$

Giờ ta sẽ kéo sự khéo léo về mối quan hệ "căn thức và đa thức" trong bài toán. Cụ thể, ta xét phương trình:

$$13-4x=a(2x-3)+b(5-2x)=2(a-b)x-3a+5b.$$

Cân bằng hệ số hai vế phương trình ta thu được

$$\begin{cases} 2(a-b)=-4 \\ -3a+5b=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{2} \\ b=\frac{7}{2} \end{cases}$$

Tương tự ta xét phương trình

$$4x-3=a(2x-3)+b(5-2x)=2(a-b)x-3a+5b.$$

Cân bằng hệ số hai vế phương trình ta thu được

$$\begin{cases} 2(a-b)=4 \\ -3a+5b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{7}{2} \\ b=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Chú ý thêm một điều tuyệt diệu đó là $(2x-3)+(5-2x)=2$. Tới đây ý đồ giải bài toán đã rõ. Đặt $u=\sqrt{2x-3}, v=\sqrt{5-2x}$ $(u,v\geqslant 0)$. Khi đó phương trình đã cho được biến đổi thành

$$\left(\frac{3}{2}u^2+\frac{7}{2}v^2\right)u+\left(\frac{7}{2}u^2+\frac{3}{2}v^2\right)v=2+8uv,$$

tương đương

$$3(u^3+v^3)+7uv(u+v)=4+16uv,$$

hay

$$3(u+v)(2-uv)+7uv(u+v)=4+16uv. \tag{1.22}$$

Lại đặt $t=u+v$, $\sqrt{2}\leqslant t\leqslant 2$, ta có $uv=\dfrac{t^2-2}{2}$. Lúc đó phương trình (1.22) trở thành:

$$3\left(2-\frac{t^2-2}{2}\right)+7\left(\frac{t^2-2}{2}\right)t=4+16\left(\frac{t^2-2}{2}\right),$$

hay

$$t^3-4t^2+t+6=0\Leftrightarrow t=2.$$

Với $t=2$, trở về ẩn x, ta tìm được $x=2$.

Hướng giải 2. Ta phân tích lại bài toán dưới hình thức khác: Ta cũng có

$$(2x-3)(5-2x)=16x-4x^2-15$$

và điều "tuyệt diệu"

$$(2x-3)+(5-2x)=2.$$

Lại có nhận xét

$$13-4x=3+10-4x=3+2(5-2x),\quad 4x-3=4x+3-6=3+2(2x-3).$$

Vậy ý đồ giải bài toán cũng đã hiện lên. Lúc đó với cách đặt như trên ta thu được phương trình mới:

$$(3+2u^2)v+(3+2v^2)u=2+8uv\Leftrightarrow 3(u+v)+2(u+v)uv=2+8uv.$$

Tới đây tương tự như hướng giải 1. Các bạn tiếp tục nhé.

1.78. Viết phương trình đã cho thành

$$[3(3x-1)+1]\cdot\sqrt{3x-1}+[3(3-3x)\cdot\sqrt{3-3x}+1]-$$
$$-4\sqrt{(3x-1)\cdot(3-3x)}=4.$$

Đặt $a=\sqrt{3x-1}\geqslant 0$, $b=\sqrt{3-3x}\geqslant 0$, ta có hệ

$$\begin{cases}(3a^2+1)\cdot b+(3b^2+1)\cdot a-4ab=4,\\ a^2+b^2=2.\end{cases}$$

Đây là hệ đối xứng theo a, b. Đặt $S=a+b>0$, $P=a\cdot b\geqslant 0$. Từ hệ trên, ta có

$$\begin{cases}3(S^3-3SP)+S-4P=4\\ S^2-2P=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=\dfrac{S^2-2}{2},\\ S(3S^2+4S-20)=0.\end{cases}$$

Từ phương trình thứ hai, ta có $S=0$, $S=2$, $S=\dfrac{10}{3}$. Ta chỉ nhận $S=2$. Khi đó, $P=1$. Từ đó suy ra $a=b=1$ và $x=\dfrac{2}{3}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\dfrac{2}{3}$.

1.79*. Đặt

$$a=\sqrt{2x-1}\geqslant 0,\quad b=\sqrt{4-x}\geqslant 0.$$

Ta có các biểu diễn sau

$$7(x-2)=2a^2-3b^2,\quad 11-8x=-3a^2+2b^2,\quad 2x+6=2a^2+2b^2.$$

Thay vào phương trình ta được

$$2a^3-3a^2b-3ab^2+2b^3=-2a^2+5ab-2b^2.$$

Đặt $a=kb$ (nếu a, $b>0$, thì $k>0$), được phương trình sau:

$$b^3\left(2k^3-3k^2-3k+2\right)=-b^2\left(2k^2-5k+2\right).$$

$$\Leftrightarrow b^3(k+1)\left(2k^2-5k+2\right)=-b^2\left(2k^2-5k+2\right).$$

Đáp số. $\left\{\dfrac{8}{9};\dfrac{17}{6}.\right\}$

1.80*. Điều kiện $\begin{cases} x+1 \geqslant 0 \\ 2x+3 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant -1$. Ta có

$$(x+2)\cdot\sqrt{x+1}-(4x+5)\cdot\sqrt{2x+3}=-6x-23$$

$$\Leftrightarrow (x+2)\sqrt{x+1}-(x+2).2-(4x+5)\sqrt{2x+3}+(4x+5).3-4x+12=0$$

(Sở dĩ thêm bớt như trên là vì nhẩm được nghiệm $x=3 \Rightarrow \sqrt{x+1}=2 \Rightarrow$ phải có nhân tử $\sqrt{x+1}-2$).

$$\Leftrightarrow (x+2)(\sqrt{x+1}-2)-(4x+5)(\sqrt{2x+3}-3)-4(x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2).\frac{(x+1)-4}{\sqrt{x+1}+2}-(4x+5).\frac{(2x+3)-9}{\sqrt{2x+3}+3}-4(x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{x+2}{\sqrt{x+1}+2}-\frac{8x+10}{\sqrt{2x+3}+3}-4\right)=0.$$

Ta chứng minh

$$\frac{x+2}{\sqrt{x+1}+2}<\frac{2(4x+5)}{\sqrt{2x+3}+3}+4,\ \forall x \geqslant -1.$$

để có thể suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$. Sử dụng đánh giá

$$\sqrt{2x+3}+3<2(\sqrt{x+1}+2),$$

(chứng minh bằng biến đổi tương đương) Suy ra

$$\frac{2(4x+5)}{\sqrt{2x+3}+3}+4>\frac{4x+5}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{3(x+1)}{\sqrt{x+1}+2}+\frac{x+2}{\sqrt{x+1}+2}>\frac{x+2}{\sqrt{x+1}+2}.$$

1.81*. Đặt

$$a=\sqrt{x+1},\quad b=\sqrt{x-1},$$

Thì $a^2-b^2=2$. Phương trình đã cho trở thành

$$\frac{a^2+11b^2}{2}a-(4a^2+2b^2)b+4ab=\frac{a^2+7b^2}{2}.$$

hay

$$a^3-8a^2b+11ab^2-4b^3=a^2-8ab+7b^2.$$

Điều này tương đương với

$$(a-b)(a^2-7a^2b+4b^2)=(a-b)(a-7b).$$

$$a^2 - 7ab + 4b^2 - a + 7b = 0.$$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 2, \\ a^2 - 7ab + 4b^2 - a + 7b = 0. \end{cases} \tag{1.23}$$

Việc đầu tiên khi tiếp cận 1 phương trình hay hệ phương trình là ta thử nhẩm xem phương trình hay hệ phương trình đó có nghiệm nào đặc biệt không? Đối với phương trình thì dùng máy tính và chức năng Solve là phương pháp khá hiệu quả. Với bài toán này ta có một nghiệm $x = \frac{5}{4}$. Như vậy, chắc chắn ta sẽ có một cặp nghiệm $(a;b) = \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Bằng kinh nghiệm nếu ta đặt

$$a = u + \frac{3}{2}, \quad b = v + \frac{1}{2},$$

từ hệ (1.23), ta thu được hệ mới đơn giản hơn.

$$\begin{cases} u^2 - v^2 + 3u - v = 0 \\ 2u^2 - 14uv + 8v^2 - 3u + v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 = -3u + v \\ 2u^2 - 14uv + 8v^2 = 3u - v \end{cases}$$

Có thể nhân chéo hai phương trình trên để được một phương trình đẳng cấp.

Cách khác. Xét hệ

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 2 \\ a^2 - 7ab + 4b^2 - a + 7b = 0. \end{cases}$$

Lấy phương trình thứ nhất nhân với 2 rồi công với phương trình thứ hai, ta được

$$3a^2 - (7b + 1)a + 2b^2 + 7b - 4 = 0.$$

Gải phương trình này ta có

$$a = 2b - 1 \text{ hoặc } b = 3a - 4.$$

Đáp số. $\left\{\frac{5}{4}; \frac{4(5+\sqrt{7})}{9}\right\}$.

1.82*. Điều kiện: $x \geqslant -2$. Do $x+1=(x-2)+3$ và $(x+3)(x+4)=x^2+7x+12$ nên ta có thể viết lại phương trình dưới dạng

$$(x-2)\sqrt{x+2}+3\sqrt{x+2}+(x+6)\sqrt{x+7}=x^2+7x+12,$$

tương đương

$$(x-2)\sqrt{x+2}+3\left(\sqrt{x+2}-2\right)+(x+6)\left(\sqrt{x+7}-3\right)=(x^2+7x+12)-6-3(x+6).$$

Sau khi rút gọn, ta được

$$(x-2)\sqrt{x+2}+\frac{3(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{(x+6)(x-2)}{\sqrt{x+7}+3}=(x-2)(x+6),$$

hay tương đương

$$(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\frac{3}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3}-x-6\right)=0.$$

Bây giờ, ta có để ý rằng

$$\sqrt{x+2}+\frac{3}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3}\leqslant\frac{(x+2)+1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{x+6}{3}=\frac{5}{6}(x+6)<x+6.$$

Do đó, đại lượng trong dấu ngoặc thứ hai của phương trình cuối luôn âm. Từ đây, ta suy ra phương trình đã cho được thỏa mãn khi và chỉ khi $x=2$.
■

1.83. Đặt

$$a=\sqrt{x+4}\geqslant 0,\quad b=\sqrt{2x+3}\geqslant 0.$$

Ta có

- $2x-6=(2x+3)-9=b^2-9;$
- $x-5=(x+4)-9=a^2-9;$
- $x-1=b^2-a^2.$

Thay vào phương trình đã cho, ta được

$$(b^2-9)\cdot a-(a^2-9)\cdot b-3(b^2-a^2)=0.$$

Hay

$$(b-3)\cdot(a-3)\cdot(a-b)=0.$$

Từ phương trình này, ta có ba trường hợp

$$b=3,\quad a=3,\quad a=b.$$

Giải các trường hợp trên, ta có được tập nghiệm của phương trình đã cho là $\mathscr{S}=\{1;3;5\}$.

1.84. Điều kiện: $|x|\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ta có phương trình đã cho tương đương với

$$10x^2+3x-6-(3x+1)(2x-1)=(3x+1)\left[2\sqrt{2x^2-1}-(2x-1)\right],$$

hay

$$4x^2+4x-5=(3x+1)\left[2\sqrt{2x^2-1}-(2x-1)\right].$$

Nhân cả hai vế của phương trình này cho $2\sqrt{2x^2-1}+2x-1$, ta thu được

$$(4x^2+4x-5)\left(2\sqrt{2x^2-1}+2x-1\right)=(3x+1)\left[4(2x^2-1)-(2x-1)^2\right],$$

hay

$$(4x^2+4x-5)\left(2\sqrt{2x^2-1}+2x-1\right)=(3x+1)(4x^2+4x-5).$$

Chuyển vế và tách nhân tử, ta có

$$(4x^2+4x-5)\left(2\sqrt{2x^2-1}-x-2\right)=0,$$

tức

$$(4x^2+4x-5)\left[4(2x^2-1)-(x+2)^2\right]=0.$$

Đến đây, bằng cách giải phương trình cuối, ta thu được $x=\frac{-1\pm\sqrt{6}}{2}$ hoặc $x=\frac{2\pm2\sqrt{15}}{7}$. Tuy nhiên, thử lại, ta thấy chỉ có ba giá trị $x=\frac{-1+\sqrt{6}}{2}$, $x=\frac{2-2\sqrt{15}}{7}$ và $x=\frac{2+2\sqrt{15}}{7}$ thỏa mãn phương trình. Vậy phương trình đã cho có tất cả ba nghiệm là $x_1=\frac{-1+\sqrt{6}}{2}$, $x_2=\frac{2-2\sqrt{15}}{7}$ và $x_3=\frac{2+2\sqrt{15}}{7}$. ■

1.85. Đáp số. $x=2$ (Dùng lượng liên hợp.)

1.86. Ta có

$$8x^2 - 13x + 7 = (1 + \frac{1}{x})\sqrt[3]{3x^2 - 2}.$$

Tương đương với

$$8x^3 - 13x^2 + 7x = (x+1)\sqrt[3]{3x^2 - 2},$$

hay

$$(2x-1)^3 + (2x-1)(x+1) = 3x^2 - 2 + (x+1)\sqrt[3]{3x^2 - 2}.$$

Đặt

$$2x - 1 = a; \quad \sqrt[3]{3x^2 - 2} = b.$$

ta có

$$a^3 + (x+1)a = b^3 + (x+1)b.$$

Hay

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2 + x + 1) = 0.$$

- Với $a = b \Leftrightarrow 8x^3 - 15x^2 + 6x + 1 = 0$. Giải phương trình này, ta được $x = 1$, $x = -\frac{1}{8}$.

- Trường hợp 2.

$$a^2 + ab + b^2 + x = 1 = 0 \Leftrightarrow (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}(2x-1)^2 + x + 1 = 0$$

$$4\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + 4x^2 + 2(2x-1)^2 + 5 = 0.$$

  Phương trình này vô nghiệm.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 1$, $x = -\frac{1}{8}$.

1.87. Ta có

$$
\begin{aligned}
&\sqrt[4]{x^2+x+15} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt[4]{x^2+x+15} - 2 = \frac{1-\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2+x}}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{x^2+x-1}{\left(\sqrt[4]{x^2+x+15}+2\right)\left(\sqrt{x^2+x+15}+4\right)} = \frac{1-x^2+x}{1+\sqrt{x^2+x}}\\
\Leftrightarrow\ &\left(x^2+x-1\right)\left[\frac{1}{\left(\sqrt[4]{x^2+x+15}+2\right)\left(\sqrt{x^2+x+15}+4\right)} + \frac{1}{1+\sqrt{x^2+x}}\right] = 0\\
\Leftrightarrow\ &x^2+x-1 = 0\\
\Leftrightarrow\ &x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}
$$

1.88. Phân tích và hướng giải Mình cảm nhận bài toán này người ra đề đã đặt rất khéo các biểu thức với nhau. Thật sự nếu chỉ bình tâm nhìn nhận một cách hời hợt chắc khó mà nhận được hướng giải tốt ví dụ như tác giả rất khéo đặt một "màn sương" che phủ bài toán ở đây :

$$2(x^2+x-1)^2 + 2(x^2+x-1) = 1 + \sqrt{4x+5}$$

Thường suy nghỉ thông thường là ta cố tạo ra một dáng điệu nào đó cho hàm số để chọn cách biểu đạt đặc trưng để giải quyết bài toán. Nhưng với bản thân mình thì mình khó có thể tạo ra được điều đó! Vậy mình sẽ chuyển sang hướng đi khác. Với phương trình này về hình thức thì cho ta cảm giác "kinh nghiệm" là đoán nghiệm trước và ta đoán được $x = 1$ là nghiệm của phương trình. Nhưng liệu đó có phải chăng là nghiệm duy nhất ? Liệu tiên đoán này đưa chúng ta về cách giải nào đây? Khi mà với mình thì bài toán đưa về khảo sát hàm số chứng minh nghiệm duy nhất là vô vọng. Và mình nghỉ tới sao ta không tạo ra các nhân tử chung $x-1$ nhỉ? Bây giờ ta tạo ra như thế nào cho đẹp đây. Trước tiên là với cái căn thức đã

$$\sqrt{4x+5} + 3 = \frac{4x-4}{\sqrt{4x-5}-3} \tag{1.24}$$

và

$$3 - \sqrt{4x+5} = \frac{4-4x}{\sqrt{4x+5}+3}. \tag{1.25}$$

Nhận xét ở (1.24) rõ ràng cách nhân liên hiệp đó không an toàn vì chúng ta chưa biết nó có khác không hay không? Nhưng ở (1.25) thì ta cứ vô tư nhỉ.Vậy về căn thức đã ổn định rồi bây giờ còn cái đa thức bên vế trái phương trình thì sao đây. Xem thử nhé cái huyền vi nó nằm ở đâu đây

$$2(x^2+x-1)^2+2x^2+2x = 2(x^2+x)^2-4(x^2+x)+2+2(x^2+x) = 2(x^2+x)^2-2(x^2+x)+2$$

Tới đây chúng ta cũng chưa thấy gì cả đúng không? Nhưng chúng ta thử ráp toàn bộ những định hướng của chúng ta lại từ đầu đến giờ xem chúng ta đã "úm ba la" phương trình đã cho thành gì rồi nhé:

$$2(x^2+x-1)^2+2x^2+2x = 3+\sqrt{4x+5}$$

Tương đương với

$$\Leftrightarrow 2(x^2+x)^2-4(x^2+x)+2+2(x^2+x)-3-\sqrt{4x-5} = 0$$

hay

$$2(x^2+x)^2-2(x^2+x)-4+3-\sqrt{4x-5} = 0.$$

Vậy bây giờ vế trái đang ổn định với tình hình là :

$$\begin{aligned}2(x^2+x)^2-2(x^2+x)-4 &= (x^2+x)^2-4+(x^2+x)^2-2(x^2+x)\\&= (x^2+x-2)(x^2+x+2)-(x^2+x)(x^2+x-2)\\&= (x-1)(x+2)(x^2+x+2)-(x-1)(x+2)(x^2+x)\\&= 2(x-1)(x+2)(x^2+x+1)\end{aligned}$$

Phù xem như ta đã thắng lớn trong phân tích này. Bây giờ ta đi vào cụ thể bài toán nhé.

Điều kiện bài toán:

$$4x+5 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{5}{4}.$$

Phương trình đã cho được biến đổi thành

$$2(x^2+x-1)^2+2x^2+2x = 3+\sqrt{4x+5}.$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2+x)^2-4(x^2+x)+2+2(x^2+x)-3-\sqrt{4x+5}=0$$
$$\Leftrightarrow 2(x^2+x)^2-2(x^2+x)-4+3-\sqrt{4x+5}=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2+x-2)(x^2+x+2)-(x^2+x)(x^2+x-2)-\frac{4(x-1)}{\sqrt{4x+5}+3}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x^2+x+1)-\frac{2(x-1)}{\sqrt{4x+5}+3}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left[(x+2)(x^2+x+1)-\frac{2}{\sqrt{4x+5}+3}\right]=0.$$

Từ phương trình cuối này, ta có $x=1$ hoặc

$$(x+2)(x^2+x+1)-\frac{2}{\sqrt{4x+5}+3}=0. \qquad (1.26)$$

Bây giờ ta quan tâm đặc biệt tới (1.26). Ta thấy ngay với $x \geqslant -\frac{5}{4}$ thì

$$(x+2)(x^2+x+1)-\left(\frac{2}{\sqrt{4x+5}+3}\right)>0.$$

Thật vậy, $x \geqslant -\frac{5}{4}$ ta có

$$(x+2)(x^2+x+2)=x^3+3x^2+3x+2=(x+1)^3+1\geqslant -\frac{1}{64}+1=\frac{63}{64}>\frac{2}{3}$$

và

$$\frac{2}{\sqrt{4x+5}+3}\leqslant\frac{5}{3}.$$

Vậy phương trình (1.26) vô nghiệm. Do đó phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$■.

1.89. Điều kiện $x\geqslant -\frac{9}{8}$. Ta có phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{x+4}{3}-\sqrt{x+2}\right)+\left(x+2-\sqrt{5x+6}\right)+2\left(\frac{4x+7}{3}-\sqrt{8x+9}\right)+4(x^2-x-2)=0,$$

hay

$$\frac{(x+4)^2-9(x+2)}{x+4+3\sqrt{x+2}}+\frac{(x+2)^2-(5x+6)}{x+2+\sqrt{5x+6}}+\frac{2\left[(4x+7)^2-9(8x+9)\right]}{4x+7+3\sqrt{8x+9}}+4(x^2-x-2)=0,$$

Tương đương

$$(x^2-x-2)\left(\frac{1}{x+4+3\sqrt{x+2}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+6}}+\frac{32}{4x+7+3\sqrt{8x+9}}+4\right)=0.$$

Do với $x \geqslant -\frac{9}{8}$ thì

$$\frac{1}{x+4+3\sqrt{x+2}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+6}}+\frac{32}{4x+7+3\sqrt{8x+9}}+4>0$$

nên phương trình cuối tương đương với

$$x^2-x-2=0.$$

Từ đây dễ dàng suy ra phương trình đã cho có tất cả hai nghiệm là $x=-1$ và $x=2$. ■

1.90. Điều kiện $x \in (-\infty, -4] \cup \left[0; \frac{1}{2}\right]$. Ta xét hai trường hợp:

- Trường hợp $x \leqslant -4$. Do $9(4-3x)-16(1-2x)=5(x+4) \leqslant 0$ nên ta có

$$\sqrt{4-3x} \leqslant \frac{4}{3}\sqrt{1-2x}.$$

  Từ đây suy ra

$$\sqrt{1-2x}+\sqrt{4-3x} \leqslant \frac{7}{3}\sqrt{1-2x}=\sqrt{\frac{49}{9}(1-2x)}.$$

  Tuy nhiên, ta lại có

$$(2x^2-2x+9)-\frac{49}{9}(1-2x)=\frac{2}{9}(x+4)(9x+4) \geqslant 0.$$

  Do đó

$$\sqrt{1-2x}+\sqrt{4-3x} \leqslant \sqrt{\frac{49}{9}(1-2x)} \leqslant \sqrt{2x^2-2x+9} \leqslant \sqrt{x^2+4x}+\sqrt{2x^2-2x+9}.$$

  Như vậy, để phương trình đã cho được thỏa mãn thì trước tiên ta phải có $x^2+4x=0$, tức $x=-4$. Thử lại ta thấy $x=-4$ thỏa mãn nên đây là một nghiệm của phương trình.

- Trường hợp $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.Do $4-3x \geqslant 4-8x=4(1-2x)$ nên ta có

$$\sqrt{1-2x}+\sqrt{4-3x} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{4-3x}+\sqrt{4-3x}=\sqrt{\frac{9}{4}(4-3x)}.$$

Tuy nhiên, ta lại thấy

$$\frac{9}{4}(4-3x) = 9 - \frac{27}{4}x \leqslant 9 - 2x \leqslant 9 - 2x + 2x^2$$

nên từ trên ta cũng suy ra

$$\sqrt{1-2x}+\sqrt{4-3x} \leqslant \sqrt{\frac{9}{4}(4-3x)} \leqslant \sqrt{2x^2-2x+9} \leqslant \sqrt{x^2+4x}+\sqrt{2x^2-2x+9}.$$

Và do đó, để phương trình đã cho được thỏa mãn thì trước tiên ta phải có $x^2+4x=0$, tức $x=0$. Thử lại ta thấy $x=0$ thỏa mãn nên đây là một nghiệm của phương trình.

Tóm lại, phương trình đã cho có tất cả hai nghiệm là $x=0$ và $x=-4$. ■

1.91. Ta có phương trình đã cho tương đương với

$$4x^3 - x + 3 = \sqrt[3]{x^3+\frac{3}{2}},$$

hay

$$2x^3 - x = -2\left(x^3+\frac{3}{2}\right) + \sqrt[3]{x^3+\frac{3}{2}}.$$

Quan sát một chút, ta thấy phương trình cuối có dạng $f(x) = f\left(-\sqrt[3]{x^3+\frac{3}{2}}\right)$ với $f(t) = 2t^3 - t$.

Đặt $y = -\sqrt[3]{x^3+\frac{3}{2}}$. Do

$$f(x) - f(y) = 2(x^3-y^3) - (x-y) = (x-y)(2x^2+2xy+2y^2-1)$$

nên phương trình $f(x) = f(y)$ tương đương với

$$(x-y)(2x^2+2xy+2y^2-1) = 0,$$

tức

$$\left(x+\sqrt[3]{x^3+\frac{3}{2}}\right)\left[2x^2 - 2x\sqrt[3]{x^3+\frac{3}{2}} + 2\sqrt[3]{\left(x^3+\frac{3}{2}\right)^2} - 1\right] = 0.$$

Đến đây chỉ cần đánh giá một chút xíu về bất đẳng thức nữa là ổn.

1.92. Dễ dàng nhẩm được nghiệm của phương trình là $\frac{1}{2}$. Khi đó ta tiến hành nhân liên hợp đơn giản như bình thường ,ta có

$$16x^4 - 24x^2 + 5 + 8(\sqrt{3-4x} - 1).$$

Tương đương

$$(2x-1)(2x+1)(4x^2-5) + 16\frac{1-2x}{1+\sqrt{3-4x}} = 0.$$

hay

$$(2x+1)(\sqrt{5}+2x)(\sqrt{5}-2x) + \frac{16}{1+\sqrt{3-4x}} = 0. \qquad (1.27)$$

Tới đây, ta sẽ chứng minh phương trình (1.27) vô nghiệm. Thật vậy, do điều kiện $x \leqslant \frac{3}{4}$ thì

$$(2x+1)(\sqrt{5}+2x)(\sqrt{5}-2x) + \frac{16}{1+\sqrt{3-4x}} > 0.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$.

1.93. Đáp số. $x = 3$.

1.94. Điều kiện $x \geqslant \frac{44}{21}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{\frac{x}{2} - \frac{22}{21}} - (x-2) + (x-3) - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + \frac{23}{7}} = 0$$

hay.

$$\frac{-42x^2+189x-212}{42\left(\sqrt{\frac{x}{2}-\frac{22}{21}}+(x-2)\right)} + \frac{-42x^2+189x-212}{7\left[(x-3)^2+(x-3)\sqrt[3]{x^3-3x^2+\frac{23}{7}}+\sqrt[3]{(x^3-3x^2+\frac{23}{7})^2}\right]} = 0.$$

Từ đây ta có

$$-42x^2 + 189x - 212 = 0.$$

1.96. Điều kiện $0 \leqslant x \leqslant 5$ và $5x - x^2 - 1 + \sqrt{5-x} \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 = 2\sqrt{-x^2 + 5x - 1 + \sqrt{5-x}} \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{x}+2)^2 = 4(-x^2 + 5x - 1 + \sqrt{5-x}) \\
&\Leftrightarrow 4x^2 - 19x + 12 + 4(\sqrt{x} - 2) + 4(1 - \sqrt{5-x}) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-4)(4x+3) + 4\frac{x-4}{\sqrt{x}+2} + 4\frac{x-4}{1+\sqrt{5-x}} = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-4)\left(4x + 3 + \frac{4}{\sqrt{x}+2} + \frac{4}{1+\sqrt{5-x}}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 4
\end{aligned}$$

Vì

$$4x + 3 + \frac{4}{\sqrt{x}+2} + \frac{4}{1+\sqrt{5-x}} > 0.$$

Đáp số. $x = 4$.

1.97. Ta sẽ giải bài này bằng phép nhân liên hợp. Viết lại phương trình thành

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 3x}{x+2} = \sqrt{x^2 + x + 2}.$$

Hay

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 3x}{x+2} - 2 = \sqrt{x^2 + x + 2} - 2.$$

Tương đương

$$\frac{(x-1)(x^2 + 3x + 4)}{x+2} = \frac{(x-1)(x+2)}{\sqrt{x^2 + x + 2} + 2}.$$

Từ đó quy về chứng minh phương trình sau vô nghiệm

$$\frac{x^2 + 3x + 4}{(x+2)^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 2} + 2} \tag{1.28}$$

Rõ ràng vế phải của (1.28) nhỏ hơn $\frac{1}{2}$, mà, vế trái của (1.28) lớn hơn $\frac{1}{2}$, nên tóm lại, nghiệm của phương trình ban đầu là $x = 1$.

1.98. Điều kiện $|x| \leqslant \frac{2\sqrt{6}}{3}$. Bạn nhập phương trình vào máy tính FX-570ES dùng chức năng SOLVE máy tính dò được hai nghiệm là $x = -0,6180339887$ (gán x vừa tìm được vào A bằng tổ hợp phím SHIFT +

STO + A) và $x = 1,618033989$ (nghiệm này bạn phải cho x xuất phát ở 2 thì mới dò ra được) (gán x vừa tìm được vào B). Sau đó bạn lấy $A+B$ và AB xem có gì đặc biệt không. Vừa hay $A+B=1$ và $A\cdot B=-1$.Vậy theo định lý Vi-ét A, B là hai nghiệm của phương trình $x^2-x-1=0$. Đến đây ta có thể đoán $x^2-x-1=0$ là nhân tử của phương trình ở đề bài. Phương trình đã cho viết lại

$$x^3-3x+1-(ax+b)-\sqrt{8-3x^2}+ax+b=0.$$

Tương đương

$$x^3-3x+1-(ax+b)+\frac{(ax+b)^2-(8-3x^2)}{\sqrt{8-3x^2}+ax+b}=0.$$

hay

$$x^3-(a+3)x+1-b+\frac{(a^2+3)x^2+2abx+b^2-8}{\sqrt{8-3x^2}+ax+b}=0 \tag{1.29}$$

Để có được nhân tử x^2-x-1 thì

$$(a^2+3)x^2+2abx+b^2-8=M(x^2-x-1) \tag{1.30}$$

(M là một số). Hệ số của x^2 là a^2+3 nên để a chẵn thì M nên bằng 4. Với $M=4$ thì có một cặp $(a;b)$ thỏa mãn (1.30) là $(-1;2)$.

Với $(a;b)=(-1;2)$ thì (1.29) trở thành

$$x^3-2x-1+4\frac{x^2-x-1}{\sqrt{8-3x^2}+2-x}=0.$$

Phương trình này tương đương với

$$\Leftrightarrow (x^2-x-1)\left(x+1+\frac{4}{\sqrt{8-3x^2}+2-x}\right)=0. \tag{1.31}$$

Bây giờ ta chứng minh

$$x+1+\frac{4}{\sqrt{8-3x^2}+2-x}>0.$$

Xét hàm số

$$f(x)=\sqrt{8-3x^2}+2-x.$$

Ta có

$$f'(x) = \frac{-3x}{\sqrt{8-3x^2}} - 1.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-3x}{\sqrt{8-3x^2}} = 1 \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Khi đó

$$f(x) \leqslant \frac{6+4\sqrt{6}}{3}.$$

kết hợp $|x| \leqslant \dfrac{2\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow 0 < f(x) \leqslant \dfrac{6+4\sqrt{6}}{3}$. Suy ra

$$x+1+\frac{4}{\sqrt{8-3x^2}+2-x} = x+1+\frac{4}{f(x)} \geqslant \frac{-2\sqrt{6}}{3}+1+\frac{4}{\dfrac{6+4\sqrt{6}}{3}} > 0.$$

Do đó, (1.31) xảy ra khi và chỉ khi $x^2-x-1=0$. Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ và $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1.99. Phương trình đã cho tương đương

$$\sqrt[3]{162x^3+2}-2-(\sqrt{27x^2-9x+1}-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{162x^3-6}{(\sqrt[3]{162x^3+2})^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4} - \frac{27x^2-9x}{\sqrt{27x^2-9x+1}+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(3x-1)(9x^2+3x+1)}{(\sqrt[3]{162x^3+2})^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4} - \frac{3x(3x-1)}{\sqrt{27x^2-9x+1}+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)\left[\frac{2(9x^2+3x+1)}{(\sqrt[3]{162x^3+2})^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4} - \frac{3x}{\sqrt{27x^2-9x+1}+1}\right] = 0$$

Xét phương trình

$$\frac{2(9x^2+3x+1)}{(\sqrt[3]{162x^3+2})^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4} - \frac{3x}{\sqrt{27x^2-9x+1}+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(9x^2+3x+1)}{(\sqrt[3]{162x^3+2})^2+2\sqrt[3]{162x^3+2}+4} = \frac{3x}{\sqrt[3]{162x^3+2}}$$

$x = 0$ không là nghiệm, đặt $t = \sqrt[3]{162x^3+2}$

$$\Leftrightarrow 2(3x+\frac{1}{3x}+1) = t+\frac{4}{t}+2$$

$$\Leftrightarrow 3x + \frac{1}{3x} + 1 = \frac{t}{2} + \frac{2}{t} + 1$$

Từ đây suy ra $3x = \dfrac{t}{2}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Tóm lại phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{3}$.

1.100. Đặt

$$a + 1 = \sqrt{1+x}; \quad b + 1 = \sqrt{1-x}.$$

Ta thu được hệ phương trình sau

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + 2(a+b) = 0, \\ a^2 - 3ab - 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = -2(a+b), \\ a^2 - 3ab = 4b. \end{cases}$$

Đây là hệ đẳng cấp. Đáp số. $x = 0$ và $x = -\dfrac{24}{25}$.

1.101. Ta có

$$2x + 1 + x\sqrt{x^2+2} + (x+1)\sqrt{x^2+2x+3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+2} + x + (x+1)\sqrt{x^2+2x+3} + x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+2} + x + (x+1)\sqrt{(x+1)^2+2} + x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+2} + x = (-x-1)\sqrt{-x-1)^2+2} + (-x-1)$$

Xét $f(t) = t\sqrt{t^2+2} + t$ Hàm f(t) đồng biến trên R nên suy ra $x = -x-1$.

Đáp số. $x = -\dfrac{1}{2}$.

1.102. Từ phương trình đã cho, ta có điều kiện $0 < x \leqslant 1$. Đặt $t = 1 + \sqrt{1-x^2} \geqslant 1$.

Ta có

$$\begin{cases} 2t - 1 = 1 + 2\sqrt{1-x^2}, \\ 2t - t^2 = x^2. \end{cases}$$

Mặt khác

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = x\left(1 + 2\sqrt{1-x^2}\right) \Leftrightarrow 1 + \sqrt{1-x^2} = x^2(1+2\sqrt{1-x^2})^2.$$

Phương trình ẩn t tương ứng là

$$t=(2t-t^2)(2t-1)^2 \Leftrightarrow t(t-1)(4t^2-8t+1)=0.$$

Đáp số. $\left\{1;\dfrac{1}{2}.\right\}$

1.103. Điều kiện: $x\in(-\infty,-4]\cup\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Ta xét hai trường hợp:

- Trường hợp $x\leqslant -4$. Do $9(4-3x)-16(1-2x)=5(x+4)\leqslant 0$ nên ta có

  $$\sqrt{4-3x}\leqslant\frac{4}{3}\sqrt{1-2x}.$$

  Từ đây suy ra

  $$\sqrt{1-2x}+\sqrt{4-3x}\leqslant\frac{7}{3}\sqrt{1-2x}=\sqrt{\frac{49}{9}(1-2x)}.$$

  Tuy nhiên, ta lại có

  $$(2x^2-2x+9)-\frac{49}{9}(1-2x)=\frac{2}{9}(x+4)(9x+4)\geqslant 0.$$

  Do đó

  $$\sqrt{1-2x}+\sqrt{4-3x}\leqslant\sqrt{\frac{49}{9}(1-2x)}\leqslant\sqrt{2x^2-2x+9}\leqslant\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{2x^2-2x+9}.$$

  Như vậy, để phương trình đã cho được thỏa mãn thì trước tiên ta phải có $x^2+4x=0$, tức $x=-4$. Thử lại ta thấy $x=-4$ thỏa mãn nên đây là một nghiệm của phương trình.

- Trường hợp $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$.Do $4-3x\geqslant 4-8x=4(1-2x)$ nên ta có

  $$\sqrt{1-2x}+\sqrt{4-3x}\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{4-3x}+\sqrt{4-3x}=\sqrt{\frac{9}{4}(4-3x)}.$$

  Tuy nhiên, ta lại thấy

  $$\frac{9}{4}(4-3x)=9-\frac{27}{4}x\leqslant 9-2x\leqslant 9-2x+2x^2$$

  nên từ trên ta cũng suy ra

  $$\sqrt{1-2x}+\sqrt{4-3x}\leqslant\sqrt{\frac{9}{4}(4-3x)}\leqslant\sqrt{2x^2-2x+9}\leqslant\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{2x^2-2x+9}.$$

  Và do đó, để phương trình đã cho được thỏa mãn thì trước tiên ta phải có $x^2+4x=0$, tức $x=0$. Thử lại ta thấy $x=0$ thỏa mãn nên đây là một nghiệm của phương trình.

Tóm lại, phương trình đã cho có tất cả hai nghiệm là $x=0$ và $x=-4$. ■

1.104. Điều kiện $x \geqslant 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{4}{\sqrt{x}}+2\left(2\sqrt{x}-\sqrt{4x-1}\right)=9\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right),$$

hay

$$\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{2}{2\sqrt{x}+\sqrt{4x-1}}=\frac{9}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}.$$

Đến đây, ta có để ý rằng

$$\sqrt{4x-1}>\sqrt{4x-4}=2\sqrt{x-1}$$

và

$$2\sqrt{x}>\sqrt{x}+\sqrt{x-1}>0.$$

Từ đây, ta suy ra

$$\frac{4}{\sqrt{x}}=\frac{8}{2\sqrt{x}}<\frac{8}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$$

và

$$\frac{2}{2\sqrt{x}+\sqrt{4x-1}}<\frac{2}{2\sqrt{x}+2\sqrt{x-1}}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}.$$

Do đó,

$$\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{2}{2\sqrt{x}+\sqrt{4x-1}}<\frac{9}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}},\quad \forall x\geqslant 1.$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm. ■

1.105. Điều kiện để phương trình có nghĩa là

$$\begin{cases}10-3x\geqslant 0\\ 4-3\sqrt{10-3x}\geqslant 0\end{cases}$$

hay $\dfrac{74}{27}\leqslant x\leqslant \dfrac{10}{3}$.

Bây giờ, đặt $a=\sqrt{10-3x}$ thì ta có

$$\begin{cases}\sqrt{4-3a}=x-2,\\ \sqrt{10-3x}=a\end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3a = 0, \\ a^2 + 3x - 10 = 0. \end{cases}$$

Lấy phương trình thứ hai trừ phương trình thứ nhất theo vế, ta được

$$a^2 - 3a - x^2 + 7x - 10 = 0,$$

hay

$$(a + x - 5)(a - x + 2) = 0.$$

Từ đây suy ra $a = 5 - x$ hoặc $a = x - 2$.

- Với $a = 5 - x$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ (1.10), ta được

  $$x^2 - 4x + 3(5 - x) = 0,$$

  hay

  $$x^2 - 7x + 15 = 0.$$

  Phương trình này vô nghiệm.

- Với $a = x - 2$, thay vào phương trình thứ nhất của (1.10) ta có

  $$x^2 - 4x + 3(x - 2) = 0,$$

  hay

  $$x^2 - x - 6 = 0.$$

  Từ đây ta tìm được $x = -2$ hoặc $x = 3$. Dễ thấy chỉ có $x = 3$ thỏa mãn phương trình đã cho ban đầu.

Vậy phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm là $x = 3$. ■

1.106. Để phương trình có nghĩa thì trước tiên, ta phải có $x(x+1)(x-2) \geqslant 0$, tức $x \in [-1, 0] \cup [2, +\infty)$. Với điều kiện này thì

$$4x^3 - 6x^2 - x + 10 = (x + 1)(4x^2 - 10x + 9) + 1 \geqslant 1$$

(chú ý rằng $4x^2 - 10x + 9 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$), do đó

$$\sqrt{4x^3 - 6x^2 - x + 10} \geqslant 1 \geqslant 1 - x^2\sqrt{x(x + 1)(x - 2)}.$$

Từ đây, kết hợp với giả thiết, ta có

$$\sqrt{4x^3-6x^2-x+10}=1=1-x^2\sqrt{x(x+1)(x-2)}.$$

Nhưng điều này có được khi và chỉ khi $x=-1$. Vậy $x=-1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho. ■

1.107. Ta đặt như sau:

$$\begin{cases}\log_2(2^x+4)=a,\\ \log_3(4^{x+1}+17)=7=b.\end{cases}$$

Dẫn đến ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases}2^x+4=2^a,\\ 4^{x+1}+17=3^b,\\ a+b=7.\end{cases}$$

Thế nên ta hoàn toàn có phân tích sau

$$4\cdot(2^a-4)^2-3^{7-a}+17=0$$

Đặt

$$f(a)=4\cdot(2^a-4)^2-3^{7-a}+17=0,$$

Ta có

$$f'(a)=8\cdot(2^a-4)2^a\cdot\ln 2+3^{7-a}\cdot\ln 3>0,\forall a\in\mathbb{R}.$$

($2^x=2^a-4>0,\forall x\in R$). Mà ta dễ nhẩm được nghiệm của phương trình $a=3$ vậy $a=3$ là nghiệm duy nhất. Thế nên $2^x=2^a-4=2^3-4=4$, vậy là $x=2$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=2$.

1.108*. Điều kiện để phương trình có nghĩa là $x\geqslant\dfrac{5}{3}$. Lúc này, ta có phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}\right)^2&=\left(\sqrt{x^2-11x+33}+\sqrt{3x-5}\right)^2,\\ 3x+4+2\sqrt{(2x+3)(x+1)}&=x^2-8x+28+2\sqrt{(3x-5)(x^2-11x+33)},\\ (x-3)(8-x)&=\frac{2\left[(3x-5)(x^2-11x+33)-(2x+3)(x+1)\right]}{\sqrt{(3x-5)(x^2-11x+33)}+\sqrt{(2x+3)(x+1)}}.\end{aligned}$$

Khai triển trực tiếp, ta có

$$\begin{aligned}(3x-5)(x^2-11x+33)-(2x+3)(x+1) &= 3x^3-40x^2+149x-168\\ &= (x-3)(x-8)(3x-7).\end{aligned}$$

Do đó, phương trình trên có thể viết lại thành

$$(x-3)(8-x)\left[\sqrt{(3x-5)(x^2-11x+33)}+\sqrt{(2x+3)(x+1)}+2(3x-7)\right]=0.$$

Sử dụng điều kiện $x \geqslant \frac{5}{3}$, ta thấy

$$\begin{aligned}&\sqrt{(3x-5)(x^2-11x+33)}+\sqrt{(2x+3)(x+1)}+2(3x-7)\\ &\geqslant \sqrt{(2x+3)(x+1)}+2(3x-7)\\ &\geqslant \sqrt{\left(2\cdot\frac{5}{3}+3\right)\left(\frac{5}{3}+1\right)}+2\left(3\cdot\frac{5}{3}-7\right)\\ &= \frac{2\sqrt{38}}{3}-4>0.\end{aligned}$$

Từ đây, ta tìm được nghiệm của phương trình đã cho là $x=3$ và $x=8$. ■

1.109. Phân tích và hướng giải. Bài toán này các bạn thấy nó có vẻ cồng kềnh nhỉ? Nhưng sự cồng kềnh này ẩn chứa trong nó là "nét duyên ngầm" đáng yêu đấy. Cụ thể các bạn quan sát dưới mẫu nhé

$$\sqrt{x^4-8x^3+16x^2+1}=\sqrt{(4x-x^2)^2+1}.$$

Lúc đó phương trình đã cho trở thành

$$4x-x^2=\frac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt{(4x-x^2)+1}}. \tag{1.32}$$

Tới đây việc đặt ẩn phụ là ưu tiên hàng đầu cho chúng ta.

Đặt $t=4x-x^2\geqslant 0$. Lúc đó phương trình (1.32) trở thành

$$t=\frac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt{t^2+1}} \Leftrightarrow t+t\sqrt{t^2+1}=3\sqrt{3}. \tag{1.33}$$

Nhận xét rằng với $t=0$ phương trình (1.33) không thỏa. Với $t>0$ ta xét hàm số

$$f(t)=t+t\sqrt{t^2+1},\quad t>0.$$

Ta có

$$f'(t) = 1 + \sqrt{t^2+1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} > 0\ ,\ t > 0$$

Vậy hàm số $y = f(t)$ đồng biến với mọi $t > 0$. Suy ra phương trình (1.33) nếu có nghiệm, thì nghiệm đó là duy nhất.

Mà ta có $f\left(\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3}$ nên dẫn đến

$$t = \sqrt{3} \Leftrightarrow 4x - x^2 = \sqrt{3}.$$

Tới đây các bạn tiếp tục nhé vì bài toán đã đơn giản đi nhiều.

1.110. Điều kiện là $x \geqslant 2$. Phương trình đã cho được viết lại thành

$$\left[(x^2-x+1)-5(x-2)\right]\sqrt{x^2-x+1} = 2\left[(x^2-x+1)-3(x-2)\right]\sqrt{x-2}$$

Đặt

$$b = \sqrt{x^2-x+1},\quad a = \sqrt{x-2},\quad a \geqslant 0,\quad b > 0.$$

Khi đó phương trình vừa biến đổi viết lại thành

$$(b^2-5a^2)b = 2(b^2-3a^2)a \Leftrightarrow b^3 - 2b^2a - 5a^2b + 6a^3 = 0.$$

Chia hai vế phương trình này cho b^3 ta thu được phương trình

$$6\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 5\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{a}{b} = 1, \\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{a}{b} = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

1.111. Phương trình đã cho tương đương

$$(x+2)\cdot\left(\sqrt{(x+2)^2+3}+1\right) = -x\sqrt{(-x)^2+3}+1.$$

Xét hàm số đặc trưng $f(t) = t\sqrt{t^2+3}+1$. Đáp số. $x = -1$.

1.112. ***Hướng dẫn.*** Đặt $a = \sqrt[3]{x+4}$, $b = \sqrt[3]{x}$. Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} (a-b)(2-3ab)+1 = 0, \\ a^3 - b^3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 2b - 3a^2b + 3ab^2 + 1 = 0, \\ a^3 - b^3 = 4. \end{cases}$$

Cộng hai phương trình trên ta được

$$(a^3-3a^2b+3ab^2+b^3)+2a-2b=3$$

Do đó

$$(a-b)^3+2(a-b)-3=0.$$

Ta có hệ

$$\begin{cases} a-b=1, \\ a^3-b^3=4. \end{cases}$$

Đáp số. $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3; -\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3$.

1.113. Điều kiện $x \geqslant 0$. Đặt $a=\sqrt[4]{x+80} \Rightarrow a>0$. Ta có

$$a^4=x+80 \Leftrightarrow x=a^4-80,$$

mà $x>0$ nên $a^4>80$. Với điều kiện trên phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{a^4-80}+\sqrt[3]{a^4-73}=a, \tag{1.34}$$

tương đương

$$\sqrt{a^4-80}-1+\sqrt[3]{a^4-73}-2=a-3,$$

hay

$$\frac{a^4-81}{\sqrt{a^4-80}+1}+\frac{a^4-81}{(\sqrt[3]{a^4-73})^2+2\sqrt[3]{a^4-73}+4}=a-3$$

$$\Leftrightarrow (a-3)\left[\frac{(a-3)(a^2+9)}{\sqrt{a^4-80}+1}+\frac{(a-3)(a^2+9)}{(\sqrt[3]{a^4-73})^2+2\sqrt[3]{a^4-73}+4}-1\right]=0.$$

Xét phương trình

$$\frac{(a-3)(a^2+9)}{\sqrt{a^4-80}+1}+\frac{(a-3)(a^2+9)}{(\sqrt[3]{a^4-73})^2+2\sqrt[3]{a^4-73}+4}-1=0 \tag{1.35}$$

Vì

$$\frac{(a-3)(a^2+9)}{(\sqrt[3]{a^4-73})^2+2\sqrt[3]{a^4-73}+4}>0,$$

nên nếu ta chứng minh được $\dfrac{(a-3)(a^2+9)}{\sqrt{a^4-80}+1}>1$, thì phương trình (1.35) vô nghiệm. Thật vậy, ta có

$$\frac{(a-3)(a^2+9)}{\sqrt{a^4-80}+1}>1.$$

$$\Leftrightarrow (a-3)(a^2+9)-1 > \sqrt{a^4-80}$$

$$\Leftrightarrow a^3+3a^2+9a+26 > \sqrt{a^4-80}$$

$$\Leftrightarrow a^6+6a^5+80a^4+52a^3+237a^2+468a+756 > 0$$

đúng với a dương. Nên (1.34) có nghiệm duy nhất $a = 3$, từ đó suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Có thể giải như sau:

Điều kiện $x \geqslant 0$. Ta thấy $x = 0$ không phải là nghiệm suy ra phương trình có nghiệm khi $x > 0$.

Phương trình được viết lại

$$\sqrt{x}+\sqrt[3]{x+7}-\sqrt[4]{x+80} = 0$$

Xét hàm số

$$f(x) = \sqrt{x}+\sqrt[3]{x+7}-\sqrt[4]{x+80}, \quad x > 0.$$

Ta có

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+7)^2}}-\frac{1}{4\sqrt[4]{(x+80)^3}}.$$

Mặt khác ta dễ chứng minh được

$$3\sqrt[3]{(x+7)^2} < 4\sqrt[4]{(x+80)^3}. \tag{1.36}$$

Thật vậy lũy thừa với số mũ 12 cả hai vế, phương trình (1.36) tương đương với

$$3^{12}(x+7)^8 < 4^{12}(x+80)^9.$$

Điều này là hiển nhiên đúng, từ đó ta suy ra $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (0;+\infty)$.

Như vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Mặt khác, $f(3) = 0$. Suy ra $x = 3$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

1.114. Điều kiện $x \geqslant -\dfrac{1}{3}$. Ta có

$$x^3+3x^2+4x+2 = (3x+2)\sqrt{3x+1}$$

tương đương

$$(x+1)^3+x+1 = (\sqrt{3x+1})^3+\sqrt{3x+1}. \tag{1.37}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$, $(t > 0)$. phương trình (1.37) có dạng

$$f(x+1) = f(\sqrt{3x+1}).$$

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$ với mọi $t > 0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Nên (1.37) xảy ra khi và chỉ khi

$$x + 1 = \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0; \quad x = 1.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 1$.

1.115. Đặt $t = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}$, ta có hệ

$$\begin{cases} x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = t, \\ 7x^2 + 9x - 4 = t^3. \end{cases}$$

Cộng hai phương trình trên, ta được

$$t^3 + t = (x+1)^3 + (x+1). \tag{1.38}$$

Hàm số $f(a) = a^3 + a$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên từ (1.38), ta có $t = x + 1$. Khi đó,

$$x + 1 = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{array} \right.$$

1.116. Điều kiện $|x| \geqslant 1$. Từ phương trình ta thấy

$$3x = \frac{2x^4 - 3x^2 + 20}{\sqrt{3x^4 + 20} + \sqrt{x^4 + 3x^2 - 4}} > 0.$$

Do đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^4 + 3x^2 - 4} + 3\sqrt{x^2} = \sqrt{3x^4 + 16},$$

cũng vậy

$$3\sqrt{(x^4 + 4x^2)(x^2 - 1)} = (x^4 + 4x^2) - 10(x^2 - 1),$$

hay

$$\frac{x^4 + 4x^2}{x^2 - 1} - 3\sqrt{\frac{x^4 + 4x^2}{x^2 - 1}} - 10 = 0.$$

Đáp số. $x = \dfrac{\sqrt{31} - \sqrt{11}}{2}$, $x = \dfrac{\sqrt{31} + \sqrt{11}}{2}$.

1.117. Đáp số. $x_1 = \frac{17-\sqrt{97}}{12}$ và $x_2 = \frac{17+\sqrt{97}}{12}$.

Cách 1. Đầu tiên quan sát rằng

$$(x-2)^3 + 5x - x^3 = -6x^2 + 17x - 8.$$

Vì vậy, ta đặt

$$a = \sqrt[3]{5x - x^3}, \quad b = x - 2.$$

Phương trình thành

$$-2x^2(x-2) - \left(-6x^2 + 17x - 8\right) = 2x^2\sqrt[3]{5x - x^3}.$$

Do đó

$$-2xb - \left(a^3 + b^3\right) = 2x^2 a \Leftrightarrow (a+b)\left(a^2 - ab + b^2 + 2x^2\right) = 0.$$

Cách 2.

Ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

Với $x \neq 0$ thì phương trình đã cho tương đương

$$-2 + \frac{10}{x} - \frac{17}{x^2} + \frac{8}{x^3} = 2\sqrt[3]{\frac{5}{x^2} - 1}.$$

Đặt $t = \dfrac{1}{x}$, ta được

$$-2 + 10t - 17t^2 + 8t^3 = 2\sqrt[3]{5t^2 - 1}.$$

$$\Leftrightarrow (2t-1)^3 + 2(2t-1) = 5t^2 - 1 + 2\sqrt[3]{5t^2 - 1}.$$

Bây giờ thì ta xét hàm số $f(x) = x^3 + 2x$.

Cách 3.

Xét với $x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

Với $x \neq 0$, chia cả hai vế cho x^3, ta thu được phương trình

$$\frac{8}{x^3} - \frac{17}{x^2} - \frac{10}{x} - 2 = 2\sqrt[3]{\frac{5}{x^2} - 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{x^3} - \frac{12}{x^2} + \frac{6}{x} - 1 + 2\left(\frac{2}{x} - 1\right) = \left(\frac{5}{x^2} - 1\right) + 2\sqrt[3]{\frac{5}{x^2} - 1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{x} - 1\right)^3 + 2\left(\frac{2}{x} - 1\right) = \left(\frac{5}{x^2} - 1\right) + 2\sqrt[3]{\frac{5}{x^2} - 1}$$

Cách 4. Ta có phương trình đã cho tương đương với

$$6x^2-17x+8=2x^2\left[\sqrt[3]{5x-x^3}-(2-x)\right].$$

Do

$$A=\sqrt[3]{(5x-x^3)^2}+(2-x)\sqrt[3]{5x-x^3}+(2-x)^2>0,$$

nên phương trình trên có thể được viết lại thành

$$6x^2-17x+8=\frac{2x^2\left[(5x-x^3)-(2-x)^3\right]}{A},$$

hay

$$(6x^2-17x+8)\left(1+\frac{2x^2}{A}\right)=0.$$

Vì $1+\dfrac{2x}{2A}>0$ nên từ đây ta có

$$6x^2-17x+8=0.$$

Giải ra, ta được $x=\dfrac{17\pm\sqrt{97}}{12}$.

Vậy phương trình đã cho có tất cả hai nghiệm là

$$x_1=\frac{17-\sqrt{97}}{12}\quad\text{và}\quad x_2=\frac{17+\sqrt{97}}{12}$$

1.118. Phương trình dược viết lại như sau

$$\frac{\sqrt{4-x}}{1+\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{4-(1-x)}}{1+\sqrt{1-x}}=2x-1.$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{\sqrt{4-t}}{1+\sqrt{t}}$. Ta có

$$f'(t)=\frac{\dfrac{-1}{2\sqrt{4-t}}.\sqrt{1+t}-\dfrac{1}{2\sqrt{t}}.\sqrt{4-t}}{(1+\sqrt{t})^2}<0.$$

Phương trình đã cho có dạng

$$f(x)-f(1-x)=2x-1=x-(1-x).$$

Lí luận để có

$$x=1-x\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

1.119. ***Cách 1.*** Theo kinh nghiệm của mình thì thường phương trình có cả căn bậc hai và căn bậc ba thì phương pháp nên ưu tiên trước là phương pháp nhân lượng liên hợp. Dĩ nhiên mục đích của việc nhân lượng liên hợp là làm xuất hiện nhân tử. Quan sát thấy biểu thức trong căn bậc ba có bậc là ba, còn biểu thức trong căn bậc hai thì biểu thức có bậc là hai. Vậy để xuất hiện nhân tử thì bạn làm thế nào cho bậc của biểu thức dưới căn bậc hai và căn bậc ba bằng nhau. Để đạt được mục đích ấy, mình sẽ làm mất đi x^3. Mà muốn làm mất đi x^3 thì biểu thức cần thêm vào trước khi nhân lượng liên hợp nhất thiết phải có dạng $x+n$. Phương trình đã cho viết lại

$$\sqrt[3]{\frac{7}{4-x^3}}+(x+n)-[\sqrt{4x^2-4x-1}-(-n-1)]=0.$$

Tương đương

$$\frac{\dfrac{7}{4}-x^3+(x+n)^3}{\sqrt[3]{\dfrac{7}{4-x^3}}^3-\sqrt[3]{\dfrac{7}{4-x^3}}(x+n)+(x+n)^2}-\frac{4x^2-4x-1-(-n-1)^2}{\sqrt{4x^2-4x-1}+(-n-1)}=0,$$

hay

$$\frac{3nx^2+3n^2x+n^3+\dfrac{7}{4}}{\sqrt[3]{\dfrac{7}{4-x^3}}^3-\sqrt[3]{\dfrac{7}{4-x^3}}(x+n)+(x+n)^2}-\frac{4x^2-4x-1-(-n-1)^2}{\sqrt{4x^2-4x-1}+(-n-1)}=0$$

Để có được nhân tử chung n phải thỏa

$$\frac{3n}{4}=\frac{3n^2}{-4}=\frac{n^3+\dfrac{7}{4}}{-1-(-n-1)^2}\Longleftrightarrow n=-1.$$

Sau các bước phân tích trên ta có lời giải sau. Phương trình đã cho tương đương

$$\sqrt[3]{\frac{7}{4-x^3}}+(x-1)-\sqrt{4x^2-4x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x^2+3x+(-1)^3+\dfrac{7}{4}}{\sqrt[3]{\dfrac{7}{4-x^3}}^3-\sqrt[3]{\dfrac{7}{4-x^3}}(x-1)+(x-1)^2}-\sqrt{4x^2-4x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2-4x-1}\left(\frac{-3}{4}.\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{7}{4-x^3}}^3-\sqrt[3]{\frac{7}{4-x^3}}(x-1)+(x-1)^2}-1\right)=0$$

Dễ dàng nhận thấy biểu thức trong ngoặc luôn âm. Vậy trên tương đương:

$$4x^2-4x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

Cách 2. Bài này ta có thể đặt

$$\sqrt[3]{\frac{7}{4}-x^3}=a, \quad \sqrt{4x^2-4x-1}=b, \quad (b \geqslant 0).$$

Ta có

$$-4a^3-3b^2=4(b-a)^3$$

tương đương

$$4b^3-12b^2a+12a^2b+3b^2=0.$$

Đến đây xảy ra hai trường hợp nhưng đều xảy ra khi $b=0$ và giải quyết khá đơn giản.

Cách 3. Điều kiện $4x^2-4x-1 \geqslant 0$

Phương trình được viết lại như sau:

$$\sqrt[3]{\frac{7}{4}-x^3}=\sqrt{4x^2-4x-1}+1-x$$

Từ phương trình ta suy ra

$$\sqrt[3]{\frac{7}{4}-x^3} \geqslant 1-x$$

Lập phương hai vế và rút gọn ta thu được

$$4x^2-4x-1 \leqslant 0$$

Kết hợp điều kiện ta suy ra

$$4x^2-4x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

1.120. phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^4+20}-\sqrt{x^4+9}=x^3-7.$$

Do vế trái luôn dương, nên ta phải có $x^3-7>0$ hay $x>\sqrt[3]{7}$. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số ta tìm được nghiệm của phương trình là $x=2$.

1.121*. Điều kiện $x\geqslant -2$. Đặt

$$u=2\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+5}\Rightarrow u^2=6x+13-4\sqrt{2x^2+9x+10}.$$

Phương trình viết lại thành

$$u^2-(3x+2)u+2x^2+x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=2x+3,\\ u=x-1.\end{array}\right.$$

Như vậy ta cần giải hai phương trình sau

$$2\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+5}=2x+3 \tag{1.39}$$

và

$$2\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+5}=x-1. \tag{1.40}$$

Xét phương trình (1.39) dễ thấy nó tương đương với

$$4(x+2)-2x-5=(2x+3)\left(2\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+5}\right).$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+3=0,\\ 2\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+5}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{3}{2},\\ x=-2.\end{array}\right.$$

Xét phương trình (1.40), tương tự cũng có

$$2x+3=(x-1)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+5}\right).$$

Nhận xét ngay $x\neq 1$, nên có thể viết phương trình thành

$$f(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+5}-\frac{2x+3}{x-1}=0.$$

Nhận thấy hàm $f(x)$ liên tục, đồng biến trên các khoảng $(-2,1)$ và $(1,+\infty)$. Do đó, trên mỗi khoảng này, phương trình $f(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm. Ta có $f(-2)>0$ nên trên $(-2,1)$ phương trình sẽ vô nghiệm, đồng thời $f(2)=0$ nên có thể kết luận $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=2$. Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x=-2$, $x=-\dfrac{3}{2}$, $x=2$.

1.122. Đặt $t = \sqrt{x}$, phương trình đã cho trở thành

$$t^3 - t + 1 = \sqrt[3]{3t^2 - 2}.$$

Lập phương phương trình

$$t^3 - t + 1 = \sqrt[3]{3t^2 - 2},$$

ta được

$$t^9 - 3t^7 + 3t^6 + 3t^5 - 6t^4 + 2t^3 - 3t + 3 = 0.$$

Phân tích thành nhân tử ta thu được

$$(t+1)\cdot(t-1)^2\cdot(t^6 + t^5 - t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 3) = 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned} t^6 + t^5 - t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 3 &= (t^6 + t^2) + (t^5 + t^3) - t^4 + t^3 + 2t^2 + 3 \\ &\geqslant 2t^4 + 2t^4 - t^4 + t^3 + 2t^2 + 3 \\ &= 3t^4 + t^3 + 2t^2 + 3 \\ &\geqslant 3 \end{aligned}$$

1.123. Điều kiện của phương trình $x \geqslant 1$. Đặt $u = \sqrt{2x-2} + 1 \geqslant 1$. Ta có

$$u^2 - 2u = 2x - 3.$$

Viết phương trình đã cho dưới dạng

$$3^{\sqrt{2x-2}+1} + 2x - 3 = 3^x + x^2 - 2x,$$

hay

$$3^u + u^2 - 2u = 3^x + x^2 - 2x. \tag{1.41}$$

Xét hàm số

$$f(t) = 3^t + t^2 - 2t, \quad \text{với } t \geqslant 1.$$

Ta có

$$f'(t) = 3^t \cdot \ln 3 + 2t - 2 \geqslant 0, \quad \forall t \geqslant 1.$$

Từ phương trình (1.41), ta có $u = x$, hay

$$\sqrt{2x-2} + 1 = x.$$

Giải phương trình này, ta được hai nghiệm $x = 1$ và $x = 3$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 3$.

1.125. Lấy phương trình thứ nhất cộng phương trình thứ hai sau khi nhân 2, ta được

$$x^4y^2 - 4xy + y^2 + 4x^2 + 2 = 1 + 4x - 2y.$$

Đưa phương trình trên về phương trình bậc hai theo y, ta có

$$(x^4+1)y^2 + (2-4x)y + 4x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Ta tính được

$$\Delta = -4x^4(1-2x)^2.$$

Do đó, phương trình đã cho có nghiệm khi

$$-4x^4(1-2x)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

- Với $x = 0$, ta có $y = -1$. Nghiệm này thoả hệ.
- Với $x = \dfrac{1}{2}$, ta có $y = 0$. Nghiệm này không thoả hệ.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) \in \{(0; -1)\}$.

1.126. Với $y = 0$ hệ phương trình vô nghiệm. Với $y \neq 0$ chia hai vế phương trình thứ nhất cho và phương trình thứ hai lần lượt cho y^3 và y^2, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 27x^3 + \dfrac{125}{y^3} = 9, \\ 45\dfrac{x^2}{y} + 75\dfrac{x}{y^2} = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27x^3 + \dfrac{125}{y^3} = 9, \\ 3x.\dfrac{5}{y}\left(3x + \dfrac{5}{y}\right) = 6. \end{cases} \tag{1.42}$$

Đặt

$$u = 3x; \quad v = \frac{5}{y}, \quad v \neq 0.$$

Lúc đó (1.42) thành

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 9, \\ uv(u+v) = 6n; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^3 - 3uv(u+v) = 9, \\ uv(u+v) = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^3 = 27, \\ uv(u+v) = 6; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3, \\ uv = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1, \\ v = 2 \end{cases} \text{hay } \begin{cases} u = 2, \\ v = 1. \end{cases}$$

- Với $\begin{cases} u=1, \\ v=2. \end{cases}$ Ta có $\begin{cases} 3x=1, \\ \dfrac{5}{y}=2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{3}, \\ y=\dfrac{5}{2}. \end{cases}$

- Với $\begin{cases} u=2, \\ v=1. \end{cases}$ Ta có $\begin{cases} 3x=2, \\ \dfrac{5}{y}=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3}, \\ y=5. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x;y)$ là $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{2}\right);\left(\dfrac{2}{3};5\right)$.

1.127. Dễ thấy $(0;0)$ không thỏa mãn hê phương trình. Ta đưa hệ phương trình đã cho về dạng

$$\begin{cases} 27x^3-\dfrac{8}{y^3}=-7, \\ \dfrac{9x^2}{y}-\dfrac{6x}{y^2}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x)^3-\left(\dfrac{2}{y}\right)^3=-7, \\ \dfrac{3x}{y}\left(3x-\dfrac{2}{y}\right)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(3x-\frac{2}{y}\right)\left(9x^2+\frac{6x}{y}+\frac{4}{y^2}\right)=-7, \\ 3x-\dfrac{2}{y}=-\dfrac{y}{3x}. \end{cases}$$

Thay các giá tri ở phương trình thứ hai vào phương trình thứ nhất của hệ sau cùng ta được,

$$3xy+\frac{4}{3xy}-5=0 \Leftrightarrow 9(xy)^2-15xy+4=0 \Leftrightarrow xy=\frac{1}{3} \vee xy=\frac{4}{3}.$$

Cách khác. Nhân phương trình thứ hai với y, rồi trừ hai phương trình cho nhau, ta được

$$27x^3y^3-63x^2y^2+42xy-8=0.$$

Phương trình này có ba nghiệm

$$xy=\frac{1}{3},\quad xy=\frac{2}{3},\quad xy=\frac{4}{3}.$$

1.128. Các bài hệ phương trình "tựa" đối xứng này cũng xuất hiện khá thường xuyên trong các đề thi Đại học. Ta chỉ cần tìm quan hệ đơn giản hơn giữa các biến là xong.

Trong trường hợp này, quan hệ đó được tìm được nhờ biến đổi sau

$$\begin{cases} x^3+xy^2=40y \\ y^3+x^2y=10x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2+y^2)=40y \\ y(x^2+y^2)=10x. \end{cases}$$

Nếu $x = 0$ thì $y = 0$ và nếu $y = 0$ thì $x = 0$ nên phương trình có nghiệm $x = y = 0$.

Ta xét $xy \neq 0$, chia hai vế của hai phương trình của hệ, ta được

$$\frac{x}{y} = 4\frac{y}{x} \Leftrightarrow x^2 = 4y^2 \Leftrightarrow x = \pm 2y.$$

Ta thấy $x = -2y$ không thỏa vì từ các phương trình của hệ đã cho ban đầu, ta thấy x, y cùng dấu. Do đó $x = 2y$, thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$y(4y^2 + y^2) = 20y \Leftrightarrow 5y^2 = 20 \Leftrightarrow y = \pm 2.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm là $(x, y) = (0, 0), (4, 2), (-4, -2)$.

1.129. Bằng một chút tính toán, mò mẫm, ta có $x = y = 2$ là một nghiệm của hệ, từ đó, một cách tự nhiên, ta có các biến đổi sau. Từ phương trình thứ nhất, ta có

$$y - 2 = -x^3 + 3x + 2 = (2 - x)(x + 1)^2.$$

Từ phương trình thứ hai, ta có

$$x - 2 = 2y^3 - 6y - 4 = 2(y - 2)(y + 1)^2.$$

Từ đây ta nhận xét rằng, nếu $y > 2$ thì ta sẽ đồng thời suy ra $x > 2$ và $x < 2$ (vô lý). Tương tự, nếu $y < 2$ ta cũng sẽ ra vô lý. Như vậy, ta phải có $y = 2$, từ đó suy ra $x = 2$. Như vậy, hệ có nghiệm duy nhất là bộ $(x = 2, y = 2)$.

1.130. Từ phương trình thứ nhất của hệ suy ra $y > 0$.

Từ phương trình thứ hai suy ra $x > y > 0$.

Mặt khác cũng từ phương trình thứ nhất ta có $x = \dfrac{4}{\sqrt{y}} - y$.

Đặt $\sqrt{y} = t > 0$ thay vào phương trình thứ hai ta có

$$t^2\left[\left(\frac{4}{t} - t^2\right)^3 - t^6\right] = 26 \Leftrightarrow (4 - t^3)^3 - t^9 - 26t = 0.$$

$$f(t) = (4 - t^3)^3 - t^9 - 26t$$

có

$$f'(t) = -3t^2(4 - t^3)^2 - 9y^8 - 26 < 0.$$

Ta có $f(1) = 0 \Rightarrow t = 1$ là nghiệm duy nhất. Từ đó suy ra $x = 3; y = 1$ là nghiệm của hệ.

1.131. Ta có

$$(x+y)^2 \geqslant 4xy \Rightarrow 2(x+y)^3+(x+y)^2-3 \geqslant 2(x+y)^3+4xy-3=0.$$

hay

$$2(x+y)^3+(x+y)^2-3 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x+y-1)[2(x+y)^2+3(x+y)+3] \geqslant 0. \qquad (1.43)$$

Vì $2(x+y)^2+3(x+y)+3>0$ với mọi x, y nên (1.82) $\Leftrightarrow x+y \geqslant 1$. Phương trình thứ hai có dạng

$$(x+y)^4-2(x+y)^2+(x+y)+(2y-1)^2=0.$$

Mặt khác ta có

$$(x+y)[(x+y)^3-2(x+y)+1]=(x+y)(x+y-1)[(x+y)^2+(x+y)-1] \geqslant 0.$$

(do $x+y \geqslant 1$).

Vì vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm khi

$$\begin{cases} x=y, \\ x+y=1, \\ 2y-1=0. \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}.$$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

1.132. Ta nhận thấy rằng hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=(0;0)$.

Bây giờ ta xét với điều kiện $x.y \neq 0$. Ta có phân tích sau

$$xy+3=\frac{x^2+y^2-x^3+x}{y}=\frac{-y^3-y}{x}.$$

Ta thu được kết quả sau

$$(x^2+y^2)(x+1-x^2+y^2)=0.$$

Với $x+1-x^2+y^2=0$. Đem thế vào phương trình thứ hai của hệ đã cho ta được $2xy-y+3=0$. Lấy $2xy-y+3=0$ thế vào phương trình thứ nhất của hệ ta có

$$(1-2x)^4+3(1-2x)^2-36=0.$$

1.133. Nhận thấy $x = y = 0$ là nghiệm của hệ Xét $x; y \neq 0$ Hệ đã cho tương đương

$$\begin{cases} (x+y)(1+xy) = 18xy, \\ (x^2+y^2)(1+x^2y^2) = 208x^2y^2, \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}(1+xy) = 18, \\ \dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2}(1+x^2y^2) = 208 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + x + y = 18, \\ \dfrac{1}{x^2} + d\frac{1}{y^2} + x^2 + y^2 = 208. \end{cases}$$

Đặt

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + x = a, \\ \dfrac{1}{y} + y = b. \end{cases}$$

Ta có hệ

$$\begin{cases} a + b = 18, \\ a^2 + b^2 = 212. \end{cases}$$

Đến đây thì thế vào để tìm x và y.

1.134. Lấy phương trình thứ nhất trừ cho phương trình thứ hai sau khi nhân 3, ta được

$$(x-1)^3 = (y-2)^3 \Leftrightarrow x = y + 3.$$

1.135. Ta thấy mọi cặp $(x; 0)$ không phải là nghiệm của hệ phương trình.

Chia hai phương trình của hệ cho y^2 ta thu được hệ sau

$$\begin{cases} 4x^2 + \dfrac{9}{y^2} - \dfrac{6x}{y} = 3, \\ \dfrac{6x^2}{y} - \dfrac{9x}{y^2} = 1. \end{cases}$$

Tương đương

$$\begin{cases} \left(2x - \dfrac{3}{y}\right)^2 + \dfrac{6x}{y} = 3, \\ \dfrac{3x}{y}\left(2x - \dfrac{3}{y}\right) = 1. \end{cases}$$

Đặt

$$2x - \frac{3}{y} = a, \quad \frac{3x}{y} = b.$$

Ta thu được hệ mới

$$\begin{cases} a^2 + 2b = 3, \\ ab = 1. \end{cases}$$

Cách khác. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2y(2x^2y - 3x) - 3y^2 + 9 = 0, \\ 2x^2y - 3x = \dfrac{y^2}{3}. \end{cases}$$

Suy ra

$$2y \cdot \frac{y^2}{3} - 3y^2 + 9 = 0.$$

Giải phương trình này ta được

$$y = \frac{-3}{2} \quad \text{hoặc } y = 3.$$

1.136. sử dụng phân tích

$$(2x^2 - 4x + 3 + y^3) - 2(x^2y^2 - 2x + y^2) = (y+1)(2x^2 + y^2 - 2x^2y - 3y + 3)$$

để suy ra $y = -1$ hoặc $2x^2 + y^2 - 2x^2y - 3y + 3 = 0$.

Tuy nhiên, trường hợp thứ hai lại không thể xảy ra do ta có

$$2x^2 + y^2 - 2x^2y - 3y + 3 + (x^2y^2 - 2x + y^2) = x^2(y-1)^2 + (x-1)^2 + 2(y-1)^2 + 1 > 0.$$

Và như vậy, ta tìm được $y = -1$. Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta có ngay $x = 1$. Thử lại ta thấy $(x, y) = (1, -1)$ thỏa mãn hệ phương trình.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x, y) = (1, -1)$. ■

1.137. Đáp số. $(1;3)$ hoặc $(-1;3)$.

Cách 1. Nhân phương trình thứ hai của hệ với 2 rồi cộng với phương trình thứ nhất, ta được

$$x^4 + 2x^2y + y^2 + 8x^2 + 8y - 48 = 0,$$

tương đương

$$(x^2 + y)^2 + 8(x^2 + y) - 48 = 0.$$

Từ phương trình này ta có

$$x^2 + y = -12 \quad \text{hoặc } x^2 + y = 4.$$

Cách 2. Viết hệ phương trình đã cho dưới dạng

$$\begin{cases} (x^2+2)^2 + (y-2)^2 = 10, \\ x^2(y+2) + 6y = 23. \end{cases}$$

Đặt $u = x^2 + 2$, $v = y - 2$.

1.138. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = 2\left(y + \dfrac{1}{y}\right), \\ \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \dfrac{1}{y}\right)^2 = 20. \end{cases}$$

1.139. ***Cách 1.*** Hệ phương trình được viết lại như sau:

$$\begin{cases} x^2y^2 + 2xy^2 + xy + y + 1 = 6y^2, & (1.44) \\ xy + x + 2 = 4y. & (1.45) \end{cases}$$

Để ý rằng $y = 0$ không phải là nghiệm. Chia phương trình (1.44) của hệ cho y^2 , phương trình (1.45) cho y ta thu được:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{y^2} = 6, \\ x + \dfrac{x}{y} + \dfrac{2}{y} = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \dfrac{1}{y}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y}\right) + 2\left(x + \dfrac{1}{y}\right) = 6, \\ x + \dfrac{1}{y} + \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y} = 4. \end{cases}$$

Đặt

$$a = x + \frac{1}{y}; \quad b = \frac{x}{y} + \frac{1}{y}.$$

Ta thu được hệ mới

$$\begin{cases} a^2 + 2a - b = 6, \\ a + b = 4. \end{cases}$$

Cách 2. Chúng ta còn có thể làm như sau. Từ phương trình thứ hai của hệ, ta có $xy = 4y - x - 2$. Thay vào phương trình thứ nhất, ta được

$$(4y - x - 2)(6y - x - 1) + y = 6y^2 - 1,$$

hay

$$x^2 - 10xy + 18y^2 + 3x - 15y + 3 = 0.$$

Lúc này, bằng cách sử dụng đồng nhất thức

$$(x^2 - 10xy + 18y^2 + 3x - 15y + 3) - (xy + x - 4y + 2) = (x - 2y + 1)(x - 9y + 1),$$

ta đi ngay đến lời giải.

1.140. Từ phương trình thứ hai của hệ, ta có

$$y = (x+1)^3 - 2.$$

Thay vào phương trình thứ nhất, ta thu được

$$2x + (x+1)\left[(x+1)^3 - 2\right] = 14,$$

tương đương

$$(x+1)^4 = 16.$$

Từ đây, dễ dàng suy ra $x = 1$ hoặc $x = -3$ (tương ứng, ta có $y = 6$ hoặc $y = -10$).

Vậy, hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x; y) = (1, 6)$ và $(x; y) = (-3, -10)$.

1.141. ***Cách 1.*** Hệ phương trình được viết lại như sau:

$$\begin{cases} x^2 + x + y = 2xy, \\ x^4 + 3x^2 + y^2 = 4x^2y. \end{cases}$$

Ta thấy $x = y = 0$ là một nghiệm của hệ.

Xét $x \neq$. Chia phương trình thứ nhất của hệ cho x, phương trình thứ hai cho x^2 ta thu được:

$$\begin{cases} x + \dfrac{y}{x} + 1 = 2y, \\ x^2 + \dfrac{y^2}{x^2} + 3 = 4y. \end{cases}$$

Đặt

$$a = x + \frac{y}{x}.$$

Ta thu được hệ mới

$$\begin{cases} a - 2y = -1, \\ a^2 - 6y = -3. \end{cases}$$

Cũng có thể chia phương trình thứ nhất cho xy và chia phương trình thứ hai cho x^2y^2.

Cách 2. Ta có

$$x(x-2)(x^2-2xy+x+y)+(x^4-4x^2y+3x^2+y^2)=(x-y)(2x^3-x^2+x-y).$$

Do đó, từ hệ ta suy ra $x = y$ hoặc $2x^3 - x^2 + x - y = 0$.

- Với $x = y$, Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được

  $$2x - x^2 = 0.$$

  Từ đó suy ra $x = y = 0$ hoặc $x = y = 2$. Thử lại, ta thấy các bộ số này đều là nghiệm của hệ.

- Với $2x^3 - x^2 + x - y = 0$. Do

  $$3(2x^3-x^2+x-y)+(2x+1)(x^2-2xy+x+y)=2(2x^2+1)(2x-y),$$

  nên ta có $y = 2x$. Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta thu được

  $$-3x^2 + 3x = 0,$$

  tức $x = 0$ hoặc $x = 1$ (tương ứng, ta có $y = 0$ hoặc $y = 2$). Thử lại, ta thấy $(x; y) = (0; 0)$ và $(x; y) = (1; 2)$ đều thỏa mãn hệ phương trình.

  Vậy hệ phương trình đã cho có tập nghiệm là

  $$\{(0;0),(2;2),(1;2)\}.$$

  Ngoài cách trên, em còn phát hiện được là

  $$(x^4-4x^2y+3x^2+y^2)-(x^2-2xy+x+y)^2=2x(x-1)(x-y)(2y-1).$$

1.142. ***Cách 1.*** Nhận thấy mọi cặp $(x;0)$ không là nghiệm của hệ phương trình. Hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y} + x + y = 4, \\ (x+y)^2 = 2\dfrac{x^2+1}{y} + 7. \end{cases}$$

Đặt

$$\frac{x^2+1}{y} = u, \quad x + y = v.$$

Cách 2. Phân tích hướng giải. Đứng trước một hệ phương trình không mẫu mực so với các hệ ở các loại hệ có cách giải cơ bản thường ta nên đoán xem ta nên đi từng phương nào trong hệ trước hoặc ta kiểm tra điều kiện của các biến trong hệ để từ đó ta xây dựng lên hướng giải cho bài toán hệ đó. Rõ ràng với cách ghép hai phương trình trong hệ ta đang xét "có thể khó "trong việc chọn lựa phương trình nào để đi trước. May mắn là cách ghép phương trình trong hệ giúp ta có thể nhìn thấy "tính đúng "của nghiệm trong hệ. Rõ ràng ta có thể nhận thấy ngay rằng cách xếp đặt ở phương trình thứ hai trong hệ cho ta kiểm tra được khi $y = 0$ ta thu được hệ phương trình vô nghiệm. Vậy câu hỏi đặt ra cho chúng ta liệu rằng khi $y \neq 0$ ta có thu được gì may mắn không? Ta thử nháp nó bằng cách chia cả hai vế của hai phương trình trong hệ cho y ta thu được gì?

- Đối với phương trình thứ nhất khi chia cho y ta thu được

$$\frac{x^2}{y} + (x+y) + \frac{1}{y} = 4.$$

- Đối với phương trình thứ hai khi chia cho y ta thu được

$$(x+y)^2 = \frac{2x^2}{y} + 7 + \frac{2}{y}.$$

Và tới đây ta thấy rõ về hướng đi của bài toán này rồi. Bây giờ ta hoàn thành lời giải nhé.

- Nhận xét $y = 0$ hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

- Với $y \neq 0$ ta chia hai vế của hai phương trình trong hệ ta thu được hệ mới như sau

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + (x+y) + \dfrac{1}{y} = 4 \\ (x+y)^2 = \dfrac{2x^2}{y} + 7 + \dfrac{2}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{1}{y} + (x+y) = 4 \\ (x+y)^2 = 2\left(\dfrac{x^2}{y} + \dfrac{1}{y}\right) + 7 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} a = \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{1}{y}, \\ b = x+y. \end{cases}$ Lúc đó ta thu được hệ phương trình mới

$$\begin{cases} a+b=4 \\ b^2 = 2a+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4-b \\ b^2+2b-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \\ \begin{cases} a=9 \\ b=-5 \end{cases} \end{array} \right.$$

Từ các trường hợp này, ta tìm được các nghiệm của hệ đã cho là $(x;y) = \{(1;2);(-2;5)\}$■

Cách 3. Ngoài cách giải trên của trên, bài này còn một cách giải nữa như sau: Để ý một tý thì ta thấy rằng hai phương trình của hệ có một điểm đặc biệt đó là chỗ x^2+1 ở phương trình đầu tiên và $2x^2+2$ ở phương trình thứ hai! Đến đây chắc chắn một điều là ai cũng dùng cộng đại số để khử nó đi rồi!

Như thế khi ta nhân phương trình đầu với 2 sẽ khử được thằng x^2+1 và rút được y ra ngoài và như vậy bài toán có thể sẽ khả quan hơn! Làm như thế ta thu được phương trình

$$y[(x+y)^2 + 2(x+y) - 15] = 0.$$

Đến đây chắc là đơn giản rồi đúng không? Các bạn chỉ cần xét từng trường hợp riêng nữa là xong! Phần này các bạn tự hoàn thiện nhé!

1.143. Vế trái của phương trình thứ nhất có thể viết lại thành $(x^2+xy)^2$. Do đó, ta có thể thay $xy = \dfrac{6+6x-x^2}{2}$ rút được từ phương trình thứ hai vào và biến đổi phương trình thứ nhất thành phương trình một ẩn theo x. Từ đó tìm được x và cuối cùng là tìm được y.

Bài này cũng có thể chuyển về hệ đối xứng loại II

$$\begin{cases} (x^2+xy)^2 = 2(x+3)+3, \\ (x+3)^2 = 2(x^2+xy)+3. \end{cases}$$

1.144. Nhận thấy mọi cặp $(x;0)$ không là nghiệm của hệ.

Chia mỗi phương trình của hệ cho y, ta được

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y} - (x+y) = 0, \\ \left(\dfrac{x^2+1}{y}\right)\cdot(x+y-2)+1 = 0. \end{cases}$$

Đặt

$$a = \frac{x^2+1}{y}, \quad b = x+y.$$

Đáp số. $(0;1)$, $(-1;2)$.

1.145. Với $y=0$, ta có ngay $x=0$ và bộ số $(x;y)=(0;0)$ là một nghiệm của hệ. Xét trường hợp $y\neq 0$, khi đó hệ đã cho có thể được viết lại dưới dạng

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{x^3}{y^3}(9-x^3), \\ \dfrac{x^2}{y}+1 = \dfrac{6x}{y^2}. \end{cases}$$

Đặt $t = \dfrac{1}{y}$, ta được

$$\begin{cases} 1 = x^3t^3(9-x^3), \\ 1 = 6xt^2 - x^2t. \end{cases}$$

Từ đây ta suy ra

$$(6xt^2-x^2t)^3 = x^3t^3\left[9(6xt^2-x^2t)-x^3\right],$$

hay

$$x^3t^3\left\{(6t-x)^3 - \left[9(6xt^2-x^2t)-x^3\right]\right\} = 0.$$

Sau khi khai triển và rút gọn, ta được

$$27x^3t^4(4t-x)(2t-x) = 0.$$

Đến đây thì dễ dàng rồi.

1.146. Đặt $a = \sqrt{x+1} \geqslant 0$, $\quad b = \sqrt{y+1}$. Ta có hệ

$$\begin{cases} a+b=3, \\ a^3+b^3=6. \end{cases}$$

Đáp số. $(0;3)$, $(3;0)$.

1.147. Lấy từng vế của phương trình thứ nhất của hệ trừ cho từng vế của 3 lần phương trình thứ hai ta được

$$(x-2)^3 = (y+1)^3 \Leftrightarrow y = x-3.$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có

$$x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=-2 \end{array}\right. \vee \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=-1 \end{array}\right. .$$

1.148. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 3(x-y)^2+5\left[(x+y)^2+\dfrac{1}{(x+y)^2}\right]=13, \\ (x-y)+\left(x+y+\dfrac{1}{x+y}\right)=1. \end{cases}$$

Đặt

$$\begin{cases} u = x-y, \\ v = x+y+\dfrac{1}{x+y}. \end{cases}$$

Đáp số $(0;1)$.

1.149. Đáp số. $(3;1)$, $\left(\dfrac{1}{3};-1\right)$.

Nhân phương trình thứ nhất của hệ với x và nhân phương trình thứ hai cho $-y$ rồi cộng hai phương trình cho nhau, ta được

$$\frac{x^2(y^2+1)}{x^2+y^2}-\frac{y^2(x^2-1)}{x^2+y^2}=\frac{3x-4y}{5} \Leftrightarrow \frac{3x-4y}{5}=1.$$

Cách khác. Bình phương hai phương trình đã cho rồi cộng lại, ta được

$$(x^2y^2+1-x^2-y^2)(x^2+y^2)=0.$$

1.150. Từ hệ phương trình, ta có $xy(xy-1)\neq 0$ và do đó, ta có thể viết lại hệ thành

$$\begin{cases} \frac{5}{2}(xy-1) = y + \frac{1}{y} & (1) \\ 2(xy-1) = x + \frac{1}{x} & (2) \end{cases}$$

Lấy $(2)-(1)$, ta được

$$\frac{1}{2}(xy-1) = (y-x) + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) = \frac{(y-x)(xy-1)}{xy}.$$

Do $xy\neq 1$, nên từ đây, ta có

$$xy = 2y - 2x. \quad (3)$$

Thay trở lại vào (2), ta được

$$2x(2y-2x-1) = x^2+1,$$

hay

$$5x^2 - 4xy + 2x + 1 = 0. \quad (4)$$

Bây giờ, từ (3) và (4), ta suy ra

$$0 = (5x^2 - 4xy + 2x + 1) - 4(xy - 2y + 2x) = (x-1)(5x - 8y - 1).$$

Công việc còn lại khá dễ dàng, mời các bạn làm tiếp.

Cách khác. Từ phương trình đã cho, ta có $xy\neq 0$. Chia cả tử và mẫu vế trái của phương trình thứ nhất cho y^2 và chia cả tử và mẫu vế trái vế trái phương trình thứ hai cho x^2, ta được

$$\begin{cases} \dfrac{x - \frac{1}{y}}{1 + \frac{1}{y^2}} = \dfrac{2}{5}, \\ \dfrac{y - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Đặt $\dfrac{1}{x} = a$ và $\dfrac{1}{y} = b$, ta có hệ

$$\begin{cases} \dfrac{1-ab}{a(b^2+1)} = \dfrac{2}{5}, \\ \dfrac{1-ab}{b(a^2+1)} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a(b^2+1)}{1-ab} = \dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{b(a^2+1)}{1-ab} = 2. \end{cases}$$

Trừ hai phương trình trên cho nhau, ta được

$$a-b=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}+b.$$

Dùng phép thế, ta tìm được $a=1$ và $b=\frac{1}{2}$.

Từ đó, suy ra hệ có nghiệm $(x;y)=(1;2)$.

1.151. Hệ tương đương

$$\begin{cases}(y+2)^2=4x,\\(y+2)^2+x^4-5=0.\end{cases}$$

Đáp số. $(x;y)=(1;0)$.

1.152. Đặt $t=\sqrt{2x-1}$. Hệ trở thành

$$\begin{cases}t-y(1-2t)=-8,\\y^2+ty+t^2=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t-y-2ty=-8,\\(t-y)^2+3ty=12.\end{cases}$$

1.153. ***Cách 1.*** Bình phương hai lần phương trình thứ hai, sẽ xuất hiện $(x-y)^2$ theo x. Sau đó thế vào phương trình thứ nhất.

Đáp số. $\left\{\left(\frac{5}{16};-\frac{3}{16}\right),\left(\frac{5}{16};\frac{13}{16}\right)\right\}$.

Cách 2. Điều kiện $x+y\geqslant 0$ và $3x-y\geqslant 0$. Đặt

$$\begin{cases}\sqrt{3x-y}=a,\\\sqrt{x+y}=b\end{cases}(a,b\geqslant 0)\Rightarrow\frac{a^2-b^2}{2}=x-y.$$

Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases}\dfrac{(a^2-b^2)^4}{16}=\dfrac{13(a^2+b^2)}{4}-4,\\a+b=\sqrt{2}.\end{cases}\tag{1.46}$$

Phương trình thứ nhất của hệ (1.46) tương đương

$$\frac{(a-b)^4.(a+b)^4}{16}=\frac{13(a^2+b^2)}{4}-4.$$

Thế $a+b=\sqrt{2}$ vào phương trình trên ta được

$$(a-b)^4 = 13(a^2+b^2)-16 \tag{1.47}$$

Với ý tưởng đưa (1.47) về một phương trình đẳng cấp, ta sẽ viết lại (1.47) thành

$$(a-b)^4 = \frac{13}{2}(a^2+b^2)\cdot 2-4\cdot 4. \tag{1.48}$$

Từ $a+b=\sqrt{2} \Rightarrow (a+b)^2=2$ và $(a+b)^4=4$. Thế vào phương trình (1.48), ta được

$$(a-b)^4 = \frac{13}{2}\cdot(a^2+b^2)(a+b)^2-4(a+b)^4,$$

hay

$$3a^4+2a^3b-34(ab)^2+2ab^3+3b^4=0. \tag{1.49}$$

Nếu $b=0$, (1.49) thành $3a^4=0$ hay $a=0$. Do $a+b=\sqrt{2}$, nên không thể xảy ra đồng thời $a=b=0$. Do đó, $b\neq 0$. Chia phương trình (1.49) cho b^4, ta có

$$3\left(\frac{a}{b}\right)^4+2\left(\frac{a}{b}\right)^3-34\left(\frac{a}{b}\right)^2+2\frac{a}{b}+3=0. \tag{1.50}$$

Đặt $t=\frac{a}{b}$, $(t\geqslant 0)$. Phương trình (1.50) trở thành

$$3t^4+2t^3-34t^2+2t+3=0$$

tương đương

$$(t-3)(3t-1)(t^2+4t+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3,\\ t=\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

- Nếu $t=3\Rightarrow \frac{a}{b}=3$ kết hợp với $a+b=\sqrt{2}$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x-y=\dfrac{9}{8},\\ x+y=\dfrac{1}{8}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{16},\\ y=\dfrac{-3}{16}.\end{cases}$$

- Nếu $t=3\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{1}{3}$ kết hợp với $a+b=\sqrt{2}$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x-y=\dfrac{1}{8},\\ x+y=\dfrac{9}{8}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{16},\\ y=\dfrac{13}{16}.\end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $\left(\frac{5}{16};-\frac{3}{16}\right)$ và $\left(\frac{5}{16};\frac{13}{16}\right)$.

1.155. Để ý rằng phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$x^2+2x+2y^2-8y+18-\frac{9}{2}xy=0.$$

Nếu $xy<0$, ta có

$$x^2+2x+2y^2-8y+18=(x+1)^2+2(y-2)^2+9>0.$$

Vậy chỉ có thể xảy ra trường hợp $xy>0$.

1.156. Điều kiện $x>0$, $y>0$, $y+3x\neq 0$. Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 1-\dfrac{12}{y+3x}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}, \\ 1+\dfrac{12}{y+3x}=\dfrac{6}{\sqrt{y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{\sqrt{y}}=1, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{\sqrt{y}}=\dfrac{12}{y+3x}, \end{cases}$$

Nhân hai phương trình của hệ, ta được

$$\frac{9}{x}-\frac{1}{y}=\frac{12}{y+3x} \Leftrightarrow y^2+6xy-27x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3x, \\ y=-9x. \end{array}\right.$$

Vì $x>0$, $y>0$, ta chỉ nhận $y=3x$. Khi đó, ta có

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt{y}}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=1+\sqrt{3}.$$

hay $x=4+2\sqrt{3}$ khi đó $y=12+6\sqrt{3}$. Đây là nghiệm duy nhất của hệ đã cho.

1.157. Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có

$$1+\sqrt{xy}=x+y\geqslant 2\sqrt{xy}\Rightarrow xy\leqslant 1.$$

Hệ phương trình được viết lại như sau

$$\begin{cases} (x+y)^2=xy+2\sqrt{xy}+1, \\ (x+y)^2-2xy+2\sqrt{3(x+y)^2-6xy+x^2y^2+9}=10. \end{cases}$$

Thế phương trình trên vào phương trình dưới, ta được

$$2\sqrt{xy}-xy+1+2\sqrt{-3xy+6\sqrt{xy}+x^2y^2+12}=10.$$

Phương trình này tương đương với

$$xy+9-2\sqrt{xy}=2\sqrt{-3xy+6\sqrt{xy}+x^2y^2+12}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy+9-2\sqrt{xy}\geqslant 0,\\ 4(x^2y^2-3xy+6\sqrt{xy}+12)=x^2y^2+4xy+81+18xy-36\sqrt{xy}-4xy\sqrt{xy}.\end{cases}$$

Đặt $t=\sqrt{xy}$, phương trình thứ hai của hệ trên thành

$$3t^4+4t^3-34t^2+60t-33=0 \Leftrightarrow (t-1)(3t^3+7t^2-27t+33)=0 \Rightarrow t=1$$

Đáp số. $x=y=1$.

1.158. ***Cách 1.*** Điều kiện $x\geqslant -2$, $y\geqslant -2$. Từ phương trình thứ nhất, ta có

$$x-\sqrt{y+2}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow \begin{cases} x-\dfrac{3}{2}\geqslant 0\\ y=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant \dfrac{3}{2},\\ y=x^2-3x+\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$x^2-3x+\frac{1}{4}+2(x-2)\cdot\sqrt{x+2}=-\frac{7}{4},$$

hay

$$x^2-3x+2+2(x-2)\cdot\sqrt{x+2}=0,$$

tương đương

$$(x-2)(x+1+2\sqrt{x+2})=0.$$

Do $x\geqslant \dfrac{3}{2}$, nên

$$x+1+2\sqrt{x+2}>0.$$

Vậy ta có $x=2$. Khi đó, $y=-\dfrac{7}{4}$.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=\left(2;-\dfrac{7}{4}\right)$.

Cách 2. Đặt $u = \sqrt{x+2} \geqslant 0$, $v = \sqrt{y+2} \geqslant 0$. Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} u^2 - v = \dfrac{7}{2}, \\ v^2 + 2(u^2-4)u = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Thay $v = u^2 - \dfrac{7}{2}$ vào phương trình thứ hai, ta được

$$(u-1)(u-2)(u^2+5u+6) = 0.$$

Ta có $u^2 = v + \dfrac{7}{2}$, nên $u \geqslant \sqrt{\dfrac{7}{2}}$. Do đó, ta chỉ nhận nghiệm $u = 1$. Với $u = 1$, ta có $v = \dfrac{1}{2}$. Vậy ta có $x = 2$. Khi đó, $y = -\dfrac{7}{4}$.

1.160.

$$u(u^2+1) = v(v^2+1) \Leftrightarrow u^3 - v^3 + u - v = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 1 = 0 \quad (a) \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} 4x^2 + \left(\frac{5-4x^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 &\Leftrightarrow 16x^4 - 25x^2 + 8\sqrt{3-4x} - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 16x^4 - 25x^2 + 5 + 8(\sqrt{3-4x} - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (4x^2-1)(4x^2-5) - 16\frac{2x-1}{\sqrt{3-4x}+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x-1)\left[(2x+1)(4x^2-5) - \frac{16}{\sqrt{3-4x}+1}\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2 \end{aligned}$$

1.161. Ta có hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x-1)(y^2+6) - (y-1)(x^2+6) = y(x^2+1) - x(y^2+1), \\ (x-1)(y^2+6) + (y-1)(x^2+6) = y(x^2+1) + x(y^2+1). \end{cases}$$

Hay

$$\begin{cases} (x-y)(7+x+y-2xy) = 0, \\ x^2 + y^2 - 5(x+y) + 12 = 0 \end{cases}.$$

1.162. Điều kiện
$$\begin{cases} x \neq y, \\ x \geqslant \dfrac{11}{2}, \\ x^2 - (x+y) \geqslant 0. \end{cases}$$
Khi đó ta biến đổi phương trình
$$\begin{aligned}
&\sqrt{x^2-(x+y)} = \frac{y}{\sqrt[3]{x-y}} \\
\Leftrightarrow &(x-y)\sqrt{x^2-(x+y)} = y\sqrt[3]{(x-y)^2} \\
\Leftrightarrow &(x-y)^2\left(x^2-(x+y)\right) = y^2(x-y)\sqrt[3]{x-y} \\
\Leftrightarrow &(x-y)x^2-(x^2-y^2) = y^2\sqrt[3]{x-y} \\
\Leftrightarrow &(x-y-1)x^2+y^2\left(1-\sqrt[3]{x-y}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow &(x-y-1)x^2+\frac{y^2(1-x+y)}{1+\sqrt[3]{(x-y)}+\sqrt[3]{(x-y)^2}} = 0 \\
\Leftrightarrow &(x-y-1)\left(x^2-\frac{y^2}{1+\sqrt[3]{(x-y)}+\sqrt[3]{(x-y)^2}}\right) = 0
\end{aligned}$$
Ta có
$$\left(x^2-\frac{y^2}{1+\sqrt[3]{(x-y)}+\sqrt[3]{(x-y)^2}}\right) = \frac{x^2-y^2+\sqrt[3]{(x-y)}+\sqrt[3]{(x-y)^2}}{1+\sqrt[3]{(x-y)}+\sqrt[3]{(x-y)^2}}.$$

1.165. Viết hệ dưới dạng
$$\begin{cases} x+1+\sqrt{y-1} = 7, \\ \sqrt{(x+1)^2+y-1}+2\sqrt{y-1}(x+1) = 29. \end{cases}$$
Đặt
$$\begin{cases} a = x+1, \\ b = \sqrt{y-1}. \end{cases}$$

1.172. Đặt $a = 3^x$ và $b = 2^y$. Từ hệ phương trình đã cho ta có
$$\begin{cases} \dfrac{9-4b^2-4ab-b^2}{4b^2+2ab-3a-9} = \dfrac{a+2b-3}{a-1}, \\ 2ab = 3. \end{cases} \tag{1.51}$$
Chú ý là

- $9-4b^2-4ab-a^2=-(a+2b+3)\cdot(a+2b-3)$;
- $4b^2+2ab-3a-9=(2b-3)\cdot(a+2b+3)$.

Do đó, phương trình (1.51) được thu gọn thành

$$\frac{-(a+2b-3)}{2b-3}=\frac{a+2b-3}{a-1}. \tag{1.52}$$

Phương trình (1.52) tương đương với

$$\begin{cases} 2b-3\neq 0,\\ a-1\neq 0,\\ a+2b-3=0 \text{ hoặc } a=4-2b.\end{cases}$$

Hệ phương trình

$$\begin{cases} a+2b-3=0,\\ 2ab=3\end{cases}$$

vô nghiệm.

Hệ phương trình

$$\begin{cases} a=4-2b,\\ 2ab=3\end{cases}$$

có hai nghiệm $a=3$, $b=\dfrac{1}{2}$ hoặc $a=1$, $b=\dfrac{3}{2}$ (nghiệm này loại từ phương trình (1.52)).

Với $a=3$, $b=\dfrac{1}{2}$, ta có nghiệm của hệ đã cho là $x=1$, $y=-1$.

1.173. Đáp số. $(-1;1)$.

1.175. Phương trình thứ nhất có thể được viết lại thành

$$(x^2+11y-2)(x^2-2y+11)=0.$$

Đáp số. $\{(\sqrt{2};0);(-\sqrt{2};0).\}$

1.176. Hệ có dạng

$$\begin{cases} ax^2+by^2+cxy+dy+ex=f,\\ a'x^2+b'y^2+c'xy+d'x+e'x+f'=0.\end{cases}$$

Quan sát ta thấy cả hai phương trình của hệ đã cho đều có dạng bậc hai, trong đó các phần tử tự do của x và y đều có dạng bậc nhất. Điều này gợi nhớ cho chúng ta tìm cách đưa về hệ phương trình đồng bậc hai để giải quyết. Vậy chúng ta có mẹo nhỏ như sau: Đó là đặt

$$x = u + a, \quad y = v + b.$$

thay vào hệ phương trình. Sau đó muốn hệ đồng bậc hai với u, v thì chúng ta cho hệ số bậc nhất của u, v bằng không. Từ đó chúng ta tìm được a, b. Minh họa bằng bài toán trên như sau: Đặt

$$\begin{cases}(u+a)^2+(v+b)^2+(u+a)(v+b)+2(v+b)+(u+a)=2,\\ 2(u+a)^2-(v+b)^2-2(v+b)-2=0.\end{cases}$$

Khai triển hệ phương trình ra cho các hệ số bậc một của u, v bằng 0. Ta giải ra được $a = 0$, $b = -1$. Đặt

$$x = u, \quad y = v - 1,$$

ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2+uv+v^2=3,\\ 2u^2-v^2=-1.\end{cases}$$

1.177. Đặt $S = x + y$, $P = xy$, phương trình thứ nhất của hệ thành

$$\frac{S^2-2SP}{P}+\frac{2}{S}=\frac{1}{P}.$$

Tương đương

$$S^3-2SP+2P-S=0 \Leftrightarrow (S-1)\cdot(S^2-2P+S)=0.$$

- Trường hợp 1. $S = 1$ hay $x + y = 1$. Thay vào phương trình thứ hai, ta được hai nghiệm $\left(\dfrac{2+\sqrt{7}}{3};\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}\right)$ và $\left(\dfrac{2-\sqrt{7}}{3};\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right)$.

- Trường hợp 2. $S^2 - 2P + S = 0$ hay

$$x^2+y^2+x+y=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=-(x+y).$$

Thay vào phương trình thứ hai, ta có

$$x^2+y^2+\frac{1}{x^2+y^2}=-(x-1)^2+2. \tag{1.53}$$

Ta có

$$x^2+y^2+\frac{1}{x^2+y^2}\geqslant 2, \quad -(x-1)^2+2\leqslant 2.$$

Từ đó, lí luận được phương trình (1.53) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3};\frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)$ và $\left(\frac{2-\sqrt{7}}{3};\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)$.

1.178. Phương trình (1) của hệ được viết lại như sau

$$(x^3-x^2y+x^2)+(2x^2y-2xy^2+2xy)+(xy^2-y^3+y^2)+3(x-y+1)=0$$

Hay

$$(x-y+1)[(x+y)^2+3]=0\Leftrightarrow x-y+1=0.$$

Thay vào phương trình (2) ta thu được

$$\sqrt[3]{x^2-3x+2}=\sqrt{x-1}-(x-1). \tag{1.54}$$

Đặt

$$\sqrt{x-1}=t\geqslant 0\Rightarrow x=t^2+1.$$

Thay vào (1.54), ta được

$$\sqrt[3]{t(t^2-1)}=t-t^2\Leftrightarrow t^2(t^2-1)=t^3(1-t)^3\Leftrightarrow t^2(t-1)[t+1+(t-1)^2]=0$$

Từ đó,

$$\left[\begin{array}{l} t=0\Rightarrow x=1,\\ t=1\Rightarrow x=2\end{array}\right.$$

1.180. ***Cách 1.*** Từ phương trình thứ nhất, ta có

$$x=\frac{3-2y}{2y-1}.$$

Thay vào phương trình thứ hai ta được

$$2(y-1)^2(2y+1)^2(4y^2-8y+7)=0$$

Cách 2. Chúng ta đưa hệ phương trình về dạng

$$\begin{cases}(x+1)(2y-1)=2,\\ (x+1)^3+\dfrac{1}{2}(2y-1)^3=3(x+1)^2+\dfrac{3}{2}(2y-1)-5.\end{cases}$$

Đặt

$$a=x+1,\quad b=2y-1.$$

Khi đó ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}ab=2,\\ a^3+\dfrac{1}{2}b^3=3a^2+\dfrac{3}{2}b-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab=2,\\ 2a^3+b^3=6a^2+3b-10.\end{cases}$$

Từ hệ phương trình ban đầu ta nhẩm được nghiệm là $x=y=1$ nên ta sẽ có hệ này có nghiệm khi $a=2$, $b=1$. Do đó, ta sẽ phân tích hệ về dạng:

$$\begin{cases}(a-2)b=2(1-b),\\ (a-2)^2(a+1)=(b-1)^2(b+2).\end{cases}$$

Vì ta luôn có $b\neq 0$, nên từ phương trình trên ta rút ra

$$a-2=\frac{2(1-b)}{b}$$

thế xuống phương trình dưới ta được:

$$\begin{aligned}\frac{4(b-1)^2}{b^2}(a+1)&=(b-1)^2(b+2)\\ &\Leftrightarrow (b-1)^2\left[4(a+1)-b^2(b+2)\right]=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}b=1\\ 4(a+1)=b^2(b+2)\end{array}\right.\end{aligned}$$

- Với $b=1$, ta có $a=2$, suy ra $x=y=1$.
- Với $4(a+1)=b^2(b+2)$, ta có

$$ab=2\Leftrightarrow b(a+1)=b+2\Leftrightarrow a+1=\frac{b+2}{b}.$$

  Thế lên phương trình trên ta có

$$\frac{4(b+2)}{b}=b^2(b+2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=-2\Rightarrow a=-1\Leftrightarrow x=-2;\ y=-\dfrac{1}{2}\\ b^3=4\ \text{(Không thỏa mãn)}\end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $(1;1)$ và $\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Cách 3. Bài này có một cách giải rất thú vị sau: Từ phương trình thứ nhất, ta suy ra

$$(x-1)(2y-1)=4(1-y)$$

và

$$(x+2)(2y-1)=2y+1.$$

Suy ra

$$16(2y+1)(y-1)^2=(2y+1)(x-1)^2(2y-1)^2=(x+2)(x-1)^2(2y-1)^3. \quad (1.55)$$

Mặt khác, phương trình thứ hai của hệ có thể được viết lại thành

$$(x^3-3x+2)+2(2y^3-3y^2+1)=0,$$

tương đương

$$(x+2)(x-1)^2+2(2y+1)(y-1)^2=0.$$

Sử dụng đẳng thức (1.55) ở trên, ta có

$$8(x+2)(x-1)^2+(x+2)(x-1)^2(2y-1)^3=0,$$

hay

$$(x+2)(x-1)^2\left[8+(2y-1)^3\right]=0.$$

Đến đây thì đơn giản.

Cách 4.

$$2(x^3+4y^3-3x-6y^2+4)-(2x^2+4xy+2y^2-2x-5y-1)(2xy-x+2y-3)$$

$$=(x-1)(y-1)(2x+2y+5)(1-2x-2y).$$

1.181. Ta có

$$\left[xy(x+y)+(x-1)^2-3y(1-y)\right]-y(x^2+2xy+2y^2-3x)=(x+2y-1)(x-y^2+y-1).$$

1.182. Từ phương trình thứ nhất ta có $x = -2y+5$. Thay vào phương trình thứ hai ta được

$$\sqrt{2y+1} - \sqrt{5-y} + 2y^2 - 7y - 6 = 0.$$

Dùng lượng liên hợp, phương trình trên có nghiệm $y = 4$.

Đáp số. $(-3;4)$.

1.183. Từ phương trình thứ nhất, ta có

$$(x-2y)(x^2+2y^2-1) = 0.$$

Như vậy phương trình thứ nhất của hệ tương đương Trường hợp $x = 2y$, thay vào phương trình thứ hai ta được

$$2\sqrt{3x-5} + \sqrt[3]{x^3-3x+9} = 7$$

hay

$$6\frac{x-3}{\sqrt{3x-5}+2} + \frac{(x-3)(x^2+3x+6)}{\sqrt[3]{(x^3-3x+9)^2} + 3\sqrt[3]{x^3-3x+9} + 9} = 0.$$

Từ đó phương trình có nghiệm $x = 3$.

1.184. Điều kiện $x \geqslant \frac{5}{2}$, $y \geqslant 0$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ, ta có

$$(x-y+1)\cdot(2x+y+3) = 0.$$

Do điều kiện, nên $2x+y+3 > 0$. Vậy ta có

$$x - y + 1 - 0 \Leftrightarrow y = x + 1.$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2x-5} + 2\sqrt{x+1} - 2x^2 = -13 \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{2x-5} - 1) + 2(\sqrt{x+1} - 2) + 2(x^2 - 9) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2(x-3)}{\sqrt{2x-5}+1} + \frac{2(x-3)}{\sqrt{x+1}+2} - 2(x-3)(x+3) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{1}{\sqrt{2x-5}+1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} - (x+3)\right] = 0.
\end{aligned}$$

Với $x \geqslant \frac{5}{2}$, thì

$$\frac{1}{\sqrt{2x-5}+1}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}<3<-(x+3).$$

1.185. Từ phương trình thứ hai, ta có

$$x=1 \text{ hoặc } \quad x^2+x+y-2=0$$

Với $y=-x^2-x+2$, thay vào phương trình thứ hai, ta được

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{2-x}+x^2+2x-4=0.$$

Tương đương

$$(\sqrt{3x+1}-2)+(1-\sqrt{2-x})+x^2+2x-3=0.$$

Nhân lượng liên hợp, ta được

$$\frac{3(x-1)}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{x-1}{1+\sqrt{2-x}}+x^2+2x-3=0.$$

Đặt nhân tử chung, ta có

$$(x-1)\left[\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{1}{1+\sqrt{2-x}}+x+3\right]=0.$$

Với điều kiện $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 2$, ta thấy biểu thức trong dấu ngoặc vuông luôn dương.

Từ đó, hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(1;0)$.

1.186. Từ phương trình thứ hai, ta có

$$(x-1)(x^2y+2x-1)=0.$$

- Với $x=1$, thay vào phương trình thứ nhất, ta có $y=-1$.
- Với $x^2y+2x-1=0 \Leftrightarrow y=\frac{1-2x}{x^2}$, thay phương trình thứ nhất, ta có

$$\left(\frac{x-1}{x}\right)^2+2\left|\frac{x-1}{x}\right|=0$$

Đáp số. $\left\{(1;-1);(-1;3);\left(\frac{1}{3};3\right).\right\}$

1.187. Điều kiện $x,\ y \geqslant \frac{1}{4}$. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}(2x+3)\sqrt{4x-1}+(2y+3)\sqrt{4y-1} &\geqslant 2\sqrt{(2x+3)(2y+3)\sqrt{(4x-1)(4y-1)}}\\ &= 2\sqrt{(2x+3)(2y+3)[4(4xy-x-y)+1]}\\ &= 2\sqrt{(2x+3)(2y+3)}.\end{aligned}$$

Do đó, để phương trình thứ nhất của hệ có thể thỏa mãn thì ta phải có

$$(2x+3)\sqrt{4x-1}=(2y+3)\sqrt{4y-1},$$

tức là

$$(2x+3)^2\cdot(4x-1)=(2y+3)^2\cdot(4y-1).$$

Tuy nhiên, do hàm số $f(x)=(2x+3)^2\cdot(4x-1)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{4};+\infty\right)$, nên điều này xảy ra khi và chỉ khi x= y. Như vậy, ta phải có $x=y$.

Bây giờ, thay $x=y$ vào phương trình thứ hai, ta tìm được $x=y=12$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Bài này ta cũng có thể làm như sau.

Điều kiện $x,\ y \geqslant \frac{1}{4}$.

Khi đó từ phương trình hai của hệ ta suy ra

$$\begin{cases}4x-1=\dfrac{x}{y},\\ 4y-1=\dfrac{y}{x}.\end{cases}$$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$
\begin{aligned}
&(2x+3)\sqrt{\frac{x}{y}}+(2y+3)\sqrt{\frac{y}{x}}=2\sqrt{(2x+3)(2y+3)}\\
\Leftrightarrow\ &(2x+3)x+(2y+3)y=2\sqrt{xy(2x+3)(2y+3)}\\
\Leftrightarrow\ &\left(\sqrt{x(2x+3)}-\sqrt{y(2y+3)}\right)^2=0\\
\Leftrightarrow\ &\left(\sqrt{x(2x+3)}-\sqrt{y(2y+3)}\right)=0\\
\Leftrightarrow\ &2x^2+3x=2y^2+3y\\
\Leftrightarrow\ &(x-y)(2x+2y+3)=0\\
\Leftrightarrow\ &x=y
\end{aligned}
$$

1.188. Đặt

$$\sqrt{7x+y}=u,\quad \sqrt{2x+y}=v.$$

Ta có

$$\begin{cases}7x+y=u^2,\\ 2x+y=v^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{u^2-v^2}{5},\\ y=-\dfrac{2u^2-7v^2}{5}.\end{cases}$$

Hệ phương trình đã cho thành

$$\begin{cases}u+v=5,\\ 3u^2-8v^2+5v=5,\\ u\geqslant 0, v\geqslant 0.\end{cases}$$

Đáp số. $(x;y)=(1;2)$.

1.189. Đặt

$$a=\sqrt{y+7x}\geqslant 0,\quad b=\sqrt{y+2x}\geqslant 0,\quad c=\sqrt{5x+8}\geqslant 0.$$

Ta có hệ

$$\begin{cases}a-b=4,\\ 2b-c=2,\\ a^2=b^2+c^2-8.\end{cases}$$

Giải hệ trên, ta được $a=9$, $b=5$, $c=8$. Đáp số. $\left(\dfrac{56}{5};\dfrac{13}{5}\right)$.

1.191. Bình phương phương trình thứ nhất, ta được

$$x^2+y^2+\sqrt{\left(1+2x^2\right)\left(1+2y^2\right)}=1+4xy.$$

Và sử dụng các đánh giá sau

$$x^2+y^2\geqslant 2xy,\quad \sqrt{\left(1+2x^2\right)\left(1+2y^2\right)}\geqslant 1+2xy.$$

1.193. Đặt

$$\sqrt{2x+y}=a;\ \sqrt{x+3y}=b\Rightarrow x=\frac{3a^2-b^2}{5};\ y=\frac{2b^2-a^2}{5}$$

Thay vào phương trình thứ nhất ta thu được:

$$10a^3-35a^2b+35ab^2-10b^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\ a=\frac{1}{2}b\\ a=2b\end{array}\right.$$

1.194. 1) ***Cách 1.*** Điều kiện $x\geqslant 1$ và $y\geqslant 1$.

Từ giả thiết, ta có $\sqrt{y}=(x-1)^2$. Do đó, phương trình thứ nhất của hệ có thể viết lại thành

$$x^3-8+\sqrt{x-1}=(x-1)^2,$$

tương đương

$$(x^3-x^2+2x-8)+\left(\sqrt{x-1}-1\right)=0.$$

Bằng cách tách nhân tử và trục căn thức, ta thu được

$$(x-2)\left(x^2+x+4+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}\right)=0.$$

Do $x\geqslant 1$ nên phương trình cuối được thỏa mãn khi và chỉ khi $x=2$. Như vậy, ta có $x=2$ và $y=(2-1)^4=1$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;1)$.

Cách 2. Xét hàm số

$$f(x)=\sqrt{x-1}+x^3-x^2+2x-9,\quad x\geqslant 1.$$

Ta có

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + 3x^2 - 2x + 2 > 0, \quad x > 1.$$

Vậy f đồng biến trên $[1; +\infty)$.

Mà $x = 2$ là một nghiệm của phương trình

$$\sqrt{x-1} + x^3 - x^2 + 2x - 9 = 0 \qquad (1.56)$$

Từ đó suy ra $x = 2$ là nghiệm duy nhất phương trình (1.56).

Với $x = 2$, ta có $y = 1$.

Cách 3. Đặt $t = \sqrt{x-1} \geqslant 0$. phương trình (1.56) trở thành

$$(t-1)(t^5 + t^4 + 3t^3 + 3t^2 + 6t + 7) = 0.$$

Do $t \geqslant 0$, nên

$$t^5 + t^4 + 3t^3 + 3t^2 + 6t + 7 > 0.$$

Vậy ta có $t = 1$, hay $x = 2$.

2) Đáp số. $[[x = 3, y = 2]]$

3) Đáp số. $[[x = 2, y = -3]]$.

1.195. Từ phương trình thứ hai biến đổi ta được phương trình sau

$$x^2 + 4xy - 2x + 4y^2 + 2y = 41$$

hay

$$(x+2y)^2 - 2(x-y) = 41. \qquad (1.57)$$

Mặt khác từ phương trình thứ nhất, ta có

$$|x + 2y| = 9 - \sqrt{x-y}$$

hay

$$(x+2y)^2 = 81 + x - y - 18\sqrt{x-y}.$$

Thay vào phương trình (1.57), ta được

$$81 + x - y - 18\sqrt{x-y} - 2(x-y) = 41$$

phương trình này tương đương

$$x - y + 18\sqrt{x-y} - 40 = 0.$$

1.197. Điều kiện
$$\begin{cases} x^2+2y+1 \geqslant 0, \\ y+1 \geqslant 0. \end{cases}$$
Và ta để ý rằng, để hệ có nghiệm thì từ phương trình dưới ta rút ra rằng
$$x+y-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x+y \geqslant 1.$$
Ta biến đổi phương trình thứ nhất thành dạng
$$x^2(x-y)+\sqrt{x^2+2y+1}-(y+1)=0,$$
tương đương
$$x^2(x-y)+\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+2y+1}+(y+1)}=0,$$
hay
$$(x-y)\left(x^2+\frac{x+y}{\sqrt{x^2+2y+1}+(y+1)}\right)=0$$
Từ đây ta có
$$x=y \quad \text{hoặc} \quad x^2+\frac{x+y}{\sqrt{x^2+2y+1}+(y+1)}=0.$$

- Với $x=y$, thay xuống phương trình dưới ta được
$$(2x-1)\sqrt{x+1}=10 \Leftrightarrow 2(x+1)\sqrt{x+1}-3\sqrt{x+1}-10=0.$$
Đặt $a=\sqrt{x+1}$, $(a>0)$. Khi đó ta thu được phương trình
$$2a^3-3a-10=0 \Leftrightarrow (a-2)(2a^2+4a+5)=0 \Leftrightarrow a=2.$$
Từ đó suy ra $x=3$
- Do $x+y \geqslant 1$, nên trường hợp thứ hai vô nghiệm.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $(x;y)=(3;3)$

1.198. Hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} x=2y^2+y+1, \\ \sqrt{2y^2+2y+1}+\sqrt{2y^2-y+1}=3y. \end{cases}$$

Phương trình thứ hai tương đương

$$\sqrt{2y^2+2y+1}+\sqrt{2y^2-y+1}=(2y^2+2y+1)-(2y^2-y+1).$$

hay

$$\left(\sqrt{2y^2+2y+1}-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{2y^2-y+1}+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Đáp số. $(x;y)=(22;3)$.

1.200. Viết phương trình thứ hai của hệ thành

$$y^3-6y^2+12y-8=8x\sqrt{x},$$

tương đương

$$(y-2)^2=(2\sqrt{x})^3 \Leftrightarrow y=2+2\sqrt{x}$$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$(x-3)(x^2+3)=16\sqrt[3]{x} \Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{2}\right)^3=2\sqrt[3]{x}+1.$$

bằng cách đặt $u=2\sqrt[3]{x}+1$, ta có hệ

$$\begin{cases}\dfrac{(x-1)^3}{8}=u,\\ \dfrac{(u-1)^3}{8}=x.\end{cases}$$

1.204. ***Cách 1.*** Điều kiện $x\geqslant 0$ và $y\geqslant 0$. Đặt $a=\sqrt{x}$, $b=\sqrt{y}$, khi đó hệ phương trình đã cho được viết lại thành

$$\begin{cases}a+b=3,\\ \sqrt{a^2+5}+\sqrt{b^2+3}=5.\end{cases}$$

Thay $b=3-a$ vào phương trình thứ hai, ta được

$$\sqrt{a^2+5}+\sqrt{(3-a)^2+3}=5,$$

hay tương đương

$$\sqrt{a^2-6a+12}=5-\sqrt{a^2+5}.$$

Phương trình này tương đương với hệ

$$\begin{cases} 5-\sqrt{a^2+5}\geqslant 0, \\ a^2-6a+12=30+a^2-10\sqrt{a^2+5}. \end{cases}$$

Tương đương với

$$\begin{cases} 5-\sqrt{a^2+5}\geqslant 0, \\ 10\sqrt{a^2+5}=18+6a. \end{cases}$$

Do $a\geqslant 0$, bình phương phương trình thứ hai của hệ này ta có

$$16a^2-54a+44=0.$$

Phương trình này có hai nghiệm $a=2$ và $a=\dfrac{11}{8}$. Cả hai nghiệm này đều thoả bất phương trình $5-\sqrt{a^2+5}\geqslant 0$.

- Với $a=2$, ta có $b=1$. Từ đó, có $x=4$ và $y=1$.
- Với $a=\dfrac{11}{8}$, ta có $b=\dfrac{13}{8}$. Từ đó, có $x=\dfrac{121}{64}$ và $y=\dfrac{169}{64}$.

Cách 2. Điều kiện $x\geqslant 0$ và $y\geqslant 0$. Đặt $a=\sqrt{x}$, $b=\sqrt{y}$, khi đó hệ phương trình đã cho được viết lại thành

$$\begin{cases} a+b=3, \\ \sqrt{a^2+5}+\sqrt{b^2+3}=5. \end{cases}$$

Thay $b=3-a$ vào phương trình thứ hai, ta được

$$\sqrt{a^2+5}+\sqrt{(3-a)^2+3}=5,$$

hay tương đương

$$5\sqrt{a^2+5}+5\sqrt{a^2-6a+12}=25.$$

Phương trình này có thể biết đổi lại thành

$$\left[5\sqrt{a^2+5}-(3a+9)\right]+\left[5\sqrt{a^2-6a+12}+(3a-16)\right]=0,$$

tương đương (chú ý rằng $0\leqslant a\leqslant 3$)

$$\frac{25(a^2+5)-(3a+9)^2}{5\sqrt{a^2+5}+3a+9}+\frac{25(a^2-6a+12)-(3a-16)^2}{5\sqrt{a^2-6a+12}+16-3a}=0.$$

Sau khi thu gọn, ta được

$$2(8a-11)(a-2)\left(\frac{1}{5\sqrt{a^2+5}+3a+9}+\frac{1}{5\sqrt{a^2-6a+12}+16-3a}\right)=0.$$

Do $0 \leqslant a \leqslant 3$ nên đại lượng trong dấu ngoặc thứ ba luôn dương, và như vậy ta có $a=\frac{11}{8}$ (tương ứng $b=\frac{13}{8}$) hoặc $a=2$ (tương ứng $b=1$). Cuối cùng, ta tìm được

$$(x;y)=\left(\frac{121}{64};\frac{169}{64}\right) \quad \text{hoặc} \quad (x;y)=(4;1)$$

là nghiệm của hệ đã cho.

1.205. Điều kiện $2x \geqslant 3y, 5-x+y \geqslant 0, 2x-y-3 \geqslant 0$. Từ giả thiết, ta có

$$\begin{cases} 4(2x-3y)=\left(7-\sqrt{5-x+y}\right)^2 \\ 2x-y-3=\left(3\sqrt{5-x+y}-1\right)^2 \end{cases}$$

hay tương đương

$$\begin{cases} 8x-12y=54-x+y-14\sqrt{5-x+y} \\ 2x-y-3=46-9x+9y-6\sqrt{5-x+y} \end{cases}$$

Thu gọn lại, ta được

$$\begin{cases} 54-9x+13y=14\sqrt{5-x+y} \quad (1) \\ 49-11x+10y=6\sqrt{5-x+y} \end{cases}$$

Từ đây, ta suy ra $\frac{54-9x+13y}{7}=\frac{49-11x+10y}{3}$, hay

$$y=\frac{50x-181}{31}.$$

Thay ngược trở lại vào (1), ta có

$$54-9x+13\cdot\frac{50x-181}{31}=14\sqrt{5-x+\frac{50x-181}{31}},$$

hay tương đương

$$53x-97=2\sqrt{31(19x-26)}.$$

Giải phương trình này, ta được $x = 3$. (Chỗ này bình phương hai vế để đưa về phương trình bậc hai là được, nhưng do tính toán với số cũng khá lớn nên mình không trình bày) Suy ra $y = -1$.

Thử lại, ta thấy $(x, y) = (3, -1)$ thỏa mãn hệ phương trình. Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x, y) = (3, -1)$.

Có thể làm như sau: Chúng ta để ý mối quan hệ giữa các biểu thức dưới dấu căn ta thấy rằng:

$$2x + 3y = 2(x + y) + y;\ \ 2x + y - 3 = 2(x + y) - y - 3$$

Mặt khác, các biểu thức dưới dấu căn đều biểu thị qua hai đại lượng là: $(x + y)$ và y, nên ta sẽ dựa vào đó để giải quyết bài toán.

Đặt $a = \sqrt{5 - (x + y)}; a \geqslant 0$. Khi đó ta có $x + y = 5 - a^2$, từ đó suy ra:

$$2x + 3y = 2(5 - a^2) + y = 10 - 2a^2 + y;\ \ 2x + y - 3 = 2(5 - a^2) - y - 3 = 7 - 2a^2 - y$$

Từ đó ta có hệ:

$$\begin{cases} 2\sqrt{10 - 2a^2 + y} = 7 - a \\ \sqrt{7 - 2a^2 - y} = 3a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3} \leqslant a \leqslant 7 \\ 4(10 - 2a^2 + y) = 49 - 14a + a^2 \\ 7 - 2a^2 - y = 9a^2 - 6a + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3} \leqslant a \leqslant 7 \\ 4y = 9a^2 - 14a + 9 \\ y = -11a^2 + 6a + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3} \leqslant a \leqslant 7 \\ 4y = 9a^2 - 14a + 9 \\ 53a^2 - 38a - 15 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3} \leqslant a \leqslant 7 \\ 4y = 9a^2 - 14a + 9 \\ \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -\dfrac{15}{53} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 9a^2 - 14a + 9 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $(3; 1)$

1.206. Bình phương hai vế phương trình đã cho ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 2xy \cdot \sqrt{x^2 - y^2} + y^2(x^2 - y^2)}{1 - x^2 + y^2} = 4, \\ \dfrac{y^2 - 2xy \cdot \sqrt{x^2 - y^2} + x^2(x^2 - y^2)}{1 - x^2 + y^2} = \dfrac{49}{16}. \end{cases}$$

Trừ hai phương trình của hệ cho nhau, ta được

$$x^2 - y^2 = \frac{15}{16}.$$

Thay vào hệ đã cho, ta có hệ

$$\begin{cases} x - y \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \dfrac{1}{2}, \\ y - x \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \dfrac{7}{16}. \end{cases}$$

Giải hệ trên, ta có nghiệm hệ đã cho là $\left(8 + \dfrac{7\sqrt{15}}{4}; 7 + 2\sqrt{15}\right)$.

Điều kiện: $0 \leqslant x^2 - y^2 < 1$. Nhân hai vế của (1) với x và hai vế của (2) với y rồi lấy hai phương trình trừ nhau, vế theo vế, ta được

$$\frac{x^2 - y^2}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = 2x - \frac{7}{4}y. \quad (3)$$

Tiếp tục, nhân hai vế của (1) với y và hai vế của (2) với x rồi lấy hai phương trình trừ cho nhau, vế theo vế, ta có

$$\frac{(x^2 - y^2)\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = 2y - \frac{7}{4}x. \quad (4)$$

Từ (3) và (4), ta suy ra

$$\frac{(x^2 - y^2)^2 - (x^2 - y^2)^3}{1 - x^2 + y^2} = \left(2x - \frac{7}{4}y\right)^2 - \left(2y - \frac{7}{4}x\right)^2 = \frac{15}{16}(x^2 - y^2),$$

hay

$$(x^2 - y^2)^2 = \frac{15}{16}(x^2 - y^2).$$

Như vậy, ta có $x^2 - y^2 = 0$ hoặc $x^2 - y^2 = \frac{15}{16}$. Nếu $x^2 - y^2 = 0$ thì từ (1) và (2), ta có $x = 2$ và $y = \frac{7}{4}$, tuy nhiên hai giá trị này lại không thỏa mãn $x^2 - y^2 = 0$.

Do vậy, ta phải có $x^2 - y^2 \neq 0$ và do đó, kết hợp với lý luận ở trên, ta thu được

$$x^2 - y^2 = \frac{15}{16}.$$

Thay kết quả này vào (3) và (4), ta được hệ

$$\begin{cases} 2x - \frac{7}{4}y = \frac{15}{4} \\ 2y - \frac{7}{4}x = \frac{15\sqrt{15}}{16} \end{cases}$$

Bằng cách giải này, ta tìm được

$$\begin{cases} x = 8 + \frac{7\sqrt{15}}{4} \\ y = 7 + 2\sqrt{15} \end{cases}$$

Thử lại, ta thấy thỏa. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x, y) = \left(8 + \frac{7\sqrt{15}}{4}, 7 + 2\sqrt{15}\right)$. ■

1.207. Viết hệ đã cho dưới dạng

$$\begin{cases} \sqrt{1 - y^2} = 1 - x, \\ \sqrt{3} - y = \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$$

tương đương

$$\begin{cases} 1 - x \geqslant 0, \\ \sqrt{3} - y \geqslant, \\ 1 - y^2 = 1 - 2x + x^2, \\ 3 - 2\sqrt{3}y + y^2 = 1 - x^2. \end{cases}$$

Cộng hai phương trình cuối, ta được

$$x - \sqrt{3}y + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}y - 1.$$

Sử dụng phép thế.

Đáp số. $\left\{\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}.\right)\right\}$

1.208. Từ phương trình thứ hai của hệ, ta suy ra

$$2x(2y+1)=7y-1,$$

hay $2x=\dfrac{7y-1}{2y+1}$. Thay vào phương trình thứ nhất, ta được

$$4\left(\frac{7y-1}{2y+1}\right)^2\cdot y^2-17y^2=-1.$$

Thu gọn phương trình trên, ta có

$$128y^4-124y^3-9y^2+4y+1=0.$$

Tương đương

$$(y-1)\cdot(4y-1)\cdot(32y^2+9y+1)=0.$$

Phương trình này có hai nghiệm $y=1$ và $y=\dfrac{1}{4}$. Thay các giá trị này vào $2x=\dfrac{7y-1}{2y+1}$, lần lượt ta được $x=1$ và $x=\dfrac{1}{4}$.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(1;1)$ và $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)$.

Cách khác. Từ hệ phương trình, ta thấy $y\neq 0$. Khi đó, ta viết được hệ dưới dạng

$$\begin{cases}16x^2-17=-\dfrac{1}{y^2},\\ 4x+\dfrac{2x}{y}-7=-\frac{1}{y}.\end{cases}$$

Đặt $t=\dfrac{1}{y}$, ta được

$$\begin{cases}16x^2+t^2=17,\\ 2xt+4x+t=7.\end{cases}$$

Lúc này, hãy để ý tiếp rằng

$$(16x^2+t^2-17)+4(2xt+4x+t-7)=(4x+t)^2+4(4x+t)-45.$$

1.209. Phương trình thứ nhất tương đương với

$$2(2x+1)^3+2x+1=2(y-2)\sqrt{y-2}+\sqrt{y-2}.$$

Hệ có nghiệm duy nhất $(1;11)$.

1.210. Phương trình thứ nhất tương đương với

$$3(4-2x)\sqrt{4-2x}+2\sqrt{4-2x}=3(3-2y)\sqrt{3-2y}+2\sqrt{3-2y}.$$

Lí luận để có $x=y$. Khi đó, phương trình thứ hai của hệ thành

$$\sqrt{x}+\sqrt{2-x}=x^2-2x+3.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$.

1.212. Điều kiện $y\geqslant 0$. Đặt $t=\sqrt{y}$, khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} x^4-t^2=3x+3t, & (1)\\ xt^3-xt=3x+3t. & (2)\end{cases}$$

Từ (1) và (2), ta được

$$x^4-t^2=xt^3-xt,$$

hay

$$x(x^3-t^3)+t(x-t)=0.$$

Sau khi phân tích nhân tử, ta được

$$(x-t)\left[x(x^2+xt+t^2)+t\right]=0.$$

Suy ra

$$(x-t)\left[xt(x^2+xt+t^2)+t^2\right]=0. \quad (3)$$

Mặt khác, do

$$\begin{aligned} xt(x^2+xt+t^2)+t^2 &= xt(x^2+xt+t^2)+t^2-(xt^3-xt-3x-3t)\\ &= x^2t(x+t)+t^2+xt+3(x+t)\\ &= (x+t)(x^2t+t+3),\end{aligned}$$

nên (3) có thể được viết lại thành

$$(x^2-t^2)(x^2t+t+3)=0.$$

Và do $x^2t+t+3>0$ (chú ý rằng $t\geqslant 0$) nên từ đây ta có

$$x=t\vee x=-t.$$

Đáp số: hệ có ba nghiệm $(x;y)=(0;0),(-1;1),(2;4)$.

1.213. Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\leqslant\frac{2}{\sqrt{xy}+1}$ với $xy\leqslant 1$ suy ra $x=y$.

1.214. Từ phương trình thứ nhất của hệ ta suy ra $x+y+z\geqslant 0$.

Từ phương trình thứ hai suy ra xy, yz, zx cùng dấu. Suy ra x, y, z là ba số không âm.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Swarch ta có

$$\left(\sqrt{x^2+y^2-z^2}+\sqrt{x^2+z^2-y^2}\right)^2\leqslant 4x^2.$$

Tương tự

$$\left(\sqrt{y^2+x^2-z^2}+\sqrt{y^2+z^2-x^2}\right)^2\leqslant 4y^2.$$

và

$$\left(\sqrt{z^2+x^2-y^2}+\sqrt{z^2-x^2+y^2}\right)^2\leqslant 4z^2.$$

Cộng ba bất đẳng thức này, ta suy ra

$$\sqrt{x^2+y^2-z^2}+\sqrt{y^2+z^2-x^2}+\sqrt{z^2+x^2-y^2}\leqslant x+y+z.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z$. Tới đây chỉ việc thay vào phương trình thứ hai của hệ.

1.218. Điều kiện $x^2+3y^2\geqslant 0$.

Phương trình thứ nhất viết lại

$$x+3y^2-y\sqrt{x+3y^2}-2y^2=0.$$

Xem đây là phương trình đẳng cấp bậc hai theo y và $\sqrt{x+3y^2}$. Giải phương trình này, ta được

$$\sqrt{x+3y^2}=2y \quad \text{hoặc} \quad \sqrt{x+3y^2}=-y.$$

- Nếu $\sqrt{x+3y^2}=2y\Leftrightarrow x=y^2$. Thế $x=y^2$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$y^2-3y+1=-\sqrt{\frac{y^4+y^2+1}{21}}.$$

Bình phương hai vế phương trình trên, ta có

$$20(y^4+1)-126(y^3+y)+230y^2=0 \tag{1.58}$$

Chia hai vế (1.58) cho y^2 và đặt $y+\dfrac{1}{y}=t$ ($t\geqslant 2$). Phương trình (1.58) trở thành

$$20t^2-126t+190=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{19}{5} \\ t=\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$$

– Nếu $t=\dfrac{19}{5} \Rightarrow y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{19}{5}$.

  Giải phương trình trên ta được $y=\dfrac{19\pm 3\sqrt{29}}{10}$.

– Nếu $t=\dfrac{5}{2} \Rightarrow y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{2}$. Phương trình này có hai nghiệm $y=2$ hoặc $y=\dfrac{1}{2}$.

• Nếu

$$\sqrt{x+3y^2}=-y \Leftrightarrow \begin{cases} y\leqslant 0, \\ x=-2y^2. \end{cases}$$

Thế $x=-2y^2$ vào phương trình thứ hai của hệ đã cho ta được

$$4y^2-3y+1+\sqrt{\frac{x^2+y^2+1}{21}}=0. \tag{1.59}$$

Vì $4y^2-3y+1>0$, nên

$$4y^2-3y+1+\sqrt{\frac{x^2+y^2+1}{21}}>0.$$

Do đó, (1.59) vô nghiệm.

Sau khi thử lại ta tìm được đáp số cuối cùng là $(4;2)$ và $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)$.

1.219. Đặt

$$\sqrt{x+1}=a;\ \sqrt{y+1}=b \Rightarrow \begin{cases} x=a^2-1 \\ y=b^2-1 \\ a,\ b\in[0;\ 2]. \end{cases}$$

Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} a+b=2, & (1.60)\\ \dfrac{72(a^2-1)(b^2-1)}{a^2-b^2}+29\sqrt[3]{(a^2-b^2)(a^2-b^2-2)}=4. & (1.61)\end{cases}$$

Từ phương trình (1.61) ta có $a=2-b$. Thay vào phương trình (1.61) của hệ ta được

$$-18b^3+54b^2+40b=0 \Leftrightarrow b=0$$

là giá trị duy nhất của b thỏa mãn điều kiện.

Ta tính được $x=3;\ y=-1$ là nghiệm của hệ.

1.220. Từ phương trình thứ hai của hệ ta suy ra $x<0$.

Phương trình thứ nhất tương đương với

$$\frac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}}=y-x,$$

hay

$$x=y \quad \text{hoặc} \quad x=\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}.$$

Nếu $x=y$ thế vào phương trình thứ hai, ta được

$$x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{-35}{12}$$

Suy ra

$$x^2+\frac{x^2}{x^2-1}+\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1225}{144}$$

hay

$$\frac{x^4}{x^2-1}+\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1225}{144}. \tag{1.62}$$

Đặt $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=t$. Phương trình (1.62) trở thành

$$t^2+2t-\frac{1225}{144}=0.$$

Phương trình này có hai nghiệm $t=\dfrac{25}{12}$ và $t=\dfrac{-49}{12}$ (loại) Với $t=\dfrac{25}{12}$, ta có

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{25}{12}.$$

Giải phương trình này ta được $x = \pm\dfrac{5}{3}$ hoặc $x = \pm\dfrac{5}{4}$.

Nếu $x = \sqrt{x^2 + y} + \sqrt{x^2 + x}$, suy ra $x > 0$. Nhưng khi đó hệ vô nghiệm. Sau khi thử lại ta có các nghiệm $\left(\dfrac{-5}{3}; \dfrac{-5}{3}\right)$ và $\left(\dfrac{-5}{4}; \dfrac{-5}{4}\right)$.

1.222. Từ phương trình thứ hai ta có

$$x^2 + 3x(y+1) + 2y^2 + 2y - 4 = 0.$$

Xem đây là phương trình bậc hai theo x, ta có

$$\Delta x = (3y+3)^2 - 8y^2 - 8y + 16 = y^2 + 10y + 25 = (y+5)^2.$$

1.223. Điều kiện $\begin{cases} x \geqslant -8, \\ 2y - x \geqslant 0, \\ y \geqslant -4. \end{cases}$ Bình phương hai vế phương trình thứ nhất của hệ rồi thu gọn ta được

$$2y^2 - (x-8)y - x^2 - 20x - 64 = 0. \tag{1.63}$$

Xem đây (1.63) là phương trình bậc hai theo y. Ta có

$$9x^2 + 144x + 576 = (3x+24)^2.$$

Từ đó, phương trình (1.63) có hai nghiệm

$$y = \frac{-x-16}{2} \text{ và } y = x + 4.$$

- Trường hợp 1. $y = \dfrac{-x-16}{2}$. Vì

  $$y \geqslant -4 \Rightarrow \frac{-x-16}{2} \geqslant -4 \Rightarrow x \leqslant -8.$$

  Kết hợp điều kiện suy ra $x = -8 \Rightarrow y = -4$. Thay vào không thỏa mãn hệ.

- Trường hợp 2. $y = x + 4$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có

  $$x^2 + 3x + 4 = (x+4)\sqrt{x^2 - x + 4}.$$

  Đặt $\sqrt{x^2 - x + 4} = t$ ta thu được phương trình mới là:

  $$t^2 - (x+4)t + 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = x \end{array}\right.$$

1.224. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$2\frac{x}{y}+4\frac{y}{x}=4\sqrt{2\frac{x}{y}-3\frac{y}{x}-1}-1. \tag{1.64}$$

Đặt $\frac{x}{y}=t$ $(t\neq 0)$. Phương trình (1.64) trở thành

$$2t+\frac{4}{t}+1=4\sqrt{2t-\frac{3}{t}-1}, \tag{1.65}$$

suy ra

$$\left(2t+\frac{4}{t}+1\right)^2=16\left(2t-\frac{3}{t}-1\right). \tag{1.66}$$

hay

$$4t^2+\frac{16}{t^2}-28t+\frac{56}{t}+33=0$$

Viết phương trình trên dưới dạng

$$\left(t^2+\frac{4}{t^2}\right)-28\left(t-\frac{2}{t}\right)+33=0. \tag{1.67}$$

Đặt $t-\frac{2}{t}=u$. Phương trình (1.67) trở thành

$$4(u^2+4)-28u+33=0\Leftrightarrow u=\frac{7}{2}.$$

Từ phương trình này suy ra $t=4$ hoặc $t=\frac{-1}{2}$. Lấy hai t này thử lại ở phương trình (1.65) ta thấy chỉ có $t=4$ là thoả.

Với $t=4$, ta có $x=4y$.

Mặt khác, bình phương hai vế phương trình thứ hai ta thu được

$$(x+1)^2+xy+3x+2y+5-2x\sqrt{x(y+3)}=x+y+3+2\sqrt{x(y+3)}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)[x+y+3-2\sqrt{x(y+3)}]=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)[\sqrt{x}-\sqrt{y+3}]^2=0.$$

Do $x>0$, suy ra $\sqrt{x}-\sqrt{y+3}=0$. Từ hai trường hợp trên, ta có hệ

$$\begin{cases} x=4y,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y+3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4.\\ y=1. \end{cases}$$

1.225. Phương trình thứ nhất tương đương với

$$2x^2(y-x^2)+(y^3-x^6)=0$$

hay

$$2x^2(y-x^2)+(y-x^2)(y^2+yx^2+x^4)=0.$$

Đặt nhân tử chung ta được

$$(y-x^2)(x^4+x^2y+y^2+2x^2)=0.$$

- **Trường hợp 1.** Với $y=x^2$, thay vào phương trình thứ hai, ta có

  $$(x+2)\sqrt{x^2+1}=(x+1)^2.$$

  tương đương

  $$\begin{cases} x+2>0 \\ (x+2)^2\cdot(x^2+1)=(x+1)^4 \end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-2, \\ x^4+4x^3+5x^2+4x+4=x^4+4x^3+6x^2+4x+1. \end{cases} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}.$$

  Với $x=\pm\sqrt{3}$, ta có $y=(\pm\sqrt{3})^2=3$.

- **Trường hợp 2.** Với $x^4+x^2y+y^2+2x^2=0$. Ta có

  $$x^4+x^2y+y^2+2x^2=0 \Leftrightarrow \left(x^2+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2+2x^2=0.$$

  Điều này xảy ra khi và chỉ khi $x=y=0$, nhưng khi đó, phương trình thứ hai của hệ vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm $\{(-\sqrt{3};3);(\sqrt{3};3)\}$.

1.226. Điều kiện $2y+1-x\geqslant 0$. Khi đó ta biến đổi hệ thành

$$\begin{cases} x^3-6x^2y-8y^3=-6, \\ 12xy^2=3(2y+1-x)+3\sqrt{2y+1-x}. \end{cases}$$

Cộng vế theo vế hai phương trình của hệ ta được phương trình

$$x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3=3(2y+1-x)+3\sqrt{2y+1-x}-6,$$

Tương đương
$$-(2y-x)^3 = 3(2y-x)+3\sqrt{2y-x+1}-3$$
Đặt $t=2y-x$. Khi đó ta được phương trình
$$-t^3 = 3t+3\sqrt{t+1}-3,$$
hay
$$t(t^2+3)+\frac{3t}{\sqrt{t+1}+1}=0.$$
Đặt nhân tử chung ta có
$$t\left(t^2+3+\frac{3}{\sqrt{t+1}+1}\right).$$
Vì biểu thức trong dấu ngoặc luôn dương, nên phương trình này xảy ra khi và chỉ khi $t=0$.

Với $t=0 \Rightarrow x=2y$ thế vào phương trình thứ nhất ta có
$$y^3=\frac{1}{4} \Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow x=\frac{2}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{2}.$$
Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\sqrt[3]{2};\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$.

1.227. Điều kiện để hệ có nghĩa là $y\neq 0$ và $\frac{x^3}{3y}+\frac{x^2}{4}\geqslant 0$. Phương trình thứ hai của hệ tương đương với
$$\frac{3x^2+16xy+12y^2}{24y}=\sqrt{\frac{x^2(4x+3y)}{12y}}.$$
Từ đây suy ra
$$\frac{(3x^2+16xy+12y^2)^2}{24^2y^2}=\frac{x^2(4x+3y)}{12y},$$
hay
$$(3x^2+16xy+12y^2)^2=48x^2y(4x+3y).$$
Tới đây, ta để ý chút xíu là $16xy+12y^2=4y(4x+3y)$. Vì vậy mà phương trình trên có thể viết lại dưới dạng
$$\left[3x^2+4y(4x+3y)\right]^2=4\cdot 3x^2\cdot 4y(4x+3y).$$

Từ đây, ta suy ra ngay luôn là

$$3x^2 = 4y(4x+3y).$$

Giải ra thế là tìm được mối quan hệ giữa x và y. Công việc còn lại chỉ là so với điều kiện rồi thế vào phương trình đầu giải phương trình một biến cái nữa là xong.

Có thể bình phương rồi chia phương trình thứ hai cho y^2.

1.228. Điều kiện: $x, y > 0$. Hệ phương trình có thể viết lại thành

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4} + \dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y} = \dfrac{2}{\sqrt[4]{x}}, \\ \dfrac{1}{4} - \dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{y}} \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{\sqrt[4]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{y}}, \\ \dfrac{2\left(2\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x+y} = \dfrac{2}{\sqrt[4]{x}} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{y}}. \end{cases}$$

Nhân tương ứng vế với vế hai phương trình của hệ, ta được

$$\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y} = \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Đây là một phương trình đẳng cấp giữa x và y. Giải ra, ta tìm được $x = 4y$. Từ đó, thay vào phương trình thứ nhất của hệ (sau khi biến đổi như ở trên), ta tìm được nghiệm. (Các bạn hãy giải chi tiết nhé)

1.229. Đáp số. $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right), \left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{2}{2}\right)$.

Xem phương trình thứ hai là phương trình bậc hai theo x. Ta tìm được

$$x = -4-2y \quad \text{và} \quad x = 1-y.$$

Thay $x = 1-y$ vào phương trình thứ nhất, ta được

$$\sqrt{3-2y} + (\sqrt{2y+1} = \frac{(1-2y)^2}{2}.$$

Phương trình này có hai nghiệm $y = \frac{-1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$. Thay $x = -4 - 2y$ vào phương trình thứ nhất, ta được

$$\sqrt{-7-4y} + \sqrt{2y+1} = \frac{(4+3y)^2}{2}.$$

Phương trình này vô nghiệm.

1.231. ĐK: $-1 \leqslant x \leqslant 2$. Ta viết lại phương trình thứ hai như sau:

$$\begin{gathered} 2x^3 - 2xy - y^3 + x^2y^2 + 3x^2 - 3y = 0 \\ \Leftrightarrow 2x(x^2 - y) + y^2(x^2 - y) + 3(x^2 - y) = 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - y)(2x + y^2 + 3) = 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - y = 0 \end{gathered}$$

Vì với điều kiện trên thì $2x + y^2 + 3 > 0$.

1.232. Điều kiện $y^2 \geqslant 7$. Ta viết thứ nhất như sau

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 6x^2 - 6x + y^2 - 11 = 0,$$

hay

$$(x^2 + x)^2 - 6(x^2 + x) + 9 + y^2 - 20 = 0,$$

tương đương

$$(x^2 + x - 3)^2 = 20 - y^2. \tag{1.68}$$

Mặt khác, phương trình thứ hai viết lại

$$x^2 + x = 3 + \frac{-6}{\sqrt{y^2 - 7}}$$

hay

$$x^2 + x - 3 = \frac{-6}{\sqrt{y^2 - 7}}$$

suy ra

$$(x^2 + x - 3)^2 = \frac{36}{y^2 - 7}. \tag{1.69}$$

Thế (1.68) vào (1.69) ta được

$$20 - y^2 = \frac{36}{y^2 - 7}.$$

1.233. Điều kiện $x; y \geqslant 0$. Từ phương trình thứ hai ta suy ra $x = y$. Thế vào phương trình thứ nhất ta được phương trình

$$(3x+1)\sqrt{9x^2+6x+2}-x+1=4x\sqrt{16x^2+1}.$$

tương đương

$$(3x+1)\sqrt{(3x+1)^2+1}-x+1=4x\sqrt{(4x)^2+1}. \tag{1.70}$$

Đặt

$$a=(3x+1), \quad b=4x.$$

Khi đó phương trình (1.70) trở thành

$$a\sqrt{a^2+1}-(b-a)=b\sqrt{b^2+1} \Leftrightarrow a\sqrt{a^2+1}+a=b\sqrt{b^2+1}+b$$

Xét hàm số $f(t)=t\sqrt{t^2+1}+t$ với $t>0$ là hàm số đồng biến Do đó

$$f(a)=f(b) \Leftrightarrow a=b \Leftrightarrow 3x+1=4x \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1.$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$

1.234. Vì $x=0$ hoặc $y=0$ đều không thỏa hệ nên $x>0$, $y>0$. Trừ hai phương trình của hệ theo vế ta được

$$\sqrt{x^2+2x+22}+\sqrt{x}+x^2+2x+1=\sqrt{y^2+2y+22}+\sqrt{y}+y^2+2y+1.$$

Phương trình này có dạng $f(x)=f(y)$, với

$$f(t)=\sqrt{t^2+2t+22}+\sqrt{t}+t^2+2t+1.$$

Ta có

$$f'(t)=\frac{t+1}{\sqrt{t^2+2t+22}}+\frac{1}{2\sqrt{t}}+2t+2>0.$$

Suy ra f là hàm đồng biến. Do đó,

$$f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$$

Thay vào phương trình thứ nhất ta có

$$x^2+2x+1-\sqrt{x^2+2x+22}+\sqrt{x}=0.$$

Phương trình này có dạng $g(x) = g(1)$, với

$$g(x) = x^2 + 2x + 1 - \sqrt{x^2 + 2x + 22} + \sqrt{x} = 0.$$

Ta có

$$g'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+22}} > 2 - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+22}} > 0$$

vì

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+22}} \leqslant \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+2x+22}} = \frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{\sqrt{x^2+2x+22}} < 1.$$

Như vậy, g là hàm đồng biến nên $g(x) = g(1) \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm là $(x; y) = (1; 1)$.

1.235. Điều kiện $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ có dạng

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f(y), \tag{1.71}$$

với $f(t) = \dfrac{t^4 - 1}{t}$, $t \neq 0$. Ta có

$$f'(t) = 3t^2 + \frac{1}{t^2} > 0, \forall t \neq 0.$$

Suy ra hàm số f đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

- Trên $(-\infty; 0)$, phương trình (1.71) xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x}{2} = y$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ thu được

$$y^2 = 8 \Leftrightarrow y = -2\sqrt{2} \Rightarrow x = -4\sqrt{2}.$$

- Trên $(0; +\infty)$ phương trình (1.71) xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x}{2} = y$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ thu được

$$y^2 = 8 \Leftrightarrow y = 2\sqrt{2} \Rightarrow x = 4\sqrt{2}.$$

Vậy hệ có các nghiệm $(x; y)$ là $\left(2\sqrt{2}; 4\sqrt{2}\right)$ và $(-2\sqrt{2}; -4\sqrt{2})$.

1.236. Từ phương trình thứ nhất của hệ, ta có

$$x+\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+y^2}-y \quad \text{và} \quad y+\sqrt{1+y^2}=\sqrt{1+x^2}-x.$$

Cộng hai đẳng thức này, ta được $2(x+y)=0$ hay $y=-x$.

Ta cũng có thể làm như sau: Từ phương trình thứ nhất của hệ, ta suy ra

$$x+\sqrt{1+x^2}=-y+\sqrt{1+(-y)^2}.$$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{1+t^2}$. Ta có

$$f'(t)=1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}}>\frac{|t|-t}{\sqrt{t^2+1}}\geqslant 0$$

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó,

$$f(x)=f(-y)\Leftrightarrow x=-y.$$

Thế $x=-y$ vào phương trình thứ hai, ta được

$$x\sqrt{2x^2+6x+1}=-4x^2+6x+1.$$

hay

$$x\sqrt{2x^2+6x+1}=-6x^2+(2x^2+6x+1). \tag{1.72}$$

Đặt $t=\sqrt{2x^2+6x+1}$, (1.72) trở thành

$$xt=-6x^2+t^2\Leftrightarrow t=3x \text{ hoặc } t=-3x.$$

Đáp số. $(1;-1)$, $\left(\frac{3-\sqrt{11}}{2};-\frac{3-\sqrt{11}}{2}\right)$.

1.237. Từ phương trình thứ nhất, ta có

$$(x^2+y^2)\cdot(x^2+1-y)=0.$$

Trường hợp $x^2+y^2=0$ không thể xảy ra.

Với $x^2+1-y=0$ hay $y=x^2+1$. Thế vào phương trình thứ hai, ta được

$$-10x^3+12x^2-5x+1=2x^2\cdot\sqrt[3]{7x^3-7x^2+2x}.$$

Chia phương trình trên cho x^3 và đặt $t = \dfrac{1}{x}$, ta có

$$t^3 - 5t^2 + 12t - 10 = 2 \cdot \sqrt[3]{2t^2 - 7t + 7}.$$

Hay

$$(t-1)^3 + 2(t-1) = 2t^2 - 7t + 7 + 2 \cdot \sqrt[3]{2t^2 - 7t + 7}. \tag{1.73}$$

Xét hàm số $f(m) = m^3 + 2m$, hàm số này đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ đó, phương trình (1.73) xảy ra khi và chỉ khi

$$t - 1 = \sqrt[3]{2t^2 - 7t + 7} \Leftrightarrow t = 2.$$

Khi đó, $x = \dfrac{1}{2}$ và $y = \dfrac{5}{4}$.

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{4}\right)$.

1.239. Đáp số. $(2; 17)$.

1.240. Từ phương trình thứ nhất của hệ, ta có

$$2(2x+1)^3 + 2x + 1 = 2(\sqrt{y-2})^3 + \sqrt{y-2}.$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t$ với $t \geqslant 0$. Đáp số. $\left(\dfrac{1}{2}; 6\right)$.

1.241. Phương trình thứ nhất tương đương với

$$3(5-x)\sqrt{5-x} + 2\sqrt{5-x} = 3(4-y)\sqrt{4-y} + 2\sqrt{4-y}.$$

Từ đây dễ dàng suy ra $5 - x = 4 - y \Leftrightarrow y = x - 1$. Thay xuống phương trình dưới ta được

$$2\sqrt{3x+4} + 3\sqrt{5x+9} = x^2 + 6x + 13,$$

tương đương

$$x^2 + x + 2(x + 2 - \sqrt{3x+4}) + 3(x + 3 - \sqrt{5x+9}) = 0,$$

hay

$$(x^2 + x)\left(1 + \frac{2}{x + 2 + \sqrt{3x+4}} + \frac{3}{x + 3 + \sqrt{5x+9}}\right) = 0.$$

Từ đây dễ dàng suy ra hệ có hai nghiệm là $(0; -1); (-1; -2)$.

1.242. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$[3(7-x)+2]\cdot\sqrt{7-x}=[3(6-y)+2\cdot\sqrt{6-y}].$$

Thế vào phương trình thứ hai rồi dùng liên hợp. Đáp số. $(5;4)$.

1.243. Từ phương trình thứ nhất của hệ, ta có

$$(x+3)^3-(x+3)=(y+2)^3-(y+2).$$

Từ đó ta có $y=x+1$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$x-5+\sqrt{(x-3)(x-1)}+4\sqrt{x-3}-2\sqrt{x-1}=0.$$

Đặt

$$u=\sqrt{x-3}\geqslant 0,\quad v=\sqrt{x-1}\geqslant 0,$$

Để ý

$$x-5=2u^2-v^2.$$

Ta có phương trình

$$\begin{cases}u^2-v^2=-2,\\ 2u^2-v^2+uv+4u^2-2v^2=0\end{cases}$$

Đáp số. $\left(\dfrac{11}{3};\dfrac{14}{3}\right)$.

1.244. Điều kiện $x\geqslant 2$ và $y\leqslant 3$. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases}(x-2)^2+\sqrt{x-2}=(3-y)^2+\sqrt{3-y},\\ \sqrt{2x+3}+\sqrt{4y+1}=6.\end{cases}$$

Xét hàm số

$$f(t)=t^2+\sqrt{t},\quad t\geqslant 0.$$

Ta có

$$f'(t)=2t+\frac{1}{2\sqrt{t}}>0,\quad t>0.$$

Nên f đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Do đó, phương trình thứ nhất của hệ tương đương

$$\sqrt{x-2}=\sqrt{3-y} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x=5-y. \end{cases}$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$\sqrt{13-2y}+\sqrt{4y+1}=6.$$

Giải phương trình này, ta được hai nghiệm $y=2$ và $y=6$.

- Với $y=2$, ta được $x=3$;
- Với $y=6$, ta được $x=-1$. Trường hợp này loại.

Vậy hệ có nghiệm $(3;2)$.

1.246*. Do $x \geqslant 1$ và $y \geqslant 1$, nên

$$(x-1)\cdot(y-1) \geqslant 0 \Leftrightarrow xy-(x+y)+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2(x+y) \leqslant 2xy+2.$$

Kết hợp với giả thiết, ta có

$$2(x+y) \leqslant 2xy+2 \Leftrightarrow 2(x+y) \leqslant x+y+4+2 \Leftrightarrow x+y \leqslant 6.$$

Mặt khác, từ phương trình $x+y+4=2xy$, ta có

$$x+y+4 \leqslant \frac{1}{2}(x+y)^2 \text{ hay } x+y \geqslant 4.$$

Đặt $t=x+y$, $4 \leqslant t \leqslant 6$. Từ hệ đã cho ta được

$$2^t=m(\sqrt{t^2+1}+t)$$

hay

$$m=2^t(\sqrt{t^2+1}-t), \quad 4 \leqslant t \leqslant 6.$$

Hệ đã cho có nghiệm $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$ khi và chỉ khi phương trình

$$m=2^t(\sqrt{t^2+1}-t)$$

có nghiệm $t \in [4;6]$. Xét hàm số

$$f(t) = 2^t(\sqrt{t^2+1} - t), \quad 4 \leqslant t \leqslant 6.$$

Ta có

$$f'(t) = 2^t \cdot (\sqrt{t^2+1} - t) \cdot \ln 2 + 2^t \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} - 1 \right) > 0, \quad \forall t \in [4;6].$$

Suy ra $f(4) \leqslant m \leqslant f(6)$ hay $16(\sqrt{17} - 4) \leqslant m \leqslant 64(\sqrt{37} - 6)$.

1.247. Viết phương trình thứ nhất dưới dạng

$$2\left(x + \frac{1}{y^2}\right) + \sqrt{\left(x + \frac{1}{y^2}\right)^2 - 1} = 6 - 2\sqrt{2}.$$

Đặt $t = x + \dfrac{1}{y^2}$, ta có

$$\sqrt{t^2 - 1} = 2\sqrt{2} + 2t - 6.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geqslant 3 - \sqrt{2} \\ t^2 - 1 = (2\sqrt{2} + 2t - 6)^2 \end{cases} \quad \Rightarrow t = 3.$$

1.249*. Mình xin đưa ra hướng giải theo một cách tự nhiên nhất có thể để các bạn tham khảo. Cách này nói chung chỉ có thể áp dụng đối với một lớp nhất định các bài hệ phương trình nào đó thôi chứ không phải bài nào dạng này cũng áp dụng được. Ý tưởng này mình tham khảo của anh Cẩn[1].

Trước hết, ta thấy rằng các hệ dạng này thường có các biến quan hệ với nhau bởi một hệ thức tuyến tính và các công việc mà chúng ta phải thực hiện là nhân một trong hai phương trình của hệ với một biểu thức thích hợp rồi cộng lại, nhiều khi phải nhân với cả hai phương trình (không xét việc nhân phân thức). Vấn đề là tìm cái biểu thức thích hợp!

Các bạn hãy tham khảo việc phân tích dưới đây:

- Bước 1. Nhẩm nghiệm. Ta lần lượt thử các giá trị $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, ... vào hệ để kiểm tra. Thực tế là ta chỉ

[1] Ý nói tới anh Võ Quốc Bá Cẩn

cần thay giá trị vào rồi giải phương trình ẩn y còn lại bằng máy tính; trường hợp nào có nghiệm chung thì ta nhận được một nghiệm của hệ. Bằng cách này, ta dễ dàng tìm được hai nghiệm của hệ là $(x, y) = (-1, 1), (2, -2)$.

- Bước 2. Tìm quan hệ tuyến tính giữa hai biến này. Thông thường thì khi đã có hai nghiệm, chúng ta sẽ giải một hệ phương trình để tìm quan hệ tuyến tính có dạng $y = ax + b$, việc này khá quen thuộc. Ở đây, quan hệ này dễ thấy là $y = -x$.

- Bước 3. Thay vào và phân tích thành nhân tử. Ta thay x bởi y hoặc y bởi x (tùy trường hợp xem cách nào có lợi), với bài này ta thay $y = -x$ vào hai phương trình của hệ, ta được hai phương trình là

$$x^4 + 2(-3x+1)x^2 + (5x^2 - 4x + 11)x - x^2 - 10x + 2 = 0,$$

$$-x^3 - (x-2)x + x^2 + x + 2 = 0$$

Tiến hành phân tích nhân tử hai phương trình này (tất nhiên là ta đã biết trước nghiệm $x = -1, x = 2$ nên việc này tiến hành không khó), ta thu được

$$(x+1)^2(x-1)(x-2) = 0$$

và

$$(x+1)^2(x-2) = 0$$

- Bước 4. Lựa chọn biểu thức thích hợp.Như thế, so với phương trình thứ nhất vừa nhận được thì phương trình thứ hai thiếu đi một biểu thức là $x - 1$, nhưng chú ý rằng biểu thức này cũng tương đương với $-y - 1$. Ta sẽ chọn một trong hai biểu thức này để nhân vào. Rõ ràng nếu chọn $-y - 1$ thì việc nhân sẽ tạo ra một đa thức có chứa biến y đồng bậc với đa thức ở phương trình thứ nhất ban đầu. Ta chọn $-(y+1)$ và đến đây thì tiếp tục công việc giải như đã nêu.

Mọi người có thể thấy một hạn chế rõ ràng của phương pháp này là ở bước 1, nếu ta không nhẩm được 2 nghiệm của hệ hoặc hệ chỉ có 1 nghiệm thì vấn đề khá rắc rối. Việc phân tích các dạng này chắc sẽ trình bày ở một dịp khác và mình mong rằng bài viết nhỏ này sẽ giúp ích cho các bạn.

1.250. Ý tưởng mình khi chế tác bài này như sau: Điều kiện: $xy \geqslant 0$; $y \geqslant 0$; $x \leqslant 1 \Rightarrow y \geqslant 0$; $x \in [0;1]$

Dễ thấy $y = 0$ hoặc $x = 0$ thì hệ vô nghiệm, ta suy ra hệ có nghiệm khi $y > 0$; $x \in (0;1]$ Phương trình (2) của hệ có dạng:

$$\sqrt{8x^2 - 3xy + 4y^2} - 3y + \sqrt{xy} - y = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)(8x+5y)}{\sqrt{8x^2 - 3xy + 4y^2} + 3y} + \frac{(x-y)y}{\sqrt{xy} + y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ \dfrac{8x+5y}{\sqrt{8x^2 - 3xy + 4y^2} + 3y} + \dfrac{y}{\sqrt{xy} + y} = 0 \quad (3) \end{array}\right.$$

Vì x, y là những số dương nên phương trình (3) vô nghiệm. Suy ra $x = y$ (Có thể chỉ ra $x = y$ dựa vào nhận xét phương trình thứ hai là phương trình đẳng cấp)

Bài toán trở thành: Tìm m để bất phương trình

$$x^3 - 3x - 1 \geqslant m.x\sqrt{x}(\sqrt{1-x} - 1)^3$$

có nghiệm $x \in (0;1]$.

Chia hai vế bất phương trình cho x^3 ta thu được

$$1 - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} \geqslant m(\sqrt{\frac{1}{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x}})^3.$$

Đặt $t = \dfrac{1}{x} \Rightarrow t \in [1;+\infty)$. Bất phương trình được viết lại

$$t^3 + 3t^2 - 1 \leqslant m(\sqrt{t} - \sqrt{t-1})^3 \Leftrightarrow (t^3 + 3t^2 - 1)(\sqrt{t} + \sqrt{t-1})^3 \leqslant m.$$

Xét hàm số

$$f(t) = (t^3 + 3t^2 - 1)(\sqrt{t} + \sqrt{t-1})^3 \quad t \in [1;+\infty).$$

Ta có

$$f'(t) = (3t^2 + 6t - 1)(\sqrt{t} + \sqrt{t-1})^3 + \frac{3}{2}(\sqrt{t} + \sqrt{t-1})^2\left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{t-1}}\right)(t^3 + 3t^2 - 1) > 0.$$

với mọi $t \in (1;+\infty)$. Như vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[1;+\infty) \Rightarrow f(t) \geqslant f(1) = 3$

Từ đó suy ra điều kiện để bất phương trình có nghiệm là $m \geqslant 3$ Vậy hệ phương trình có nghiệm khi $m \geqslant 3$.

1.252. Trước tiên nhìn bài toán trên khá phức tạp và mất phương hướng nhưng ta hãy để ý ở phương trình thứ hai có hai đại lượng tách rời khỏi nhau là x^2+x và $\sqrt{y^2-7}$ mà hai cái này nếu nhân tung ra sẽ rất phức tạp.Vì vậy ta sẽ thử xem phương trình thứ thứ nhất có thể phân tích thành các thừa số có chứa x^2+x và $\sqrt{y^2-7}$ được hay không.Thật vậy phương trình thứ nhất ta phân tích thành như sau:

$$x^4+2x^3-5x^2+y^2-6x-11=0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2+x)+x(x^2+x)-6(x^2+x)+y^2-7-4=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x-6)(x^2+x)+(y^2-7)=4$$

Đến đây ta tiếp tục đặt:

$$\begin{cases} x^2+x=a, \\ \sqrt{y^2-7}=b. \end{cases}$$

Thay vào hệ phương trình trên ta sẽ được hệ mới là:

$$\begin{cases} a(a-6)+b^2=4 \\ a=\frac{3b-6}{b} \end{cases}$$

Để ý khi thế từ phương trình thứ 1 lên thứ 2 ta sẽ được

$$\frac{3b-6}{b}(\frac{3b-6}{b}-6)+b^2=4 \Leftrightarrow \frac{-(3b-6)(3b+6)}{b^2}+b^2=4$$

Đến đây các bạn tiếp tục làm nhé!

1.253. Tư tưởng của mình đơn giản cho bài này là cái thằng "căn thức" nó xuất hiện có một mình nên "chuẩn hóa" nó mất căn luôn để nó trở thành một em "xinh tươi" hơn.

Thật vậy với điều kiện $y \geqslant -1$, ta đặt $u = \sqrt{y+1}$, $u \geqslant 0$. Lúc đó hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} x^2u-2xu^2=1, \\ x^3-3xu^2=a+2. \end{cases}$$

Quan sát hệ trên ta thấy ngay được "dáng điệu" của hệ đẳng cấp bậc hai. Vậy cứ thế ta "phang nốt cách giải hệ đẳng cấp" vào thế nào mà em ấy chả "bị đánh gục". Cụ thể như sau: Không quá khó để thấy ngay $u = 0$ là một thằng "ngoại lai" của cái hệ này nên loại luôn. Vậy chỉ còn $u > 0$, khi đó ta đặt $x = tu$. Lúc đó hệ lại trở thành hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} u^3(t^2 - 2t) = 1, \\ u^3(t^3 - 3t) = a + 2. \end{cases}$$

Bây giờ quan sát thấy được rằng ở cái phương trình

$$u^3(t^2 - 2t) = 1,$$

thì do $u > 0$ nên ta cần phải có

$$t^2 - 2t > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < 0, \\ t > 2. \end{array}\right.$$

Mặt khác từ hệ lập tỉ số ta có ngay được phương trình

$$\frac{t^3 - 3t}{t^2 - 2t} = a + 2 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 3}{t - 2} = a + 2.$$

Tới đây ta chỉ cần đưa bài toán về sự tương giao của hai đồ thị. Đồ thị của hàm số $y = f(t) = \dfrac{t^2 - 3}{t - 2}$, với $t \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ và đường thẳng $d : y = a + 2$ chạy vuông góc với trục Ox. Mà việc này thì quá quen thuộc rồi! Các bạn hoàn thành tiếp chặng đường cuối cùng giúp mình.

1.254. Điều kiện $x \geqslant 0$, $x^2 + y + 8 \geqslant 0$, $y + 8 \geqslant 0$. Xuất phát từ phương trình thứ hai, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$13^2 = \left(2\sqrt{x + 4} + 3\sqrt{y + 8}\right)^2 \leqslant 13(x + 4 + y + 8) \Rightarrow x + y \geqslant 1.$$

Từ phương trình đầu tiên, bình phương hai vế ta có

$$x + x^2 + y + 3 + 2\sqrt{x(x^2 + y + 3)} = 4.$$

Chú ý rằng ta có

$$x^2 \geqslant 0, \quad \sqrt{x(x^2 + y + 3)} \geqslant 0,$$

nên suy ra $x+y \leqslant 1$. Từ đây nhận thấy rằng để thỏa hệ thì phải có $x+y=1$, và như thế ta sẽ có

$$\begin{cases} x=0, \\ \dfrac{\sqrt{x+4}}{2}=\dfrac{\sqrt{y+8}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=1. \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $x=0, y=1$.

1.255. Điều kiện $x>0$. Ta viết lại phương trình thứ nhất dưới dạng

$$4\sqrt{1+x}=-xy\sqrt{4+y^2}.$$

Dễ thấy để hệ phương trình có nghiệm thì $y<0$. Bình phương phương trình trên ta được

$$16(1+x)=x^2(y^4+4y^2),$$

tương đương

$$4(x+2)^2=x^2(y^2+2)^2,$$

hay

$$2(x+2)=x(y^2+2).$$

Từ phương trình này ta có $xy^2=4$. Từ phương trình thứ hai của hệ, ta suy ra

$$x=4^{y+2}.$$

Thế vào phương trình $x=4^{y+2}$, ta được

$$y^2.4^{y+2}=4 \Leftrightarrow y^2=\frac{1}{4^{y+1}}.$$

Nhìn thấy dạng này thì ta có cơ may duy nhất là sử dụng hàm số thôi. Vận may là với $y<0$ thì cả hai hàm số trên đều nghịch biến, nên ta suy ra phương trình có tối đa một nghiệm. Nhẩm thấy $y=-1$ là một nghiệm.. Từ đó suy ra hệ có nghiệm duy nhất $(4;-1)$.

1.256. Bài toán có điều kiện xác định là

$$\begin{cases} x \geqslant 4, \\ y \geqslant 0, \\ x^2 \geqslant y, \\ 4x \geqslant y, \\ y \geqslant 3x. \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta bình phương hai vế thu được phương trình

$$2x-2\sqrt{x^2-y}=4x-y \Leftrightarrow y-2x=2\sqrt{x^2-y} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \text{ (loại)},\\ y=4x-4.\end{array}\right.$$

Với $y=4x-4$ ta thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-16}=2+\sqrt{x-4} &\Leftrightarrow \sqrt{x^2-16}-3=\sqrt{x-4}-1\\ &\Leftrightarrow \frac{x^2-25}{\sqrt{x^2-16}+3}=\frac{x-5}{\sqrt{x-4}+1}\\ &\Leftrightarrow (x-5)\cdot\left(\frac{x+5}{\sqrt{x^2-16}+3}-\frac{1}{\sqrt{x-4}+1}\right)=0.\end{aligned}$$

Mặt khác ta có

$$\frac{x+5}{\sqrt{x^2-16}+3}\geqslant\frac{x+5}{\sqrt{x^2}+3}>1\geqslant\frac{1}{\sqrt{x-4}+1},$$

suy ra

$$\frac{x+5}{\sqrt{x^2-16}+3}-\frac{1}{\sqrt{x-4}+1}>0.$$

Do đó từ phương trình ta có $x=5\Rightarrow y=16$. Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x;y)=(5;16)$.

1.257. Phương trình được viết lại

$$\sqrt{\frac{14x^2}{3}+\frac{1}{96x^2}+m}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+2x$$

Điều kiện $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+2x\geqslant 0\Rightarrow x>0$. Bình phương 2 vế phương trình đã cho ta được:

$$\frac{14x^2}{3}+\frac{1}{96x^2}+m=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+2x\right)^2.$$

hay

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2}{3}+\frac{1}{96x^2}+m=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+4\sqrt[3]{x^2} \tag{1.74}$$

Đặt $t = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 4\sqrt[3]{x^2}$. Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $t \geqslant 4$. Ta có

$$t^3 = \frac{1}{x^2} + \frac{12}{\sqrt[3]{x^2}} + 48\sqrt[3]{x^2} + 64x^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} + 64x^2 = t^3 - 12t$$

Phương trình (1.74) thành

$$m = -\frac{1}{96}\left(t^3 - 12t\right) + t = -\frac{t^3}{96} + \frac{9t}{8}$$

1.258. Cách 1. Phương trình đã cho tương đương với

$$m = \frac{10x^2 + 8x + 4}{(2x+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}.$$

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{10x^2 + 8x + 4}{(2x+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}, \quad x \neq \frac{1}{2}.$$

Ta có

$$f'(x) = \frac{-2x(3x^2 - 2x - 8)}{(2x+1)^2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Giải phương trình $f'(x) = 0$ và lập bảng biến thiên của hàm số ta có đáp số

$$m \in (-5;4) \cup (4;5] \cup \left\{\frac{12\sqrt{5}}{5}\right\}.$$

Cách 2. Phương trình đã cho tương đương với

$$2(4x^2 + 4x + 1) + 2(x^2 + 1) = m(2x+1)\cdot\sqrt{x^2+1}.$$

Đặt $a = 2x + 1$, $b = \sqrt{x^2+1} \geqslant 1$. Ta có phương trình

$$2a^2 + 2b^2 = mab.$$

Trường hợp $a = 0$ không thể là nghiệm của phương trình trên. Chia phương trình cho ab, ta được

$$2\frac{a}{b} + 2\frac{b}{a} = m.$$

Đặt $t = \dfrac{a}{b} = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. Phương trình trên trở thành

$$2t + \frac{2}{t} = m.$$

Ta có

$$t'(x) = \frac{2-x}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}.$$

Giải phương trình $t'(x) = 0$ và lập bảng biến thiên, ta có $t \in (-2; \sqrt{5}]$.

Chú ý rằng,

- với mỗi t thuộc nửa khoảng $(-2;2]$ hoặc $t = \sqrt{5}$, thì phương trình $t = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ có một nghiệm x.
- và mỗi t thuộc khoảng $(2;\sqrt{5})$, thì phương trình $t = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ có hai nghiệm x.

Với nhận xét trên, bằng cách xét hàm số $f(t) = 2t + \dfrac{2}{t}$, $t \in (-2;\sqrt{5}]$, thì phương trình đã cho có hai nghiệm khi và chỉ khi

$$m \in (-5;4) \cup (4;5] \cup \left\{\frac{12\sqrt{5}}{5}\right\}.$$

1.259. Hướng dẫn. Đặt

$$u = \sqrt{x+3} \geqslant 0, \quad v = \sqrt{1-x} \geqslant 0.$$

Ta có hệ

$$\begin{cases} (4m-3)u + (3m-4)v + m - 1 = 0 \\ u^2 + v^2 = 4. \end{cases}$$

Dùng đường tròn.

Ta có thể làm như sau: Đặt

$$\sqrt{x+3} = 2\sin t; \quad \sqrt{1-x} = 2\cos t, \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Sở dĩ ta đặt như vậy bởi vì

$$x + 3 + 1 - x = 4 = 4(\sin^2 t + \cos^2 t).$$

Khi đó ta có

$$2(4m-3)\sin t + 2(3m-4)\cos t = 1 - m.$$

Ta đã chuyển về bài toán ở dạng cơ bản rồi nhé! Điều kiện cần và đủ phương trình trên có nghiệm là

$$4(4m-3)^2+4(3m-4)^2 \geqslant (1-m)^2$$

Bất phương trình này có nghiệm với mọi m.

1.261. Hướng dẫn. Từ phương trình đã cho, ta có

$$m=\frac{\sqrt{x^4+8x}+2x^2+4x}{x^2-2x+4}.$$

Chú ý.

$$\frac{\sqrt{x^4+8x}+2x^2+4x}{x^2-2x+4}=\sqrt{\frac{x^2+2x}{x^2-2x+4}}+2\frac{x^2+2x}{x^2-2x+4}.$$

1.262. Từ phương trình đã cho, ta có

$$(x^2+x+1)^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)+m(x^2-x+1)^2$$

nên ta chia cả 2 vế cho x^2-x+1, ta được:

$$\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^2=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+m \Leftrightarrow \left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^2-\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=m$$

1.263. Đáp số. $0<m\leqslant \sqrt[4]{3}$.

1.264. Đáp số. $\left[\begin{array}{l} m=1, \\ -4\leqslant m<\dfrac{-\sqrt{22}+3\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

1.265. Đáp số. $2(\sqrt{2}-1)\leqslant m\leqslant 1+\sqrt{5}$.

1.266. Đáp số. $\dfrac{20\sqrt{21}}{21}\leqslant m\leqslant \dfrac{47}{8}$.

1.267. Điều kiện $-1\leqslant x\leqslant \dfrac{5}{4}$.

Đặt $a=\sqrt{1+x}\Rightarrow 0\leqslant a\leqslant \dfrac{3}{2}$, khi đó ta có phương trình đã cho tương đương với

$$m=\frac{\sqrt{9-a^2}-a}{\sqrt{9-a^2}+2a+6}=1-\underbrace{\frac{3a+6}{\sqrt{9-a^2}+2a+6}}_{f(a)}. \qquad (1.75)$$

Ta có

$$f'(a) = -3\frac{\sqrt{9-a^2}+2+\frac{a^2+2a}{\sqrt{9-a^2}}}{(\sqrt{9-a^2}+2a+6)^2} < 0, \quad \forall a \in \left(0;\frac{3}{2}\right).$$

Do đó hàm số $f(a)$ nghịch biến trên $[0;3/2]$.

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1.75) có nghiệm $a \in \left[0;\frac{3}{2}\right] \Leftrightarrow f(\frac{3}{2}) \leqslant m \leqslant f(0)$.

Chú ý. Có thể dùng đường tròn.

1.268. Từ phương trình thứ nhất ta có $2y = x^2 - 2m$ hay $y = \frac{x^2}{2} - m$. Thay xuống phương trình thứ hai ta được

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 = m(x^2 - 2x - 1) \Leftrightarrow (x^2 - 2x)^2 = 2m(x^2 - 2x - 1).$$

Đặt $u = x^2 - 2x - 1$, ta có

$$m = \frac{(u+1)^2}{2u}$$

Từ đây ra điều kiện của m là $m \leqslant 0$ hoặc $m \geqslant 4$.

1.269. Đáp số. $-\frac{13}{2} \leqslant m \leqslant -\frac{13}{6}$.

1.270. Điều kiện $x > 0$.Phương trình đã cho tương đương với

$$x\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} + 2(m-1)\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4(1-m)\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + 4m - 6 = 0.$$

Đặt $t = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$, $t \geqslant 2$.

1.271. Điều kiện $x > 1$.

Từ phương trình đã cho ta được

$$\sqrt{x^2 - 2m} = x - 2\sqrt{x^2 - 1}.$$

Do $x - 2\sqrt{x^2 - 1} > 0$, bình phương 2 vế ta được

$$x^2 - 2m = x^2 + 4(x^2 - 1) - 4x\sqrt{x^2 - 1}.$$

Tương đương

$$-m = 2(x^2-1) - 2\sqrt{x^2(x^2-1)}$$

Chú ý

$$2(x^2-1) - 2\sqrt{x^2(x^2-1)} = (x - \sqrt{x^2-1})^2 - 1,$$

nên ta có

$$-m = (x - \sqrt{x^2-1})^2 - 1.$$

1.272. ***Điều kiện cần*** Nhận thấy nếu x_o là một nghiệm của phương trình, thì $1-x_o$ cũng là nghiệm. Vì vậy, điều kiện cần để phương trình có nghiệm duy nhất là:

$$x_o = 1 - x_0 \Leftrightarrow x_o = 1 - x_o \Leftrightarrow x_o = \frac{1}{2}.$$

Thay $x = \frac{1}{2}$ vào phương trình ta thu được:

$$m^3 - m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0, \\ m = 1, \\ m = -1. \end{array}\right.$$

Điều kiện đủ

- Xét $m = 1$ phương trình đã cho thành

  $$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + 2\sqrt{x(1-x)} - 2\sqrt[4]{x(1-x)} = 1.$$

  -Dễ thấy $x = 0$; $x = 1$ là hai nghiệm của phương trình, suy ra $m = 1$ không thỏa mãn điều kiện.

- Xét $m = 0$. Phương trình đã cho thành

  $$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + -2\sqrt[4]{x(1-x)} = 0 \Leftrightarrow (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{1-x})^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

  Phương trình có nghiệm duy nhất.

- Xét $m = -1$. Phương trình đã cho thành

  $$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} - 2\sqrt{x(1-x)} - 2\sqrt[4]{x(1-x)} = -1$$

hay

$$(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{1-x})^2+(\sqrt{x}-\sqrt{1-x})^2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Phương trình có nghiệm duy nhất

Tóm lại các giá trị m cần tìm là $m=0$ hoặc $m=-1$

1.273. Bất phương trình đã cho tương đương

$$\frac{2x^2-7x-4}{2x-5}\cdot\sqrt{10x-3x^2-3}\geqslant 0.$$

Chú ý.

$$\begin{cases} A\cdot B\geqslant 0, \\ A\geqslant 0 \end{cases} \not\Rightarrow B\geqslant 0.$$

Vì nếu $A=0$, thì B có dấu tuỳ ý.

Ta có

$$\begin{cases} A\cdot B\geqslant 0, \\ A\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0; \\ \begin{cases} A>0, \\ B\geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Trở lại bài, ta xét hai trường hợp

- Trường hợp 1.
$$\begin{cases} x\neq \dfrac{5}{2}, \\ -3x^2+10x-3=0. \end{cases}$$

- Trường hợp 2.
$$\begin{cases} -3x^2+10x-3\geqslant 0, \\ \dfrac{2x^2-7x-4}{2x-5}\geqslant 0. \end{cases}$$

Đáp số. $x=3$ hoặc $\dfrac{1}{3}\leqslant x<\dfrac{5}{2}$.

1.274. Viết bất phương trình đã cho thành

$$3\sqrt{x+2}-\sqrt{x+10}-(2x+2)\geqslant 0,$$

Nhân liên hợp, ta được

$$\frac{8(x+1)}{3\sqrt{x+2}+\sqrt{x+10}}-(2x+2)\geqslant 0,$$

tương đương

$$(x+1)\cdot(4-(3\sqrt{x+2}+\sqrt{x+10}))\geqslant 0.$$

Xét ba trường hợp $x=-1$, $x>-1$ và $x<-1$.

Đáp số. $\left[\dfrac{3-3\sqrt{5}}{2};-1\right]$.

1.275. Đáp số. $[1;\Big)\cup\Big(\dfrac{5}{3};+\infty)$.

1.276. Điều kiện

$$\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}\geqslant 0,\\ 1-\dfrac{1}{x}\geqslant 0.\end{cases}$$

Do $1-\dfrac{1}{x}\geqslant 0$, nên $\dfrac{x-1}{x}\geqslant$, từ bất phương trình đã cho suy ra

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}>0$$

hay

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}>\sqrt{1-\frac{1}{x}}\Leftrightarrow x>1.$$

Viết bất phương trình đã cho thành

$$\sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{x}}-\sqrt{\frac{x-1}{x}}>\frac{x-1}{x}.$$

Do $x>1$, nên ta chia bất phương trình trên cho $\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$, ta được

$$\sqrt{x+1}-1>\sqrt{\frac{x-1}{x}}.$$

hay

$$\sqrt{x+1}>1+\sqrt{\frac{x-1}{x}}.$$

Bình phương bất phương trình này, ta có

$$x+1>1+2\sqrt{\frac{x-1}{x}}+\frac{x-1}{x}.$$

Tương đương

$$x^2-x-2\sqrt{x^2-x}+1>0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-x}-1\right)^2>0.$$

Điều này chỉ xảy ra khi và chỉ khi

$$\sqrt{x^2-x}\neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ x\neq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $x>1$, ta có tập nghiệm bất phương trình đã cho là

$$\mathscr{S}=(1;\frac{1+\sqrt{5}}{2})\cup\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty).$$

1.277. Nhân hai vế với $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}$, ta được

$$x-3+\sqrt{x^2+2x-3}\geqslant\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}.$$

Đặt $u=\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}$, suy ra $x+\sqrt{x^2+2x-3}=\dfrac{y^2-2}{2}$.

Đáp số. $x\geqslant\dfrac{13}{4}$.

1.278. Điều kiện: $\begin{cases} x\neq 0, \\ |x|<2. \end{cases}$

Bất phương trình tương đương với

$$\frac{x^2(x^2-4)+16}{x^2(4-x^2)}-\frac{(4-x^2)+x^2}{x\sqrt{4-x^2}}-1\leqslant 0,$$

hay

$$\frac{16}{x^2(4-x^2)}-\frac{4}{x\sqrt{4-x^2}}-2\leqslant 0. \tag{1.76}$$

Đặt $\dfrac{4}{x\sqrt{4-x^2}}=t$. Bất phương trình (1.76) trở thành

$$t^2-t-2\leqslant 0\Leftrightarrow -1\leqslant t\leqslant 2.$$

Khi đó

$$-1 \leqslant \frac{4}{x\sqrt{4-x^2}} \leqslant 2. \tag{1.77}$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{4}{x\sqrt{4-x^2}}$. Ta có

$$f'(x) = \frac{8}{x^2(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} \cdot (x^2-2).$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ hoặc $x = -\sqrt{2}$.

Vẽ bảng biến thiên, bạn sẽ thấy nếu $x \in (-2;0)$ thì $f(x) \leqslant -2 < -1$ nếu $x \in (0;2)$ thì $f(x) \geqslant 2$. Vậy chỉ có duy nhất $x = \sqrt{2}$ thỏa (1.77).

Tóm lại bất phương trình ở đề bài chỉ có một duy nhất $x = \sqrt{2}$.

1.279. Bất phương trình được viết lại như sau

$$\frac{x(\sqrt{(x^2-1)^2}-1)}{\sqrt{x^2-1}(\sqrt{x^2-1}-1)} \geqslant 2\sqrt{2}.$$

Điều kiện $x^2 > 1; x \neq \pm\sqrt{2}$. Bất phương trình đã cho trở thành

$$\frac{x(\sqrt{x^2-1}+1)}{\sqrt{x^2-1}} \geqslant 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x(\sqrt{x^2-1}+1) \geqslant 2\sqrt{2}\sqrt{x^2-1}.$$

Suy ra bất phương trình có nghiệm khi: $x > 1$ và $x \neq 2$. Bình phương 2 vế bất phương trình ta thu được

$$x^2(x^2+2\sqrt{x^2-1}) \geqslant 8(x^2-1).$$

Bây giờ ta đặt $\sqrt{x^2-1} = t > 0 \Rightarrow x^2 = t^2+1$ thay vào bất phương trình ta thu được

$$(t^2+1)(t^2+2t+1) \geqslant 8t^2 \Leftrightarrow (t-1)^2(t^2+4t+1) \geqslant 0.$$

1.284.

$$\sqrt{4x+6}-(x+2)+(x+2)-\sqrt[3]{(x+2)^3+x^2-2}-(x^2-2) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(x^2-2)}{\sqrt{4x+6}+x+2} - \frac{x^2-2}{(x+2)^2+(x+2)\sqrt[3]{(x+2)^3+x^2-2}+\sqrt[3]{((x+2)^3+x^2-2)^2}} - (x^2-2) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-2\right).\left(\frac{-1}{\sqrt{4x+6}+x+2} - \frac{1}{(x+2)^2+(x+2)\sqrt{(x+2)^3+x^2-2}+\sqrt[3]{((x+2)^3+x^2-2)^2}} - 1\right) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2 \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$$

1.285. Đáp số. $\left\{\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2};1\right\}$.

1.287. Điều kiện

$$\begin{cases} x\neq 0,\\ 3x-\sqrt{2x^2+5x+2}\neq 0,\\ 2x^2+5x+2\geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty;-2]\cup[-1/2;+\infty)\setminus\{0;1\}.$$

Cộng 1 vào hai vế của bất phương trình đã cho, ta được

$$\frac{6}{3x-\sqrt{2x^2+5x+2}}\geqslant\frac{1}{x}.$$

Tương đương với

$$\frac{3x+\sqrt{2x^2+5x+2}}{x\cdot(3x-\sqrt{2x^2+5x+2})}\geqslant 0. \tag{1.78}$$

- Trường hợp 1.
$$3x+\sqrt{2x^2+5x+2}=0\Leftrightarrow x=-\frac{2}{7}.$$
Nghiệm này thoả điều kiện.

- Trường hợp 2. $3x+\sqrt{2x^2+5x+2}\neq 0$, Bất phương trình (1.78) tương đương với
$$\frac{(3x+\sqrt{2x^2+5x+2})^2}{x\cdot(7x^2-5x-2)}\geqslant 0$$
hay
$$x\cdot(7x^2-5x-2)>0.$$
Giải bất phương trình này, ta được $-\dfrac{2}{7}<x<0$ hoặc $x>1$.

Từ hai trường hợp trên, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$S=\left[-\frac{2}{7};0\right)\cup(1;+\infty).$$

1.288. Ta cần có

$$5-x^2\geqslant 0\Leftrightarrow -\sqrt{5}<\leqslant x\leqslant\sqrt{5}.$$

Khi đó,

$$-\pi < \frac{2x-7}{4} < 0, \quad -\pi < \frac{x-5}{4} < 0.$$

Ta biết rằng, trên khoảng $(-\pi;0)$ thì hàm số $\cos x$ đồng biến, tức là, nếu x_1, x_2 thuộc khoảng $(-\pi;0)$ mà $x_1 < x_2$, thì $\cos(x_1) < \cos(x_2)$. Như vậy, dấu của hiện $x_1 - x_2$ cùng dấu với dấu của hiệu $\cos(x_1) - \cos(x_2)$.

Với đề bài trên, ta có dấu của $\cos\dfrac{2x-7}{4} - \cos\dfrac{x-5}{4}$ cùng dấu với dấu của $\dfrac{2x-7}{4} - \dfrac{x-5}{4}$.

Như vậy, bất phương trình đã cho viết lại thành

$$\frac{3-x-\sqrt{5-x^2}}{\dfrac{2x-7}{4}-\dfrac{x-5}{4}} \geqslant 0.$$

Để ý rằng, với $-\sqrt{5} <\leqslant x \leqslant \sqrt{5}$, thì $3-x>0$, nhân bất phương trình trên với $3-x+\sqrt{5-x^2}$, ta được

$$\begin{cases} -\sqrt{5} <\leqslant x \leqslant \sqrt{5}, \\ \dfrac{(3-x)^2-(5-x^2)}{\dfrac{2x-7}{4}-\dfrac{x-5}{4}} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant \sqrt{5}, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

1.289. Điều kiện của bất phương trình là

$$\frac{x^2-22x+121}{x^2-24x+140} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;10) \cup \{11\} \cup (14;+\infty).$$

Mặt khác

$$-2x^2+50x-309<0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty;\frac{25-\sqrt{7}}{2}\right) \cup \left(\frac{25+\sqrt{7}}{2};+\infty\right).$$

Vì

$$11 < \frac{25-\sqrt{7}}{2} < \frac{25+\sqrt{7}}{2} < 14,$$

nên tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$\mathscr{S} = (-\infty;10) \cup \{11\} \cup (14;+\infty).$$

1.290. Ta thấy với $x \leqslant 0$ không thoả bất phương trình đã cho.

Với $x > 0$, chia bất phương trình cho x, ta được

$$\sqrt{6}\left(x - 3 + \frac{1}{x}\right) + \sqrt{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} \leqslant 0.$$

Đặt $t = x + \dfrac{1}{x} \geqslant$, ta được

$$\sqrt{t^2 - 1} \leqslant \sqrt{6}(3 - t).$$

Giải bất phương trình này, ta có

$$t \leqslant -1 \text{ hoặc } 1 \leqslant t \leqslant \frac{11}{5}.$$

Do $t \geqslant 2$, nên $2 \leqslant x \leqslant \dfrac{11}{5}$. Tới đây, trở về ẩn, ta được tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$\mathscr{S} = \left[\frac{11 - \sqrt{21}}{10}; \frac{11 + \sqrt{21}}{10}\right].$$

Cách khác. Đặt

$$a = \sqrt{x^2 - x + 1}, \quad b = \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

Khi đó, ta có

$$2a^2 - b^2 = 2(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1) = x^2 - 3x + 1$$

và

$$ab = \sqrt{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)} = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}.$$

Do đó, bất phương trình đã cho có thể được viết lại thành

$$\sqrt{6}(2a^2 - b^2) + ab \leqslant 0,$$

tương đương

$$\left(3a + \sqrt{6}b\right)\left(4a - \sqrt{6}b\right) \leqslant 0.$$

Do $a, b > 0$ nên ta có $4a \leqslant \sqrt{6}b$, hay

$$8(x^2 - x + 1) \leqslant 3(x^2 + x + 1).$$

Giải bất phương trình này, ta được

$$\frac{11-\sqrt{21}}{10} \leqslant x \leqslant \frac{11+\sqrt{21}}{10}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là

$$\mathscr{S} = \left[\frac{11-\sqrt{21}}{10}; \frac{11+\sqrt{21}}{10}\right].$$

1.291. ***Cách 1.*** Với điều kiện $\frac{-1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, thì $2-x^2>0$.

Bình phương hai vế bất phương trình đã cho, ta được

$$2+2\sqrt{1-4x^2} \geqslant 4-4x^2+x^4,$$

hay

$$x^4+(1-\sqrt{1-4x^2})^2 \leqslant 0.$$

Điều này chỉ xảy ra

$$\begin{cases} x^4=0, \\ (1-\sqrt{1-4x^2})^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Cách 2. Điều kiện $\frac{-1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. Đặt $\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}=t$. Suy ra

$$x^2 = \frac{1-\left(\frac{t^2}{2}-1\right)^2}{4}.$$

Bất phương trình trở thành

$$t^4-4t^2-16t-32 \leqslant 0 \Leftrightarrow (t-2)^2(t^2+4t+8) \leqslant 0 \Leftrightarrow t-2=0 \Leftrightarrow t=2.$$

Giải ra ta được $x=0$.

Cách khác.

Điều kiện: $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. Ta có bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left[\sqrt{1-2x}-(1-x)\right]+\left[\sqrt{1+2x}-(1+x)\right]+x^2 \geqslant 0,$$

hay

$$\frac{(1-2x)-(1-x)^2}{\sqrt{1-2x}+1-x}+\frac{(1+2x)-(1+x)^2}{\sqrt{1+2x}+1+x}+x^2 \geqslant 0.$$

Sau khi thu gọn, ta được

$$x^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-2x}+1-x}+\frac{1}{\sqrt{1+2x}+1+x}-1\right) \leqslant 0.$$

Dễ thấy $x=0$ là một nghiệm của bất phương trình này.

Xét trường hợp $x \neq 0$, khi đó bất phương trình tương đương

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x}+1-x}+\frac{1}{\sqrt{1+2x}+1+x} \leqslant 1.$$

Tuy nhiên, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-2x}+1-x}+\frac{1}{\sqrt{1+2x}+1+x} &\geqslant \frac{4}{\left(\sqrt{1-2x}+1-x\right)+\left(\sqrt{1+2x}+1+x\right)}\\ &= \frac{4}{\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}+2} \geqslant \frac{4}{\sqrt{2(1-2x+1+2x)}+2}=1.\end{aligned}$$

Do vậy, để có thể xảy ra trường hợp như bất phương trình ở trên thì ta phải có

$$\begin{cases}\sqrt{1-2x}+1-x=\sqrt{1+2x}+1+x\\ \sqrt{1-2x}=\sqrt{1+2x}\end{cases}$$

tức $x=0$, tuy nhiên điều này không thể xảy ra do ta đang xét trường hợp $x \neq 0$.

Tóm lại, ta có $x=0$ là nghiệm duy nhất của bất phương trình đã cho.

■

1.292. Điều kiện $x<-2$ hoặc $x>2$. Với $x<-2$, bất phương trình đã cho vô nghiệm. Với $x>2$. Bình phương hai vế bất phương trình đã cho, ta được

$$x^2+\frac{4x^2}{x^2-4}+\frac{4x^2}{\sqrt{x^2-4}}>45,$$

hay

$$\frac{x^4}{x^2-4}+\frac{4x^2}{\sqrt{x^2-4}}>45.$$

Tương đương

$$\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}+2\right)^2>49.$$

Từ đây, ta có

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}+2>7 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}>5.$$

Bình phương bất phương trình này, ta được

$$x^4-25x^2+100>0.$$

Giải bất phương trình này với chú ý $x>2$, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$\mathscr{S}=(2;\sqrt{5})\cup(2\sqrt{5};+\infty).$$

1.293. Điều kiện: $\dfrac{\sqrt{304}-4}{9}\leqslant x\leqslant 2.$

Ta có

$$\sqrt{2(4-x^2)}\leqslant \frac{9x^2+8x-32}{16} \Leftrightarrow \frac{9x^2-32}{16}\geqslant \sqrt{2(4-x^2)}-\frac{x}{2}.$$

Tương đương

$$\frac{9x^2-32}{16}\geqslant \frac{32-9x^2}{2x+4\sqrt{2(4-x^2)}} \Leftrightarrow (9x^2-32)\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2x+4\sqrt{2(4-x^2)}}\right)\geqslant 0.$$

Ta có $\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{2x+4\sqrt{2(4-x^2)}}>0$ với $\dfrac{\sqrt{304}-4}{9}\leqslant x\leqslant 2$. Nên suy ra

$$\Leftrightarrow 9x^2-32\geqslant 0 \Leftrightarrow x\leqslant -\frac{4\sqrt{2}}{3}\vee x\geqslant \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

So với điều kiện ta có nghiệm bất phương trình là $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\leqslant x\leqslant 2.$

1.294. Điều kiện $x\geqslant 0$.

Với $x=0$, bất phương trình không thoả.

Với $x > 0$ Khi đó bpt trở thành

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x(x+2)} \geqslant \sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{x} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x(x+2)} + \sqrt{x} \geqslant \sqrt{(x+1)^3} \\
&\Leftrightarrow \frac{x(x+1)}{\sqrt{x(x+2)} - \sqrt{x}} \geqslant (x+1)\sqrt{(x+1)} \\
&\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(x+2)} - 1} \geqslant \sqrt{(x+1)} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x} \geqslant \sqrt{(x+1)(x+2)} - \sqrt{(x+1)} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{(x+1)} \geqslant \sqrt{(x+1)(x+2)} \\
&\Leftrightarrow x + (x+1) + 2\sqrt{x(x+1)} \geqslant x^2 + 3x + 2 \\
&\Leftrightarrow (x^2 + x - 1)^2 \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0
\end{aligned}$$

Cách khác. $x \geqslant 0$. Ta có nhận xét là $\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{x} \geqslant 0$, nên ta viết bất phương trình tương đương với:

$$\sqrt{x(x+2)} \geqslant \sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x(x+2)} + \sqrt{x} \geqslant \sqrt{(x+1)^3}$$

Bình phương lên rồi rút gọn ta được

$$x^2(x+2) - 2x\sqrt{x+2} + 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \left(x\sqrt{x+2} - 1\right)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x+2} = 1.$$

Tới đây cơ bản rồi.

1.295. Điều kiện $0 \leqslant x \leqslant 1$. Ta có

$$2\sqrt{x} + (2 + \sqrt{x})\sqrt{1-x} + 1 - x = (2 + \sqrt{1-x})(\sqrt{x} + \sqrt{1-x})$$

và

$$(2x - 1) = (\sqrt{x} + \sqrt{1-x})(\sqrt{x} - \sqrt{1-x}),$$

nên bất phương trình được viết lại thành

$$\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{1-x})(\sqrt{x} - \sqrt{1-x})\sqrt{x+3}}{(2 + \sqrt{1-x})(\sqrt{x} + \sqrt{1-x})} \geqslant 1$$

hay

$$(\sqrt{x} - \sqrt{1-x})\sqrt{x+3} \geqslant 2 + \sqrt{1-x}, \tag{1.79}$$

tương đương

$$\sqrt{x(x+3)} \geqslant 2+\sqrt{(1-x)(x+3)}+\sqrt{1-x}.$$

Nhận thấy rằng hàm

$$f(x)=\sqrt{x(x+3)}$$

đồng biến trên đoạn $[0;1]$ nên giá trị lớn nhất của $f(x)$ là 2 tại $x=1$. Ta có

$$\sqrt{x(x+3)} \leqslant 2 \text{ và } 2+\sqrt{(1-x)(x+3)}+\sqrt{1-x} \geqslant 2.$$

Do đó, (1.79) xảy ra khi và chỉ khi $x=1$.

Vậy bất phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Khi đó, bất phương trình tương đương

$$\frac{(2x-1)\sqrt{x+3}}{(2+\sqrt{1-x})(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})} \geqslant 1$$

hay

$$\frac{\sqrt{x+3}(\sqrt{x}-\sqrt{1-x})}{2+\sqrt{1-x}} \geqslant 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}) \geqslant 2+\sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}.\sqrt{x}-2 \geqslant \sqrt{1-x}(\sqrt{x+3}+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+4)}{\sqrt{x^2+3x}+2} \geqslant \sqrt{1-x}(\sqrt{x+3}+1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}(\sqrt{x+3}+1+\frac{(x+4)\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2+3x}+2} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow x=1$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x=1$.

1.296. Điều kiện $x \neq 0$.

- Nếu $x<0$ suy ra bất phương trình vô nghiệm.

- Nếu $x > 0$. Ta có

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3x^4+4x^2+2} \leqslant x^2 + \frac{2}{x^2}\\
&\Leftrightarrow 3x^4+4x^2+2 \leqslant x^4 + \frac{4}{x^4} + 4\\
&\Leftrightarrow x^4+2x^2-\frac{2}{x^4}-1 \leqslant 0\\
&\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2+1) + \frac{2(x^2-1)(x^4+x^2+1)}{x^4} \leqslant 0\\
&\Leftrightarrow (x^2-1)\left[x^2+1+\frac{2(x^4+x^2+1)}{x^4}\right] \leqslant 0\\
&\Leftrightarrow x^2 \leqslant 1.
\end{aligned}$$

Kết hợp với đk ta có tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S = (0;1]$

1.297. Điều kiện $x \geqslant 2$. Vì cả hai vế của bất phương trình đã cho đều dương nên ta bình phương hai vế của bất phương trình ta được

$$3\sqrt{x(x^2-x-2)} \leqslant 2(x^2-3x-1).$$

Đặt $a = x^2-2x$; $b = x+1$ ta có

$$3\sqrt{ab} \leqslant 2(a-b).$$

Đây là phương trình đẳng cấp theo a, b nên dễ dàng rồi.

Đáp số. $x \geqslant 3+\sqrt{13}$.

1.298. Điều kiện $0 < x < \frac{3}{4}$ Với điều kiện bài toán ta biến đổi được bất phương trình về dạng

$$2x^2 - \sqrt{3-4x}(2x+1) \geqslant 0.$$

Đặt $f(x) = 2x^2 - \sqrt{3-4x}\cdot(2x+1)$, với $0 < x < \frac{3}{4}$. Ta có

$$f'(x) = 4x + \frac{2(2x+1)}{\sqrt{3-4x}} + 2\sqrt{3-4x} > 0.$$

Mà ta nhẩm được $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$, nên nghiệm của bất phương trình là $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x < \frac{3}{4}$.

1.299. Điều kiện: $x \leqslant -5 \vee x > 5$.

- Với $x > 5$:[/I] Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{\sqrt{(x-3)(x-5)}} + \sqrt{(x-3)(x+5)} &> \frac{x^2}{\sqrt{(x-3)(x-5)}} + \sqrt{(x-3)(x-5)} \geqslant 2x \\ &= \sqrt{x \cdot 4x} > \sqrt{(x-3)(4x-6)}.\end{aligned}$$

  Do đó, trong trường hợp này, bất phương trình hiển nhiên thỏa mãn.

- Với $x \leqslant -5$:[/I]Ta có bất phương trình tương đương với

$$x^2 + (3-x)\sqrt{x^2-25} > (3-x)\sqrt{(6-4x)(5-x)}.$$

  Đến đây, ta lại thấy $\sqrt{x^2-25} < \sqrt{x^2} = -x$ và $\sqrt{(6-4x)(5-x)} = \sqrt{(3-2x)(10-2x)} > \sqrt{(3-2x)^2} = 3-2x$. Do đó,

$$(3-x)\sqrt{(6-4x)(5-x)} - x^2 - (3-x)\sqrt{x^2-25} > (3-x)(3-2x) - x^2 + (3-x)x = 3(3-2x) > 0.$$

  Điều này chứng tỏ rằng bất phương trình đã cho không thể thỏa mãn trong trường hợp này.

Vậy ta có kết luận $S = (5, +\infty)$ là tập nghiệm của bất phương trình cần giải.

1.300. Điều kiện : $8 - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2\sqrt{2}$. Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình

$$\sqrt{8-x^2} - 2 - (x^3 - 3x^2 + 4x - 4) \leqslant 0,$$

tương đương

$$\frac{4-x^2}{\sqrt{8-x^2}+2} - (x-2)(x^2-x+2) \leqslant 0$$

hay

$$\frac{(x-2)(x+2)}{\sqrt{8-x^2}+2} + (x-2)(x^2-x+2) \geqslant 0$$

cũng vậy

$$(x-2)\left(\frac{x+2}{\sqrt{8-x^2}+2} + x^2 - x + 2\right) \geqslant 0 \tag{1.80}$$

Với $-2\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2\sqrt{2}$. Ta có

$$\begin{cases} 1-\sqrt{2} \leqslant \dfrac{x+2}{\sqrt{8-x^2}+2} \leqslant 1+\sqrt{2}, \\ \dfrac{7}{4} \leqslant x^2-x+2 \leqslant 10+2\sqrt{2} \end{cases}$$

Suy ra

$$\frac{x+2}{\sqrt{8-x^2}+2}+x^2-x+2>0.$$

Do đó từ (1.80), ta có $x-2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 2$. Đối chiếu điều kiện ta thu được miền nghiệm của bất phương trình là $S=\left[2;\, 2\sqrt{2}\right]$.

1.301. Điều kiện: $x \geqslant 1$ Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}\right)\left(x-3+\sqrt{x^2+2x-3}\right) \geqslant 4\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}\right),$$

hay

$$4\left(x-3+\sqrt{x^2+2x-3}\right) \geqslant 4\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}\right)$$

tương đương

$$x-3+\sqrt{x^2+2x-3} \geqslant \sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}.$$

Đặt $t=\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}$, $(t \geqslant 2)$ Ta có

$$t^2=2x+2+2\sqrt{(x-1)(x+3)} \Leftrightarrow x-3+\sqrt{x^2+2x-3}=\frac{t^2-8}{2}.$$

Thay vào trên ta được

$$\frac{t^2-8}{2} \geqslant t \Leftrightarrow (t-4)(t+2) \geqslant 0 \Leftrightarrow t \geqslant 4$$

Vậy ta cần giải bất phương trình cơ bản sau đây:

$$f(x)=\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1} \geqslant 4$$

Dễ thấy VT là một hàm đồng biến, mà ta nhẩm được $f\left(\dfrac{13}{4}\right)=4$, nên nghiệm của bất phương trình chính là $x \geqslant \dfrac{13}{4}$

1.322. Ta có

$$\sin(\frac{\pi}{4}+3x)-\cos(\frac{3\pi}{4}-3x)+1=\sqrt{2}\cos 3x+1.$$

Mặt khác

$$2\sin^2(2x+\frac{\pi}{4})=1-\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)=1+\sin 4x.$$

Do đó phương trình đã cho được biến đổi thành

$$\begin{aligned}\cos 2x+\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\cos 3x+1\right)=1+\sin 4x &\Leftrightarrow \cos 2x+2\sin x\cos 3x+\sqrt{2}\sin x=1+\sin 4x\\ &\Leftrightarrow \cos 2x+\sin 4x-\sin 2x+\sqrt{2}\sin x=1+\sin 4x\\ &\Leftrightarrow 1-\cos 2x+\sin 2x-\sqrt{2}\sin x=0\\ &\Leftrightarrow 2\sin^2 x+\sin 2x-\sqrt{2}\sin x=0\\ &\Leftrightarrow \sin x\left(2\sin x+2\cos x-\sqrt{2}\right)=0\end{aligned}$$

1.323. Ta chú ý biến đổi sau

$$4\sin x\cdot\sin(x+\frac{\pi}{3})\cdot\sin(x-\frac{\pi}{3})=4\sin^3 x-3\sin x=\sin^3 x-3\sin x\cos^2 x.$$

Từ đó phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{\sin^3 x-3\sin x\cos^2 x}{2\sin x-3\cos x}-(1+\cos 2x)=0\Rightarrow\frac{\sin^3 x-3\sin x\cos^2 x}{2\sin x-3\cos x}-2\cos^2 x=0.$$

Nhân chéo lên và phân tích ta thu được

$$(\sin x-\cos x)(\sin x-2\cos x)(\sin x+3\cos x)=0.$$

1.331. Ta có

$$8\sqrt{2}\cos^6 x+2\sqrt{2}\sin^3 x\sin 3x-6\sqrt{2}\cos^4 x-1=0$$

$$\Leftrightarrow 8\sqrt{2}\cos^6 x+2\sqrt{2}\sin^3 x(3\sin x-4\sin^3 x)-6\sqrt{2}\cos^4 x-1=0$$

$$\Leftrightarrow 8\sqrt{2}(\cos^6 x-\sin^6 x)-6\sqrt{2}(\cos^4 x-\sin^4 x)-1=0$$

$$\Leftrightarrow 8\sqrt{2}(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^4 x+\sin^4 x+\cos^2 x\sin^2 x)-6\sqrt{2}(\cos^2 x-\sin^2 x)-1=0$$

$$\Leftrightarrow 8\sqrt{2}\cos 2x(1-\sin^2 x\cos^2 x)-6\sqrt{2}\cos 2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos 2x-2\sqrt{2}\cos 2x\sin^2 2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos^3 2x-1=0$$

1.335. Đặt

$$u = \sin x + \cos x, \quad v = \sin x - \cos x.$$

Phương trình đã cho thành

$$u(3 - 2v^2) + 4uv = \sqrt{3}(2u^2 - 1) + 2\sqrt{3}.$$

Hay

$$(2uv - \sqrt{3})(\sqrt{3}u + v - 2) = 0$$

Cách khác Phương trình tương đương.

$$\frac{\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})(2\sin 2x + 1) + 4\cos 2x}{\sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})(2\sin 2x + 1) + 2} = \sqrt{3}.$$

Đặt

$$t = x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x = 2t - \frac{\pi}{2}.$$

Phương trình thành

$$\frac{\sqrt{2}\sin t(1 - 2\cos 2t) + 4\sin 2t}{\sqrt{2}\cos t(1 - 2\cos 2t) + 2} = \sqrt{3}$$

1.336*. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sin\frac{x}{x^2+1} = -\sin\frac{1}{x^2+x+2},$$

hay

$$\sin\frac{x}{x^2+1} = \sin\left(\frac{-1}{x^2+x+2}\right).$$

Để ý

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \text{và} \quad -\frac{\pi}{2} < -\frac{4}{7} \leqslant \frac{-1}{x^2+x+2} < 0 < \frac{\pi}{2}.$$

Do hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, nên phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{-1}{x^2+x+2}.$$

Giải phương trình trên, ta được $x = -1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -1$.

1.339. • Tìm toạ độ M dựa vào $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{GM}$;

- Viết phương trình đường thẳng BC qua M và vuông góc với AH;
- Gọi $B(a;b)$. Tìm toạ độ C theo a và B. Để tìm a và b, ta dựa vào các giả thiết là $B \in BC$ và $AB \perp CH$.

1.340. Đáp số. $C(5;1)$ hoặc $C(1;3)$.

1.343. Từ giả thiết dễ thấy rằng $\Delta ANM = \Delta ACN$, nên $AM \perp BN$.

Giả sử $B(2b-6;b)$ thì từ $AI \perp BI$ suy ra

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BI} = 0 \Rightarrow \frac{12}{5}\left(\frac{32}{5} - 2b\right) - \frac{16}{5}\left(\frac{14}{5} - b\right) = 0 \Rightarrow b = 4.$$

Như vậy $B(2;4)$, ta có $\overrightarrow{AB} = (4;-2)$ và $AB = 2\sqrt{5}$. Giả sử $C(x;y)$, từ $AB \perp BC$ và $AB = BC$, ta có hệ

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-4)^2 = 20, \\ 2x - y = 0. \end{cases}$$

1.344. Đáp số. $M(-9;-32)$ hoặc $M\left(\frac{7}{3};2\right)$.

1.345. Giả sử $M(a;b)$ theo giả thiết trọng tâm của tam giác MAB thuộc đường thẳng d nên ta có

$$\frac{a+2+1}{3} + \frac{b-1-2}{3} - 2 = 0 \Leftrightarrow a + b = 6.$$

Ta dễ dàng viết được phương trình của AB là $x - y - 3 = 0$ và tính được $AB = \sqrt{2}$, bởi vậy

$$S_{MAB} = \frac{1}{2}\cdot d_{(M,AB)}\cdot AB = \frac{1}{2}\cdot\frac{|a-b-3|}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2} = \frac{|a-b-3|}{3}.$$

Kết hợp với giả thiết $S_{MAB} = \frac{1}{2}$, ta có $|a-b-3| = 1$.

Ta có hệ

$$\begin{cases} a + b = 6, \\ |a-b-3| = 1. \end{cases}$$

1.346. Đáp số. $A(-1;1)$, $B(-4;5)$, $C(3;4)$.

1.355. Đáp số. $\left(4;-\frac{1}{2}\right)$, $\left(6;-\frac{3}{2}\right)$.

1.356. Đáp số. $A(-3;6)$, $B(1;-2)$, $C(6;3)$.

1.361. Đáp số. $B(2;0)$ và $B(3;-2)$ hoặc $B\left(-\frac{2}{3};-\frac{8}{3}\right)$ và $C\left(\frac{1}{3};-\frac{14}{3}\right)$.

1.362. Đáp số. $B(-3;2)$.

1.363*. Đáp số. $\left(\frac{7}{2};-3\right)$ và $\left(\frac{13}{2};1\right)$.

1.366. Tọa độ của B thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} 4x+3y-16=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$$

Khi đó $A(a;0);B(4;0);\ C\in CB \Rightarrow C\left(c;\frac{16-4c}{3}\right)$ Khi đó ta được

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(4-a;0) \\ \overrightarrow{BC}=\left(c-4;\frac{16-4c}{3}\right) \\ \overrightarrow{AC}=\left(c-a;\frac{16-4c}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB=\sqrt{(4-a)^2} \\ BC=\sqrt{(c-4)^2+\left(\frac{16-4c}{3}\right)^2} \\ AC=\sqrt{(c-a)^2+\left(\frac{16-4c}{3}\right)^2} \end{cases}$$

Vì tam giác ABC vuông tại A và $r=1$ nên ta có

$$\begin{cases} AB\perp AC \\ S=pr=p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \\ \frac{AB.AC}{2}=\frac{AB+AC+BC}{2} \end{cases}$$

Đến đây giải phương trình tìm ABC, từ đó suy ra trọng tâm G

Đáp số. $G\left(2;\frac{4}{3}\right)$ hoặc $G\left(6;-\frac{4}{3}\right)$.

1.367. Hướng dẫn. Gọi $A(4y-6;y)$. Tính $\cos\widehat{ACB}=\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Đáp số. $A(2;2)$, $B(3;-1)$, $C(5;3)$.

1.368.

- Phương trình $BC: x+9y+4=0$.

- Gọi M là điểm thuộc đường thẳng BC thỏa mãn Δ qua M và chia tam giác ABC thành hai phần có tỉ số diện tích bằng 2.
- Do$M \in BC$ nên ta có $M(-9y-4;y)$
- Khi đó theo yêu cầu bài toán ta có $\dfrac{BM}{CM}=2$. Ta có

$$\frac{BM}{CM}=2 \Leftrightarrow 3y^2+8y+4=0 \Leftrightarrow y=-2 \text{ hoặc } y=-\frac{2}{3}.$$

- Tới đây viết được phương trình Δ.

1.371. Không khó để viết được phương trình $AK: x-y+1=0$. Và đây cũng chính là đường phân giác trong góc A của tam giác ABC. Gọi E là giao điểm của đường phân giác trong AK với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm $I(6;6)$ và bán kính $R=IA=5$. Tọa độ điểm E là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x-6)^2+(y-6)^2=25,\\ x-y+1=0.\end{cases}$$

Suy ra điểm $E(9;10)$. Mặt khác ta có $EB=EC=EK$. Thật vậy,

$$\angle DCK=\angle DCB+\angle BCK=\angle BA\mathrm{D}+\angle KCA$$

$$\Rightarrow(\angle BA\mathrm{D}+\angle KCA)+\angle AKC=180^\circ \Rightarrow \angle CK\mathrm{D}+\angle AKC=180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BA\mathrm{D}+\angle KCA=\angle CK\mathrm{D}$$

Từ đó ta được $\angle DKC=\angle DCK$ hay ΔDKC cân, kết suy ra $EK=EC=EB$, nên B, C thuộc đường tròn tâm E bán kính là DK. Do đó tọa độ điểm B, C là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}(x-6)^2+(y-6)^2=25,\\ (x-9)^2+(y-10)^2=50.\end{cases}$$

Tới đây là bài toán xem như giải quyết xong rồi!

1.372. Ta gọi tọa độ điểm $B(b;12-2b)$. khi đó ta sẽ có

$$\overrightarrow{MB}=(b-5;11-2b);\quad \overrightarrow{NB}=(b-9;9-2b).$$

hay

$$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{NB}=0\Leftrightarrow(b-5)(b-9)+(11-2b)(9-2b)=0$$

Khi đó ta có $B(6;0)$. Từ đó ta viết được phương trình đường thẳng AB và BClần lượt là $x+y-6=0;x-y-6=0$.

1.373. Gọi tọa độ điểm $B(a;5a-2)$, $C\left(b;\dfrac{10-b}{3}\right)$. Gọi M là trung điểm của AB thì tọa độ $M\left(\dfrac{a+b}{2};\dfrac{15a-b+4}{6}\right)$.

Vì điểm M thuộc trung tuyến qua A, nên thay tọa độ trên và rút gọn ta được $b=3a-1$. Thay vào trên ta có $C(3a-2;4-a)$.

Ta có $\overrightarrow{BC}=(2a-2;6-6a)$. Ta dễ dàng tìm được

$$S_{ABC}=3S_{GBC}=24\Rightarrow S_{\Delta GBC}=8.$$

Phương trình đường thẳng BC là

$$(x-a)(6a-6)+(y-5a+2)(2a-2)=0.$$

Từ đây suy ra $a\neq 1$, và ta rút gọn lại thành

$$6(x-a)+2(y-5a+2)=0.$$

Thay vào công thức diện tích là

$$S_{GBC}=8\Leftrightarrow\frac{1}{2}d(G,BC)\cdot BC=8.$$

thì ta dễ dàng suy ra

$$|a-1|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0,\\ a=2.\end{array}\right.$$

- Với $a=0$, suy ra tọa độ các điểm là: $A(5;7)$, $B(0;-2)$, $C(-2;4)$.
- Với $a=2$, suy ra tọa độ các điểm là: $A(-3;-1)$, $B(2;8)$, $C(4;2)$.

1.374. Kẻ đường cao CH của tam giác ABC. Do $\tan A=-\dfrac{1}{2}$, nên A là góc tù. Do đó, H nằm ngoài đoạn AB. Ta có

$$-\frac{1}{2}=\tan\widehat{BAC}=-\tan\widehat{CAH}=-\frac{CH}{AH}.$$

Suy ra $\dfrac{CH}{AH} = \dfrac{1}{2}$.

Lại có

$$\frac{1}{3} = \tan\widehat{CBH} = \frac{CH}{BH}.$$

Do đó $\dfrac{BH}{AH} = \dfrac{3}{2}$. Từ hệ thức này, ta tìm được toạ độ điểm $H(-3;-2)$. Mặt khác

$$CH = AH\cdot\tan A = 4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} = 2\sqrt{2}.$$

Phương trình đường thẳng AB là $x - y + 1 = 0$.

Phương trình đường thẳng Δ qua H và vuông góc với AB là $x+y+5 = 0$.

Gọi $C(x;y)$. Từ các điều kiện C thuộc đường thẳng Δ và $CH = 2\sqrt{2}$, ta có hệ

$$\begin{cases} x + y + 5 = 0, \\ x^2 + y^2 + 6x + 4y + 5 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ trên, ta tìm được toạ độ điểm C là $C(-1;-4)$ hoặc $C(-5;0)$.

Dựa và giả thiết hai điểm C và O ở về cùng một phía của đường thẳng AB, ta chỉ nhận $C(-1;-4)$.

1.377. Ta gọi vectơ pháp tuyến của đường thẳng MD là $\vec{n} = (a;b)$, $(a^2 + b^2 > 0)$.

Phương trình đường thẳng MNđi qua $A(2;3)$ và có vecto pháp tuyến $(b;-a)$ có dạng

$$bx - ay - 2b + 3a = 0.$$

Khoảng cách từ Ctới MN là

$$d(C;MN) = \frac{|8b - 6a - 2b + 3a|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{6b-3a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Diện tích hình vuông $MNPQ$ là

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}\frac{(6b-3a)^2}{a^2+b^2}.$$

Khi đó bài toán trở về đại số: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$S(a;b) = \frac{1}{2}\frac{(6b-3a)^2}{a^2+b^2}.$$

- Xét $b=0$ khi đó $S_{MNPQ}=9$.
- Với $b\neq 0$, ta có
$$S=\frac{\left(6-3\frac{a}{b}\right)^2}{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1}.$$
Xét hàm số
$$f(t)=\frac{(6-3t)^2}{t^2+1}=45-\frac{9(2t+1)^2}{t^2+1}.$$
Do đó ta có thể thấy được $\max S_{MNPQ}=45$, đạt được khi $t=\frac{-1}{2}\Rightarrow b=-2a$.

Từ đó các bạn có thể giải quyết bài toán.

1.378. Gọi I là tâm đường tròn đường kính AB. Ta có $AB=10\sqrt{5}$. Giả sử Δ song song với AB và cắt đường tròn tại C, D và hình chiếu của chúng lên đường thẳng AB lần lượt là F và E.

Phương trình đường thẳng AB là $x+2y+5=0$.

Phương trình đường thẳng CD có dạng $x+2y+m=0$, $m\neq 5$.

Ta có
$$ID^2=IE^2+ED^2=\frac{5}{4}ED^2.$$
Từ đây, ta tìm được $ED=10$. Do đó, khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng 10 hay khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng CD bằng 10. Do đó
$$\frac{-11+6+m}{\sqrt{5}}=10\Leftrightarrow m=5\pm 10\sqrt{5}.$$
Đáp số. $x+2y+5+10\sqrt{5}=0$ hoặc $x+2y+5-10\sqrt{5}=0$.

1.379. Gọi $\vec{n}=(a;b)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng AD. Phương trình đường thẳng AD có dạng
$$a(x+3)+b(y-3)=0.$$
Để tìm a và b, ta chú ý là khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và BC.

Đáp số. $BC: 11x-2y+19=0$, $AD: 11x-2y+39=0$ hoặc $BC: x+2y-7=0$, $AD: x+2y-3=0$.

1.380. Gọi $A(x;y)$. Vì điểm A thuộc đường thẳng $(d): 3x+y-2=0$, nên $A(x;2-3x)$.

Chú ý, khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng DM gấp hai lần khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng DM. Từ đó, tìm được toạ độ điểm A.

Đáp số. $A(-1;5)$, $B(-3;-1)$, $D(5;3)$.

1.381. Đáp số. $A(1;5)$, $B(-3;1)$, $C(1;-3)$, $D(5;1)$.

1.382*. Gọi I' là điểm đối xứng với I qua đường phân giác trong AD. Dễ thấy I' thuộc đường cao AH. Do $I(6,6)$ nên tìm được I' có tọa độ là $I'(5,7)$.

Dễ thấy BC sẽ nhận $\overrightarrow{AI'}=(3,4)$ là một vectơ pháp tuyến nên nó có phương trình $3x+4y+c=0$. Từ giả thiết

$$S_{ABC}=3S_{IBC}\Rightarrow AH=3IK\Rightarrow |c+18|=3|c+42|$$

Giải ra được $c=-54$, $c=36$ và viết được phương trình của BC.

1.383. Từ điều kiện $\sin\widehat{BAC}=\dfrac{4}{5}$. Áp dụng định lý hàm sin trong ΔABC ta có

$$\frac{BC}{\sin\widehat{BAC}}=2R\Leftrightarrow BC=\frac{4}{5}\cdot 2\cdot 5=8.$$

Gọi K là trung điểm của BC, thì $BK=CK=4$. Trong tam giác vuông IKC ta có

$$IK^2=IC^2-CK^2=25-16=9\Rightarrow IK=3.$$

Gọi D là điểm đối xứng của A qua I. Khi đó, ta sẽ chứng minh được tứ giác $BHCD$ là hình bình hành. Suy ra K là trung điểm của HD.

Xét trong tam giác ADH ta có KH là đường trung bình nên suy ra $2HK=AH\Rightarrow AH=6$.

Xét điểm $A(x;y)$, $(x<0)$. Từ

$$AH=6\Leftrightarrow AH^2=36\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+1)^2=36.$$

Vậy tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y+1)^2=36,\\(x-2)^2+(y-1)^2=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1,\\y=5.\end{cases}$$

Như vậy, $A(-1;5)$. Từ đó ta tính được $D(5;-3)$, $K(2;-2)$. Do BC đi qua K và có vecto pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b)$. Phương trình đường thẳng BC có dạng

$$BC: a(x-2)+b(y+2)=0 \Leftrightarrow ax+by-2a+2b=0 \quad (a^2+b^2\neq 0).$$

Mà $IK = d(I,BC)$, nên

$$3=\frac{|2a+b-2a+3b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow a=0.$$

Với $a=0$, chọn $b=1$, ta thu được phương trình $BC: y+2=0$.

Toạ độ hai điểm B, C là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y+2=0, \\ (x-2)^2+(y-1)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2, \\ (x-2)^2=16. \end{cases}$$

Từ đó ta suy ra được tọa độ hai điểm B, C là hoán vị của hai cặp tọa độ $(6;-2)$, $(-2;-2)$.

1.384. • Đường tròn $(\mathscr{C})$ ngoại tiếp tam giác ABC có tâm I, bán kính là $IA=\sqrt{8}$, nên có phương trình

$$(x-4)^2+(y-5)^2=8.$$

• Gọi D là giao điểm của đường thẳng AJ với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta chứng minh $DB=DJ=DC$. Thật vậy, ta có

$$\widehat{DBJ}=\widehat{DBC}+\widehat{CBJ}=\widehat{DAC}+\widehat{CBJ}.$$

Mà

$$\widehat{DAC}=\widehat{DAB}, \quad \widehat{CBJ}=\widehat{ABJ},$$

nên

$$\widehat{DBJ}=\widehat{DAB}+\widehat{ABJ}=180^\circ-\widehat{AJB}=\widehat{BJD}.$$

Do đó, tam giác DBJ cân tại D.

Chứng minh tương tự, ta cũng có tam giác DCJ cân tại D. Từ đó, ta có $DB=DC=DJ$. Như vậy B, C thuộc đường tròn $(\mathscr{C}')$ tâm D, bán kính DJ.

Các điểm B và C thuộc hai đường tròn $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{C}')$ nên toạ độ là nghiệm của hệ phương trình

1.385. Để ý M ở trong $(\mathscr{C})$. Gọi H là trung điểm đoạn AB. Nếu $MA = 3MB$, thì M là trung điểm HB.

Gọi I là tâm đường tròn. Đặt $IH = x$. Ta có

$$HB^2 = IB^2 - x^2, \quad HM^2 = IM^2 - x^2.$$

Do $HB = 2HM$, nên ta có phương trình

$$IB^2 - x^2 = 4(IM^2 - x^2).$$

Giải phương trình trên ta tìm được x. Bài toán trở thành viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và cách I một đoạn bằng x.

Đáp số. $2x - y - 3 = 0, \quad x + 2y + 1 = 0.$

1.386. Đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $I(1;2)$, bán kính $R = \sqrt{5}$. Ta có

$$AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA})^2 = MB^2 + MA^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}.$$

Mà

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - R^2 = 20.$$

Suy ra $AB^2 = 10$. Ta có

$$IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Δ là đường thẳng đi qua M và cách I một đoạn bằng $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Đáp số. $x + 3y - 12 = 0$ và $x - 3y = 0$.

1.387.
- Để ý điểm A ở trong $(\mathscr{C})$, nên mọi đường thẳng đi qua A luôn cắt $(\mathscr{C})$ tại hai điểm phân biệt.
- Đáp số. $x + \sqrt{3}y - 1 - 3\sqrt{3} = 0$.

1.388. Đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R = \sqrt{3}$.

Gọi R_1 là bán kính của đường tròn $(\mathscr{C}')$. Phương trình $(\mathscr{C}')$ có dạng

$$(x-5)^2 + (y-1)^2 = R_1^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - 2y + 26 - R_1^2 = 0.$$

Vì $(\mathscr{C})$ và $(\mathscr{C}')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B, nên lấy phương trình của $(\mathscr{C})$ trừ phương trình của $(\mathscr{C}')$, ta được phương trình của đường thẳng AB là $8x+6y+R_1^2-24=0$.

Ta có $IA=IB=AB=\sqrt{3}$, nên tam giác IAB là tam giác đều, do đó chiều cao kẻ từ I của tam giác IAB bằng $\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2}$. Nói cách khác, khoảng cách từ I đến đường thẳng AB bằng $\dfrac{3}{2}$, hay

$$\frac{|8\cdot 1+6\cdot(-2)+R_1^2-24|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}R_1^2=43,\\ R_1^2=13.\end{array}\right.$$

Vậy phương trình các đường tròn cần tìm là

$$(x-5)^2+(y-1)^2=43,\quad (x-5)^2+(y-1)^2=13.$$

1.389. $(\mathscr{C})$ có tâm $O(0;0)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$. Gọi R_1 là bán kính của $(\mathscr{C}')$, phương trình của $(\mathscr{C}')$ có dạng

$$(x-2)^2+(y-2)^2=R_1^2\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-4y+8-R_1^2=0.$$

Phương trình của đường thẳng AB là $4x+4y-9+R_1^2=0$. Tam giác OAB có $OA=OB=1$ và $AB=\sqrt{2}$, nên là tam giác vuông cân tại O. Gọi H là trung điểm đoạn AB, ta có $OH=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Suy ra

$$\frac{|R_1^2-9|}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}R_1^2=13,\\ R_1^2=5.\end{array}\right.$$

- Các phương trình của $(\mathscr{C}')$ là

$$(x-2)^2+(y-2)^2=13 \text{ và } (x-2)^2+(y-2)^2=5.$$

- Các phương trình đường thẳng AB là $x+y+1=0$ và $x+y-1=0$.

1.390.
- $(\mathscr{C})$ có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=\sqrt{5}$; $(\mathscr{C}')$ có tâm $I'(-1;-3)$, bán kính $R'=3$.
- Nếu Δ cắt cắt $(\mathscr{C}')$ tại hai điểm A, B sao cho $AB=4$, thì khoảng cách từ I' đến Δ bằng $\sqrt{5}$.

- Đường thẳng Δ cần tìm cách đều hai điểm I và I', nên xảy ra hai trường hợp:

  – Trường hợp 1. Δ song song với đường thẳng II' và cách đường thẳng II' một đoạn bằng $\sqrt{5}$.

  – Trường hợp 2. Δ đi qua trung điểm T của đoạn II' và tiếp xúc với đường tròn $(\mathscr{C})$. Chú ý là trường hợp này không xảy ra vì T ở trong đường tròn

Đáp số. $x-2y=0$, $x-2y-10=0$.

Chú ý. Nếu khoảng cách từ I đến Δ không bằng khoảng cách từ I' đến Δ, có thể làm như sau:

- Gọi phương trình Δ có dạng $ax+by+c=0$. Dựa vào

$$d(I;\Delta)=d(I;\Delta')\Leftrightarrow\frac{|ax_I+by_I+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|ax_{I'}+by_{I'}+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

  hay

$$|ax_I+by_I+c|=|ax_{I'}+by_{I'}+c|.$$

  – **Trường hợp 1**

$$ax_I+by_I+c=ax_{I'}+by_{I'}+c\Leftrightarrow ax_I+by_I=ax_{I'}+by_{I'}.$$

  Từ phương trình này, ta có mối liên hệ giữa a và b. Thực hiện phép chọn, ta có a và b. Để tìm c, ta giải phương trình

$$d(I;\Delta)=R.$$

  – **Trường hợp 2**

$$ax_I+by_I+c=-(ax_{I'}+by_{I'}+c).$$

  Từ phương trình này, ta biểu diễn c theo a và b. Thế vào phương trình $ax+by+c=0$ rồi giải phương trình

$$d(I;\Delta)=R.$$

1.391. Đáp số. $m = 1$.

Để ý d luôn đi qua điểm cố định $M(2;1)$ và M ở trong $(\mathscr{C})$. Gọi H là trung điểm đoạn AB. Ta có

$$AB = 2AH = 2\sqrt{R^2 - IH^2}.$$

Do đó, AB nhỏ nhất khi và chỉ khi IH lớn nhất. Mà $IH \leqslant IM$, nên IH lớn nhất khi và chỉ khi H trùng M. Khi đó, d đi qua M và vuông góc với IM.

1.392. Đáp số. $B\left(\dfrac{7+\sqrt{3}}{2};\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(\dfrac{7-\sqrt{3}}{2};\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$.

1.394. Đáp số. $M(2;0)$.

1.395. Đáp số. $(x+1)^2 + (y-3)^2 = \dfrac{5}{4}$.

1.399. Đáp số. $(x-2)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$.

1.400. Tâm của đường tròn (C') là giao điểm của hai đường thẳng IA và đường trung trực của đoạn AB.

Đáp số. $(x+3)^2 + (y-6)^2 = 50$.

1.403.

- Đường tròn có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R = 3$.

- Do $M \in (d)$ nên tọa độ $M(t;t+1)$. Để từ M có thẻ kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) thì

$$IM > R \Leftrightarrow 2t^2 + 4t + 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t > \dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \\ t < -\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

- Phương trình đi qua hai tiếp điểm A, B có dạng

$$(t-1)(x-1) + (t+3)(y+2) - 9 = 0.$$

- Ta có
$$d[N,AB]=\frac{5\sqrt{2}|t+2|}{\sqrt{t^2+2t+5}}=f(t).$$

- Khảo sát hàm $f(t)$này với điều kiện của t ở trên, ta tìm được giá trị nhỏ nhất là $\frac{\sqrt{5}}{2}$ khi $t=3$.

1.406. Giả sử $B(x;y)$ thì do $M(0,2)$ là trung điểm của BC nên $C(-x,4-y)$. Dễ thấy B, C đều thuộc (C)nên ta có hệ

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=10,\\(x+1)^2+(y-3)^2=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=10\\(x+1)^2+(y-3)^2=10\end{cases}$$

Giải hệ trên, ta được hai nghiệm $(2;4)$ và $(-2;0)$.

Xét $B(2,4)$ thì $C(-2,0)$ lúc đó phương trình đường thẳng chứa BC là $x-y+2=0$. Ta tính được $BC=4\sqrt{2}$.

Giả sử $A(a;b)$ thì khi đó

$$12=S_{ABC}=\frac{1}{2}.BC.d_{(A,BC)}=2|a-b+2|\Rightarrow|a-b+2|=6.$$

Từ đó ta có hệ
$$\begin{cases}(a-1)^2+(b-1)^2=10,\\|a-b+2|=6.\end{cases}$$

1.408. Đứng trước bài toán này đầu tiên ta chắc chắn ta sẽ đi tìm tọa độ điểm A. Thật vậy tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2+y^2=13,\\(x-6)^2+y^2=25,\\y<0.\end{cases}$$

Đến đây không khó để các bạn chỉ ra rằng $A(2;-3)$. Công việc còn lại có lẽ cũng là phần khó nhất là viết phương trình đường thẳng, với tọa độ điểm A như trên thì phương trình này sẽ có dạng:

$$a(x-2)+b(y+3)=0\Leftrightarrow ax+by-2a+3b=0.$$

Đến đây nếu ta đi giải hệ phương trình để tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng trên với hai đường tròn rồi lại tính độ dài hai dây cung thì sẽ rất mất thời gian và cồng kềnh, vậy ta phải giải quyết thế nào? Một kinh nghiệm nhỏ của mình để giải quyết những bài thế này là vẽ hình ra rồi dựa vào hình vẽ để giải quyết tiếp! Ở bài toán này nếu vẽ hình ra thì các bạn có thể thấy ngay rằng:

$$R_1^2 - d^2(O_1,\Delta) = R_2^2 - d^2(O_2,\Delta).$$

Với R_1, R_2, O_1, O_2 lần lượt là bán kính, tâm của hai đường tròn (C) và (C'), Δ là phương trình đường thẳng cần tìm.

Rõ ràng với đẳng thức trên thì việc tính toán là khá nhẹ nhàng, ta có

$$d(O_1,\Delta) = \frac{|-2a+3b|}{\sqrt{a^2+b^2}},\ d(O_2,\Delta) = \frac{|4a+3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Thay số vào ta thu được phương trình

Với $b=0$ ta thu được phương trình $x-2=0$. Tuy nhiên, đây chính là phương trình đường thẳng AB (B là giao điểm thứ hai của hai đường tròn). Vậy trường hợp này ta loại!

Với $3a=b$ ta có thể lấy $a=1$, $b=3$ thì thu được phương trình $x+3y+7=0$ và đây chính là phương trình cần tìm!

1.409. Đáp số. $B(4;1)$, $B(0;-3)$, hoặc $B(-2;1)$, $C(0;3)$.

1.410. Đáp số. $x-y-1=0$.

1.411. Đáp số. $(x-2)^2+(y-4)^2=64$.

1.420. Đáp số. $B(4;-1)$ và $C(-4;-5)$.

1.425. Gọi toạ độ điểm $A(a;b)$. Từ điều kiện bài toán ta suy ra toạ độ hai điểm

$$M\left(\frac{a-1}{2};\frac{b+1}{2}\right),\quad N\left(\frac{2+2a}{3};\frac{2b-2}{3}\right).$$

Ta viết được phương trình đường tròn tâm I qua B, C là

$$(x-2)^2+(y-1)^2=9.$$

Vì M, N thuộc đường tròn nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}(a-5)^2+(b-1)^2=36,\\(2a-4)^2+(2b-5)^2=81,\end{cases}$$

Đặt

$$a-5=6u,\quad b-1=6v,$$

thay vào hệ ta sẽ thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}u^2+v^2=1,\\36(2u+1)^2+9(4y-1)^2=81.\end{cases}$$

Hay

$$\begin{cases}u^2+v^2=1,\\4u-2v+3=0.\end{cases}$$

Đáp số. $A\left(\dfrac{7-3\sqrt{11}}{5};\dfrac{14-6\sqrt{11}}{5}\right)$ hoặc $A\left(\dfrac{7+3\sqrt{11}}{5};\dfrac{14+6\sqrt{11}}{5}\right)$.

1.427. Đáp số. $M(4;3)$ và $M(5;0)$.

1.429. Toạ độ A là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2+y^2-8x+6y+23=0,\\x+y-1=0.\end{cases}$$

Đáp số. $A(5;-4)$ và $C(3;-2)$ hoặc ngược lại.

1.430.

- Tam giác IAB vuông tại I.
- Tam giác MAB vuông tại M.
- Vậy suy ra $MAIB$ là hình vuông. Do đó, đường tròn ngoại tiếp AMB có bán kính $R'=\dfrac{10}{2}$.
- Do $M\in\Delta$, nên $M(1+2t;-7+5t)$ và $MI=AB=\sqrt{10}$ từ đó tìm được M.

1.434. Một ý tưởng có vẻ là tự nhiên hơn chút xíu: Nếu ta gọi $M = (a;b)$ và $N = (c;d)$ thì ta có bốn ẩn số cần phải tìm ra.

Giờ nếu ta mà lập được bốn phương trình thì tức là ta sẽ giải được. Vậy thì ta lần lượt xét:

$$M \in (C_1) \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-2)^2 = 9,$$

$$N \in (C_2) \Leftrightarrow (c+1)^2 + d^2 = 16,$$

(d) là đường trung trực nên nó cho ta

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{n_d} = 0, \\ I \in (d) \end{cases}$$

với I là trung điểm MN. vì thế, mà ta thu được hệ phương trình sau

$$\begin{cases} (a-1)^2 + (b-2)^2 = 9, \\ (c+1)^2 + d^2 = 16, \\ 2(a-c) + 4(b-d) = 0, \\ (a+c) + 2(b+d) - 15 = 0. \end{cases}$$

Hệ này chỉ là hệ bậc hai, nên ta có thể giải triệt để nó được, bằng cách, từ hai phương trình cuối, ta sẽ rút các ẩn để thế vào hai phương trình bên trên và cuối cùng ta thu được một hệ bậc hai có hai ẩn.

1.435. Để bắt đầu bài này mình chứng minh một kết quả sau $\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$ với G, H, I lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

Thật vậy gọi M, N, P lần lượt là trung điểm CB, AC, AB. Xét phép vị tự T tâm G, tỉ số $k = -\frac{1}{2}$. Khi đó ảnh của các điểm A, B, C qua phép vị tự T lần lượt là M, N, P. Như vậy, qua phép vị tự T biết tam giác ABC thành MNP. Dễ chứng minh I là trực tâm MNP, nên T biến H thành I, do đó $\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$

Dễ dàng viết được phương trình AH là $2x - y + 6 = 0$.

$A \in AH \Rightarrow A$ có tọa độ $(a; 2a+6)$

$I \in x - y - 3 = 0 \Rightarrow I$ có tọa độ $(b; b-3)$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng 5, nên

$$IA = 5 \Rightarrow (a-b)^2 + (2a-b+9)^2 = 25 \tag{1.81}$$

Mặt khác

$$\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G - b = \dfrac{-1}{2}(x_G - 2) \\ y_G - (b-3) = \dfrac{-1}{2}(y_G - 10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{2(b+1)}{3} \\ y_G = \dfrac{2(b+2)}{3} \end{cases}$$

Ta lại có

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - a = \dfrac{3}{2}\left[\dfrac{2(b+1)}{3} - a\right] \\ y_M - (2a+6) = \dfrac{3}{2}\left[\dfrac{2(b+2)}{3} - 2a - 6\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = b - \dfrac{a}{2} + 1 \\ y_M = b - a - 1 \end{cases}$$

và

$$M \in x + 2y - 7 = 0 \Rightarrow b - \frac{a}{2} + 1 + 2(b-a-1) - 7 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{5a}{6} + \frac{8}{3}.$$

Thế vào (1.81), ta được

$$\frac{25a^2}{18} + \frac{125a}{9} + \frac{200}{9} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -2 \\ a = -8 \end{array}\right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} I(1;-2) \\ I(-4;-7) \end{array}\right.$$

Vậy $\left[\begin{array}{l} (C)(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25 \\ (C)(x+4)^2 + (y+7)^2 = 25 \end{array}\right.$

Cách khác. Ta chứng minh điểm đối xứng của H qua đường thẳng BC là H' nằm trên đường tròn (C); Tìm tâm I bằng hệ thức $IH' = 5$.

1.436. Gọi D là điểm đối xứng của A qua đường thẳng BC, ta có $H(1;4)$ và H thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đường tròn cần tìm qua ba điểm B, C và D.

Đáp số. $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 5$.

1.438. Đáp số. $x = 1 + 5t,\ y = 2t - 1,\ z = -1 - t$.

1.445. Để ý A và B ở về hai phía của mặt phẳng (P) và $AB = 4\sqrt{14}$. Vậy nếu M là một điểm trên (P) sao cho $MA + MB = 4\sqrt{14}$, thì M là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (P). Ta viết được phương trình đường thẳng AB là

$$\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = -2 - 3t, \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

Suy ra tọa độ điểm $M(-3;7;0)$.

Gọi giao điểm của Δ và d là N, có tọa độ là $N(2t;-1-t;1+2t)$. Khi đó ta có vector chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{u}_\Delta = \overrightarrow{MN} = (2t+3;-t-8;2t+1)$. Theo đề bài ta có

$$\cos\varphi = \frac{2\sqrt{10}}{9} \Leftrightarrow \frac{|4t+6+t+8+4t+2|}{\sqrt{(2t+3)^2+(t+8)^2+(2t+1)^2}.3} = \frac{2\sqrt{10}}{9}.$$

Tới đây ta tinh được $t = \dfrac{4}{9}$ và $t = -4$.

1.455. Đáp số. $C(-1;3;0)$ và $B\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{4}{3}\right)$.

1.457.

- Vì (d) song song với (P) và cách (P) một đoạn bằng $\sqrt{3}$, nên (d) nằm trong các mặt phẳng (R) song song và cách (P) một đoạn bằng $\sqrt{3}$.
- Tương tự, (d) song song với (Q) và cách (Q) một đoạn bằng $\sqrt{3}$, nên (d) nằm trong các mặt phẳng (S) song song và cách (Q) một đoạn bằng $\sqrt{3}$.
- Các đường thẳng cần tìm là giao tuyến của (R) và (S).

1.458. Đáp số. $(\Delta): \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+1}{2}$.

1.461. Đáp số. $M(1;1;2)$ và $M(3;5;0)$.

1.468. Gọi M' là giao điểm của d và Δ, suy ra M' có tọa độ $(2-t;1-2t;1+t)$. Ta có $\overrightarrow{MM'} = (3-t;2-2t;3+t)$.

Gọi O là tâm của mặt cầu. Ta suy ra tọa độ điểm O là $(-1;2;1)$. Từ đây, ta có thể viết được phương trình mặt phẳng chứa O và nhận$\overrightarrow{MM'}$ là vector pháp tuyến

$$(P):(3-t)(x+1)+(2-2t)(y-2)+(3+t)(z-1)=0.$$

A; B là hai giao điểm của Δ với mặt cầu, nếu gọi I là trung điểm của AB thì ta có OI vuông góc với AB và $OI=3$. Ta lại có $OM=3\sqrt{2}$. Từ đây, ta thu được $IM=3$. Tức là $d(M;(P))=3$.

$$\frac{|3t-15|}{\sqrt{6t^2-8t+22}}=3 \Leftrightarrow |t-5|=\sqrt{6t^2-8t+22}.$$

Giải phương trình ta tìm được $t=\dfrac{3}{5}$ hoặc $t=-1$. Tới đây, bài toán đã trở thành: Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm M và M'.

1.471. Vì mặt cầu $(\mathscr{S})$ tiếp xúc với đường thẳng Δ tại N, nên

$$IN^2=R^2=25 \Rightarrow IM^2=IN^2+MN^2=36 \Rightarrow IM=6.$$

Ta có $d[I,(P)]=6$ mà M thuộc mặt phẳng (P), suy ra M là hình chiếu vuông góc của I lên (P).

M thuộc đường thẳng (d) đi qua $I(5;1;3)$ và vuông góc với (P), nên $M(5+t;1+2t;3+2t)$. Vì M, thuộc (P), nên

$$5+t+2+4t+6+4t=0 \Rightarrow t=-2.$$

Vậy $M(3;-3;-1)$.

1.474. Để ý bán kính của đường tròn giao tuyến của (S) và (P) bằng $3\sqrt{3}$. Từ đó ta thấy AB chính là đường kính của hình tròn nên sẽ đi qua hình chiếu của I lên mặt phẳng (P). Ta tìm được hình chiếu của Ilên mặt phẳng (P) là $H(2;2;3)$. Phương trình đường thẳng (Δ) chính là đường thẳng MH, và ta viết được là

$$\begin{cases} x=2+3t, \\ y=2-2t, \\ z=3+2t. \end{cases}$$

1.475. Đáp số. $(x+1)^2+y^2+(z-1)^2-8=0$ và $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-1)^2-8=0$.

1.479. Đáp số. $V_{S.ABCD}=\sqrt{3}a^3$, $d(BC,SA)=\dfrac{2\sqrt{21}a}{7}$.

1.491. Đáp số. $V_{S.ABCD}=\dfrac{15a^3}{2}$, $d(SA;BC)=\dfrac{6a\sqrt{2}}{5}$.

1.492. Đáp số. $V=\dfrac{a^3}{4}$, $\cos(SM,DN)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

1.495. Đáp số. $\cos(AB_1,BC_1)=\dfrac{1}{4}$ và $d(AB_1,BC_1)=\sqrt{5}$.

1.498. Đáp số. $\dfrac{a\sqrt{17}}{7}$.

1.503. Ta đưa tích phân cần tính về dạng

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2x+1-\cos 2x}{2(1+\sin 2x)}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2x+1}{2(1+\sin 2x)}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{2(1+\sin 2x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}I_1-I_2.$$

1.512. Ta có

$$I=\int_1^{\mathrm{e}}\sin 2x\,\mathrm{d}x+\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x+1}{1+x\ln x}\,\mathrm{d}x.$$

1.520.

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^2\cos x}{\cos x(x\sin x+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)^2}\,\mathrm{d}(x\sin x+\cos x)=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos x}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x\sin x+\cos x}\right)\\&=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

1.521. Ý tưởng cho bài này: Biến đổi tích phân thành

$$\int_3^5\frac{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}}{(x+1)\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=\int_3^5\sqrt{\frac{x-3}{x+1}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x+1}+\int_3^5\frac{\mathrm{d}x}{x+1}.$$

Tích phân sau dễ dàng tích được, tích phân đầu đặt $u=\sqrt{\dfrac{x-3}{x+1}}$ sẽ thấy điều kỳ diệu.

1.541.

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^2 x + x\sin x}{(x\sin x + \sin^2 x)^2} - \frac{x(x\cos x + \sin x + 2\sin x\cos x)}{(x\sin x + \sin^2 x)^2} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{x\sin x + \sin^2 x} \right) \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x\sin x + \sin^2 x} \right) \\
&= \left. \frac{x}{x\sin x + \sin^2 x} \right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

1.545. Ta có

$$P = \frac{(1+xy)^2 - 2(1+xy) - 2xy + 5}{xy - 2} \qquad \text{với} \quad xy \neq 2.$$

Do đó

$$P = xy + \frac{4}{xy - 2}.$$

Đặt $t = xy$. Từ giả thiết ta có

$$xy + 1 = x^2 + y^2 \geqslant 2xy \Leftrightarrow xy \leqslant 1.$$

Ta cũng có

$$xy + 1 = x^2 + y^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow xy \geqslant -1.$$

Suy ra $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

1.546. Thêm một lời giải nữa. Vì mình thấy khá đơn giản nên nghi ngờ tính chính xác của nó: Ta sẽ cố định biến c, bài toán chuyên về tìm GTLN của

$$g(a,b) = a^3 + b^3.$$

Với $a + b = 6 - 2c$, ta có

$$g(a,b) = a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = -(6-2c)ab + (6-2c)^3 = h(ab).$$

Dễ thấy $h(ab)$ là một hàm bậc nhất với biến ab. Từ điều kiện ta có $ab \geqslant 1$.Và ta cũng có

$$ab \leqslant \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(6-2c)^2}{4}.$$

Suy ra

$$1 \leqslant ab \leqslant \frac{(6-2c)^2}{4}.$$

Ta lại có$(6-2c)>0$, do đó $h(ab)$ là hàm nghịch biến. Suy ra

$$h(ab)\leqslant h(1)=-(6-2c)+(6-2c)^3.$$

Nhưng tới đây ta để ý là $a\geqslant 1$ và $b\geqslant 1$ mà biểu thức đạt GTLN nhất tại $ab=1\Rightarrow a=b=1$. Từ đó suy ra $c=2$. Và ta có

$$a^3+b^3+5c^3=h(ab)+5c^3\leqslant -(6-2c)+(6-2c)^3+5c^3=42.$$

Ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=1$; $c=2$.

1.547. Ta chuẩn hóa $a+b+c=1$ Bài toán đưa về chứng minh:

$$\frac{4a^2-4a+1}{2a^2-2a+1}+\frac{4b^2-4b+1}{2b^2-2b+1}+\frac{4c^2-4c+1}{2c^2-2c+1}\geqslant\frac{3}{5}.$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2a^2-2a+1}+\frac{1}{2b^2-2b+1}+\frac{1}{2c^2-2c+1}\leqslant\frac{27}{5}.$$

Đến đây lấy 1 thằng làm đại diện:

$$f(a)\leqslant\frac{54x+27}{25}\Leftrightarrow\frac{2(3x-1)^2(6x+1)}{25(2x^2-2x+1)}\geqslant 0,\forall x\in(0;1)$$

$$f(a)+f(b)+f(c)\leqslant\frac{54(a+b+c)+81}{25}=\frac{27}{5}.$$

1.548. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức với $(a+b)(b+c)(c+a)$ thì bất đẳng thức tương đương

$$(a^2+bc)(a+b)(a+c)(b+c)+(b^2+ca)(b+a)(b+c)(c+a)+(c^2+ab)(c+a)(c+b)(a+b)\geqslant\frac{3}{2}(a+b)(b+c$$

Chú ý rằng ta có các đẳng thức

$$\begin{aligned}(a+b)(a+c)&=a^2+bc+a(b+c),\\(b+a)(b+c)&=b^2+ca+b(a+c),\\(c+a)(c+b)&=c^2+ab+c(a+b),\\(a+b)(b+c)(c+a)&=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc.\end{aligned}$$

Như vậy bất đẳng thức viết lại thành

$$\frac{2(a^2+bc)^2}{b+c}+\frac{2(b^2+ca)^2}{c+a}+\frac{2(c^2+ab)^2}{a+b}+2a^3+2b^3+2c^3\geqslant 3a^2(b+c)+3b^2(c+a)+3c^2(a+b).$$

Ta dễ dàng chứng minh được

$$2(a^3+b^3+c^3) \geqslant a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b).$$

Thành thử ta đi chứng minh

$$\frac{2(a^2+bc)^2}{b+c}+\frac{2(b^2+ca)^2}{c+a}+\frac{2(c^2+ab)^2}{a+b} \geqslant 2a^2(b+c)+2b^2(c+a)+2c^2(a+b).$$

Sử dụng Cauchy-Schwarz cho vế trái thì ta chỉ phải chứng minh

$$(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)^2 \geqslant 2(a+b+c)[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)].$$

Tuy nhiên bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì nó tương đương với

$$a^4+b^4+c^4 \geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2.$$

Vậy là bài toán giải xong.

1.549. Ta có

$$P = 4(x+y+z)+2(xy+yz+zx)+xyz+8.$$

Ta viết lại điều kiện dưới dạng:

$$(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=3.$$

Tới đây ta sẽ đặt:

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ xy+yz+zx=b, \\ xyz=c. \end{cases}$$

Bài toán trở thành:

$$P = 4a+2b+c+8,$$

với

$$a^2-2b=3 \Rightarrow 2b=a^2-3$$

thay vào P ta được

$$P = 4a+a^2-3+c+8=a^2+4a+c+5.$$

Ta lại có
$$|a| = |x+y+z| \leqslant \sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} = 3 \Rightarrow -3 \leqslant a \leqslant 3.$$
và
$$c^2 = (xyz)^2 \leqslant (\frac{x^2+y^2+z^2}{3})^3 = 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant c \leqslant 1.$$
Từ đó suy ra
$$P \leqslant a^2 + 4a + 6 \leqslant 3^2 + 4 \cdot 3 + 6 = 27.$$
Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Không mất tính tổng quát, giả sử
$$z^2 = \min\{x^2, y^2, z^2\},$$
khi đó dễ thấy $-1 \leqslant z \leqslant 1$. Bây giờ, ta thấy
$$\begin{aligned}(x+2)(y+2) &= xy + 2(x+y) + 4\\ &= xy + 2(x+y) + \frac{x^2+y^2+z^2+5}{2}\\ &= \frac{(x+y)^2}{2} + 2(x+y) + \frac{z^2+5}{2}\\ &= \frac{(x+y+2)^2}{2} + \frac{z^2+1}{2}\\ &\geqslant \frac{z^2+1}{2}.\end{aligned}$$
Do đó,
$$P \geqslant \frac{(z^2+1)(z+2)}{2} = f(z).$$
Bằng cách khảo sát hàm $f(z)$ trên miền $[-1;1]$, ta tìm được ngay $\min P = \frac{25}{27}$ đạt được khi $x = -\frac{5}{3}$, $y = z = -\frac{1}{3}$.

1.552. Giả sử
$$x = \min\{x, y, z\} \Rightarrow x \in (0;1].$$
Đặt
$$f(x) = x^2+y^2+z^2+x+y+z-2(xy+yz+zx) = x^2+\frac{1}{z^2x^2}+z^2+x+\frac{1}{zx}+z-\frac{2}{z}-\frac{2}{x}-2xz$$
Ta có
$$f'(x) = 2x-\frac{2xz^2}{x^4z^4}+1-\frac{z}{x^2z^2}-\frac{2}{x^2}-2z = 2(x-z)+1-\frac{2xz^2}{x^4z^4}-\frac{z}{x^2z^2}-\frac{2}{x^2} < 0; (x \leqslant z; 1 < \frac{2}{z^2}).$$

Hàm số nghịch biến, suy ra

$$f(x) \geqslant f(1) = z + z^2 + \frac{1}{z^2} + 2 + \frac{1}{z} - 2 - \frac{2}{z} - 2z = \frac{(z-1)^2(z^2+z+1)}{z^2} \geqslant 0.$$

Với những bài toán có giả thiết $abc = 1$, chúng ta cũng có thể trang bị chút kiến thức về dồn biến. Ưu điểm của phương pháp này là dễ làm, dễ nhớ và chắc chắn hiệu quả. Nhược điểm là nếu gặp những bất đẳng thức chặt, thường bước khảo sát hàm một biến thu được sẽ gặp nhiều khó khăn.

Ý tưởng thực hiện

- **Bước 1.** Quy bất đẳng thức đề bài về dạng $f(x,y,z) \geqslant 0$.
- **Bước 2**. Giả sử $z = min\{x,y,z\}$. Chứng minh

$$f(x,y,z) \geqslant f(\sqrt{xy}, \sqrt{xy}, z).$$

- **Bước 3**. Chứng minh

$$f(\sqrt{xy}, \sqrt{xy}, z) \geqslant 0$$

  tương đương với

$$f(\frac{1}{\sqrt{z}}, \frac{1}{\sqrt{z}}, z) \geqslant 0.$$

  Đây là bất đẳng thức một biến z. Tùy vào độ chặt của mỗi bài toán, ta có thể chứng minh bằng cách sử dụng những đánh giá cơ bản, hoặc phân tích nhân tử, hoặc khảo sát hàm số.

Áp dụng vào bài toán trên:

Bước 1. Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z - 2(xy + yz + zx) \geqslant 0.$$

Bước 2. Không mất tính tổng quát, giả sử $z = \min\{x,y,z\}$, ta chứng minh

$$f(x,y,z) \geqslant f(\sqrt{xy}, \sqrt{xy}, z),$$

tức là

$$x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z - 2xy - 2yz - 2zx \geqslant 2xy + z^2 + 2\sqrt{xy} + z - 2xy - 4z\sqrt{xy}.$$

Hay
$$(x^2+y^2-2xy)+(x+y-2\sqrt{xy})-2z(x+y-2\sqrt{xy})\geqslant 0.$$
Tương đương với
$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\cdot\left[(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2+1-2z)\right]\geqslant 0.$$
Mặt khác, để ý rằng với $z=\min\{x,y,z\}$ thì hiển nhiên
$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2+1-2z=x+y-2z+2\sqrt{xy}+1>0.$$
Vậy ta đã hoàn thành bước thứ hai. Chuyển tiếp sang bước 3. **Bước 3.** Chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được
$$f(\sqrt{xy},\sqrt{xy},z)\geqslant 0$$
hay
$$z^2+2\sqrt{xy}+z-4z\sqrt{xy}\geqslant 0.$$
Thay $xy=\dfrac{1}{z}$, ta thu được
$$z^2+\frac{2}{\sqrt{z}}+z-4\sqrt{z}\geqslant 0.$$
Bất đẳng thức cuối này đúng vì sử dụng AM-GM bộ bốn số, ta có
$$z^2+\frac{2}{\sqrt{z}}+z=z^2+\frac{1}{\sqrt{z}}+\frac{1}{\sqrt{z}}+z\geqslant 4\cdot\sqrt[4]{z^2\cdot\frac{1}{\sqrt{z}}\cdot\frac{1}{\sqrt{z}}\cdot z}=4\sqrt{z}.$$
Từ đó suy ra
$$z^2+\frac{2}{\sqrt{z}}+z-4\sqrt{z}\geqslant 0.$$
Bài toán được giải quyết hoàn toàn. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z>0$.

1.553. Một phương pháp khá mạnh trong việc sử dụng đạo hàm để chứng minh bất đẳng thức, hay tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất là phương pháp đánh giá hàm số tại biên. Tư tưởng của phương pháp là đưa về một hàm số bậc nhất để đánh giá. Sau đây là một số ví dụ:

Việc đầu tiên là nhận thấy dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$. Ta có

$$VT = (a+b)^2 + c^2 + (c-2)ab.$$

Giờ thấy rằng nếu $c - 2 < 0$ thì còn gì bằng. Chính vậy cho nên ta cần giả sử $c = \min\{a; b; c\}$ thì $c \leqslant 1$. Thế thì

$$VT \geqslant (3-c)^2 + c^2 + (c-2).\frac{(a+b)^2}{4} = (3-c)^2 + c^2 + (c-2)\frac{(3-c)^2}{4} = f(c).$$

Giờ xét hàm

$$f(c) = \frac{1}{4}(c^3 - 3x + 18) \quad c \in [0; 1].$$

Rõ ràng hàm này nghịch biến trên $[0; 1]$ nên $f(c) \geqslant f(1) = 4$.

Ta có một cách nữa. Ta có

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + abc &= (a+b)^2 - 2ab + c^2 + abc \\ &= (c-2)ab + (3-c)^2 + c^2 \\ &= (c-2)ab + 2c^2 - 6c + 9 \end{aligned}$$

Đặt

$$t = ab; \ (0 \leqslant t \leqslant \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(3-c)^2}{4}).$$

Ta có

$$f(t) = (c-2)t + 2c^2 - 6c + 9.$$

$f(t)$ là một hàm bậc nhất với biến t. Mà ta lại có

$$f(0) = 2c^2 - 6c + 9 = 2(c - \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{2} \geqslant \frac{9}{2} > 4.$$

$$f\left(\frac{(3-c)^2}{4}\right) = (c-2)\frac{((3-c)^2)}{4} + 2c^2 - 6c + 9 = \frac{(c-1)^2(c+2)}{4} + 4 \geqslant 4.$$

Suy ra

$$f(t) \geqslant 4; \ t \in \left[0; \frac{(3-c)^2}{4}\right].$$

Điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Chúng ta làm như trên sẽ đơn giản về mặt ý tưởng và dễ thực hiện hơn.

Thêm cách nữa cho bài này thêm thú vị ! Trong ba số bất kì luôn có hai số lớn hơn hoặc bằng 1 hoặc nhỏ hơn hoặc bằng 1. Giả sử hai số đó là a, b. Ta có

$$(a-1)(b-1) \geqslant 0 \Leftrightarrow ab+1 \geqslant a+b \Rightarrow abc \geqslant ac+bc-c.$$

Lại có

$$a^2+b^2 \geqslant \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{(3-c)^2}{2}.$$

Từ đó

$$a^2+b^2+c^2+abc \geqslant \frac{(3-c)^2}{2}+c^2+(3-c)c-c = \frac{9-2c+c^2}{2} = 4+\frac{(c-1)^2}{2} \geqslant 4.$$

1.554. Áp dụng AM-GM ta luôn có

$$yz \leqslant \frac{(y+z)^2}{4} = \frac{(1-x)^2}{4}.$$

$$\begin{aligned}xy+yz+zx-xyz = x(y+z)+yz(1-x) &\leqslant x(1-x)+\frac{(1-x)^2}{4}(1-x)\\ &= \frac{1}{4}\left[4x-4x^2+(1-x)^3\right] = \frac{1}{4}(-x^3-x^2+x+1).\end{aligned}$$

Do vậy ta chỉ cần chứng minh được:

$$\frac{1}{4}(-x^3-x^2+x+1) \leqslant \frac{8}{27} \Leftrightarrow x^3+x^2-x+\frac{5}{27} \geqslant 0.$$

Điều này tương đương

$$\Leftrightarrow (3x-1)^2(3x+5) \geqslant 0.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

1.555. Trước khi tìm lời giải bằng đạo hàm mình xin trình bày một lời giải bằng cách sử dụng các bất đẳng thức thông dụng để tham khảo sơ qua. Đầu tiên ta sẽ tìm GTNN của P. Ta có

$$\begin{aligned}P &= (x+y+z)(xy+yz+zx)-2xyz\\ &= xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)+xyz \geqslant 0.\end{aligned}$$

nên$P \geqslant 0$ và $P = 0$ khi $x = y = 0$, $z = 1$.

Việc tìm được các giá trị để $P = 0$ cho phép ta kết luận GTNN của P là 0.

Tiếp đến ta sẽ tìm GTLN của P. Ta thấy P đã đạt GTNN tại biên vậy nên ta sẽ dự đoán rằng GTLN của nó sẽ đạt được tại tâm, tức là $x = y = z = \frac{1}{3}$, khi đó $P = \frac{7}{27}$. Vậy ta đưa ra dự đoán rằng bất đẳng thức sau đây là đúng

$$xy + yz + zx - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}.$$

Ta sẽ tìm cách chứng minh bất đẳng thức này, đồng bậc hai vế, ta có

$$(x+y+z)(xy+yz+zx) - 2xyz \leqslant \frac{7}{27} \cdot (x+y+z)^3.$$

Khai triển trực tiếp bất đẳng thức này, ta được

$$7(x^3+y^3+z^3) + 15xyz \geqslant 6[xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)].$$

Thế nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo hai kết quả quen thuộc là

$$x^3+y^3+z^3 \geqslant 3xyz.$$

$$x^3+y^3+z^3+3xyz \geqslant xy(x+y) + z(y+z) + zx(z+x).$$

Vậy GTLN của P là $\frac{7}{27}$.

Mình xin nêu 2 hướng để tìm GTLN Ta có

$$yz \leqslant \frac{(y+z)^2}{4} = \frac{(1-x)^2}{4}.$$

Do đó

$$P = x(y+z) + yz(1-2x) \leqslant x(1-x) + \frac{1}{4}(1-x)^2(1-2x).$$

Tới đây, ta có thể khảo sát hàm

$$f(x) = x(1-x) + \frac{1}{4}(1-x)^2(1-2x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

để tìm được max.

Có thể dồn biến như sau:

$$P(x,y,z) - P(t,t,z) = \frac{1}{4}(x-y)^2(2z-1), \quad t = \frac{x+y}{2}.$$

Nếu giả sử $z = \min(x, y, z)$, thì ta có ngay $z \leqslant \frac{1}{2}$. Khi đó

$$P(x, y, z) \leqslant P(t, t, z).$$

Trong đó

$$P(t, t, z) = P\left(\frac{1-z}{2}, \frac{1-z}{2}, z\right).$$

Tới đây, ta khảo sát hàm

$$P(\frac{1-z}{2}, \frac{1-z}{2}, z), \quad 0 \leqslant z \leqslant \frac{1}{2}.$$

1.556. Ta viết bất đẳng thức lại dưới dạng

$$\frac{4xy}{4x^2+y^2+z^2} + \frac{4yz}{4y^2+z^2+x^2} + \frac{4zx}{4z^2+x^2+y^2} \leqslant 2.$$

Áp dụng Cauchy-Schwarz ta có

$$\begin{aligned}\frac{4xy}{4x^2+y^2+z^2} &\leqslant \frac{(x+y)^2}{4x^2+y^2+z^2} \leqslant \frac{x^2}{3x^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}\\ &= \frac{1}{3} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}.\end{aligned}$$

Thiết lập các bất đẳng thức tương tự rồi cộng lại ta thu được điều phải chứng minh.

Cách khác. Do tính thuần nhất của bài toán ta có thể giả sử

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3.$$

Khi đó ta có

$$\frac{xy}{4x^2+y^2+z^2} + \frac{yz}{4y^2+z^2+x^2} + \frac{zx}{4z^2+x^2+y^2} = \frac{xy}{(3x^2+1)} + \frac{yz}{(3y^2+1)} + \frac{zx}{(3z^2+1)}.$$

Lại có

$$x^2+1 \geqslant 2x, \quad y^2+1 \geqslant 2y, \quad z^2+1 \geqslant 2z.$$

và

$$x+y+z \leqslant \sqrt{3.(x^2+y^2+z^2)} = 3.$$

Từ đó có điều phải chứng minh.

1.557. Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz ta có:

$$\frac{x^2}{(y+\sqrt{zx}+z)^2}+\frac{z^2}{(x+\sqrt{zy}+y)^2}+\frac{xy}{(y+\sqrt{zx}+z)^2}\geqslant\frac{(x+z+\sqrt{xy})^2}{2(y+\sqrt{zx}+z)^2+(x+\sqrt{zy}+y)^2}.$$

Tương tự với các hạng tử còn lại . Sau đó đưa về dạng

$$\frac{B}{2A+C}+\frac{C}{2B+A}+\frac{A}{2C+B}\geqslant 1.$$

đúng theo BĐT Cauchy-Schwarz. Từ đó có đpcm.

1.558. Ta có

$$x^3+y^3=16\Leftrightarrow(x+y)^3-3xy(x+y)=16. \qquad (1.82)$$

Ta lại có

$$P=(x+y)^2+4(x+y)-4-6xy.$$

Đặt $t=x+y$, ta luôn có $t>0$ nên từ (1.82) ta có $xy=\dfrac{t^3-16}{3t}$. Thay vào biểu thức rồi rút gọn ta được

$$P=\frac{-t^3+4t^2-4t+32}{t}.$$

Mà từ điều kiện ta dễ dàng suy ra được $\sqrt[3]{16}\leqslant t\leqslant 4$. Từ đó ta chỉ cần khảo sát hàm số

$$f(t)=\frac{-t^3+4t^2-4t+32}{t}.$$

1.559. Phân tích và hướng giải Ở bài toán này ta thấy trong biểu thức P có gì đó bất thường là vì biến b chỉ xuất hiện một lần duy nhất nên ta có thể xem P là một hàm số theo biến b và a; c là các đại lượng cố định. Thật vậy

$$P=f(b)=2b^2+a^2+3c^2-2a-24c+2060,\quad \forall b\in[0\ ;\ 2].$$

Ta có

$$f'(b)=4b>0,\quad \forall b\in(0\ ;\ 2)$$

Do đó hàm số $y=f(b)$ đồng biến $\forall b\in[0\ ;\ 2]$ Nên ta có

$$f(0)\leqslant f(b)=P\leqslant f(2).$$

Vậy ta sẽ đi xét hai bài toán nhỏ sau

$$a+b+c=3 \Rightarrow c=3-b-a$$

Từ đó ta có

$$f(0)=(3-c)^2+3c^2-2(3-c)-24c+2060=4c^2-28c+2063 \leqslant P.$$

Tức là lúc này ta đi tìm c sao cho

$$f(c)=4c^2-28c+2063 \leqslant P, \quad \forall c \in [0;2] \tag{1.83}$$

Xét hàm số

$$f(c)=4c^2-28c+2063, \quad \forall c \in [0;2].$$

Ta có

$$f'(c)=8c-28<0, \quad \forall c \in [0;2].$$

Vậy hàm số $f(c)$ nghịch biến $\forall c \in [0;2]$. Từ (1.83) ta có

$$f(c) \leqslant P, \quad \forall c \in [0;2] \Leftrightarrow \min f(c)=f(2) \leqslant P, \quad \forall c \in [0;2] \Leftrightarrow P \geqslant 2023.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P=2023$ đạt được khi $a=1; b=0; c=2$. Vì

$$a+b+c=3 \Rightarrow c=3-b-a.$$

Từ đó ta có

$$f(2)=(1-c)^2+3c^2-2(1-c)-24c+2068 \leqslant 2067, \quad \forall c \in [0;1].$$

Mà

$$P \leqslant f(2), \quad \forall c \in [0;1] \Rightarrow P \leqslant 2067, \quad \forall c \in [0;1].$$

Do đó giá trị lớn nhất của $P=2067$ đạt được khi $a=1; b=2; c=0$.

1.562. Ta giả sử b là số nằm giữa a và c thế thì

$$c(b-a)(b-c) \leqslant 0.$$

Vậy

$$a^2b+b^2c+c^2a+abc \leqslant a^2b+b^2c+c^2a+abc-c(b-c)(b-a)=b(a+c)^2.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$ab + bc + ca + 3 \geqslant b(a+c)^2 + 2abc.$$

Hay là

$$b(a+c) + ac + 3 \geqslant b(a+c)^2 + 2abc.$$

Tương đương

$$(3-b)(b-1)^2 + (b + ac - 2abc) \geqslant 0.$$

Điều này đúng do

$$b + ac \geqslant 2\sqrt{abc} \geqslant 2abc.$$

1.563.

1.565. Một cách tổng quát, ta có thể chứng minh được kết quả sau đây Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca>0$ và $0 \leqslant k \leqslant 11$ là một số thực bất kỳ cho trước thì

$$\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2} + \frac{k}{a^2+b^2+c^2} \geqslant \frac{10+2k}{(a+b+c)^2}.$$

Không mất tính tổng quát của bài toan, giả sử $c = \min(a,b,c)$, và đặt $x = a + \dfrac{c}{2}$, $y = b + \dfrac{c}{2} = a+b+c$. Khi đó, ta có được các đánh giá sau đây

$$b^2 + c^2 \leqslant \left(b + \frac{c}{2}\right)^2,\ c^2 + a^2 \leqslant \left(a + \frac{c}{2}\right)^2$$

$$a^2 + b^2 \leqslant a^2 + b^2 + c^2 \leqslant \left(c^2 + a^2\right) + \left(b^2 + c^2\right) \leqslant \left(b + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(a + \frac{c}{2}\right)^2.$$

Vậy, ta đưa bài toán về chứng minh bất đẳng thức hai biến sau đây

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{k+1}{x^2+y^2} \geqslant \frac{10+2k}{(x+y)^2}.$$

Công việc còn lại khá đơn giản bằng cách sử dụng bất đẳng thức AM-GM.

1.566. Do $a, b \in [1,2]$ nên ta có $\frac{1}{2} \leqslant \frac{a}{b} \leqslant 2$. Suy ra

$$\left(\frac{a}{b} - 2\right)\left(\frac{b}{a} - 2\right) \geqslant 0.$$

Khai triển bất đẳng thức này, ta thu được

$$\frac{a}{b} \leqslant \frac{5}{2} - \frac{b}{a}.$$

Do đó,

$$P \leqslant \frac{2b}{c} + \frac{3c-b}{a} + \frac{5}{2}.$$

Ta có $3c - b \geqslant 3 \cdot 1 - 2 > 0$ và $a \geqslant 1$ nên $\frac{3c-b}{a} \leqslant 3c - b$. Từ đây đưa đến

$$P \leqslant b\left(\frac{2}{c} - 1\right) + 3c + \frac{5}{2}.$$

Do $\frac{2}{c} - 1 \geqslant \frac{2}{2} - 1 = 0$ và $b \leqslant 2$ nên ta có

$$P \leqslant 2\left(\frac{2}{c} - 1\right) + 3c + \frac{5}{2} = 3c + \frac{4}{c} + \frac{1}{2} = \frac{(3c-2)(c-2)}{c} + \frac{17}{2} \leqslant \frac{17}{2}.$$

Mặt khác, dễ thấy đẳng thức xảy ra khi $a = 1$ và $b = c = 2$. Vậy $\max P = \frac{17}{2}$. ■

1.567. Đây là lời giải của mình, thật ra thì học theo cách làm của anh Quốc Anh thôi. Gọi GTLN mà P có thể đạt được là k. Khi đó ta có

$$ab + bc + 2ca \leqslant k = k(a^2 + b^2 + c^2)$$

Hay ta đưa về dạng tam thức bậc 2 theo biến b như sau

$$kb^2 - (a+c)b + k(b^2 + c^2) - 2ac \geqslant 0.$$

Điều kiện để bất phương trình trên tồn tại b là

$$\Delta \geqslant 0 \Leftrightarrow (a+c)^2 - 4k[k(a^2+c^2) - 2ac] \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (1-4k^2)a^2 + 2(1+4k)ac + (1-4k^2)c^2 \geqslant 0.$$

Ta xét 2 trường hợp sau:

1) Khi $c = 0$, ta có

$$(1-4k^2)a^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}.$$

2) Khi $c \neq 0$, ta chia cả 2 vế cho c^2 và đặt $t = \dfrac{a}{c}$, khi đó ta sẽ thu được

$$(1-4k^2)t^2 + 2(1+4k)t + (1-4k^2) \geqslant 0$$

Điều kiện để tồn tại t là:

$$\Delta' \geqslant 0 \Leftrightarrow (1+4k)^2 - (1-4k^2)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow k(k+1)(2k^2-2k-1) \leqslant 0$$

Từ đây dễ dàng suy ra $k \leqslant \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Kết luận lại ở cả hai trường hợp ta có $k \leqslant \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. Ta chọn một cặp số thỏa mãn nữa là xong.

1.568. Dưới đây là lời giải bằng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và AM-GM mình vừa tìm được lúc 3h40 phút sáng.

Đầu tiên, ta thấy bài toán này có sự đối xứng giữa hai biến a và b điều này cho phép ta đưa ra dự đoán giá trị nhỏ nhất sẽ đạt được khi $a = b$. (và đúng là như vậy).

Tiếp đến ta hãy để ý đến biểu thức P của bài toán, nếu ta viết nó lại dưới một dạng khác là (thật ra không có gì khác cả chỉ là rút 5 ra thôi à)

$$P = 5(a+b) + 8c^2,$$

với hình thức này của P này nếu ta tìm được một đánh giá nào đó mà nó có dạng

$$a + b \geqslant f(c),$$

hoặc

$$c \geqslant g(a+b),$$

(với f, g là các hàm số nào đó) thì ta có thể đưa bài toán ba biến trên về tìm giá trị nhỏ nhất của một bất đẳng thức một biến, điều này chắc chắc sẽ dễ chịu hơn nhiều (vì lúc đó đạo hàm hoặc biến đổi tương đương là ra) so với việc giải quyết bài toán ba biến.

Bây giờ, ta sẽ đi khai thác giả thiết bài toán để tìm xem các hàm số đó là gì? giả thiết của bài toán cho ta $ab + bc + ca = 6$, rõ ràng giữa c và a, b có mối liên hệ với nhau và nếu khé léo viết lại điều kiện lại như sau

$$ab + c(a+b) = 6,$$

thì chắc hẳn ta sẽ biết làm gì. Đại lượng ab và $a+b$ trong đẳng thức trên gợi cho ta nghĩ ngay đến việc sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ để có thể viết đẳng thức điều kiện trên lại thành dạng

$$6 \leqslant c(a+b) + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

hay là

$$(a+b)^2 + 4c(a+b) - 24 \geqslant 0.$$

Giả bất phương trình này với chú ý $a+b \geqslant 0$, ta tìm được

$$a+b \geqslant -2c + 2\sqrt{c^2+6}.$$

Sử dụng bất đẳng thức này ta thấy

$$P \geqslant 8c^2 - 10c + 10\sqrt{c^2+6}.$$

Vậy ta đã thành công trong việc chuyển bài toán ba biến về một biến (một bước tiến quan trọng trong quá trình tìm lời giải). Tuy nhiên bài toán của ta lúc này lại gặp khó khăn vì sự xuất hiện của căn thức, nhưng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, sẽ giúp ta khắc phục khó khăn này. Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}
8c^2 - 10c + 10\sqrt{c^2+6} &= 8c^2 - 10c + 4\sqrt{(c^2+6)\left(\frac{1}{4}+6\right)} \\
&\geqslant 8c^2 - 10c + 4\left(\frac{c}{2}+6\right) \\
&= 8c^2 - 8c + 24 \\
&= 2(2c-1)^2 + 22 \geqslant 22.
\end{aligned}$$

Mặt khác với $a = b = 2, c = \frac{1}{2}$ thì $P = 22$, điều này cho phép ta kết luận $P_{\min} = 22$. $\square$

Phân tích như anh Huyện ta có :

$$a+b \geqslant -2c + 2\sqrt{c^2+6} \geqslant -2c + 2\cdot\frac{\frac{c}{2}+6}{\sqrt{\frac{1}{4}+6}} = \frac{24-8c}{5} \quad (1)$$

Nếu ta có : $c \geqslant 3$ thì $5\sqrt{a+b}+2c^2 \geqslant 18 > \frac{21}{2}$. Như vậy ta chỉ cần xét khi $c < 3$ là đủ. Dễ thấy $a+b>0$ do đó sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có :

$$\sqrt{a+b} = \frac{4(a+b)}{4\sqrt{a+b}} \geqslant \frac{4(a+b)}{a+b+4} \geqslant \frac{24-8c}{11-2c}$$

Do (1) và tính đồng biến của hàm $f(u) = \frac{4u}{u+4}$. Như vậy ta chỉ cần chứng minh :

$$\frac{5(24-8c)}{11-2c} + 2c^2 \geqslant \frac{21}{2}$$

Do $c < 3$ nên $11-2c > 0$. Nhân cả hai vế với $11-2c$ và khai triển rút gọn thì bất đẳng thức tương đương :

$$(9-2c)(2c-1)^2 \geqslant 0$$

Đây là bất đẳng thức hiển nhiên đúng vì $c < 3$. Bài toán chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 2, c = \frac{1}{2}$.

1.569. ta có

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} = \frac{(a+b)(ab+1)}{(1+a^2)(1+b^2)}.$$

Đặt biểu thức vế trái bất đẳng thức là P , sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$P^2 \leqslant 10\left[\frac{(ab+1)^2(a+b)^2}{(1+a^2)^2(1+b^2)^2} + \frac{c^2}{c^2+1}\right].$$

Như vậy, ta chỉ phải chứng minh

$$\frac{(ab+1)^2(a+b)^2}{(1+a^2)^2(1+b^2)^2} + \frac{c^2}{c^2+1} \leqslant 1.$$

Thay $c = \dfrac{1-ab}{a+b}$. Bất đẳng thức trên tương đương với

$$(1+a^2)(1+b^2) \geqslant (1+ab)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geqslant 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng, bởi vậy bài toán được chứng minh! Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $c = 3, a = b = \sqrt{10}-3$.

1.570. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schawarz,

$$25 = 4xy+2yz-zx = 4xy+z(2y-x) \leqslant \sqrt{(4xy+z^2)(4xy+(2y-x)^2)} = \sqrt{(z^2+4xy)(x^2+4y^2)}.$$

Suy ra

$$\sqrt{x^2+4y^2} \geqslant \frac{25}{\sqrt{z^2+4xy}}$$

hay

$$P \geqslant \frac{25}{z^2+4xy} + \frac{2}{5}\sqrt{z^2+4xy}.$$

Đặt $t = \sqrt{z^2+4xy}$, xét hàm số

$$f(t) = \frac{25}{t^2} + \frac{2}{5}t$$

Đến đây sử dụng khảo sát hàm số, ta có $\min P = \min f(t) = f(5) = 3$.

$$\begin{cases} x^2+4y^2 = 25, \\ z = 2y - x > 0, \\ 4xy + 2yz - zx = 25. \end{cases}$$

Vậy $\min P = 3$. Đạt được khi $(x, y, z) = (3, 2, 1)$.

Cách khác. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schawarz, ta có

$$25 = 4xy + z(2y-x) \leqslant \sqrt{(4xy+z^2)[4xy+(2y-x)^2]} = \sqrt{(z^2+4xy)(x^2+4y^2)},$$

hay là

$$\sqrt{x^2+4y^2} \geqslant \frac{25}{\sqrt{z^2+4xy}}.$$

Sử dụng đánh giá này ta đưa bài toán về tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$F = \frac{25}{z^2+4xy} + \frac{2}{5}\sqrt{x^2+4xy}.$$

Bây giờ sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$F = \frac{25}{z^2+4xy} + \frac{1}{5}\sqrt{z^2+4xy} + \frac{1}{5}\sqrt{z^2+4xy} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{25}{z^2+4xy}\cdot\frac{1}{5}\sqrt{z^2+4xy}\cdot\frac{1}{5}\sqrt{z^2+4xy}} = 3.$$

Mặt khác với $x = 3, y = 2, z = 1$ thì đẳng thức xảy ra, điều này cho phép ta kết luận $P_{\min} = 3$. $\square$

1.571. Để ý rằng

$$\frac{a(a-2b+c)}{ab+1}=\frac{a(3-3b)}{ab+1}=3\frac{a+1-ab-1}{ab+1}=3\left(\frac{a+1}{ab+1}-1\right),$$

nên bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a+1}{ab+1}+\frac{b+1}{bc+1}+\frac{c+1}{ca+1}\geqslant 3.$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta đưa bài toán về chứng minh

$$(a+1)(b+1)(c+1)\geqslant(ab+1)(bc+1)(ca+1),$$

hay tương đương

$$3\geqslant a^2b^2c^2+2abc.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì $abc\leqslant 1$. Bài toán được chứng minh xong.

1.572. Do tính hoán vị của bất đẳng thức, không mất tính tổng quát giả sử $a=\max\{a,b,c\}$. Ta có

$$\frac{a-b}{\sqrt{b+c}}+\frac{b-c}{\sqrt{c+a}}+\frac{c-a}{\sqrt{a+b}}=\frac{a-b}{\sqrt{b+c}}+\frac{b-c}{\sqrt{c+a}}+\frac{c-b+b-a}{\sqrt{a+b}}$$

$$=(a-b)(\frac{1}{\sqrt{b+c}}-\frac{1}{\sqrt{a+b}})+(b-c)(\frac{1}{\sqrt{a+c}}-\frac{1}{\sqrt{a+b}})$$

$$=\frac{(a-b)(a-c)}{\sqrt{(b+c)(a+b)}(\sqrt{b+c}+\sqrt{a+b})}+\frac{(b-c)^2}{\sqrt{(a+c)(a+b)}(\sqrt{a+c}+\sqrt{a+b})}\geqslant 0.$$

Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách khác. Đặt

$$\sqrt{b+c}=\sqrt{2}x;\sqrt{a+c}=\sqrt{2}y;\sqrt{a+b}=\sqrt{2}z$$

Suy ra

$$\begin{cases}a=y^2+z^2-x^2,\\ b=x^2+z^2-y^2,\\ c=x^2+y^2-z^2.\end{cases}$$

Ta viết bất đẳng thức lại thành

$$\frac{2y^2-2x^2}{2x}+\frac{2z^2-2y^2}{2y}+\frac{2x^2-2z^2}{2z}\geqslant 0,$$

tương đương với

$$\frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{y}+\frac{x^2}{z}\geqslant x+y+z.$$

Điều này đúng theo BĐT Cauchy-Schwarz. Vậy ta có đpcm.

1.573. Sử dụng phương pháp tiếp tuyến, ta có

$$\frac{1}{a^2-4a+9}\leqslant\frac{a+2}{18},$$

$$\frac{1}{b^2-4b+9}\leqslant\frac{b+2}{18},$$

$$\frac{1}{c^2-4c+9}\leqslant\frac{c+2}{18}.$$

Cộng cùng chiều các bất đẳng thức trên, ta được

$$P\geqslant\frac{a+b+c}{18}+\frac{1}{3}=\frac{7}{18}.$$

Vậy $\max P=\dfrac{7}{18}$ đạt được khi $(a,b,c)=(1,0,0)$ và các hoán vị.

1.574. Không mất tính tổng quát, giả sử a là số nhỏ nhất trong ba số a, b, c. Ta có $0\leqslant a\leqslant\dfrac{4}{3}$.

$$P=(1+a^2)((b+c)^2+(bc-1)^2)\geqslant(1+a^2)(4-a)^2=f(a).$$

Khảo sát hàm số trên đoạn $\left[0;\dfrac{4}{3}\right]$, ta có

$$\min f(a)=f\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{71-8\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi trong ba số a, b, c có một số bằng $2+\sqrt{2}$ còn hai số còn lại bằng $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Với biểu thức gây khủng hoảng như $\dfrac{71-8\sqrt{2}}{4}$ thì mình nghĩ khả thi nhất là tìm cách giảm biến số để đưa về hàm 1 biến và xét hàm số :). Với ý tưởng của dồn biến thì ta mong sao chứng minh được

$$\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right) \geqslant \left[1+\frac{(a+b)^2}{4}\right]^2.$$

Biến đổi tương đương thì bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{(a-b)^2\left[8-\left(a^2+6ab+b^2\right)\right]}{16} \geqslant 0.$$

Bất đẳng thức này không phải luôn đúng? Muốn nó luôn đúng thì ta phải có

$$8 \geqslant a^2+6ab+b^2.$$

Bây giờ ta sẽ loay hoay làm sao để có được bất đẳng thức đó! Để ý rằng

$$a^2+6ab+b^2=(a+b)^2+4ab \leqslant (a+b)^2+(a+b)^2=2(a+b)^2,$$

nên muốn bất đẳng thức đó đúng thì bất đẳng thức sau phải đúng :

$$4 \geqslant (a+b)^2,$$

tức là

$$2 \geqslant a+b.$$

Thế nhưng điều này giả thiết lại không cho ta? Chẳng lẽ dừng lại tại đây? Không! Không dừng lại! Không cho ta thì mình tự tạo ra nó! Nhưng bằng cách nào? Câu trả lời là **chia trường hợp.**

Nếu $a+b \geqslant 2$, thì sử dụng bất đẳng thức $Cauchy-Schwarz$, ta có

$$\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right) \geqslant (a+b)^2\left[1+(4-(a+b))^2\right]$$

Đặt $t=a+b \geqslant 2$. Xét hàm số

$$f(t)=t^2\left(1+(4-t)^2\right).$$

Đạo hàm cấp một của hàm $f(t)$ có nghiệm $t=3-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ và $t=3+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Cả hai nghiệm này đều thỏa mãn $t \geqslant 2$. Lập bảng biến thiên, dễ thấy

$$f(t) \geqslant f\left(3+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{71-8\sqrt{2}}{4}.$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh bài toán trong trường hợp $a+b \leqslant 2$. Mong muốn ban đầu của ta đã được thỏa mãn! Như vậy, ta có đánh giá

$$\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right) \geqslant \left[1+\frac{(a+b)^2}{4}\right]^2 = \left[1+\frac{(4-c)^2}{4}\right]^2,$$

và ta đưa bài toán về tìm min của hàm một biến c sau đây

$$f(c) = \left[1+\frac{(4-c)^2}{4}\right]^2\left(1+c^2\right).$$

Với chú ý ta đang xét $a+b \leqslant 2$ nên ta sẽ khảo sát hàm đó với $c \geqslant 2$. Đến đây mình dành lại cho các bạn trẻ thể hiện sức khỏe của mình nhé! Bài này mình nghĩ quá tầm so với thi Đại học. Trong khi khảo sát hàm $f(c)$ đó, đạo hàm cấp một của nó có nghiệm là $c = 2+\sqrt{2}$ và đó chính là giá trị làm cho hàm $f(c)$ đạt giá trị nhỏ nhất! Tức là ta sẽ có

$$f(c) \geqslant f(2+\sqrt{2}) = \frac{71-8\sqrt{2}}{4}.$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$, $c = 2+\sqrt{2}$. ■

Bởi vì tư tưởng của dồn biến là nếu ta đặt $2t = a+b$ thì ta mong muốn chứng minh được

$$f(a,b,c) \geqslant f(t,t,c) = f(t,t,4-2t) \geqslant 0,$$

ở đây

$$f(a,b,c) = (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) - \frac{71-8\sqrt{2}}{4},$$

$$\begin{aligned} f(t,t,c) &= \left(1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)\left(1+c^2\right) - \frac{71-8\sqrt{2}}{4} \\ &= \left(1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)^2\left(1+c^2\right) - \frac{71-8\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

nên ta sẽ chứng minh $f(a,b,c) \geqslant f(t,t,c)$, tức là

$$\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right) \geqslant \left[1+\frac{(a+b)^2}{4}\right]^2.$$

1.575. Theo BĐT AM-GM ta có

$$\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{x^2-xy+y^2}+1\geqslant 4\sqrt[4]{\frac{1}{x^3y^3(x^2-xy+y^2)}}\geqslant\frac{4}{\left(\dfrac{x^2+2xy+y^2}{4}\right)}=\frac{16}{(x+y)^2}$$

Tương tự ta có hai BĐT nữa và suy ra

$$\begin{aligned}P+3&\geqslant 16\left(\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right)\\&\geqslant\frac{16}{3}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)^2\\&\geqslant\frac{16}{3}\left(\frac{9}{2(x+y+z)}\right)^2\\&\geqslant 12.\end{aligned}$$

suy rar $P\geqslant 9$. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$ Vậy $\min P=9$.

1.576. Theo Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}P&=\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{2a+b+c}}+\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{2b+c+a}}+\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2c+a+b}}\\&\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{a(2c+a+b)}+\sqrt{b(2a+b+c)}+\sqrt{c(2b+c+a)}}.\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leqslant\sqrt{3(x+y+z)}$, ta suy ra

$$\sqrt{a(2c+a+b)}+\sqrt{b(2a+b+c)}+\sqrt{c(2b+c+a)}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{3(a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca)}\leqslant 6$$

Từ đó suy ra $\min P=\dfrac{3}{2}$, đạt được khi $a=b=c=1$.

1.577. Đặt ba cái căn ở VT lần lượt là X,Y,Z cho gọn. Ta sẽ viết lại bất đẳng thức trên thành

$$X+Y+Z\geqslant\sqrt{6(a^2+b^2+c^2)}.$$

Hãy nhớ "Ba năm võ Tây, bảy năm võ Tàu cũng không bằng một chầu củ đậu". Để phá các lớp căn thức khó chịu cả hai bên, ý tưởng tự nhiên nhất và nông dân nhất] chính là bình phương cả hai vế ;)).

Thật vậy, sau khi bình phương và rút gọn lại, ta sẽ thu được

$$\sqrt{XY}+\sqrt{YZ}+\sqrt{ZX} \geqslant a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca.$$

Tới đây, nhận thấy cả hai vế của bất đẳng thức này đều chứa biến, chúng lại có dạng đối xứng nên một cách tự nhiên, ta nghĩ ngay tới kĩ thuật ghép đối xứng. Xét thằng $\sqrt{XY}$ là đại diện cho vế phức tạp xem sao :-?. Để ý rằng

$$XY=[(a-b)^2+2c^2][(b-c)^2+2a^2].$$

Chậc, toàn bình phương. Đúng con cháu bác Cauchy Schwarz rồi, chiến thôi >:). Ta có

$$XY=[(b-a)^2+2c^2][(b-c)^2+2a^2] \geqslant [(b-a)(b-c)+2ca]^2=(b^2+3ca-ab-bc)^2.$$

Từ đó suy ra

$$\sqrt{XY} \geqslant |b^2+3ca-ab-bc| \geqslant b^2+3ca-ab-bc$$

Thiết lập hai bất đẳng thức tương tự và cộng chúng lại theo vế, ta sẽ thu được

$$\sqrt{XY}+\sqrt{YZ}+\sqrt{ZX} \geqslant a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca.$$

Từ đó suy ra đpcm. :)

1.578. Từ sau 2008, bài này có vẻ nổi tiếng nhỉ. Ta viết biểu thức F lại dưới dạng thuần nhất

$$F=(xy+yz+zx)\left[\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\right].$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $z=\min\{x,y,z\}$, và thu được các đánh giá sau

$$(y-z)^2=y^2+z(z-2y) \leqslant y^2,$$
$$(z-x)^2=x^2+z(z-2x) \leqslant x^2.$$

Suy ra

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2} \geqslant \frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}.$$

Kết hợp với $xy+yz+zx \geqslant xy$, ta được

$$F \geqslant \frac{xy}{(x-y)^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}.$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{xy}{(x-y)^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{xy}{(x-y)^2}+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)+2=\frac{xy}{(x-y)^2}+\frac{(x-y)^2}{xy}+2 \geqslant 2+2=4.$$

Ngoài ra với $\frac{x}{y}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}, z=0$ thì $F=4$, điều này cho phép ta kết luận $P_{\min}=4$. □

Bài toán chính là câu bất đẳng thức trong đề thi VMO-2008. Câu này khá hay nhưng không quá khó mình khá thich bài toán này, ngoài ra ta còn có thể mở rộng bài toán theo nhiều hướng khác nhau. Dưới đây là một số kết quả mà mình biết.

Mở rộng 1] Với x, y, z là ba số thực không âm đôi một khác nhau. Với những giá trị nào của $k \geqslant -1$ thì biểu thức sau đây sẽ đạt giá trị nhỏ nhất và hãy tìm giá giá trị nhỏ nhất này theo k.

$$F=\left[x^2+y^2+z^2+k(xy+yz+zx)\right]\left[\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\right].$$

Mở rộng 2. Với x, y, z là ba số thực không âm đôi một khác nhau. Chứng minh rằng khi đó với mọi số thực không âm k, bất đẳng thức sau luôn được thỏa mãn

$$\frac{xy+kyz+zx}{(y-z)^2}+\frac{yz+kzx+xy}{(z-x)^2}+\frac{zx+kxy+yz}{(x-y)^2} \geqslant 2\left(1+\sqrt{k}\right).$$

Bài này có thể chứng minh bằng cách trên.

Xung quanh bài VMO này có một số chuyện lùm xùm nhưng đáng được quan tâm.

Câu bất đẳng thức này xuất hiện trong đề thi năm VMO-2008 nhưng thật ra trước đó đó bài toán này đã từng xuất hiện trên Diễn đàn toán học (diendantoanhoc.net) với tác giả đề nghị là anh Phạm Sinh Tân, năm 2007 trong quyển sách "Bất đẳng thức suy luận và khám phá" thì bài toán này cũng được nhắc đến, tuy nhiên trước lúc kỳ thi VMO bắt đầu thì bài toán này lại bị mất, có một số thành viên trên diễn đàn nói là do người của Bộ làm. Xin trích dẫn ra đây lời của thầy Nam Dũng lúc ấy.

(K.M là thầy Khắc Minh). Lúc trước mình có làm một file bài viết nói về bài này nhưng máy tính bị hỏng nên bài bị mất, :-" không cứu được.

1.579. Ta có thể viết giả thiết thành

$$(x-2)^2+(x-2)(y-2)+(y-2)^2=1.$$

Để cho gọn gàng thì đặt

$$a=x-2, \quad b=y-2,$$

thì có

$$a^2+ab+b^2=1.$$

Ta chỉ cần tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a+b+3}{a+2b+7}.$$

Để ý thấy

$$a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}=1.$$

Từ đây dùng phép thế lượng giác thì dễ thấy tồn tại α để

$$\begin{cases} a=\sin\alpha-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\alpha, \\ b=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\alpha. \end{cases}$$

Thay vào ta có được

$$P=\frac{\sin\alpha+\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{3}}+3}{\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha+7} \Leftrightarrow \sqrt{3}(P-1)\sin\alpha+(3P-1)\cos\alpha=\sqrt{3}(3-7P).$$

Từ điều kiện có nghiệm của phương trình lượng giác, ta phải có

$$3(P-1)^2+(3P-1)^2 \geqslant 3(3-7P)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leqslant P \leqslant \frac{23}{45}.$$

Khi $P=\dfrac{1}{3}$ thì ta có được ngay $a=-1$, $b=0$. Lúc đó tìm được $x=1$, $y=2$. Đến đây ta kết luận giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{1}{3}$ đạt được khi $x=1$, $y=2$.

Phụ lục A

Vài vấn đề khác

A.1 Một kĩ thuật nhân lượng liên hợp

Trong mục này, tôi đề cập tới một cách giải phương trình, hệ phương trình vô tỉ bằng cách nhân lượng liên hợp.[1]

Ví dụ A.1. Giải phương trình

$$(4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}) = x^2+8.$$

Lời giải. Nhận thấy $x=-1$ và $x=2$ là hai nghiệm của phương trình.

Với $x=-1$ và $x=2$, thì $4\sqrt{x+2}$ nhận các giá trị tương tứng là 4 và 8. Đặt $A(-1;4)$ và $B(2;8)$. Phương trình đường thẳng qua hai điểm A và B là $4x-3y+16=0$ hay $y=\dfrac{4x+16}{3}$. Do đó, ta nhân vào $4\sqrt{x+2}$ với lượng $\dfrac{4x+16}{3}$.

Với $x=-1$ và $x=2$, thì $\sqrt{22-3x}$ nhận các giá trị tương tứng là 5 và 4. Đặt $C(-1;5)$ và $D(2;4)$. Phương trình đường thẳng qua hai điểm C và D là $x+3y-14=0$ hay $y=\dfrac{14-x}{3}$. Do đó, ta nhân vào $\sqrt{22-3x}$ với lượng $\dfrac{14-x}{3}$.

Do hai lượng này, có cùng mẫu số là 3, nên để cho đơn giản, ta nhân phương trình với 3. Khi đó, ta nhân vào $12\sqrt{x+2}$ với lượng $4x+6$ và nhân vào $3\sqrt{22-3x}$ với lượng $14-x$.

[1]Kĩ thuật này do thầy Nguyễn Văn Thiện, trường THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai chỉ cho tôi.

Điều kiện $-2 \leqslant x \leqslant \frac{22}{3}$. Chú ý rằng với điều kiện này ta luôn có

$$12\sqrt{x+2}+4x+16>0; \quad 3\sqrt{22-3x}+14-x>0. \tag{A.1}$$

Phương trình đã cho được biến đổi thành

$$3(4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x})=3(x^2+8)$$

hay

$$12\sqrt{x+2}-(4x+16)+3\sqrt{22-3x}-(14-x)=3(x^2-x-2).$$

Tương đương

$$\frac{-16(x^2-x-2)}{12\sqrt{x+2}+4x+16}-\frac{x^2-x-2}{3\sqrt{22-3x}+14-x}=3(x^2-x-2).$$

Hay

$$(x^2-x-2)\left(\frac{16}{12\sqrt{x+2}+4x+16}+\frac{1}{3\sqrt{22-3x}+14-x}+3\right)=0. \tag{A.2}$$

Theo nhận xét (A.1), nên từ (A.2), ta có

$$x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=-1$ và $x=2$. □

Ví dụ A.2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{30+x}-\sqrt{18-y}=1, \\ \sqrt{45+2y}-\sqrt{20-x}=2. \end{cases}$

Lời giải. Đặt $a=\sqrt{30+x} \geqslant 0$, $b=\sqrt{18-y} \geqslant 0$. Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} a-b=1, \\ \sqrt{81-2b^2}-\sqrt{50-a^2}=2. \end{cases}$$

Thay $b=a-1$ vào phương trình thứ hai, ta được

$$\sqrt{-2a^2+4a+79}=2+\sqrt{50-a^2}.$$

Bình phương hai vế phương trình trên, ta được

$$-a^2+4a+25=4\cdot\sqrt{50-a^2}.$$

Bình phương hai vế phương trình cuối này, ta được phương trình hệ quả

$$a^4 - 8a^3 - 18a^2 + 200a - 175 = 0.$$

Giải phương trình này, ta có

$$a = -5, \quad a = 1, \quad a = 5, \quad a = 7.$$

Các giá trị $a = 1$, $a = 5$, $a = 7$ đều thoả $-a^2 + 4a + 25 \geqslant 0$ nên ta nhận và loại $a = -5$.

- Với $a = 1$, ta có $b = 0$. Khi đó, hệ có nghiệm $(x; y) = (-29; 18)$;
- Với $a = 5$, ta có $b = 4$. Khi đó, hệ có nghiệm $(x; y) = (-5; 2)$;
- Với $a = 7$, ta có $b = 6$. Khi đó, hệ có nghiệm $(x; y) = (19; -18)$;

Vậy hệ có tập nghiệm là $\mathscr{S} = \{(-29; 18); (-5; 2); (19; -18)\}$.

Cách khác. Qua cách giải trên, ta thấy phương trình

$$\sqrt{-2a^2 + 4a + 79} = 2 + \sqrt{50 - a^2}.$$

có ba nghiệm $a = 1$, $a = 5$, $a = 7$. Vậy ta nghĩ tới việc dùng lượng liện hợp để giải phương trình này.

Đặt $f(a) = \sqrt{-2a^2 + 4a + 79}$. Ta có

$$f(1) = 9, \quad f(5) = 7, \quad f(7) = 3.$$

Đặt

$$A(1; 9), \quad B(5; 7), \quad C(7; 3).$$

Phương trình parabol đi qua các điểm A, B, C là $y = -\frac{1}{4}a^2 + a + \frac{33}{4}$.

Do đó, ta nhân $\sqrt{-2a^2 + 4a + 79}$ với lượng liên hợp $-\frac{1}{4}a^2 + a + \frac{33}{4}$.

Tương tự, đặt $g(a) = \sqrt{50 - a^2}$. Ta có

$$g(1) = 7, \quad g(5) = 5, \quad g(3) = 3.$$

Đặt

$$D(1; 7), \quad E(5; 5), \quad F(3; 1).$$

Phương trình parabol đi qua các điểm D, E, F là $y = -\dfrac{1}{4}a^2 + a + \dfrac{25}{4}$.

Do đó, ta nhân $\sqrt{50-a^2}$ với lượng liên hợp $-\dfrac{1}{4}a^2 + a + \dfrac{25}{4}$. Với phân tích như trên, phương trình

$$\sqrt{-2a^2+4a+79} = 2 + \sqrt{50-a^2}.$$

tương đương với

$$\sqrt{-2a^2+4a+79} - \left(-\frac{1}{4}a^2 + a + \frac{33}{4}\right) = \sqrt{50-a^2} - \left(-\frac{1}{4}a^2 + a + \frac{25}{4}\right).$$

hay

$$\frac{(a-1)(a-5)(a+5)(a+7)}{16\left[\sqrt{-2a^2+4a+79} + \left(-\frac{1}{4}a^2 + a + \frac{33}{4}\right)\right]} = \frac{(a-1)(a-5)(a+5)(a+7)}{16\left[\sqrt{50-a^2} + \left(-\frac{1}{4}a^2 + a + \frac{25}{4}\right)\right]}.$$

Từ phương trình cuối này, với điều kiện $a \geqslant 0$, ta cũng suy ra ba nghiệm là $a = 1$, $a = 5$, $a = 7$. $\square$

Dùng kĩ thuật liên hợp trên, ta có thể tạo ra một đề toán như sau.

Ví dụ A.3. Giải phương trình

$$\sqrt{6x^2-30x+40} + \sqrt{6x^2-18x+16} = x^3 - 4x^2 + 3x + 6.$$

Phân tích. Bây giờ tôi sẽ chia sẻ kinh nghiệm làm đề. Giả sử ta muốn tạo ra một phương trình có ba nghiệm là $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.

Bước 1. Ta chọn biểu thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ta tính các giá trị $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$. Ta chọn sao cho các giá trị này là bình phương đúng (vì biểu thức này dưới căn). Chẳng hạn, ta chọn

$$f(1) = 16, \quad f(2) = 4, \quad f(3) = 4.$$

Khi đó, ta tìm được

$$a = 6, \quad b = -30, \quad c = 40.$$

Tôi dùng Maple, nên chọn khá đơn giản.

Tương tự, chọn biểu thức $g(x) = mx^2 + nx + p$. Vì phương trình có ba nghiệm là $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$. Ta tính các giá trị $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$. Ta chọn sao cho các giá trị này là bình phương đúng (vì biểu thức này dưới căn). Chẳng hạn, ta chọn

$$g(1) = 4, \quad g(2) = 4, \quad g(3) = 16.$$

Khi đó, ta tìm được

$$m = 6, \quad n = -18, \quad p = 16.$$

Để tìm biểu thức bên phải, ta đặt

$$h(x) = \sqrt{6x^2 - 30x + 40} + \sqrt{6x^2 - 18x + 16} - (x^3 + dx^2 + ex + f).$$

Vì phương trình ta mong muốn có ba nghiệm $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, nên ta sẽ tính các giá trị $h(1)$, $h(2)$, $h(3)$ rồi giải hệ phương trình

$$\begin{cases} h(1) = 0, \\ h(2) = 0, \\ h(3) = 0. \end{cases}$$

Ta sẽ tìm được

$$d = -4, \quad e = 3, \quad f = 6.$$

Như vậy là ta có đề bài toán ở trên. $\diamondsuit$

A.2 Đưa về hệ đồng bậc

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 + cxy + dy + ex = f, \\ a'x^2 + b'y^2 + c'xy + d'y + e'x + f' = 0. \end{cases}$$

Ta tìm số k sao cho

$$ax^2 + by^2 + cxy + dy + ex - f + k(a'x^2 + b'y^2 + c'xy + d'y + e'x + f') = 0. \quad \text{(A.3)}$$

Khai triển phương trình trên đưa về phương trình bậc hai theo x. Tính Δ_x của phương trình này và cho $\Delta_x = 0$, ta được phương trình bậc hai theo y. Lại tính Δ_y của phương trình bậc hai theo y, ta được một biểu thức theo k. Cho biểu thức này bằng 0, ta tìm được k.

Ví dụ A.4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-2xy+2y+15=0, \\ 2x-2xy+y^2+5=0. \end{cases}$

Lời giải. Gọi k là số thoả

$$x^2-2xy+2y+15+k(2x-2xy+y^2+5)=0.$$

Đưa phương trình trên về phương trình bậc hai theo x, ta được

$$x^2+((-2+2k)y-2k)x-ky^2+2y-5k+15=0.$$

Ta có

$$\Delta_x=(4-4k+4k^2)y^2+(8k-8k^2-8)y+4k^2+20k-60.$$

Bây giờ ta xét phương trình bậc hai theo y

$$(4-4k+4k^2)y^2+(8k-8k^2-8)y+4k^2+20k-60=0.$$

Ta có

$$\Delta_y=-384k^3+1408k^2-1408k+1024.$$

Giải phương trình

$$-384k^3+1408k^2-1408k+1024=0$$

ta tìm được $k=\dfrac{8}{3}$. Do đó, ta có biểu diễn

$$x^2-2xy+2y+15-\frac{8}{3}(2x-2xy+y^2+5)=0.$$

hay

$$3(x^2-2xy+2y+15)-8(2x-2xy+y^2+5)=0.$$

Phân tích thành nhân tử biểu thức trên, ta được

$$(x+4y-5)(3x-2y-1)=0.$$

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2-2xy+2y+15=0, \\ x+4y-5=0 \end{cases}$$

hoặc

$$\begin{cases} x^2-2xy+2y+15=0, \\ 3x-2y-1. \end{cases}$$

Ví dụ A.5. Giải phương trình

$$3x+1+2\sqrt{1-x}-4\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}=0.$$

Lời giải. Đặt $u=\sqrt{1+x}\geqslant 0$, $v=\sqrt{1-x}\geqslant 0$. Suy ra

$$\sqrt{1-x^2}=u\cdot v,\quad x=\frac{u^2-v^2}{2}.$$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2+v^2=2 \\ 3\left(\dfrac{u^2-v^2}{2}\right)+2v-4u+u\cdot v=0. \end{cases}$$

Ta cần tìm số k sao cho có biểu diễn

$$3\left(\frac{u^2-v^2}{2}\right)+2v-4u+u\cdot v-k(u^2+v^2-2)=0. \tag{A.4}$$

Viết phương trình (A.4) theo phương trình bậc hai theo u, ta có

$$\left(\frac{3}{2}-k\right)u^2+(-4+v)u-\frac{3}{2}v^2+1+2v-k(v^2-2)=0.$$

Ta có

$$\Delta_u=(-4k^2+10)v^2+(-20+8k)v+8k^2-8k+10.$$

Xét phương trình ẩn v

$$(-4k^2+10)v^2+(-20+8k)v+8k^2-8k+10=0.$$

Ta có

$$\Delta_v=32(4k^2-4k-3)k^2.$$

Giải phương trình $\Delta_v=0$, ta có $k=0$, $k=\dfrac{3}{2}$ và $k=-\dfrac{1}{2}$.

Với $k=-\dfrac{1}{2}$, phương trình (A.4) thành

$$2u^2-v^2+2v-4u+uv=0 \Leftrightarrow (u-2+v)(2u-v)=0.$$

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} u-2+v=0 \\ u^2+v^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1, \\ v=1. \end{cases}$$

Từ đó, ta có nghiệm $x = 0$. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 2u - v = 0, \\ u^2 + v^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{\sqrt{10}}{5}, \\ v = \dfrac{2\sqrt{10}}{5}. \end{cases}$$

Từ đó, ta có nghiệm $x = -\dfrac{3}{5}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0$ và $x = -\dfrac{3}{5}$.

Cách khác. Đặt

$$a = \sqrt{1-x} \geqslant 0, \quad b = \sqrt{1+x} \geqslant 0.$$

Ta có

$$3x + 1 = -a^2 + 2b^2.$$

Phương trình trở thành

$$-a^2 + (b+2)a + 2b^2 - 4b = 0.$$

Ta có $\Delta = (3b-2)^2$.

```
restart:
A:=3*(u^2-v^2)/2+1+2*v-4*u+u*v-k*(u^2+v^2-2):
collect(A,u);
B:=collect(discrim(A, u), v);
C:= discrim(B,v);
sol:= solve(C=0,k);
M:= subs(k=sol[4], A);
factor(M);
```

Ví dụ A.6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4xy - 6 = 0, \\ 2x^2 - 3y - 7x + 8 = 0. \end{cases}$$

Với cách làm tương tự, ta tìm số k sao cho có biểu diễn

$$x^2 + y^2 + 4xy - 6 - k(2x^2 - 3y - 7x + 8) = 0.$$

Đưa phương trình trên về phương trình bậc hai theo x, ta có

$$(1-2k)x^2+(4y+7k)x-k(8-3y)+y^2-6=0.$$

Ta có

$$\Delta_x=(8k+12)y^2+(24k^2+44k)y-16k-15k^2+24.$$

Xét phương trình ẩn y

$$(8k+12)y^2+(24k^2+44k)y-16k-15k^2+24=0.$$

Ta có

$$\Delta_y=576k^4+2592k^3+3168k^2-1152.$$

Giải phương trình trên ta được $k=-1$, $k=\dfrac{1}{2}$, $k=-2$.

$$3x^2+y^2+4xy+2-3y-7x=(x+y-2)(3x+y-1).$$

Ngoài cách làm trên đây, ta có thể là cách khác như sau: Đối với hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} ax^2+by^2+cxy+dy+ex=f,\\ a'x^2+b'y^2+c'xy+d'y+e'x+f'=0.\end{cases}$$

Quan sát ta thấy cả hai phương trình của hệ đã cho đều có dạng bậc hai, trong đó các phần tử tự do của x và y đều có dạng bậc nhất. Điều này gợi nhớ cho chúng ta tìm cách đưa về hệ phương trình đồng bậc hai để giải quyết. Vậy chúng ta có mẹo nhỏ như sau: Đó là đặt

$$x=u+a,\quad y=v+b$$

thay vào hệ phương trình. Sau đó muốn hệ đồng bậc hai với u, v thì chúng ta cho hệ số bậc nhất của u, v bằng không. Từ đó chúng ta tìm được a, b.

Kĩ thuật tìm a và b cũng có thể làm theo cách dưới đây. Xét phương trình

$$x^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0.$$

Đặt

$$F(x,y)=ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f.$$

Tính đạo hàm lần lượt theo biến x, y ta có

$$F'_x(x,y) = 2ax + cy + d$$

và

$$F'_y(x,y) = 2by + cx + f.$$

Sau đó giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2ax + cy + d = 0, \\ 2by + cx + f = 0. \end{cases}$$

bạn sẽ tìm được các số a và b.

(Chú ý: khi tính đạo hàm theo biến x thì bạn coi y như là một hằng số, ngược lại khi tính đạo hàm theo y thì coi x như hằng số và tất nhiên hằng số đạo hàm bằng 0).

Ví dụ A.7. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 2y + x = 2, \\ 2x^2 - y^2 - 2y - 2 = 0. \end{cases}$$

Chúng ta làm ra nháp như sau: Đặt

$$x = u + a, \quad y = v + b.$$

Thay vào hệ phương trình ta được:

$$\begin{cases} (u+a)^2 + (v+b)^2 + (u+a)(v+b) + 2(v+b) + (u+a) = 2, \\ 2(u+a)^2 - (v+b)^2 - 2(v+b) - 2 = 0. \end{cases}$$

Khai triển hệ phương trình ra, ta được

$$\begin{cases} u^2 + (b+1+2a)u + uv + v^2 + (2b+2+a)v + a - 2 + a^2 + 2b + b^2 + ab = 0, \\ -(v+b)^2 = 0. \end{cases}$$

rồi cho các hệ số bậc nhất của u, v bằng 0. Ta giải hệ

$$\begin{cases} b + 1 + 2a = 0, \\ 2b + 2 + a = 0. \end{cases}$$

Từ hệ trên, ta có $a=0$, $b=-1$. Vậy làm bài thi thì ta làm như sau:

Đặt $x=u, y=v-1$ ta sẽ đưa về hệ phương trình đơn giản như sau:

$$\begin{cases} u^2+uv+v^2=3, \\ 2u^2-v^2=-1. \end{cases}$$

Ví dụ A.8. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+3y^2+4xy-18x-22y+31=0, \\ 2x^2+4y^2+2xy+6x-46y+175=0. \end{cases}$$

Lời giải. Đặt

$$F(x,y)=x^2+3y^2+4xy-18x-22y+31.$$

Ta có

$$F'_x(x,y)=2x+4y-18$$

và

$$F'_y(x,y)=6y+4x-22.$$

Giải hệ

$$\begin{cases} 2x+4y-18=0, \\ 6y+4x-22=0. \end{cases}$$

Bạn sẽ tìm được $x=-5$ và $y=-7$. Tới đây, bằng cách đặt

$$\begin{cases} x=X-5, \\ y=Y+7, \end{cases}$$

ta thu được hệ đẳng cấp

$$\begin{cases} X^2+3Y^2+4XY=1, \\ 2X^2+4Y^2+2XY=1. \end{cases}$$

Chú ý rằng đồng thời bạn phải kiêm tra cả phương trình thứ hai trong hệ luôn, vì phép đặt đưa về đẳng cấp chỉ thực hiện được khi hai phương trình trong hệ theo cách tính như trên chỉ cho một tâm.

Ví dụ A.9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 2y + 3 = 0, \\ x^2 + 2y - 2xy + 7 = 0. \end{cases}$

Cách 1. Ta có

$$8(x^2 - y^2 - 2x + 2y + 3) - 3(x^2 + 2y - 2xy + 7) = (x - 3 + 2y)(5x - 1 - 4y).$$

Cách 2. Đặt

$$\begin{cases} x = a + 1, \\ y = b + 1. \end{cases}$$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3, \\ a^2 - 2ab = -8. \end{cases}$$

Đây là hệ đẳng cấp bậc hai theo a, b.

A.3 Giải phương trình bậc bốn đầy đủ bằng máy tính cầm tay

Cách 1. Giả sử ta cần giải phương trình bậc bốn

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \quad a \neq 0.$$

Đặt

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

- Bước 1. Bấm MODE 7, chọn Table. Khi màn hình máy tính hiển thị $f(x)$, ta nhập biểu thức $f(x)$ vào. Chú ý rằng chữ x trong biểu thức $f(x)$ được nhập bằng tổ hợp phím ALPHA X. Sau khi nhập xong $f(x)$, ta bấm phím = Máy hỏi Start? Ta bấm chẳng hạn -10 =. Khi xuất hiện End?, ta có thể bấm 10. Máy hỏi Step 1? Ta bấm số 1. Khi đó, ta có một bảng gồm các giá trị của x từ -10 đến 10. Ta chú ý tới hai giá trị của x liên tiếp giả sử là x_1 và x_2 (giả sử $x_1 < x_2$) mà ứng với hai giá trị của x này ta được hai giá trị $f(x_1)$ và $f(x_2)$ trái dấu nhau. Khi đó, phương trình sẽ có nghiệm trong khoảng $(x_1; x_2)$. Có thể có nhiều khoảng như vậy

- Bước 2. Trở lại màn hình soạn thảo, bạn nhập biểu thức $f(x)$.
- Bạn dùng phím SHIFT SOLVE để giải phương trình $f(x) = 0$. Máy hỏi Solve for x? Bạn nhập giá trị của x thuộc khoảng $(x_1; x_2)$. Sau đó máy giải, có thể được một nghiệm rất lẻ. Bạn gán nghiệm này vào phím A, chẳng hạn, bằng cách bấm SHIFT STO A.
- Tiếp theo, ta dùng sơ đồ chia Horner như sau

	a	b	c	d	e
A	a	B	C	D	0

  – Để có được số B, ta bấm ALPHA $A*a+b$ = SHIFT STO B
  – Để có được số c, ta bấm ALPHA $A*B+c$ = SHIFT STO C
  – Để có được số D, ta bấm ALPHA $A*C+d$ = SHIFT STO D.
  – Thông thường số số cuối cùng của bảng là 0 hoặc gần bằng 0.
  – Theo sơ đồ chia trên, phương trình đã cho được viết lại

$$(x-A)(ax^3+Bx^2+Cx+D)=0.$$

- Bây giờ, ta giải phương trình

$$ax^3+Bx^2+Cx+D=0.$$

  và ghi nhận các nghiệm của phương trình này. Giả sử phương trình có ba nghiệm x_1, x_2, x_3. Bạn nhớ ghi ra giấy các nghiệm này và chú ý đến cặp nghiệm có phần thập phân khá giống nhau.

- Sau cùng, ta tính các cặp $A+x_1$ và $A\cdot x_1$; $A+x_2$ và $A\cdot x_2$; $A+x_3$ và $A\cdot x_3$. Chẳng hạn, ta có $A+x_1$ và $A\cdot x_1$ là số nguyên hoặc xấp xỉ nguyên. Theo định lí Viet, A và x_1 là nghiệm của phương trình

$$x^2-(A+x_1)x+A\cdot x_1=0.$$

  Sau đó, ta chỉ việc lấy

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

  chia cho

$$x^2-(A+x_1)x+A\cdot x_1$$

  là có nhân tử còn lại.

Cách 2. Giả sử ta cần giải phương trình bậc bốn

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \quad a \neq 0.$$

Đặt

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

- Bước 1. Ta vẫn lập Table như cách trên.
- Bước 2. Trở lại màn hình soạn thảo, bạn nhập biểu thức $f(x)$.
- Bạn dùng phím SHIFT SOLVE để giải phương trình $f(x) = 0$. Máy hỏi Solve for x? Bạn nhập giá trị của x thuộc khoảng $(x_1; x_2)$. Sau đó máy giải, có thể được một nghiệm rất lẻ. Bạn gán nghiệm này vào phím A, chẳng hạn, bằng cách bấm SHIFT STO A.
- Lấy biểu thức $f(x)$ chia cho $x - A$, bằng cách viết

  $$(f(x) : (ALPHA X - A),$$

  rồi lại dùng SHIFT SOLVE để giải phương trình này. Được thêm một nghiệm nữa, bạn lại gán nghiệm này vào phím B chẳng hạn.
- Bạn lấy biểu thức $f(x)$ chia cho $(x - A) * (x - B)$, bằng cách viết

  $$(f(x)) : (ALPHA X - A) : (ALPHA X - B),$$

  dùng SHIFT SOLVE để giải phương trình này. Được thêm một nghiệm nữa, bạn lại gán nghiệm này vào phím C chẳng hạn.
- Cuối cùng, bạn lại giải phương trình

  $$(f(x)) : (ALPHA X - A) : (ALPHA X - B) * (ALPHA X - C)$$

  và gán nghiệm này vào phím D.

Và sau đây là mẹo. Bạn lấy phím A đã gán cộng B (để lấy phím A, bạn bấm ALPHA A) và lấy phím A đã gán nhân B. Nếu bạn được tổng $A + B$ và $A * B$ là một số nguyên thì tốt quá. Vì theo định lí Viet, A, B là nghiệm của phương trình

$$x^2 - (A + B)x + A * B = 0.$$

Khi đó, bạn chỉ việc lấy $f(x)$ chia cho

$$x^2-(A+B)x+A*B$$

thì được nhân tử còn lại. Trong trường hợp tổng $A+B$ và $A*B$ không là một số nguyên, thì bạn tiếp tục thử $A+C$ và $A*C$ hoặc $A+D$ và $A*D$.

Chú ý. Nếu phương trình chỉ có hai nghiệm, thì tới bước SHIFT SOLVE thứ ba, máy nói can't solve. Thì ta bấm $A+B$ và $A*B$.

Ví dụ A.10. Giải phương trình

$$x^4-8x^3+12x^2+13x+2.$$

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với

$$(x^2-3x-2)\cdot(x^2-5x-1)=0.$$

Từ đó, ta tìm được tập nghiệm của phương trình là

$$\mathscr{S}=\left\{\frac{3-\sqrt{7}}{2};\frac{3+\sqrt{7}}{2};\frac{5-\sqrt{29}}{2};\frac{5+\sqrt{29}}{2}.\right\}$$

Ví dụ A.11. Giải phương trình $(3x-5)\sqrt{2x^2-3}=4x^2-6x+1$.

Lời giải. Bình phương hai vế phương trình ta được

$$2x^4-12x^3-21x^2+102x-76=0.$$

Phân tích phương trình trên, ta được

$$(x^2+2x-4)\cdot(2x^2-16x+19)=0.$$

Giải phương trình này và thử lại ta được nghiệm phương trình đã cho là $x=\sqrt{5}-1$ và $x=\dfrac{8+\sqrt{26}}{2}$. □

Cách 2.

Để tìm khoảng chứa nghiệm của một phương trình đa thức, người ta thường dùng mệnh đề nổi tiếng sau:

Cho phương trình đa thức

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \tag{A.5}$$

với ($a_n \neq 0$) và $n \in \mathbb{N}^*$. Đặt

$$A = \max|a_i|, \qquad \text{với } i = 0, 1, \ldots, n-1$$

(số lớn nhất trong các hệ số). Và $r = 1 + \dfrac{A}{|a_n|}$. Mệnh đề phát biểu rằng: "Nếu x^* là nghiệm của phương trình (A.5) thì $|x^*| < r$".

Ví dụ A.12. Giải phương trình

$$28x^4 + 12x^3 - 83x^2 - 12x + 40 = 0.$$

Lời giải. Với tính chất trên, ta thấy $A = 83$ và $r = 1 + \dfrac{83}{28} = \dfrac{111}{28}$. Vậy nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{111}{28}; \dfrac{111}{28}\right)$. Nên ta chỉ cần dò theo công thức SOLVE khoảng tám lân cận là ra bài toán.

Chú ý rằng, các nghiệm của phương trình trên là

$$\frac{-1-\sqrt{6}}{2}; \frac{-1+\sqrt{6}}{2}; \frac{2-2\sqrt{15}}{7}; \frac{2+2\sqrt{15}}{7}$$

Một cách khác nữa.

Xét phương trình:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

các hệ số: $a, b \neq 0$.

Đặt $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$. Ta tính

- $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$;
- $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$;
- $f'''(x) = 24ax + 6b$.

Ta có

$$f'''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{4a}.$$

Đặt $t = x + \dfrac{b}{4a}$ thế lên phương trình trên, ta sẽ thu được phương trình trùng phương theo ẩn t, khi đó thì giải quyết sẽ nhẹ nhàng hơn.

A.4 Dùng Maple để chế đề

Phương trình ta giải có dạng

$$\sqrt{a-x^2} = (b-\sqrt{x})^2.$$

Để tìm các số a, b, ta đặt

$$f(x) = \sqrt{a-x^2} - (b-\sqrt{x})^2.$$

Giả sử, ta muốn phương trình có hai nghiệm là $x=4$ và $x=9$, vậy ta chỉ việc giải hệ phương trình

$$\begin{cases} f(4)=0, \\ f(9)=0. \end{cases}$$

Công việc này thật đơn giản nếu bạn dùng một phần mềm toán nào đó, chẳng hạn, Maple.

A.5 Một số bài toán với lời giải hay

Ví dụ A.13. Giải phương trình

$$\frac{2\cos x + 2\sin x - 1}{2\cos x - 2\sin x - 1} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{3} + 2.$$

Lời giải. Điều kiện

$$\begin{cases} \cos x - \sin x \neq \dfrac{1}{2}, \\ \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0. \end{cases}$$

Chú ý

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\tan\dfrac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan\dfrac{\pi}{4} \cdot \tan x} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}.$$

Do đó

$$\frac{2\cos x + 2\sin x - 1}{2\cos x - 2\sin x - 1} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{3} + 2.$$

tương đương

$$\frac{[2(\cos x + \sin x) - 1]}{[2(\cos x - \sin x) - 1]} \cdot \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \sqrt{3} + 2$$

hay

$$\frac{2\cos 2x - \cos x + \sin x}{2\cos 2x - \cos x - \sin x} = \sqrt{3} + 2$$

Tiếp theo, ta khéo léo cộng vào hai vế với (-1), ta được

$$\frac{2\cos 2x - \cos x + \sin x}{2\cos 2x - \cos x - \sin x} - 1 = \sqrt{3} + 1,$$

hay

$$2\sin x = 2(\sqrt{3}+1)\cos 2x - (\sqrt{3}+1)\cos x - (\sqrt{3}+1)\sin x.$$

thu gọn phương trình trên, ta có

$$2(\sqrt{3}+1)\cos 2x - (\sqrt{3}+1)\cos x - \sqrt{3}(\sqrt{3}+1)\sin x.$$

Chia phương trình cho $\sqrt{3}+1$, dẫn đến

$$2\cos 2x = \cos x + \sqrt{3}\sin x.$$

Đây là phương trình cơ bản. □

Ví dụ A.14. Giải phương trình

$$(5x+1)\sqrt{2x+1} - (7x+3)\sqrt{x} = 1.$$

Lời giải. Điều kiện $x \geqslant 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(2x+1)\sqrt{2x+1} - 3\sqrt{x(2x+1)}\left(\sqrt{2x+1} - \sqrt{x}\right) - x\sqrt{x} = 1,$$

hay

$$\left(\sqrt{2x+1} - \sqrt{x}\right)^3 = 1,$$

tương đương

$$\sqrt{2x+1} - \sqrt{x} = 1.$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0$, $x = 4$.

Phương trình này được xây dựng với ý tưởng khai triển biểu thức dạng sau đây

$$\left(\sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d}\right)^3$$

Sau đó rút gọn để trông phương trình gọn gàng hơn. Nếu nắm bắt được ý tưởng này thì việc tìm ra lời giải có vẻ không khó khăn lắm. Đối với bài này ta cũng có thể thêm bớt các đại lượng

$$\sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d}, \quad \left(\sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d}\right)^2$$

để có được phương trình bậc ba, điều này có thể dấu kỹ hơn ý tưởng. □

Ví dụ A.15. Giải phương trình

$$(4x-1)\cdot\sqrt{3-2x} + (7-4x)\cdot\sqrt{2x-1} = 2\sqrt{-4x^2+8x-3} + 4.$$

Lời giải. Nếu nắm bắt được ý tưởng của người ra đề, thì việc giải những bài kiểu này không có một chút khó khăn nào cả.

Đặt $u = \sqrt{3-2x} + \sqrt{2x-1}$, khi đó tính được

$$u^2 = 2 + 2\sqrt{-4x^2+8x-3},$$

và

$$u^3 = 4x\sqrt{3-2x} + (8-4x)\sqrt{2x-1}.$$

Lúc này phương trình viết lại thành

$$u^3 - u^2 - u - 2 = 0 \Leftrightarrow u = 2.$$

Đến đây ta chỉ cần giải phương trình

$$\sqrt{3-2x} + \sqrt{2x-1} = 2.$$

Phần việc còn lại là đơn giản, mình xin để các bạn tự hoàn thiện. □